САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ИЛМИЙ ДАРАЖАСИНИ БЕРУВЧИ PhD.27.06.2017.FM.02.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

МАМИРОВ БЕРДИЁР УЛУГБЕКОВИЧ

ПАНЖАРАДАГИ ИККИ ЗАРРАЧАЛИ ШРЕДИНГЕР ОПЕРАТОРИ ХОС ҚИЙМАТЛАРИНИНГ ҚЎЗҒАЛИШЛАРИ

01.01.01 – Математик анализ

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Самарқанд шаҳри – 2018 йил

УДК: 517.984

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Contents of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ИЛМИЙ ДАРАЖАСИНИ БЕРУВЧИ PhD.27.06.2017.FM.02.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

МАМИРОВ БЕРДИЁР УЛУГБЕКОВИЧ

ПАНЖАРАДАГИ ИККИ ЗАРРАЧАЛИ ШРЕДИНГЕР ОПЕРАТОРИ ХОС ҚИЙМАТЛАРИНИНГ ҚЎЗҒАЛИШЛАРИ

01.01.01 – Математик анализ

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Самарқанд шаҳри – 2018 йил

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2017.4.PhD/FM150 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация Самарқанд давлат университетида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифасида (www.samdu.uz) ва «Ziyonet» Ахборот таълим порталида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар:	**Абдуллаев Жаниқул Ибрагимович** физика-математика фанлари доктори, профессор
Расмий оппонентлар:	**Ғанихўжаев Расул Набиевич** физика-математика фанлари доктори, профессор
	Яхшибоев Мамадиёр Умирович физика-математика фанлари номзоди, доцент
Етакчи ташкилот:	**ЎзРФА Математика институти**

Диссертация ҳимояси Самарқанд давлат университети ҳузуридаги PhD.27.06.2017.FM.02.01 рақамли Илмий кенгашнинг 201_ йил «___»_________ соат____ даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 140104, Самарқанд ш., Университет хиёбони, 15-уй. Тел.: (+99866) 231-06-32, факс: (+99866) 235-19-38, 239-12-47, e-mail: patent@samdu.uz).

Диссертация билан Самарқанд давлат университетининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (___ рақами билан рўйхатга олинган). Манзил: 140104, Самарқанд ш., Университет хиёбони, 15-уй. Тел.: (+99866) 231-06-32.

Диссертация автореферати 2018 йил «____» ________________куни тарқатилди.

(2018 йил «____» ___________ даги _______ рақамли реестр баённомаси).

А.С. Солеев
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш раиси, ф.-м.ф.д., профессор

А.М. Халхўжаев
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш илмий котиби, ф.-м.ф.д.

С.Н. Лақаев
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш қошидаги илмий семинар раиси, ф.-м.ф.д., академик

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жахон миқёсида олиб борилаётган кўплаб илмий-амалий тадқиқотлар микродунёда кечаётган жараёнларни ўрганишга бағишланган. Микродунё ҳодисаларининг изчил назарияси Планк, Эйнштейн, Гейзенберг, Шредингер, Борн, Ёрдан, Паули, Дирак ва бошқа олимлар томонидан яратилган квант механикасидир. Ҳар қандай квантомеханик системада энг муҳим физик миқдорлардан бири бу энергиядир. Энергия (Гамильтониан ёки Шредингер) операторининг спектрал хоссаларини ўрганиш квант механикасининг асосий масаласидир. Бу борада панжарадаги икки заррачали Шредингер оператори экспериментал кузатишларнинг назарий асоси ҳисобланади. Шунинг учун қаттиқ жисмлар физикаси ҳамда квант механикаси ва майдонлар назариясида учрайдиган панжарадаги икки ва уч заррачали системаларга мос Шредингер операторлари хос қийиатларига оид тадқиқотларни ривожлантириш муҳим вазифалардан бири бўлиб қолмоқда.

Ҳозирги кунда дунёда панжарадаги икки квант заррачали системага мос энергия оператори спектри система квазиимпульси ўзгаришига нисбатан ўта сезувчан бўлганлиги учун ушбу оператор дискрет спектрига оид муаммоларни ҳал этиш, жумладан хос қийматларнинг чекли ёки чексиз эканлигини кўрсатиш ҳамда хос қийматларнинг система квазиимпульсининг кичик ўзгаришидаги қўзғалишларини ўрганиш муҳим аҳамият касб этмоқда. Бу борада мақсадли илмий тадқиқотларни, жумладан, қуйидаги йўналишлардаги илмий изланишларни амалга ошириш долзарб вазифалардан бири ҳисобланади: панжарада қисқа масофада ёки узоқ масофада кучсиз таъсирлашувчи икки заррачали системага мос Шредингер операторининг дискрет спектрини тадқиқ этиш; икки ва уч ўлчамли панжарадаги икки заррачали системага мос икки заррачали Шредингер оператори хос қийматлари мавжудлигини кўрсатиш; икки ўлчамли панжарада қисқа масофада ёки узоқ масофада кучсиз таъсирлашувчи икки заррачали системага мос Шредингер оператори хос қийматларининг кичик қўзғалишларда асимптотик ёйилмаларини топиш мақсадли илмий тадқиқотлар ҳисобланади.

Мамлакатимизда фундаментал фанларнинг амалий татбиққа эга бўлган долзарб йўналишларига эътибор кучайтирилди, хусусан, мамлакатимиз олимлари томонидан панжарадаги заррачалар системасига мос Шредингер операторларини ўрганишга алоҳида эътибор қаратилди. Алгебра ва математик анализ, динамик тизимлар назарияси, амалий математика ва математик моделлаштириш каби математик фанларнинг устувор йўналишлари бўйича халқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқот олиб бориш асосий вазифалар ва фаолият йўналишлари этиб белгиланди[1]. Қарор ижросини таъминлашда ўз-ўзига қўшма операторлар назариясини

[1]Ўзбекистон Республикаси Вазирлар маҳкамасининг 2017 йил 18 майдаги «Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш тўғрисида»ги 292-сонли қарори.

ривожлантириш, хусусан, панжарадаги икки заррачали системага мос Шредингер операторлари хос қийматларининг қўзғалишларини ўрганиш муҳим аҳамиятга эга.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 17 февралдаги ПҚ-2789-сон «Фанлар академияси фаолияти, илмий-тадқиқот ишларини ташкил этиш, бошқариш ва молиялаштиришни янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги, 2017 йил 20 апрелдаги февралдаги ПҚ-2909-сон «Олий таълим тизимини янада ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида» ги

Қарорлар ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий хужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишга ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига боғлиқлиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Шредингер тенгламаси – бу квант механикасининг асосий тенгламасидир. Квант механикаси, қаттиқ жисмлар назарияси ва ядро физикаси асосан Шредингер операторининг хоссаларини ўрганишга қаратилган. Бу соҳада олинган натижалар Д.И.Блохинцевнинг «Квант механикаси асослари», Ф.А.Березин ва М.Н.Шубиннинг «Шредингер тенгламалари» китобларида келтирилган. Панжарадаги заррачалар системасига мос Шредингер операторлари ўтган асрнинг тўқсонинчи йилларида физик олимлар Д.С.Маттис ва А.И.Могильнерлар томонидан ўрганилиб бошланди ва унга оид тадқиқотлар юқори суръатда ривожланди. Панжарада ҳаракатланувчи Шредингер операторларини қатъий математик тадқиқ этишда узлуксиз Шредингер операторларидаги каби муаммолар учрайди. Узлуксиз ва дискрет Шредингер оператори хос қийматларининг мавжудлиги, хос қийматнинг узлуксиз спектр бўсағаси атрофидаги ҳолатлари ва уларнинг қўзғалишлари Б. Саймон, Т.Като, Ф.Релих, Р.А. Минлос, С.Н. Лақаев, К. Макаров, Ж.И. Абдуллаев каби олимлар томонидан ўрганилган. Маълумки, икки заррачали Шредингер операторларида ўзаро таъсир доимийси ўзгариши натижасида боғланган ҳолат энергияси узлуксиз спектр чеккасига яқинлашади ва таъсир доимийсининг чекли қийматида спектр бўсағаси билан устма-уст тушади. Бу бўсаға қийматга боғланган ҳолат ёки виртуал ҳолат мос келишини аниқлаш масаласи билан Дж.Раух, Б. Саймон, М. Клауз, Д. Яфаев ва С.Н.Лақаевлар шуғулланган. Жуфт-жуфти билан ўзаро контакт потенциал ёрдамида таъсирлашувчи, иккита бозондан ташкил топган системага мос Шредингер оператори учун бўсаға эффекти дастлаб С.Н. Лақаев ишида аниқланган. С. Албеверио, С. Лакаев, К. Макаров ва З. Мўминовлар ишларида бўсаға эффекти дисперсион функциялар ва таъсир потенциалининг кенг синфи учун исботланган. Контакт потенциаллар учун хос қийматнинг мавжудлиги ва ягоналиги С. Лакаев ва Ж. Абдуллаев ишларида келтирилган бўлиб бу хос қийматнинг система тўла квазиимпульси $k \in \mathbb{T}^3$

дан узлуксиз ва $k^{(i)} \in [0,\pi]$, $i = 1,2,3$ лардан монотон боғлиқлиги кўрсатилган. Маълумки система квазиимпульси координаталаридан бири максимум қийматга $(k_i = \pi)$ эришса, дисперсион функцияга минимум берувчи нуқталари чексиз кўп бўлади, натижада маълум бир потенциаллар синфи учун Шредингер операторининг чексиз кўп хос қийматларга эга бўлиши И.Икромов ва Ж. Абдуллаев ишларида ккелтирилган. Бундан ташқари Ж. Абдуллаев панжарадаги икки заррачали Шредингер оператори $H(k)$ учун қўзғалишлар назариясини қўллаган ҳолда хос қийматларнинг квазиимпульс $k = \pi$ атрофида кичик ўзгаргандаги ҳолатини ўрганган.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти Самарқанд давлат университети илмий тадқиқот лойиҳалари доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади икки ва уч ўлчамли панжарада харакатланувчи ва қисқа масофада ёки узоқ масофада кучсиз таъсирлашувчи икки заррачали системага мос Шредингер операторларининг муҳим спектридан ташқаридаги хос қийматларнинг қўзғалишларини аниқлашдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари:

икки ўлчамли панжарада харакатланувчи ва қисқа масофада таъсирлашувчи иккита бир хил заррачали (фермионли) системага мос Шредингер операторлари муҳим спектридан чапда ётувчи хос қийматларининг қўзғалишларини ўрганиш ҳамда унга мос хос функциянинг аниқ кўринишини топиш;

икки ўлчамли панжарада харакатланувчи ва узоқ масофада кучсиз таъсирлашувчи иккита бир хил заррачали (фермионли) системага мос Шредингер оператори квазиимпульсининг кичик қўзғалишларда хос қиймати учун асимптотик ёйилмалар олиш ҳамда уларга мос хос фунцияларни қуриш;

уч ўлчамли панжарада харакатланувчи ва қисқа масофада таъсирлашувчи иккита бир хил заррачали системага мос Шредингер оператори муҳим спектридан чапда ётувчи каррали хос қийматларини инвариант қисм фазолар ёрдамида оддий хос қийматга ажратиш ҳамда уларга қўзғалишлар назариясини татбиқ қилиш;

уч ўлчамли панжарада харакатланувчи ҳамда координата ўқлари ёки текисликларда ётсагина таъсирлашувчи икки ихтиёрий заррачали системага мос Шредингер оператори муҳим спектридан чапда ётувчи чексиз кўп хос қийматларга эга бўладиган система квазиимпульснинг шундай тўпламини тавсифлаш. Бу ҳол учун хос қийматларнинг карралилиги ҳамда муҳим спектр тубига интилиш тезлигини аниқлаш.

Тадқиқотнинг объекти икки ва уч ўлчамли панжарада харакатланувчи ва қисқа масофада ёки узоқ масофада кучсиз таъсирлашувчи иккита заррачали системага мос Шредингер операторлари.

Тадқиқотнинг предмети икки ва уч ўлчамли панжарада харакатланувчи ва қисқа масофада ёки ўзоқ масофада кучсиз таъсирлашувчи икки заррачали системага мос Шредингер операторларининг нуқтали спектрини тадқиқ қилишдан иборат.

Тадқиқотнинг усуллари. Тадқиқот ишида қўзғалишлар назарияси, математик анализ, функционал анализ, комплекс ўзгарувчили функциалар назарияси ва математик физиканинг умумий усулларидан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

икки ўлчамли панжарада харакатланувчи ва қисқа масофада таъсирлашувчи иккита бир хил заррачали (фермионли) системага мос Шредингер операторларининг муҳим спектри тубида ётувчи камида битта хос қиймати мавжуд бўлиши кўрсатилган ва квазиимпульсининг кичик қўзғалишларда хос қиймати учун асимптотик ёйилмалар олинган ҳамда уларга мос хос фунцияларни қурилган;

икки ўлчамли панжарада харакатланувчи ва узоқ масофада кучсиз таъсирлашувчи иккита бир хил заррачали (фермионли) системага мос Шредингер операторининг чексиз кўп хос қийматлари мавжудлиги кўрсатилган ҳамда улар учун асимптотик формулалар олинган;

уч ўлчамли панжарада харакатланувчи ва қисқа масофада таъсирлашувчи иккита бир хил заррачали системага мос Шредингер оператори муҳим спектридан чапда ётувчи каррали хос қийматлар инвариант қисм фазолар ёрдамида оддий хос қийматларга ажратилган ҳамда уларнинг квазиимпульс кичик қўзғалишдаги ҳолати аниқланган;

уч ўлчамли панжарада ҳаракатланаётган икки заррача бир координата ўқларида ёки бир текисликда ётгандагина таъсирлашадиган системага мос Шредингер оператори муҳим спектридан чапда ётувчи чексиз кўп хос қийматга эга бўладиган квазиимпульс тўплами ажратилган ва хос қийматлар учун асимптотик формулалар топилган ҳамда уларнинг карраликлари аниқланган.

Тадқиқотнинг амалий натижалари энергия операторининг хос қиймат ва хос функциялари ҳакидаги хулосалар атом физикасида, квант механикасида экспериментал тадқиқотларнинг сифат кўрсаткичини аниқлашда ҳамда сонли ҳисоблашларда қўлланилган.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги қўзғалишлар назарияси, Фредгольмнинг детерминантлар усули, асимптотик методлар, қолдиқлар назарияси элементлари, инвариант қисм фазоларга ажратиш, функционал методлардан фойдаланилганлиги ҳамда математик мулоҳазаларнинг қатъийлиги билан асосланган.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти ўз-ўзига қўшма операторлар спектрал назарияси, квант механикаси, қаттиқ жисмлар назарияси, хусусан, панжарадаги икки ва уч заррачали система энергия операторининг спектрал хоссалари билан боғлик масалаларни ҳал этишда фойдаланиш мумкинлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти ишда олинган илмий натижалар квант механикаси ҳамда қаттиқ жисмлар физикасида мураккаб объектлар ҳосил бўлишини кўрсатувчи экспериментал тадқиқотлар ўтказиш ва қўллашга назарий асос сифатида хизмат қилиши билан белгиланади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши.

Панжарадаги икки заррачали Шредингер оператори хос қийматларининг қўзғалишларига оид олинган илмий натижалар асосида:

панжарадаги икки заррачали системага мос Шредингер операторлари хос қийматини аниқлаш усуллари QJ130000.2626.014J72 рақамли хорижий грант лойиҳасида дискрет Шредингер операторининг спектрал хоссаларини тадқиқ қилишда фойдаланилган (Малайзия технология университети, 2018 йил 26 февралдаги маълумотномаси). Илмий натижанинг қўлланилиши икки заррачали системага мос энергия оператори боғланган ҳолатларининг мавжудлиги ва уларнинг сони чекли ёки чексиз (ҳақидаги маълумотларни) эканлигини аниқлашда ёрдам берган;

панжарадаги икки заррачали системага мос Шредингер операторларининг хос қийматлари мавжудлигини ва уларнинг асимптотик кўринишларини топиш усуллари QJ130000.2626.014J72 рақамли хорижий грант лойиҳасида дискрет Шредингер операторининг хос қийматларини тадқиқ қилишда фойдаланилган (Малайзия технология университети, 2018 йил 26 февралдаги маълумотномаси). Илмий натижанинг қўлланилиши панжарадаги Шредингер операторининг хос қийматларини (карралилигини) ва хос функциялари кўринишини топиш имконини берган;

панжарадаги икки заррачали системага мос Шрёдингер оператори қаралаётган фазони инвариант қисм фазоларга ажратган ҳолда хос қийматларининг мавжудлиги ва уларнинг кичик параметрли қўзғалишлардаги асимптотик кўринишларини топиш усуллари Ф-4-17 рақамли «Чизиқли бўлмаган алгебраик ва дифференциал тенгламалар системаларини ҳамда тебранувчи интегралларни тадқиқ этишда янги методларни ишлаб чиқиш ва уларнинг татбиқлари» номли грант лойиҳасида бир жинсли кўпҳад бўлган тебранувчан интегралларни тадқиқ қилишда фойдаланилган (Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлигининг 2018 йил 13 мартдаги маълумотномаси). Илмий натижанинг қўлланилиши фазаси икки ўзгарувчили учинчи даражали бир жинсли кўпҳад ва чизиқли функциялари йиғиндиси бўлган тебранувчан интеграллар баҳосининг инвариантлигини тадқиқ қилиш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари 2 та халқаро ва 8 та республика илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Диссертация мавзуси бўйича жами 15 та илмий иш чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий Аттестация комиссиясининг докторлик диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 5 та мақола, жумладан, 2 таси хорижий ва 3 таси республика журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг ҳажми ва тузилиши. Диссертация кириш қисми, учта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан ташкил топган. Диссертациянинг хажми 96 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг **«Масаланинг қўйилиши ва зарурий маълумотлар»** деб номланувчи биринчи бобида асосий натижаларни баён қилиш учун зарур бўлган тушунча ва тасдиқлар, жумладан чегараланган ўз-ўзига қўшма операторлар спектрал назариясининг зарур теоремалари келтирилган, ҳамда иккита ихтиёрий заррачали системага мос энергия операторининг координата ва импульс кўринишлари чегараланган ўз-ўзига қўшма операторлар сифатида мос гильберт фазоларида қаралган. Панжарадаги икки заррачали система энергия оператори Шредингер операторларига келтирилиб, натижада икки заррачали система энергия оператори спектрини ўрганиш масаласи қатлам операторлар, яъни дискрет Шредингер операторлари спектрал хоссаларини ўрганиш масаласига келтирилган. Диссертациянинг **«Икки ўлчамли панжарада Шредингер оператори хос қийматларининг қўзғалишлари»** деб номланувчи иккинчи бобида икки ўлчамли панжарада иккита бир хил заррачали (фермионли) системага мос Шредингер операторининг хос қийматлари мавжудлиги ва квазиимпульс кичик қўзғалишларидаги асимптотик ҳолатлари олинган ва уларга мос хос функциялари топилган.

Диссертациянинг **«Уч ўлчамли панжарада икки заррачали Шредингер оператори хос қийматлари асимптотикалари»** деб номланувчи учинчи бобида уч ўлчамли панжарада икки заррачали системага мос Шредингер оператори хос қийматлари мавжудлиги ўрганилган ва хос қиймат учун асимптотик формулалар топилган бўлиб, биринчи ва иккинчи коэффициентлари аниқ ҳисобланган.

Фараз қилайлик $\mathbb{T}^\nu=(-\pi,\pi]^\nu,\ \nu=2,3,$ ν - ўлчамли тор, $L_2(\mathbb{T}^\nu)$ эса $\mathbb{T}^\nu$ да аниқланган квадрати билан интегралланувчи функцияларнинг Гильберт фазоси бўлсин. $L_2^o(\mathbb{T}^2)\subset L_2(\mathbb{T}^2)$ барча тоқ функциялардан ташкил топган қисм фазо бўлсин. Иккита бир хил заррачали (фермионлар) системага мос дискрет Шредингер оператори $L_2^o(\mathbb{T}^2)$ Гильберт фазосида қуйидаги формула билан аниқланади:

$$H(\mathbf{k})=H_0(\mathbf{k})-V,\mathbf{k}\in\mathbb{T}^2 \tag{1}$$

бунда қўзғалмас $H_0(\mathbf{k})$ оператор $L_2^o(\mathbb{T}^2)$ да

$$\varepsilon_k(\mathbf{q})=2\sum_{j=1}^{2}\left(1-\cos\frac{k_j}{2}\cos q_j\right),\ k_j\in(-\pi,\pi]$$

функцияга кўпайтириш оператори, яъни

$$(H_0(\mathbf{k})f)(\mathbf{q}) = \varepsilon_k(\mathbf{q})f(\mathbf{q}), \quad f \in L_2^o(\mathbb{T}^2).$$

V эса заррачалар ўзаро таъсирини ифодаловчи оператор бўлиб, $L_2^o(\mathbb{T}^2)$ фазода қуйидагича аниқланади:

$$(Vf)(\mathbf{q}) = \frac{1}{2\pi}\int_{T^2} v(\mathbf{q}-\mathbf{s})f(\mathbf{s})d\mathbf{s}, \quad f \in L_2^o(\mathbb{T}^2).$$

Муҳим спектр ҳакидаги Вейл теоремасига асосан $H(\mathbf{k})$ операторнинг муҳим спектри қўзғалмас $H_0(\mathbf{k}),\ k \in \mathbb{T}^2$ операторнинг спектри билан устма-уст тушади, яъни

$$\sigma_{ess}(H(\mathbf{k})) = \sigma(H_0(\mathbf{k})) = [m(\mathbf{k}), M(\mathbf{k})],$$

бунда

$$m(\mathbf{k}) = \min_{\mathbf{q}\in\mathbb{T}^2}\varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{2}(2-2\cos\frac{k_i}{2}),\ M(\mathbf{k}) = \max_{\mathbf{q}\in\mathbb{T}^2}\varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{2}(2+2\cos\frac{k_i}{2}).$$

Мос равишда $L_2^+(\mathbb{T}) = \{f \in L_2(\mathbb{T}): f(p) = f(-p)\}$ ва $L_2^-(\mathbb{T}) = \{f \in L_2(\mathbb{T}): f(-p) = -f(p)\}$ лар билан жуфт ва тоқ функциялардан ташкил топган қисм фазоларни белгилаймиз.

Қуйидаги ёйилма ўринли

$$L_2^o(\mathbb{T}^2) = L_2^{-+}(\mathbb{T}^2) \oplus L_2^{+-}(\mathbb{T}^2), \tag{2}$$

бу ерда

$$L_2^{-+}(\mathbb{T}^2) = L_2^-(\mathbb{T}) \otimes L_2^+(\mathbb{T}), \qquad L_2^{+-}(\mathbb{T}^2) = L_2^+(\mathbb{T}) \otimes L_2^-(\mathbb{T}).$$

1-лемма. *Агар потенциал $\hat{v}$ хар бир ўзгарувчиси бўйича жуфт бўлса, у ҳолда $L_2^{-+}(\mathbb{T}^2)$ ва $L_2^{+-}(\mathbb{T}^2)$ қисм фазолар $H(\mathbf{k})$ операторга нисбатан инвариант қисм фазолар бўлади.*

$\{\varphi_n^-(q) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nq\}_{n\in\mathbb{N}}$ ва $\{\varphi_0^+(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \varphi_n^+(q) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nq\}_{n\in\mathbb{N}}$, функциялар мос равишда $L_2^-(T)$ ва $L_2^+(T)$ қисм фазоларда ортонормал базис ташкил қилишади. φ_n^- ва φ_{n-1}^+ векторларга тортилган бир ўлчамли қисм фазоларни $L^-(n)$ ва $L^+(n-1)$ орқали белгилаймиз.

Маълумки, $L_2^-(\mathbb{T})$ ва $L_2^+(\mathbb{T})$ қисм фазолар

$$L_2^-(\mathbb{T}) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} L^-(n), \qquad L_2^+(\mathbb{T}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} L^+(n), \tag{3}$$

тўғри йиғиндиларга ёилади. (3) ёйилма қуйидаги ёйилмани келтириб чиқаради.

$$L_2^-(\mathbb{T}) \otimes L_2^+(\mathbb{T}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty}\{L_2^-(\mathbb{T}) \otimes L^+(n)\}, \quad L_2^+(\mathbb{T}) \otimes L_2^-(\mathbb{T}) = \bigoplus_{n=1}^{\infty}\{L_2^+(\mathbb{T}) \otimes L^-(n)\}.$$

2-лемма. *Агар потенциал $\hat{v}$ хар бир ўзгарувчиси бўйича жуфт бўлса, у ҳолда ихтиёрий $n \in \mathbb{N}$ учун $L_2^+(\mathbb{T}) \otimes L^-(n)$ ва $L_2^-(\mathbb{T}) \otimes L^+(n-1)$ қисм фазолар $H(k_1, \pi)$ операторга нисбатан инвариант қисм фазо бўади.*

II бобнинг 3 параграфида $H(\mathbf{k})$ операторни қуйидаги

$$\hat{v}(\mathbf{x})=\begin{cases}\bar{v}(0), & \text{агар} \quad \mathbf{x}=0\\ \bar{v}(1), & \text{агар} \quad |\mathbf{x}|=1\\ \bar{v}(2), & \text{агар} \quad |\mathbf{x}|=2\\ 0, & \text{агар} \quad |\mathbf{x}|\geq 3.\end{cases} \tag{4}$$

потенциал билан қараймиз. Бу ерда $\bar{v}(0)>\bar{v}(1)>\bar{v}(2)>0$ ва $\mathbf{x}\in\mathbb{Z}^2$, $|\mathbf{x}|=|x_1|+|x_2|$.

Агар $\hat{v}$ потенциал (4) кўринишда аниқланган ва $k_1=k_2=\pi$ бўлса, у ҳолда $H(\pi,\pi)=4I-V$ операторнинг спектри $4-\bar{v}(1), 4-\bar{v}(2)$ ва 4 хос қийматлардан иборат бўлади.

$z_1(\pi,\pi)=4-\bar{v}(1)$ сони икки каррали хос қиймат бўлиб, унга мос нормаланган хос функциялар қуйидаги кўринишда бўлади

$$\phi^{-+}_{(1,0)}(\mathbf{p})=\varphi^-_1(p_1)\varphi^+_0(p_2)=\frac{1}{\sqrt{2}\,\pi}\sin p_1,\qquad \phi^{+-}_{(0,1)}(\mathbf{p})=\varphi^+_0(p_1)\varphi^-_1(p_2)=\frac{1}{\sqrt{2}\,\pi}\sin p_2.$$

$z_2(\pi,\pi)=4-\bar{v}(2)$ сони тўрт каррали хос қиймат бўлиб унга мос нормаланган хос функциялар қуйидаги кўринишда бўлади

$$\phi^{-+}_{(2,0)}(\mathbf{p})=\varphi^-_2(p_1)\varphi^+_0(p_2),\qquad \phi^{+-}_{(0,2)}(\mathbf{p})=\varphi^+_0(p_1)\varphi^-_2(p_2),$$
$$\phi^{+-}_{(1,1)}(\mathbf{p})=\varphi^+_1(p_1)\varphi^-_1(p_2),\qquad \phi^{-+}_{(1,1)}(\mathbf{p})=\varphi^-_1(p_1)\varphi^+_1(p_2).$$

$z_\infty(\pi,\pi)=4$ сони чексиз каррали хос қиймат бўлиб унга мос хос функциялар қуйидаги кўринишда бўлади

$$\phi^{+-}_{(n,m)}(\mathbf{p})=\varphi^+_n(p_1)\varphi^-_m(p_2)\qquad \phi^{-+}_{(n,m)}(\mathbf{p})=\varphi^-_n(p_1)\varphi^+_m(p_2)\quad n+m\geq 3.$$

$H(\mathbf{k})$ операторнинг $L_2^{+-}(\mathbb{T}^2)$ ва $L_2^{-+}(\mathbb{T}^2)$ қисм фазолардаги кўринишларини $H^{+-}(\mathbf{k})$ ва $H^{-+}(\mathbf{k})$ билан белгилаймиз. $V^{+-}=V|_{L_2^{+-}(\mathbb{T}^2)}$ ва $V^{-+}=V|_{L_2^{-+}(\mathbb{T}^2)}$ нинг $f\in L_2^{+-}(\mathbb{T}^2)$ ва $g\in L_2^{-+}(\mathbb{T}^2)$ элементларга таъсири қуйидаги кўринишда бўлади.

$$(V^{+-}f)(\mathbf{p})=\frac{1}{2\pi^2}\int_{\mathbb{T}^2}\left[\bar{v}(1)\sin p_2\sin q_2+\bar{v}(2)\sin 2p_2\sin 2q_2+2\bar{v}(2)\cos p_1\cos q_1\sin p_2\sin q_2\right]f(\mathbf{q})\mathrm{d}\mathbf{q},$$

$$(V^{-+}g)(\mathbf{p})=\frac{1}{2\pi^2}\int_{\mathbb{T}^2}\left[\bar{v}(1)\sin p_1\sin q_1+\bar{v}(2)\sin 2p_1\sin 2q_1+2\bar{v}(2)\cos p_2\cos q_2\sin p_1\sin q_1\right]g(\mathbf{q})\mathrm{d}\mathbf{q}.$$

3-лемма. *Ихтиёрий $n\in\mathbb{N}$ учун, $H_n^+(k_1)$ операторнинг муҳим спектри $[2-2\cos\frac{k_1}{2}, 2+2\cos\frac{k_1}{2}]$ кесмадан иборат бўлади.*

1-теорема. *Фараз қилайлик $\bar{v}$ потенциал (4) кўринишда бўлсин. У ҳолда шундай $\delta>0$ мавжудки, ҳар бир $\beta\in(0,\delta)$ учун $H(\pi-2\beta,\pi)$ оператор $z_1(\pi,\pi)=4-\bar{v}(1)$ нинг атрофида ётувчи иккита ҳар хил оддий хос қийматларга эга*

$$z^{+-}_{(0,1)}(\pi-2\beta,\pi)=z_1(\pi,\pi)-\frac{2}{\bar{v}(1)-\bar{v}(2)}\beta^2+O(\beta^4),\quad \beta\to 0,$$

$$z^{-+}_{(1,0)}(\pi-2\beta,\pi)=z_1(\pi,\pi)-\frac{1}{\overline{v}(1)-\overline{v}(2)}\beta^2+O(\beta^4),\quad \beta\to 0.$$

ва уларга мос хос функциялар

$$\phi^{+-}_{(0,1)}(p_1,p_2)=\frac{c_{0(1)}+\gamma_{0(1)}\cos p_1}{4-2\sin\beta\cos p_1-z^{+-}_{(0,1)}(\pi-2\beta,\pi)}\sin p_2\in L_2^+(\mathbb{T})\otimes L^-(1),$$

$$\phi^{-+}_{(1,0)}(p_1,p_2)=\frac{c_{1(0)}\sin p_1+\gamma_{1(0)}\sin 2p_1}{4-2\sin\beta\cos p_1-z^{-+}_{(1,0)}(\pi-2\beta,\pi)}\in L_2^-(\mathbb{T})\otimes L^+(0)$$

кўринишда бўлади.

2-теорема. *Фараз қилайлик* $\overline{v}$ *потенциал (4) кўринишда бўлсин. У ҳолда шундай* $\delta>0$ *мавжудки, ҳар бир* $\beta\in(0,\delta)$ *учун* $H(\pi-2\beta,\pi)$ *оператор* $z_1(\pi,\pi)=4-\overline{v}(2)$ *нинг атрофида ётувчи тўртта ҳар хил оддий хос қийматларга эга:*

$$z^{-+}_{(2,0)}(\pi-2\beta,\pi)=z_2(\pi,\pi)-\frac{2+\overline{v}(1)}{\overline{v}(2)(\overline{v}(2)-\overline{v}(1))}\beta^2+O(\beta^4),\quad \beta\to 0,$$

$$z^{+-}_{(1,1)}(\pi-2\beta,\pi)=z_2(\pi,\pi)-\frac{\overline{v}(1)-3\overline{v}(2)}{\overline{v}(2)(\overline{v}(1)-\overline{v}(2))}\beta^2+O(\beta^4),\quad \beta\to 0,$$

$$z^{-+}_{(1,1)}(\pi-2\beta,\pi)=z_2(\pi,\pi)-\frac{1}{\overline{v}(2)}\sin^2\beta,\ \ \beta\in(0,\arcsin\overline{v}(2)),$$

$$z^{+-}_{(0,2)}(\pi-2\beta,\pi)=z_2(\pi,\pi)-\frac{4}{\overline{v}(2)+\sqrt{\overline{v}(2)^2+4\sin^2\beta}}\sin^2\beta,\quad \beta\in[0,\frac{\pi}{2}).$$

ва уларга мос хос функциялар

$$\phi^{-+}_{(2,0)}(p_1,p_2)=\frac{c_{2(0)}\sin p_1+\gamma_{2(0)}\sin 2p_1}{4-2\sin\beta\cos p_1-z^{-+}_{(2,0)}(\pi-2\beta,\pi)}\in L_2^-(\mathbb{T})\otimes L^+(0),$$

$$\phi^{+-}_{(1,1)}(p_1,p_2)=\frac{c_{1(1)}+\gamma_{1(1)}\cos p_1}{4-2\sin\beta\cos p_1-z^{+-}_{(1,1)}(\pi-2\beta,\pi)}\sin p_2\in L_2^+(\mathbb{T})\otimes L^-(1),$$

$$\phi^{-+}_{(1,1)}(p_1,p_2)=\frac{c_{1(1)}\sin p_1}{4-2\sin\beta\cos p_1-z^{-+}_{(1,1)}(\pi-2\beta,\pi)}\cos p_2\in L_2^-(\mathbb{T})\otimes L^+(1),$$

$$\phi^{+-}_{(0,2)}(p_1,p_2)=\frac{c_{0(2)}\sin 2p_2}{4-2\sin\beta\cos p_1-z^{+-}_{(0,2)}(\pi-2\beta,\pi)}\in L_2^+(\mathbb{T})\otimes L^-(2)$$

кўринишда бўлади.

Иккинчи бобнинг тўртинчи параграфида $H(\mathbf{k}):L_2^o(\mathbb{T}^2)\to L_2^o(\mathbb{T}^2)$ операторни ташувчиси $D=\{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^2:\ |n_1|\le 1\}$ да ётувчи

$$\hat{v}(\mathbf{n})=\hat{v}(n_1,n_2)=\begin{cases}\overline{v}(n_2), & n_1=0,\\ \overline{v}(|n_2|+1), & |n_1|=1,\\ 0, & |n_1|\ge 2,\end{cases}\qquad (5)$$

потенциал билан қараймиз.

Агар $\hat{v}$ потенциал (5) кўринишда аниқланган ва $k_1=k_2=\pi$ бўлса, у ҳолда $H(\pi,\pi)=4I-V$ операторнинг спектри $4, 4-\bar{v}(n_2), n_2\in\mathbb{N}$ ва 4 хос қийматлардан иборат бўлади.

$z_1(\pi,\pi)=4-\bar{v}(1)$ сони икки каррали хос қиймат бўлиб, унга мос нормаланган хос функциялар қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\phi^{-+}_{(1,0)}(\mathbf{p})=\varphi_1^-(p_1)\varphi_0^+(p_2),\qquad \phi^{+-}_{(0,1)}(\mathbf{p})=\varphi_0^+(p_1)\varphi_1^-(p_2).$$

$z_{n_2}(\pi,\pi)=4-\bar{v}(n_2),\ n_2\in\mathbb{N}$ сони уч каррали хос қиймат бўлиб, унга мос нормаланган хос функциялар қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\phi^{+-}_{(0,n_2)}(\mathbf{p})=\varphi_0^+(p_1)\varphi_{n_2}^-(p_2),\qquad \phi^{+-}_{(1,n_2-1)}(\mathbf{p})=\varphi_1^+(p_1)\varphi_{n_2-1}^-(p_2),$$

$$\phi^{-+}_{(1,n_2-1)}(\mathbf{p})=\varphi_1^-(p_1)\varphi_{n_2-1}^+(p_2).$$

$z_\infty(\pi,\pi)=4$ сони чексиз каррали хос қиймат бўлиб, унга мос хос функциялар қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\phi^{+-}_{(n_1,n_2)}(\mathbf{p})=\varphi_{n_1}^+(p_1)\varphi_{n_2}^-(p_2),\qquad \phi^{-+}_{(n_1,n_2)}(\mathbf{p})=\varphi_{n_1}^-(p_1)\varphi_{n_2}^+(p_2),\ n_2\in\mathbb{N},\ n_1\geq 1$$

4-лемма. *Агар потенциал $\hat{v}$ (5) кўринишда аниқланган бўлса, у ҳолда $L_2^{-+}(\mathbb{T}^2)$ ва $L_2^{+-}(\mathbb{T}^2)$ қисм фазолар $H(\mathbf{k})$ операторга нисбатан инвариант қисм фазолар бўлади.*

3-теорема. *Фараз қилайлик $\bar{v}$ потенциал (5) кўринишда бўлсин. У ҳолда шундай $\delta>0$ мавжудки, ҳар бир $\beta\in(0,\delta)$ учун $H(\pi-2\beta,\pi)$ оператор $z_1(\pi,\pi)=4-\bar{v}(1)$ нинг атрофида ётувчи иккита ҳар хил оддий хос қийматларга эга:*

$$z^{+-}_{(0,1)}(\pi-2\beta,\pi)=4-\bar{v}(1)-\frac{2}{\bar{v}(1)-\bar{v}(2)}\beta^2+O(\beta^4),\quad \beta\to 0,$$

$$z^{-+}_{(1,0)}(\pi-2\beta,\pi)=4-\bar{v}(1)-\frac{1}{\bar{v}(1)}\sin^2\beta,\quad \beta\in(0,\arcsin\bar{v}(1))$$

ва уларга мос хос функциялар

$$\phi^{+-}_{(0,1)}(p_1,p_2)=\frac{c_{0(1)}+\gamma_{0(1)}\cos p_1}{4-2\sin\beta\cos p_1-z^{+-}_{(0,1)}(\pi-2\beta,\pi)}\sin p_2\in L_2^+(\mathbb{T})\otimes L^-(1),$$

$$\phi^{-+}_{(1,0)}(p_1,p_2)=\frac{c_{1(0)}\sin p_1}{4-2\sin\beta\cos p_1-z^{-+}_{(1,0)}(\pi-2\beta,\pi)}\in L_2^-(\mathbb{T})\otimes L^+(0)$$

кўринишда бўлади.

4-теорема. *Фараз қилайлик $\bar{v}$ потенциал (5) кўринишда бўлсин. У ҳолда ҳар бир $n\geq 2$ да шундай $\delta_n>0$ мавжуд бўлиб, ҳар қандай $\beta\in(0,\delta_n)$ учун $H(\pi-2\beta,\pi)$ оператор $z_n(\pi,\pi)=4-\bar{v}(n)$ нинг атрофида ётувчи учта ҳар хил хос қийматларга эга:*

$$z^{+-}_{(n,n)}(\pi-2\beta,\pi)=4-\bar{v}(n)-\frac{2}{\bar{v}(n)-\bar{v}(n+1)}\beta^2+O(\beta^4),\quad \beta\to 0,$$

$$z^{-+}_{(n,n-1)}(\pi-2\beta,\pi)=4-\bar{v}(n)-\frac{1}{\bar{v}(n)}\sin^2\beta,\quad \beta\in(0,\arcsin\bar{v}(n)),$$

$$z^{+-}_{(n,n-1)}(\pi-2\beta,\pi)=4-\bar{v}(n)-\frac{\bar{v}(n-1)-3\bar{v}(n)}{\bar{v}(n)(\bar{v}(n-1)-\bar{v}(n))}\beta^2+O(\beta^4),\quad \beta\to 0.$$

ва *уларга мос хос функциялар*

$$\phi^{+-}_{(n,n)}(p_1,p_2)=\frac{(c_{n(n)}+\gamma_{n(n)}\cos p_1)\sin np_2}{4-2\sin\beta\cos p_1-z^{+-}_{(n,n)}(\pi-2\beta,\pi)}\in L_2^{+}(\mathbb{T})\otimes L^{-}(n),$$

$$\phi^{-+}_{(n,n-1)}(p_1,p_2)=\frac{c_n\sin p_1\cos(n-1)p_2}{4-2\sin\beta\cos p_1-z^{-+}_{(n,n-1)}(\pi-2\beta,\pi)}\in L_2^{-}(\mathbb{T})\otimes L^{+}(n-1),$$

$$\phi^{+-}_{(n,n-1)}(p_1,p_2)=\frac{(c_{n(n-1)}+\gamma_{n(n-1)}\cos p_1)\sin(n-1)p_2}{4-2\sin\beta\cos p_1-z^{+-}_{(n,n-1)}(\pi-2\beta,\pi)}\in L_2^{+}(\mathbb{T})\otimes L^{-}(n-1)$$

кўринишда бўлади.

Учинчи бобнинг биринчи параграфида

$$\hat{v}(\mathbf{n})=\begin{cases}1, & \mathbf{n}=0\\ \overline{v}(1), & |\mathbf{n}|=1\\ 0, & |\mathbf{n}|\geq 2\end{cases} \tag{6}$$

потенциалга мос икки фермионли $H(\mathbf{k}):L_2^{o}(\mathbb{T}^3)\to L_2^{o}(\mathbb{T}^3)$ операторни қараймиз. Бу ерда $\overline{v}(1)>0$ ва $|\mathbf{n}|=|n_1|+|n_2|+|n_3|$. Қўзғалувчи V операторнинг ядроси қуйидаги кўринишда бўлади

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}v(\mathbf{p}-\mathbf{q})=\frac{2\overline{v}(1)}{(2\pi)^3}\left[\sin p_1\sin q_1+\sin p_2\sin q_2+\sin p_3\sin q_3\right].$$

Қуйидаги ёйилма ўринли бўлади

$$L_2^{o}(\mathbb{T}^3)=L_2^{-++}(\mathbb{T}^3)\oplus L_2^{+-+}(\mathbb{T}^3)\oplus L_2^{++-}(\mathbb{T}^3)\oplus L_2^{---}(\mathbb{T}^3)=$$
$$=L_2^{(1)}(\mathbb{T}^3)\oplus L_2^{(2)}(\mathbb{T}^3)\oplus L_2^{(3)}(\mathbb{T}^3)\oplus L_2^{---}(\mathbb{T}^3),$$

5-лемма. $L_2^{(1)}(\mathbb{T}^3), L_2^{(2)}(\mathbb{T}^3), L_2^{(3)}(\mathbb{T}^3)$ *ва* $L_2^{---}(\mathbb{T}^3)$ *қисм фазолар* $H(\mathbf{k})$ *операторга нисбатан инвариант қисм фазолар бўлади.*

5-теорема. $k_1=k_2=\pi$ *бўлсин. У ҳолда ҳар бир* $k_3\in(-\pi,\pi)$ *учун* $H^{(1)}(\pi,\pi,k_3)$ *оператор ягона оддий*

$$z_1^{(1)}(k_3)=6-\sqrt{\overline{v}^2(1)+4\cos^2\frac{k_3}{2}}$$

хос қийматга эга ва унга мос хос функцияси

$$f_1^{(1)}(\mathbf{p})=\frac{C\sin p_1}{6-2\cos\frac{k_3}{2}\cos p_3-z_1^{-++}(k_3)}\in L_2^{(1)}(\mathbb{T}^3),$$

бу ерда $C-$ *ўзгармас сон.*

6-теорема. $k_1=k_3=\pi$ *бўлсин. У ҳолда хар бир* $k_2\in(-\pi,\pi)$ *учун* $H^{(1)}(\pi,k_2,\pi)$ *оператор ягона оддий*

$$z_1^{(1)}(k_2)=4-\sqrt{\overline{v}^2(1)+4\cos^2\frac{k_2}{2}}$$

хос қийматга эга ва унга мос хос функцияси

$$f_2^{(1)}(\mathbf{p}) = \frac{C\sin p_1}{6-2\cos\dfrac{k_2}{2}\cos p_2 - z_1^{(1)}(k_2)} \in L_2^{(1)}(\mathbb{T}^3),$$

бу ерда $C-$ *ўзгармас сон.*

7-теорема. а) *Агар* $\bar{v}(1) > \cos\dfrac{k_1}{2}$ *бўлса,* $H^{(1)}(k_1,\pi,\pi)$ *оператор ягона оддий*

$$z_1^{(1)}(k_1) = 4 - \bar{v}(1) - \frac{1}{\bar{v}(1)}\cos^2\frac{k_1}{2},$$

хос қийматга эга ва унга мос хос функция

$$f_3^{(1)}(\mathbf{p}) = \frac{C\sin p_1}{6-2\cos\dfrac{k_1}{2}\cos p_1 - z_1^{-++}(k_1)} \in L_2^{(1)}(\mathbb{T}^3)$$

бўлади, бу ерда C *ўзгармас сон.*

б) Агар $\bar{v}(1) < \cos\dfrac{k_1}{2}$ *бўлса,* $H^{(1)}(k_1,\pi,\pi)$ *оператор муҳим спектрдан ташқарида хос қийматга эга эмас.*

в) Агар $\bar{v}(1) = \cos\dfrac{k_1}{2}$ *бўлса, у ҳолда* $H^{(1)}(k_1,\pi,\pi)$ *оператор муҳим спектрининг* $m(k_1) = 6-2\cos\dfrac{k_1}{2}$ *чап чеккаси* $H^{(1)}(k_1,\pi,\pi)$ *оператор учун виртуал сатҳ бўлади.*

Учинчи бобнинг иккинчи параграфида уч ўлчамли панжарада иккита ихтиёрий заррачали системага мос $H(\mathbf{k})$ Шредингер операторини қараймиз.

$$W(i) = \{\hat{v} : \operatorname{supp}\hat{v} = e_i\mathbb{Z},\quad \hat{v}((n-1)e_j) > \hat{v}(ne_j), n\in\mathbb{N}\}$$

$$W(ij) = \{\hat{v} : \operatorname{supp}\hat{v} = e_i\mathbb{Z}\cup e_j\mathbb{Z},\ \hat{v}(s) = \hat{v}_+(|s|), s\in\operatorname{supp}\hat{v},\ \hat{v}_+(n-1) > \hat{v}_+(n),\ n\in\mathbb{N}\}$$

потенциаллар синфларини аниқлаймиз. $M(i) = \{\mathbf{k}\in\mathbb{T}^3 : k_i = \pi\}$ ва $M(i,j) = \{\mathbf{k}\in\mathbb{T}^3 : k_i = k_j = \pi\}$ бўлсин. Ҳар бир $\mathbf{k}\in\mathbb{T}^3$ учун $(-\infty, m(k))$ да аналитик бўлган

$$d(\mathbf{k},z) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{T}^3}\frac{d\mathbf{q}}{\varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}) - z}$$

функцияни белгилаймиз.

6-лемма. $\mathbf{k}\in M(2,3)$ *ва* $k_1\in(-\pi,\pi)$ *бўлсин. У ҳолда*

$$d(\mathbf{k},z) = \frac{1}{\sqrt{m(\mathbf{k})-z}}\frac{1}{\sqrt{M(\mathbf{k})-z}}$$

тенглик ўринли.

7-лемма. $\mathbf{k}\in M(3)$ *ва* $(k_1,k_2)\in(-\pi,\pi)^2$ *бўлсин. У ҳолда*

$$d(\mathbf{k},z)=\frac{1}{4\pi\sqrt{\cos\frac{k_1}{2}\cos\frac{k_2}{2}}}\times\left[-\ln(m(\mathbf{k})-z)+\ln\frac{64\cos\frac{k_1}{2}\cos\frac{k_2}{2}}{\cos\frac{k_1}{2}+\cos\frac{k_2}{2}}+o(1)\right],\ z\to m(\mathbf{k})$$

тенглик ўринли.

8-теорема. *Агар* $(\mathbf{k},\hat{v})\in M(j)\times W(j)$ *бўлса, у ҳолда* $H(\mathbf{k})$ *оператор чексиз кўп* $z_n(\mathbf{k})<m(\mathbf{k}),\ n\in\mathbb{Z}_+$ *хос қийматга эга бўлиб,* $z_0(\mathbf{k})$ *оддий хос қиймат, қолган* $z_n(\mathbf{k}),\ n\in\mathbb{N}$ *лар икки каррали хос қийматлар бўлади ва уларга мос хос функциялар*

$$f_0^+(\mathbf{p})=\frac{1}{\varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{p})-z_0(\mathbf{k})},\qquad f_n^{\pm}(\mathbf{p})=\frac{e^{\pm inp_j}}{\varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{p})-z_n(\mathbf{k})}\quad n\in\mathbb{N}.$$

9-теорема. *Агар* $(\mathbf{k},\hat{v})\in M(ij)\times W(ij)$ *бўлса, у ҳолда* $H(\mathbf{k})$ *оператор чексизта* $z_{nm}(\mathbf{k}),\ n,m\in\mathbb{Z}_+$

$$z_{nm}(\mathbf{k})=6-\sqrt{(\omega(\mathbf{k})/2)^2+\hat{v}^2(ne_i+me_j)}.$$

хос қийматга эга бўлиб, $z_{00}(\mathbf{k})$ *оддий хос қиймат, қолган* $z_{nm}(\mathbf{k})$ *лар* $n+m\geq 1$ *ларда карралилиги* $4n+4m$ *га тенг бўлади.*

10-теорема. *Агар* $(\mathbf{k},\hat{v})\in M(3)\times W(3)$ *ва* $(k_1,k_2)\in(-\pi,\pi)^2$ *бўлса, у ҳолда* $H(\mathbf{k})=H(k_1,k_2,\pi)$ *оператор чексиз кўп* $z_n(\mathbf{k})=z_n(k_1,k_2,\pi)<m(\mathbf{k}),\ n\in\mathbb{N}$ *хос қийматга эга бўлиб,*

$$z_n(k_1,k_2,\pi)=m(k_1,k_2,\pi)-\exp\left\{-\frac{4\pi\sqrt{\cos\frac{k_1}{2}\cos\frac{k_2}{2}}}{\hat{v}(ne_3)}\right\}\times\left[\frac{64\cos\frac{k_1}{2}\cos\frac{k_2}{2}}{\cos\frac{k_1}{2}+\cos\frac{k_1}{2}}+o(1)\right],\quad n\to\infty.$$

асимптотик формула ўринли.

ХУЛОСА

Диссертация иши икки ёки уч ўлчамли панжарадаги қисқа масофада ёки узоқ масофада кучсиз таъсирлашувчи иккита заррачали системаларга мос дискрет Шредингер операторларининг хос қийматларининг қўзғалишларини тадқиқ килишга бағишланган.

Тадқиқотнинг асосий натижалари қуйидагилардан иборат:

1. икки ўлчамли панжарада харакатланувчи ва қисқа масофада таъсирлашувчи иккита бир хил заррачали (фермионли) системага мос Шредингер операторларининг муҳим спектри тубида ётувчи камида битта хос қиймати мавжуд бўлиши кўрсатилган ва квазиимпульсининг кичик қўзғалишларда хос қиймати учун асимптотик ёйилмалар олинган ва уларга мос хос фунцияларни қурилган;

2. икки ўлчамли панжарада харакатланувчи ва узоқ масофада кучсиз таъсирлашувчи иккита бир хил заррачали (фермионли) системага мос Шредингер операторининг чексиз кўп хос қийматлари мавжудлиги кўрсатилган ва улар учун асимптотик формулалар олинган;

3. уч ўлчамли панжарада харакатланувчи ва қисқа масофада таъсирлашувчи иккита бир хил заррачали системага мос Шредингер оператори муҳим спектридан чапда ётувчи каррали хос қийматлар инвариант қисм фазолар ёрдамида оддий хос қийматларга ажратилган ва уларнинг квазиимпульс кичик қўзғалишдаги ҳолати аниқланган;

4. уч ўлчамли панжарада ҳаракатланаётган икки заррача бир координата ўқларида ёки бир текисликда ётгандагина таъсирлашадиган системага мос Шредингер оператори муҳим спектридан чапда ётувчи чексиз кўп хос қийматга эга бўладиган квазиимпульс тўплами ажратилган ва хос қийматлар учун асимптотик формулалар топилган, уларнинг карраликлари аниқланган.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ PhD.27.06.2017.FM.02.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ ПРИ САМАРКАНДСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

САМАРКАНДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАМИРОВ БЕРДИЁР УЛУГБЕКОВИЧ

ВОЗМУЩЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ДВУХЧАСТИЧНОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА НА РЕШЕТКЕ

01.01.01 – математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD) ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

город Самарканд – 2018 год

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2017.4.PhD/FM150.

Диссертация выполнена в Самаркандском государственном университете.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (www.samdu.uz) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (www.ziyonet.uz).

Научный руководитель:	**Абдуллаев Жаникул Ибрагимович** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Ғанихўжаев Расул Набиевич** доктор физико-математических наук, профессор
	Яхшибоев Мамадиёр Умирови кандидат физико-математических наук, доцент
Ведущая организация:	**АН РУз Институт Математики**

Защита диссертации состоится «____» _____________2018 года в ____ часов на заседании Научного совета PhD.27.06.2017.FM.02.01 при Самаркандском государственном университете. (Адрес: 140104, г. Самарканд, Университетский бульвар, 15. Тел.: (99866)231-06-32, факс: (99866) 235-19-38, e-mail: patent@samdu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Самаркандского государственном университета (зарегистрирована за №_____). (Адрес: 140104, г. Самарканд, Университетский бульвар, 15. Тел.: (99866)231-06-32, факс: (99866) 235-19-38).

Автореферат диссертации разослан «____» _______________2018 года.

(протокол рассылки №________ от «____» _______________2018 года).

А.С. Солеев
Председатель Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., профессор

А.М. Халхужаев
Ученый секретарь Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н.

С.Н. Лакаев
Председатель научного семинара при Научном совете по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., академик

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность и востребованность темы диссертации. Многочисленные научно-прикладные исследования, проводимые в мировом уровне, посвящены к изучению прцессов, протекакающих в микромире. Последовательной теорией явлений микромира является квантовая механика, создання Планком, Борном, Йорданом, Паули, Дираком и другими учеными. Важнейшей физической величиной в любой квантовомеханической системе является энергия. Изучение спектральных свойства оператора энергии (Гимилтониана или оператора Шредингера) считается основной задачей квантавой механики. В этом направлении оператор Шредингера на решетке, является теоретическим обоснованием экспериментального наблюдения и теоретической базой для применения. Поэтому развитие исследования операторов Шредингера, соответствующих системам частиц на решетке, которые встречаются в моделях физики твердого тела, а также в кантовой механике и теории поля остаётся одним из важных задач научных исследований.

Поскольку спектр семейства двухчастичных операторов Шредингера является довольно чувствительным к изменению квазиимпульса системы, важную роль играет решение проблем, относящихся к исследованию спектров этих операторов, в том числе доказать существования собственных значений, изучение возмущений собственных значений при малым шевелениям квазиимпульса системы вне существенного спектра дискретных операторов Шредингера. В связи с этим реализация целевых научных исследований в следующих направлениях является одной из важных задач: исследование дискретных спектров операторов Шредингера, соответствующих системам двух частиц с короткодействующим и слабо дальнодействующим потенциалом; установление существования собственных значений дискретных операторов Шредингера, соответствующих системам двух частиц на двухмерной и трехмерной решетках, нахождение при малых возмущениях асимптотических разложений собственных значений, соответствующих системам двух частиц на двухмерной и трехмерной решетках. Научные исследования, проводимые в выше упомянутых направлениях, подтверждают актуальность темы диссертации.

В нашей стране большое внимание уделяется направлениям, имеющим прикладное значение, в частности, особое внимание было уделено исследованию операторов Шредингера, соответствующих системам частиц на решетке. Важными задачами и направлениями деятельности отмечено осуществление научных исследований по основным приоритетным направлениям математической науки, таких как алгебра и математический анализ, теория динамических систем, прикладная математика и математическое моделирование на уровне международных стандартов[1].

[1] Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан от 18 мая 2017 года №292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений Академии наук Республики Узбекистан»

При обеспечении исполнения постановления важное значение имеет в частности развитие теории самосопряженных операторов, в частности, изучение спектральных свойств операторов Шредингера, соответствующих системам двух частиц на решетке.

Исследования данной диссертации в определенной степени служат решению задач, поставленных в Указах Президента Республики Узбекистан № УП-2789 от 17 февраля 2017 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности» и № УП-2909 от 20 апреля 2017 года «О мерах по дальнейшему развитию системы высшего образования», а также в других нормативно-правовых актах, относящихся к данной области.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Уравнение Шредингера – это основное уравнение квантовой механики. Квантавая механика, теория твердовых тел и ядерная физика в основном занимается изучением свойств оператора Шредингера. Полученные в этой области результаты приведены в книгах Д.И.Блохинцева «Оснавная квантовая механика» и Ф.А.Березина, М.Н.Шубиной «Уравнения Шредингера». Операторы Шредингера, соответствующие системам частиц на решетке, впервые рассматривались в 90-х годах прошлого века Д.С.Маттисом, А.И.Могильнером и после чего исследования бурно развивались. В случае оператора Шредингера на решетке в математическом смысле возникают те же проблемы и тот же порядок их изучения, что и в случае непрерывного оператора Шредингера. Задачи о существовании дискретного спектра, а также определения порогового значения константы и возмущение собственных значений связи для непрерывных и дискретных операторов Шредингера изучались в работах Б. Саймона, Т.Като, Ф.Реллых, Р.А.Минлоса, С.Н. Лакаева, К. Макарова. Известно, что с уменьшением константы связи значение энергии связанного состояния двухчастичного оператора Шредингера приближается к краю непрерывного спектра, и при некотором конечном значении константы связи попадает на край. Изучению вопроса о соответствии этому пороговому значению связанного состояния или виртуального уровня посвящены работы Д.Р. Яфаева, Дж. Рауха, Б.Саймона, М.Клауза и С.Н. Лакаева. Пороговый эффект для оператора Шредингера, соответствующего системе двух бозонов попарно взаимодействующих с помощью контактного потенциала впервые определен в работе С.Н. Лакаева. В работах С.Албеверио, С.Лакаева, К.Макарова ва З.Муминова пороговый эффект доказан для широкого класса дисперсионных функций и потенциала взаимодействия. Существование и единственность собственного значения для контактных потенциалов приведены в работах С. Лакаева и Ж. Абдуллаева, и показана непрерывная зависимость этого собственного значения от полного квазиимпульса $k \in \mathbb{T}^3$

и монотонная зависимость от $k^{(i)} \in [0,\pi]$, $i = 1,2,3$. Кроме того, Ж. Абдуллаев применяя теорию возмущений изучил собственные значения при малых возмущениях квазиимпульса в блиде $k = \pi$ двухчастичного оператора Шредингера на решетке.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами высшего учебного заведения, в которой выполнена диссертация.

Диссертационная работа выполнена в соответствии с плановой темой научно-исследовательских работ Самаркандского государственного университета.

Целью исследования является исследовать ассимптотические поведения для малых возмущений собственных значений вне существенного спектра операторов Шредингера, соответствующих системам двух частиц, с короткодействующим и слабо дальнодействующим потенциалом, движущихся на двухмерной и трехмерной решетках и нахождение соответствующих им собственных функций.

Задачи исследования, найти собственные значения вне существенного спектра и явный вид соответствующей собственной функции двухчастичного оператора Шредингера, соответствующего системе двух одинаковых частиц (фермионов) короткодействующим и слабо дальнодействующим потенциалом, движущихся на двумерной решетке;

найти ассимтотическое разложение для собственного значения при малых шевелениях квазиимпульса малых параметров двухчастичного оператора Шредингера, соответствующего системе двух одинаковых частиц (фермионов) с короткодействующим и слабо дальнодействующим потенциалом, движущихся на двумерной решетке;

доказать, что кратные собственные значения двухчастичного оператора Шредингера, соответствующего системе двух одинаковых частиц (фермионов) взаимодействующих с короткодействующим потенциалом, движущихся на трехмерной решетке расщепляются на невырожденные собственные значения и найти явный вид этих собственных значений при малых возмущениях;

доказать существование бесконечного числа собственных значений левее существенного спектра двухчастичного оператора Шредингера, соответствующего системе двух частиц с взаимодействиями на одной координатной оси или плоскасти, движущихся на трехмерной решетке, найти скорость стремления ко дну существенного спектра и определить кратность этих собственных значений.

Объект исследования - операторы Шредингера, соответствующие системам двух частиц короткодействующим и слабо дальнодействующим потенциалом, движущихся на двухмерной и трехмерной решетках.

Предмет исследования - спектральный анализ дискретных операторов Шредингера, соответствующих системам двух частиц короткодействующим и слабо дальнодействующим потенциалом, движущихся на двумерной и трехмерной решетках.

Методы исследования. В диссертации использованы общие методы теории возмущений, математического анализа, функционального анализа, теории функций комплексного переменного и математической физики.

Научная новизна исследования. найдены собственные значения вне существенного спектра и явный вид соответствующих собственных функции двухчастичного оператора Шредингера, соответствующего системе двух одинаковых частиц (фермионов) короткодействующим и слабо дальнодействующим потенциалом, движущихся на двумерной решетке и найдены ассимтотические разложения для собственных значений при малых возмущениях квазиимпульса;

показано существование бесконечного числа собственных значений двухчастичного оператора Шредингера, соответствующего системе двух одинаковых частиц (фермионов) слабо дальнодействующим потенциалом, двумерной решете и для них получены асимптотические формулы;

доказано, что кратные собственные значения двухчастичного оператора Шредингера, соответствующего системе двух одинаковых частиц (фермионов) короткодействующим потенциалом, движущихся на трехмерной решетке расщепляются на невырожденные собственные значения и найден явный вид этих собственных значений при малых возмущениях;

установлено существование бесконечного числа собственных значений левее существенного спектра двухчастичного оператора Шредингера, соответствующего системе двух частиц с взаимодействиями на одной координатной оси или плоскасти, движущихся трехмерной решетке а также найдено асимптотическое разложение и определена кратность этих собственных значений.

Практические результаты исследования состоят в возможности применения выводов об аналитичности связанных состояний при исследовании качественных свойств экспериментальных наблюдений и численных вычислений в физике твердого тела и квантовой механике.

Достоверность результатов исследования обоснована использованием методов теории возмущений, детерминантов Фредгольма, асимптотических методов, элементов теории вычетов и функционального анализа, а также строгостью математических рассуждений.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научное значение результатов исследования заключается в том, что они могут быть использованы в спектральной теории самосопряженных операторов, которые возникают в квантовой механике, физике твердого тела, квантовой теории поля, в частности, при решении задач, связанных со спектром гамильтонианов систем двух и трех частиц на решетке.

Практическое значение диссертационного исследования определяется тем, что полученные в работе научные результаты могут служить теоретической основой экспериментальных наблюдений, проводимых в физике твердого тела и квантовой механике.

Внедрение результатов исследования.

На основе полученных результатов, относящихся возмущениям собственных значений двухчастичного оператора Шредингера на решетке:

способы определения существования собственного значения двухчастичного оператора Шредингера, соответствующего системе двух частиц на решетке использованы в исследованиях гранта QJ130000.2626.014.J72 для исследования спектральных свойств оператора Шредингера (Университет технологии Малайзии, справка от 26 февраля 2017 года). Применение этих научных результатов дала возможность определения существования связанных состояний оператора энергии и для числа связанных состояний;

способы определения существования собственных значений и методы нахождения асимптотического вида собственных значений двухчастичного оператора Шредингера, соответствующего системе двух частиц на решетке, использованы в исследованиях гранта QJ130000.2626.014.J72 для некоторых двухчастичных дискретных операторов Шредингера (Университет технологии Малайзии, справка от 26 февраля 2017 года). Применение этих научных результатов дало возможность найти кратность собственных значений оператора Шредингера и вид собственных функции;

результаты существования собственных значений операторов Шредингера, соответствующих системам двух одинаковых частиц (фермионов) и методы получeня асимптотических разложений для собственного значения при малых возмущениях использованы в исследованиях гранта Ф-4-17 для исследование осцилляторного интеграла с однородной полиномиальной (Справка МВССО РУз от 13.03.2018 г.). Применение этих научных результатов дало возможность исследования инвариантности осцилляторного интеграла, когда фаза является суммой однородных полиномов третьей и первой степени двух переменных.

Апробация результатов исследования. Результаты данного исследования были обсуждены на 10 научно-практических конференциях в том числе на 2 международных и 8 республиканских научно-практических конференциях.

Публикация результатов иследование. По теме диссертации опубликовано 15 научных работ, из них 5 в научных изданиях входящих в перечень, предложенный Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для зашиты докторских диссертаций, в том числе 2 работы опубликованы в зарубежных журналах и 3- в республиканских научных изданиях.

Объём и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 96 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведены обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В первой главе диссертации, названной **«Постановка задачи и необходимые сведения»**, приведены необходимые предварительные сведения и утверждения, в частности, теоремы спектральной теории и теории возмущений самосопряженных операторов, а также рассмотрен гамильтониан системы двух произвольных частиц как самосопряженный оператор, ограниченный в координатном и импульсных видах в соответствующих гильбертовых пространствах. Оператор энергии системы двух одинаковых частиц на решетке приведен в двухчастичный оператор Шредингера, в результате которого задача изучения гамильтониана двух частичной системы приведена к изучению слойных операторов, т.е. к изучению спектральных свойств оператора Шредингера.

Вторая глава диссертации, названная **«Возмущения собственных значений оператора Шредингера на двухмерной решетке»** посвящена установлению существования собственных значений операторов Шредингера, соответствующих системам двух одинаковых частиц (фермионов) и при малых возмущениях квазиимпульса получены их асимптотические поведения и найдены соответсвующие им собственные функции.

В третый главе диссертации, названной **«Асимптотика собственных значений двухчастичного оператора Шредингера на трехмерной решетке»** изучен дискретный спектр двухчастичного оператора Шредингера, соответствующего системе двух частиц на трехмерной решетке, установлены существование бесконечного числа собственных значений, лежащих левее существенного спектра и найдены асимптотические формулы для собственных значений а также явны вычислены первый и второй коэффициенты.

Пусть $\mathbb{T}^{\nu}=(-\pi,\pi]^{\nu}-$ $\nu-$мерный тор, $L_2(\mathbb{T}^{\nu})$:- гильбертово пространство квадратично- интегрируемых функций, определенных на $\mathbb{T}^{\nu}$, $L_2^o(\mathbb{T}^{\nu})\subset L_2(\mathbb{T}^{\nu})-$ подпространство нечетных функций.

Оператор Шредингера $H(\mathbf{k})$, ассоциированный с системой двух фермионов действует в гильбертовом пространстве $L_2^o(\mathbb{T}^2)$ по формуле

$$H(\mathbf{k})=H_0(\mathbf{k})-V,\ \mathbf{k}\in\mathbb{T}^2 \qquad (1)$$

Здесь невозмущенный оператор $H_0(\mathbf{k})$ - оператор умножения на функцию $\varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{p})$ в пространстве $L_2^o(\mathbb{T}^2)$:

$$(H_0(\mathbf{k}))f)(\mathbf{p}) = \varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{p})f(\mathbf{p}), \quad f \in L_2^o(\mathbb{T}^2),$$

где

$$\varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}) = 2\sum_{j=1}^{2}\left[1-\cos\frac{k_j}{2}\cos q_j\right].$$

Возмущение V оператора $H_0(\mathbf{k})$ является является интегральным оператором:

$$(Vf)(\mathbf{p}) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}^2} v(\mathbf{p}-\mathbf{q})f(\mathbf{q})d\mathbf{q}.$$

В силу теоремы Вейля, существенный спектр оператора $H(\mathbf{k})$ совпадает со спектром оператора $H_0(\mathbf{k}),$ т.е.

$$\sigma_{ess}(H(\mathbf{k})) = [m(\mathbf{k}), M(\mathbf{k})],$$

где

$$m(\mathbf{k}) = \min_{\mathbf{q}\in\mathbb{T}^2}\varepsilon_k(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{2}(2-2\cos\frac{k_i}{2}),\ M(\mathbf{k}) = \max_{\mathbf{q}\in\mathbb{T}^2}\varepsilon_k(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{2}(2+2\cos\frac{k_i}{2}).$$

Обозначим через $L_2^+(\mathbb{T}) = \{f \in L_2(\mathbb{T}) : f(-q) = f(q)\}$ и $L_2^-(\mathbb{T}) = \{f \in L_2(\mathbb{T}) : f(-q) = -f(q)\},$ подпространства соответственно четных и нечетных функций на $\mathbb{T}.$

Известно, что

$$L_2^o(\mathbb{T}^2) = L_2^{-+}(\mathbb{T}^2) \oplus L_2^{+-}(\mathbb{T}^2), \tag{2}$$

где

$$L_2^{+-}(\mathbb{T}^2) = L_2^+(\mathbb{T}) \otimes L_2^-(\mathbb{T}) \quad и \quad L_2^{-+}(\mathbb{T}^2) = L_2^-(\mathbb{T}) \otimes L_2^+(\mathbb{T}).$$

Лемма 1. *Пусть потенциал* $\hat{v}$ *четный по каждому аргументу. Тогда подпространства* $L_2^{+-}(\mathbb{T}^2)$ *и* $L_2^{-+}(\mathbb{T}^2)$ *являются инвариантными относительно оператора* $H(\mathbf{k})$.

Ясно, что система $\{\varphi_n^-(q) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nq\}_{n\in\mathbb{N}}$ образует ортонормированный базис в $L_2^-(\mathbb{T}),$ а $\{\varphi_0^+(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \varphi_n^+(q) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nq\}_{n\in\mathbb{N}},$ ортонормированный базис в $L_2^+(\mathbb{T}).$ Для любого $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $L^-(n)$ одномерное подпространство, натянутое на вектор $\varphi_n^-,$ а через $L^+(n-1)$ натянутое на вектор $\varphi_{n-1}^+.$

При этом пространства $L_2^-(\mathbb{T})$ и $L_2^+(\mathbb{T})$ разлагаются в прямые суммы

$$L_2^-(\mathbb{T}) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} L^-(n), \qquad L_2^+(\mathbb{T}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} L^+(n). \tag{3}$$

Разложение (3) порождает разложение

$$L_2^-(\mathbb{T}) \otimes L_2^+(\mathbb{T}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty}\{L_2^-(\mathbb{T}) \otimes L^+(n)\}, \quad L_2^+(\mathbb{T}) \otimes L_2^-(\mathbb{T}) = \bigoplus_{n=1}^{\infty}\{L_2^+(\mathbb{T}) \otimes L^-(n)\}.$$

Лемма 2. *Пусть потенциал* $\hat{v}$ *четный по каждому аргументу. Тогда для любого* $n \in \mathbb{N}$ *подпространства* $L_2^+(\mathbb{T}) \otimes L^-(n)$ *и* $L_2^-(\mathbb{T}) \otimes L^+(n-1)$ *являются инвариантными относительно оператора* $H(k_1, \pi)$.

В третьем параграфе главы два мы рассмотрим оператор $H(\mathbf{k})$ с потенциалом $\hat{v}$ вида:

$$\hat{v}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \overline{v}(0), & \text{если} \quad \mathbf{x} = 0 \\ \overline{v}(1), & \text{если} \quad |\mathbf{x}| = 1 \\ \overline{v}(2), & \text{если} \quad |\mathbf{x}| = 2 \\ 0, & \text{если} \quad |\mathbf{x}| \geq 3. \end{cases} \tag{4}$$

Здесь $\overline{v}(0) > \overline{v}(1) > \overline{v}(2) > 0$ и $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2, |\mathbf{n}| = |n_1| + |n_2|$.

Если потенциал $\hat{v}$ имеет вид (4) и $k_1 = k_2 = \pi$, то спектр оператора $H(\pi,\pi) = 4I - V$ состоит только из собственных значений $4 - \overline{v}(1), 4 - \overline{v}(2)$ и 4.

Число $z_1(\pi,\pi) = 4 - \overline{v}(1)$, является двукратным собственным значением с соответствующими нормированными собственными функциями

$$\phi_{(1,0)}^{-+}(\mathbf{p}) = \varphi_1^-(p_1)\varphi_0^+(p_2) = \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi}\sin p_1, \quad \phi_{(0,1)}^{+-}(\mathbf{p}) = \varphi_0^+(p_1)\varphi_1^-(p_2) = \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi}\sin p_2.$$

Число $z_2(\pi,\pi) = 4 - \overline{v}(2)$ является четырехкратным собственным значением с соответствующими нормированными собственными функциями

$$\phi_{(2,0)}^{-+}(\mathbf{p}) = \varphi_2^-(p_1)\varphi_0^+(p_2), \qquad \phi_{(0,2)}^{+-}(\mathbf{p}) = \varphi_0^+(p_1)\varphi_2^-(p_2),$$
$$\phi_{(1,1)}^{+-}(\mathbf{p}) = \varphi_1^+(p_1)\varphi_1^-(p_2), \qquad \phi_{(1,1)}^{-+}(\mathbf{p}) = \varphi_1^-(p_1)\varphi_1^+(p_2).$$

Число $z_\infty(\pi,\pi) = 4$ является бесконечнократным собственным значением, ему соответствуют собственные функции вида

$$\phi_{(n,m)}^{+-}(\mathbf{p}) = \varphi_n^+(p_1)\varphi_m^-(p_2) \qquad \phi_{(n,m)}^{-+}(\mathbf{p}) = \varphi_n^-(p_1)\varphi_m^+(p_2) \quad n + m \geq 3.$$

Обозначим через $H^{+-}(\mathbf{k})$ и $H^{-+}(\mathbf{k})$ сужение оператора $H(\mathbf{k})$ в инвариантные подпространства $L_2^{+-}(\mathbb{T}^2)$ и $L_2^{-+}(\mathbb{T}^2)$. Дадим действие операторов $V^{+-} = V|_{L_2^{+-}(\mathbb{T}^2)}$ и $V^{-+} = V|_{L_2^{-+}(\mathbb{T}^2)}$ на элементы $f \in L_2^{+-}(\mathbb{T}^2)$ и $f \in L_2^{-+}(\mathbb{T}^2)$:

$$(V^{+-}f)(\mathbf{p}) = \frac{1}{2\pi^2}\int_{\mathbb{T}^2}\left[\overline{v}(1)\sin p_2 \sin q_2 + \overline{v}(2)\sin 2p_2 \sin 2q_2 + 2\overline{v}(2)\cos p_1 \cos q_1 \sin p_2 \sin q_2\right] f(\mathbf{q})\mathrm{d}\mathbf{q},$$

$$(V^{-+}f)(\mathbf{p}) = \frac{1}{2\pi^2}\int_{\mathbb{T}^2}\left[\overline{v}(1)\sin p_1 \sin q_1 + \overline{v}(2)\sin 2p_1 \sin 2q_1 + 2\overline{v}(2)\sin p_1 \sin q_1 \cos p_2 \cos q_2\right] f(\mathbf{q})\mathrm{d}\mathbf{q}.$$

Лемма 3. *Для любого* $n \in \mathbb{N}$, *существенный спектр оператора* $H_n^+(k_1)$ *состоит из отрезка* $[2 - 2\cos\frac{k_1}{2}, 2 + 2\cos\frac{k_1}{2}]$.

Теорема 1. *Пусть потенциал* $\hat{v}$ *имеет вид (4). Существует* $\delta > 0$ *такое, что при всех* $\beta \in (0,\delta)$ *оператор* $H(\pi - 2\beta, \pi)$ *имеет два различных невырожденных собственных значения*

$$z_{(0,1)}^{+-}(\pi - 2\beta, \pi) = z_1(\pi,\pi) - \frac{2}{\overline{v}(1) - \overline{v}(2)}\beta^2 + O(\beta^4), \quad \beta \to 0,$$

$$z_{(1,0)}^{-+}(\pi - 2\beta, \pi) = z_1(\pi,\pi) - \frac{1}{\overline{v}(1) - \overline{v}(2)}\beta^2 + O(\beta^4), \quad \beta \to 0.$$

лежащих в малой окрестности $z_1(\pi,\pi)=4-\bar v(1)$ *и соответствующих собственным функциям*

$$\phi^{+-}_{(0,1)}(p_1,p_2)=\frac{c_{0(1)}+\gamma_{0(1)}\cos p_1}{4-2\sin\beta\cos p_1-z^{+-}_{(0,1)}(\pi-2\beta,\pi)}\sin p_2\in L_2^+(\mathbb{T})\otimes L^-(1),$$

$$\phi^{-+}_{(1,0)}(p_1,p_2)=\frac{c_{1(0)}\sin p_1+\gamma_{1(0)}\sin 2p_1}{4-2\sin\beta\cos p_1-z^{-+}_{(1,0)}(\pi-2\beta,\pi)}\in L_2^-(\mathbb{T})\otimes L^+(0).$$

Теорема 2. *Пусть потенциал* $\hat v$ *имеет вид (4). Существует* $\delta>0$ *такое, что при всех* $\beta\in(0,\delta)$ *оператор* $H(\pi-2\beta,\pi)$ *имеет четыре различных невырожденных собственных значения*

$$z^{-+}_{(2,0)}(\pi-2\beta,\pi)=z_2(\pi,\pi)-\frac{2+\bar v(1)}{\bar v(2)(\bar v(2)-\bar v(1))}\beta^2+O(\beta^4),\quad \beta\to 0,$$

$$z^{+-}_{(1,1)}(\pi-2\beta,\pi)=z_2(\pi,\pi)-\frac{\bar v(1)-3\bar v(2)}{\bar v(2)(\bar v(1)-\bar v(2))}\beta^2+O(\beta^4),\quad \beta\to 0,$$

$$z^{-+}_{(1,1)}(\pi-2\beta,\pi)=z_2(\pi,\pi)-\frac{1}{\bar v(2)}\sin^2\beta,\ \ \beta\in(0,\arcsin\bar v(2)),$$

$$z^{+-}_{(0,2)}(\pi-2\beta,\pi)=z_2(\pi,\pi)-\frac{4}{\bar v(2)+\sqrt{\bar v(2)^2+4\sin^2\beta}}\sin^2\beta,\quad \beta\in[0,\frac{\pi}{2}).$$

лежащих в малой окрестности $z_1(\pi,\pi)=4-\bar v(2)$ *и соответствующих собственным функциям*

$$\phi^{-+}_{(2,0)}(p_1,p_2)=\frac{c_{2(0)}\sin p_1+\gamma_{2(0)}\sin 2p_1}{4-2\sin\beta\cos p_1-z^{-+}_{(2,0)}(\pi-2\beta,\pi)}\in L_2^-(\mathbb{T})\otimes L^+(0),$$

$$\phi^{+-}_{(1,1)}(p_1,p_2)=\frac{c_{1(1)}+\gamma_{1(1)}\cos p_1}{4-2\sin\beta\cos p_1-z^{+-}_{(1,1)}(\pi-2\beta,\pi)}\sin p_2\in L_2^+(\mathbb{T})\otimes L^-(1),$$

$$\phi^{-+}_{(1,1)}(p_1,p_2)=\frac{c_{1(1)}\sin p_1}{4-2\sin\beta\cos p_1-z^{-+}_{(1,1)}(\pi-2\beta,\pi)}\cos p_2\in L_2^-(\mathbb{T})\otimes L^+(1),$$

$$\phi^{+-}_{(0,2)}(p_1,p_2)=\frac{c_{0(2)}\sin 2p_2}{4-2\sin\beta\cos p_1-z^{+-}_{(0,2)}(\pi-2\beta,\pi)}\in L_2^+(\mathbb{T})\otimes L^-(2)$$

В четвертом параграфе втором главы мы рассмотрим оператор $H(\mathbf{k}):L_2^o(\mathbb{T}^2)\to L_2^o(\mathbb{T}^2)$ с потенциалом $\hat v$ вида

$$\hat v(\mathbf{n})=\hat v(n_1,n_2)=\begin{cases}\bar v(n_2), & \text{если}\quad n_1=0,\\ \bar v(|n_2|+1), & \text{если}\quad |n_1|=1,\\ 0, & \text{если}\quad |n_1|\ge 2,\end{cases}\tag{5}$$

носитель которого принадлежит полосе $D=\{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^2:\,|n_1|\le 1\}$. Здесь $\bar v:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ убывающая функция на $\mathbb{Z}_+$ (т.е., $\bar v(0)>\bar v(1)>\bar v(2)>\cdots$) и $\bar v\in\ell_1(\mathbb{Z}_+)$.

Если $k_1=k_2=\pi$, то спектр оператора $H(\pi,\pi)=4I-V$ состоит только из собственных значений вида $4, 4-\bar v(n_2), n_2\in\mathbb{N}.$ При этом $z_1(\pi,\pi)=4-\bar v(1)$ является двукратным собственным значением с соответствующими нормированными собственными функциями

$$\phi^{-+}_{(1,0)}(\mathbf{p}) = \varphi^{-}_{1}(p_1)\varphi^{+}_{0}(p_2), \qquad \phi^{+-}_{(0,1)}(\mathbf{p}) = \varphi^{+}_{0}(p_1)\varphi^{-}_{1}(p_2).$$

При каждом $n_2 \ge 2,$ число $z_{n_2}(\pi,\pi) = 4 - \bar v(n_2)$ является трехкратным собственным значением, ему соответствуют нормированные собственные функции:

$$\phi^{+-}_{(0,n_2)}(\mathbf{p}) = \varphi^{+}_{0}(p_1)\varphi^{-}_{n_2}(p_2),\ \phi^{+-}_{(1,n_2-1)}(\mathbf{p}) = \varphi^{+}_{1}(p_1)\varphi^{-}_{n_2-1}(p_2),\ \phi^{-+}_{(1,n_2-1)}(\mathbf{p}) = \varphi^{-}_{1}(p_1)\varphi^{+}_{n_2-1}(p_2).$$

Число $z_\infty(\pi,\pi) = 4$ является бесконечнократным собственным значением, ему соответствуют собственные функции

$$\phi^{+-}_{(n_1,n_2)}(\mathbf{p}) = \varphi^{+}_{n_1}(p_1)\varphi^{-}_{n_2}(p_2), \quad \phi^{-+}_{(n_1,n_2)}(\mathbf{p}) = \varphi^{-}_{n_1}(p_1)\varphi^{+}_{n_2}(p_2),\ n_1 \in \mathbb{N},\ |n_2| \ge 2.$$

Лемма 4. *Пусть потенциал* $\hat v$ *имеет вид (5), тогда подпространства* $L_2^{+-}(\mathbb{T}^2)$ *и* $L_2^{-+}(\mathbb{T}^2)$ *являются инвариантными относительно оператора* $H(\mathbf{k})$.

Теорема 3. *Пусть потенциал* $\hat v$ *имеет вид (5). Тогда существует* $\delta > 0$ *такое, что для любого* $\beta \in (0,\delta)$ *оператор* $H(\pi - 2\beta, \pi)$ *имеет два различных невырожденных собственных значения*

$$z^{+-}_{(0,1)}(\pi - 2\beta, \pi) = 4 - \bar v(1) - \frac{2}{\bar v(1) - \bar v(2)}\beta^2 + O(\beta^4), \quad \beta \to 0,$$

$$z^{-+}_{(1,0)}(\pi - 2\beta, \pi) = 4 - \bar v(1) - \frac{1}{\bar v(1)}\sin^2\beta, \quad \beta \in (0, \arcsin \bar v(1))$$

лежащих в малой окрестности $z_1(\pi,\pi) = 4 - \bar v(1)$ и соответствующих собственным функциям

$$\phi^{+-}_{(0,1)}(p_1,p_2) = \frac{c_{0(1)} + \gamma_{0(1)}\cos p_1}{4 - 2\sin\beta\cos p_1 - z^{+-}_{(0,1)}(\pi - 2\beta,\pi)}\sin p_2 \in L_2^{+}(\mathbb{T}) \otimes L^{-}(1),$$

$$\phi^{-+}_{(1,0)}(p_1,p_2) = \frac{c_{1(0)}\sin p_1}{4 - 2\sin\beta\cos p_1 - z^{-+}_{(1,0)}(\pi - 2\beta,\pi)} \in L_2^{-}(\mathbb{T}) \otimes L^{+}(0).$$

Теорема 4. *Пусть потенциал* $\hat v$ *имеет вид (5). Тогда при каждом* $n \ge 2$ *существует* $\delta_n > 0$ *такое, что для любого* $\beta \in (0,\delta_n)$ *оператор* $H(\pi - 2\beta, \pi)$ *имеет три различных невырожденных собственных значения*

$$z^{+-}_{(n,n)}(\pi - 2\beta, \pi) = 4 - \bar v(n) - \frac{2}{\bar v(n) - \bar v(n+1)}\beta^2 + O(\beta^4), \quad \beta \to 0,$$

$$z^{-+}_{(n,n-1)}(\pi - 2\beta, \pi) = 4 - \bar v(n) - \frac{1}{\bar v(n)}\sin^2\beta, \quad \beta \in (0, \arcsin \bar v(n)),$$

$$z^{+-}_{(n,n-1)}(\pi - 2\beta, \pi) = 4 - \bar v(n) - \frac{\bar v(n-1) - 3\bar v(n)}{\bar v(n)(\bar v(n-1) - \bar v(n))}\beta^2 + O(\beta^4), \quad \beta \to 0$$

лежащих в малой окрестности $z_n(\pi,\pi) = 4 - \bar v(n)$ и соответствующих собственным функциям

$$\phi^{+-}_{(n,n)}(p_1,p_2) = \frac{(c_{n(n)} + \gamma_{n(n)}\cos p_1)\sin np_2}{4 - 2\sin\beta\cos p_1 - z^{+-}_{(n,n)}(\pi - 2\beta,\pi)} \in L_2^{+}(\mathbb{T}) \otimes L^{-}(n),$$

$$\phi^{-+}_{(n,n-1)}(p_1,p_2)=\frac{c_n\sin p_1\cos(n-1)p_2}{4-2\sin\beta\cos p_1-z^{-+}_{(n,n-1)}(\pi-2\beta,\pi)}\in L^-_2(\mathbb{T})\otimes L^+(n-1),$$

$$\phi^{+-}_{(n,n-1)}(p_1,p_2)=\frac{(c_{n(n-1)}+\gamma_{n(n-1)}\cos p_1)\sin(n-1)p_2}{4-2\sin\beta\cos p_1-z^{+-}_{(n,n-1)}(\pi-2\beta,\pi)}\in L^+_2(\mathbb{T})\otimes L^-(n-1).$$

В первом параграфе третый главы рассмотрим оператор Шредингера $H(\mathbf{k})$, ассоцированный с системой двух фермионов, действующий в $L_2^o(\mathbb{T}^3)$ с потенциалом $\hat{v}$ вида:

$$\hat{v}(\mathbf{n})=\begin{cases}1, & \textit{если}\quad \mathbf{n}=0\\ \overline{v}(1), & \textit{если}\quad |\mathbf{n}|=1\\ 0, & \textit{если}\quad |\mathbf{n}|\geq 2.\end{cases}$$

Здесь $\overline{v}(1)>0$ и $|\mathbf{n}|=|n_1|+|n_2|+|n_3|$. В этом случае оператор возмущения V есть интегральный оператор в $L_2^o(\mathbb{T}^3)$ с ядром

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}v(\mathbf{p}-\mathbf{q})=\frac{2\overline{v}(1)}{(2\pi)^3}[\sin p_1\sin q_1+\sin p_2\sin q_2+\sin p_3\sin q_3].$$

Имеет место разложение:

$$L_2^o(\mathbb{T}^3)=L_2^{-++}(\mathbb{T}^3)\oplus L_2^{+-+}(\mathbb{T}^3)\oplus L_2^{++-}(\mathbb{T}^3)\oplus L_2^{---}(\mathbb{T}^3)=$$
$$L_2^{(1)}(\mathbb{T}^3)\oplus L_2^{(2)}(\mathbb{T}^3)\oplus L_2^{(3)}(\mathbb{T}^3)\oplus L_2^{---}(\mathbb{T}^3).$$

Лемма 5. *Подпространства* $L_2^{(1)}(\mathbb{T}^3),L_2^{(2)}(\mathbb{T}^3),L_2^{(3)}(\mathbb{T}^3)$ *и* $L_2^{---}(\mathbb{T}^3)$ *являются инвариантными относительно оператора* $H(\mathbf{k})$.

Сужение $H^{(i)}(\mathbf{k})=H_0(\mathbf{k})-V^{(i)},i=\overline{1,3}$ оператора $H(\mathbf{k})$ действует по формуле:

$$H^{(i)}(\mathbf{k})f(\mathbf{p})=\varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{p})f(\mathbf{p})-\frac{2\overline{v}(1)}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{T}^3}\sin p_i\sin q_i f(\mathbf{q})\mathrm{d}\mathbf{q},\ f\in L_2^{(i)}(\mathbb{T}^3).$$

Теорема 5. *Пусть* $k_1=k_2=\pi$. *Тогда для любого* $k_3\in(-\pi,\pi)$ *оператор* $H^{(1)}(\pi,\pi,k_3)$ *имеет единственное невырожденное собственное значение*

$$z_1^{(1)}(k_3)=6-\sqrt{\overline{v}^2(1)+4\cos^2\frac{k_3}{2}}$$

соответствующее собственной функции

$$f_1^{(1)}(\mathbf{p})=\frac{C\sin p_1}{6-2\cos\frac{k_3}{2}\cos p_3-z_1^{(1)}(k_3)}\in L_2^{(1)}(\mathbb{T}^3),$$

где $C-$ произвольная константа.

Теорема 6. *Пусть* $k_1=k_3=\pi$. *Тогда для любого* $k_2\in(-\pi,\pi)$ *оператор* $H^{(1)}(\pi,k_2,\pi)$ *имеет единственное невырожденное собственное значение*

$$z_1^{(1)}(k_2)=6-\sqrt{\overline{v}(1)^2+4\cos^2\frac{k_2}{2}}\tag{3.18}$$

соответствующее собственной функции

$$f_2^{(1)}(\mathbf{p})=\frac{C\sin p_1}{6-2\cos\frac{k_2}{2}\cos p_2-z_1^{-++}(k_2)}\in L_2^{(1)}(\mathbb{T}^3),$$

где C произвольная константа.

Теорема 7. *Пусть* $k_1 \in (0,\pi]$. *а) Если* $\overline{v}(1) > \cos\frac{k_1}{2}$, *то оператор* $H^{(1)}(k_1,\pi,\pi)$ *имеет единственное невырожденное собственное значение*

$$z_1^{(1)}(k_1) = 6 - \overline{v}(1) - \frac{1}{\overline{v}(1)}\cos^2\frac{k_1}{2} \tag{3.19}$$

соответствующее собственной функции

$$f_3^{(1)}(\mathbf{p}) = \frac{C\sin p_1}{6 - 2\cos\frac{k_1}{2}\cos p_1 - z_1^{(1)}(k_1)} \in L_2^{(1)}(\mathbb{T}^3),$$

где $C -$ *произвольная константа.*

б) Если $\overline{v}(1) < \cos\frac{k_1}{2}$, *то оператор* $H^{(1)}(k_1,\pi,\pi)$ *не имеет собственное значение вне существенного спектра.*

в) Если $\overline{v}(1) = \cos\frac{k_1}{2}$, *то левый край* $m(k_1,\pi,\pi) = 6 - 2\cos\frac{k_1}{2}$ *является вертуальным уровнем оператора* $H^{(1)}(k_1,\pi,\pi)$.

Во втором параграфе третый главы диссертации рассмотрим дискретный оператор Шредингера $H(\mathbf{k})$, ассоциированный системы двух праизвольных квантовых частиц, действующий в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{T}^3)$.

Обозначим через $W(j)$ класс четных потенциалов $\hat{v}$ таких, $\hat{v}(\mathbf{x}) = \hat{v}(-\mathbf{x}) \geq 0$ что

$$W(j) = \{\hat{v} : \mathrm{supp}\hat{v} = e_j\mathbb{Z} \quad \text{è} \quad \hat{v}((n-1)e_j) > \hat{v}(ne_j), n \in \mathbb{N}\}.$$

Пусть $W(ij)$ - класс четных потенциалов $\hat{v}$ таких, что

$$W(ij) = \{\hat{v} : \mathrm{supp}\,\hat{v} = e_i\mathbb{Z} \cup e_j\mathbb{Z}, \quad \hat{v}(s) = \hat{v}_+(|s|), s \in \mathrm{supp}\,\hat{v}, \quad \hat{v}_+(n-1) > \hat{v}_+(n), \quad n \in \mathbb{N}\},$$

$M(i) = \{\mathbf{k} \in \mathbb{T}^3 : k_i = \pi\}$ и $M(i,j) = \{\mathbf{k} \in \mathbb{T}^3 : k_i = k_j = \pi\}$.

Для любого $\mathbf{k} \in \mathbb{T}^3$ определим аналитическую в $(-\infty, m(k))$ функцию по формуле

$$d(\mathbf{k},z) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{T}^3}\frac{d\mathbf{q}}{\varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}) - z}$$

В следующей лемме устанавляется асимптотика функции $d(\mathbf{k},z)$ при $z \to m(\mathbf{k}) - 0$.

Лемма 6. *Пусть* $\mathbf{k} \in M(2,3)$ *и* $k_1 \in (-\pi,\pi)$. *Тогда*

$$d(\mathbf{k},z) = \frac{1}{\sqrt{m(\mathbf{k}) - z}}\,\frac{1}{\sqrt{M(\mathbf{k}) - z}}.$$

Лемма 7. *Пусть* $\mathbf{k} \in M(3)$ *и* $(k_1,k_2) \in (-\pi,\pi)^2$. *Тогда*

$$d(\mathbf{k},z)=\frac{1}{4\pi\sqrt{\cos\frac{k_1}{2}\cos\frac{k_2}{2}}}\times\left[-\ln(m(\mathbf{k})-z)+\ln\frac{64\cos\frac{k_1}{2}\cos\frac{k_2}{2}}{\cos\frac{k_1}{2}+\cos\frac{k_2}{2}}+o(1)\right],\ z\to m(\mathbf{k}).$$

Теорема 8. *Пусть* $(\mathbf{k},\hat{v})\in M(j)\times W(j)$. *Тогда оператор* $H(\mathbf{k})$ *имеет бесконечное число собственных значений* $z_n(\mathbf{k})<m(\mathbf{k}),n\in\mathbb{Z}_+$, *из которых только* $z_0(\mathbf{k})$ *- невырожденное, а остальные* $z_n(\mathbf{k})$, $n\in\mathbb{N}$ *двухкратные собственные значения. Собственным значениям* $z_0(\mathbf{k})$ *и* $z_n(\mathbf{k}),n\in\mathbb{N}$ *соответствуют собственные функции*

$$f_0^+(\mathbf{q})=\frac{1}{\varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{q})=z_0(\mathbf{k})}\quad и\quad f_n^\pm(\mathbf{q})=\frac{e^{\pm inp_j}}{\varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{q})=z_0(\mathbf{k})}\quad n\in\mathbb{N}.$$

Теорема 9. *Пусть* $(\mathbf{k},\hat{v})\in M(ij)\times W(ij)$. *Тогда оператор* $H(\mathbf{k})$ *имеет бесконечное число собственных значений* $z_{nm}(\mathbf{k}),m,n\in\mathbb{Z}_+$ *вида*

$$z_{nm}(\mathbf{k})=6-\sqrt{(\omega(\mathbf{k})/2)^2+\hat{v}^2(ne_i+me_j)}.$$

Собственное значение $z_{00}(k)$ *- невырожденное, а кратность собственного значения* $z_{nm}(\mathbf{k})$, $m,n\in\mathbb{Z}_+$ *при* $n+m\geq 1$ *равно* $4n+4m$.

Теорема 10. *Пусть* $(\mathbf{k},\hat{v})\in M(3)\times W(3)$ *и* $(k_1,k_2)\in(-\pi,\pi)^2$. *Тогда оператор* $H(\mathbf{k})=H(k_1,k_2,\pi)$ *имеет бесконечное число собственных значений* $z_n(\mathbf{k})=z_n(k_1,k_2,\pi)<m(\mathbf{k}),n\in\mathbb{N}$ *имеющих асимптотику в виде*

$$z_n(k_1,k_2,\pi)=m(k_1,k_2,\pi)-\exp\left\{-\frac{4\pi\sqrt{\cos\frac{k_1}{2}\cos\frac{k_2}{2}}}{\hat{v}(ne_3)}\right\}\times\left[\frac{64\cos\frac{k_1}{2}\cos\frac{k_2}{2}}{\cos\frac{k_1}{2}+\cos\frac{k_1}{2}}+o(1)\right],\quad n\to\infty.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данная диссертация посвящена исследованию существенного и дискретного спектра оператора Шредингера, соответствующего системе двух частицна двумерной и трехмерной решетке.

Основные результаты исследования состоят в следующем:

1. Найдены собственные значения вне существенного спектра и явный вид соответствующих собственных функции двухчастичного оператора Шредингера, соответствующего системе двух одинаковых частиц (фермионов) короткодействующим и слабо дальнодействующим потенциалом, движущихся на двумерной решетке и найдены ассимтотические разложения для собственных значений при малых возмущениях квазиимпульса;

2. Показано существование бесконечного числа собственных значений

двухчастичного оператора Шредингера, соответствующего системе двух одинаковых частиц (фермионов) слабо дальнодействующим потенциалом, двумерной решете и для них получены асимптотические формулы;

3. Доказано, что кратные собственные значения двухчастичного оператора Шредингера, соответствующего системе двух одинаковых частиц (фермионов) короткодействующим потенциалом, движущихся на трехмерной решетке расщепляются на невырожденные собственные значения и найден явный вид этих собственных значений при малых возмущениях;

4. Установлено существование бесконечного числа собственных значений левее существенного спектра двухчастичного оператора Шредингера, соответствующего системе двух частиц с взаимодействиями на одной координатной оси или плоскасти, движущихся трехмерной решетке а также найдено асимптотическое разложение и определена кратность этих собственных значений.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREE DOCTOROF PHILOSOPHY (PhD) PhD.27.06.2017.FM.02.01 SAMARKAND STATE UNIVERSITY

SAMARKAND STATE UNIVERSITY

MAMIROV BERDIYOR ULUGBEKOVICH

PERTURBATIONS OF EIGENVALUES OF TWO-PARTICLE SCHRÖDINGER OPERATORS ON A LATTICE

01.01.01-Mathematical analysis

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Samarkand - 2018

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2017.4.PhD/FM150.

Dissertation has been prepared at Samarkand State University

The abstract of the dissertation is posted in three languages (uzbek, russian, english (resume)) on the website (www.samdu.uz) and the «Ziyonet» Information and educational portal (www.ziyonet.uz).

Scientific supervisor:	**Abdullayev Janikul Ibragimovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Official opponents:	**Ganikhodjaev Rasul Nabievich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
	Yakhshiboyev Mamadiyor Umirovich Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Dotsent
Leading organization:	**Institute of Mathematics**

Defense will take place «____» _____________2018 at _____ at the meeting of Scientific Council number PhD.27.06.2017.FM.02.01 at Samarkand State University. (Address: University Boulevard 15, Samarkand, 140104, Uzbekistan, Ph.: (99866) 231-06-32, fax: (+99866) 235-19-38, e-mail: patent@samdu.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at Samarkand State University (is registered №____) (Address: University Boulevard 15, Samarkand, 140104, Uzbekistan, Ph.: (99866) 231-06-32).

Abstract of dissertation sent out on «____» _______________2018 year.

(Mailing report № ___________on «____» _______________2018 year).

A.S. Soleev
Chairman of scientific council on award of scientific degrees, D.F.-M.S., professor

A.M. Xalxujayev
Scientific secretary of scientific council on award of scientific degrees, D.F.-M.S.

S.N. Lakaev
chairman of scientific Seminar under Scientific Council on award of scientific degrees, D.F.-M.S., academic

INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

The aim of the research work is to study asymptotic behaviors for small perturbations of eigenvalues outside the essential spectrum of Schrödinger operators associated to a system of two particles interacting via short-range and weakly long-range potential moving on two and three-dimensional lattices and finding corresponding eigenfunctions.

The object of the research work is Schrödinger operators associated to a system of two particles interacting via short-range and weakly long-range potential moving on two-dimensional and three-dimensional lattices.

Scientific novelty of the research work is as follows:

It is found the eigenvalues lying outside the essential spectrum and the explicit form of the corresponding eigenfunctions of the two-particle Schrödinger operator associated to a system of two particles interacting via short-range and weakly long-range potential moving on two-dimensional lattice and asymmetric expansions for eigenvalues are found for small perturbations of the quasi-momentum;

the existence of an infinite number of eigenvalues of the two-particle Schrödinger operator associated to a system of two identical particles (fermions) particles interacting via weakly long-range potential moving on two-dimensional dimensional lattice and for these it is obtained the asymptotic formulas.

It is proved that the multiple eigenvalues of the two-particle Schrödinger operator associated to a system of two identical particles (fermions) interacting via short-range moving on a three-dimensional lattice splits into non-degenerate eigenvalues and an explicit forms of these eigenvalues are found for small perturbations;

the existence of an infinite number of eigenvalues lying below the essential spectrum of the two-particle Schrödinger operator associated to a system of two particles interacting on one coordinate axis or a plane moving on a three-dimensional lattice is found and it is found an asymptotic expansion as well as the multiplicity of these eigenvalues is determined.

Implementation of the research results. The resalts obtained during the dissertation research are applied in the following areas:

Methods the determining the existence of an eigenvalue of the two-particle Schrödinger operator associated to a system of two-particles used in scientific research QJ130000.2626.014.J72 to investigate the spectral properties of the Schrödinger operator (certificate of Malaysian University of Technology, February 26, 2017). Using scientific result enabled to determine the existence of bound states of the energy operator and the number of bound states;

methods for determining the existence of eigenvalues and methods for finding the asymptotic form of the eigenvalues of a two-particle Schrödinger operator associated to a system of two-particles on a lattice used in scientific research QJ130000.2626.014.J72 for some two-particle discrete Schrödinger operators (certificate of Malaysian University of Technology, February 26, 2017). Using scientific result enabled to find the multiplicity of the eigenvalues of the

Schrodinger operator and the implicit form of the eigenfunction;

the results of the existence of eigenvalues of Schrödinger operators associated to a system of two identical particles (fermions) and methods for obtaining asymptotic expansions for an eigenvalue under small perturbations used in scientific reserch F-4-17 to the study the oscillator integral with a homogeneous polynomial. Using scientific result enabled to study the invariance of the oscillator integral, when the phase is the sum of homogeneous polynomials of the third and first degree of two variables.

The structure and volume of the thesis. The dissertation work consists of an introduction, three chapters, conclusion and bibliography. The volume of the thesis is 96 pages.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (I часть; I part)

1. Ж.И. Абдуллаев, Б.У. Мамиров: Асимптотика собственных значений двухчастичного дискретного оператора Шредингера. // Теоретическая и математическая физика. - Москва, 2013. –т. 176. №3. - С. 417-428. (№ 40. ResearchGate. IF=0.984).
2. J.I. Abdullaev, B.U. Mamirov: Bound states of the system of two fermions on the three-dimensional lattice. // 2016 Journal Physics:Conf. Ser. 697 012022 (№ 40. ResearchGate. IF=0.45).
3. Ж.И. Абдуллаев, Б.У. Мамиров: Связанные состояния системы двух фермионов на трехмерной решетке. // Научный вестник СамГУ. №5(93), (2015), 6-15. (01.00.00; №2).
4. Ж.И. Абдуллаев, К.Д. Кулиев, Б.У. Мамиров: Бесконечность числа связанных состояний системы двух фермионов на двумерной решетке. // Узбекский Математический Журнал, 4(2016), 3-15. (01.00.00; №6).
5. Ж.И. Абдуллаев, Б.У. Мамиров: Асимптотический поведения собственных значений оператора Шредингера соответсвующих систем двух фермионов на решетке . // Научный вестник СамГУ. №3, (2016), 14-26. (01.00.00; №2).

II бўлим (II часть; II part)

6. Б.У. Мамиров: Панжарада бир заррачали Шрёдингер операториниг спектри. // Научный вестник СамГУ. №5(2011), 15-24. (01.00.00; №2).
7. Ж.И. Абдуллаев, Б.У. Мамиров: Связанные состояния и резонансы системы двух фермионов на одномерной решетке. // «Операторные алгебры и смежные проблемы». Тез. докл. Рес. науч. конф. – Ташкент, 2012. – С.
8. Ж.И. Абдуллаев, Б.У. Мамиров: Асимптотика собственных значений двухчастичного оператора Шредингера на решетке. // Актуальные проблемы прикладной математики и инф. технологий. Тез. докл. междунар. конф. – Ташкент, 2012. – С.
9. Ж.И. Абдуллаев, Б.У. Мамиров: Связанные состояния гамильтониана системы двух фермионов на решетке. // Современные методы математической физика и их приложения. Тез. докл . Рес. науч. конф. – Ташкент, 2015. – С.
10. Ж.И. Абдуллаев, Б.У. Мамиров: Связанные состояния системы двух бозонов на двумерной решетке. // VII Ферганская конференция, Предельные теоремы теории вероятностей и их приложения. докл. Рес. науч. конф. Наманган. 11-12 мая 2015.
11. J.I. Abdullayev, B.U. Mamirov: Uch o‘lchamli panjaradagi ikki fermionli sistema Hamiltonianining bog‘langan holatlari. // Matematik fizika va zamonaviy

analizning turdosh masalalari respublika ilmiy-amaliy anjumani. Тез. докл. Рес. науч. конф. Buxoro. 26-27 noyabr-2015. 10-11.

12. Ж.И. Абдуллаев, Б.У. Мамиров: Асимптотика собственных значений двухчастичного оператора Шредингера на двумерной решетке. // Математиканинг долзарб муаммолари. Республика илмий-амалий анжуман. Тез. докл. Рес. науч. конф. – Андижан, 2016. – С. 313-316.

13. J.I. Abdullaev, B.U. Mamirov: The asymptotic behavior of eigenvalues of the operator Schrodinger corresponds system of two fermions on a lattice. // International Conference on Nonlinear analysis and its applications. Samarkand. Тез. докл. междунар. конф. Самарканд -2016. 119-120.

14. Ж.И. Абдуллаев, Б.У. Мамиров: Асимптотика собственных значений оператора Шредингера системы двух бозонов на трехмерной решетке. // Актуальные проблемы математики и информатики. Тез. докл. междунар. конф. Елец, 2018. – С. 6-12ст.

15. Ж.И. Абдуллаев, Б.У. Мамиров: Связанные состояния системы двух бозонов на трехмерной решетке. // Modern problems of dynamical system and their applications. Тез. докл. Рес. науч. конф. – Ташкент, 2017. 92-94.

Авторефератнинг ўзбек, рус, инглиз тиллардаги нусхалари
«СамДУ илмий - ахборотнома» журнали таҳририятида таҳриридан
ўтказилди (7.06.2018 йил.)

Босишга рухсат этилди: 13.06.2018 йил.
Бичими 60x84 $^{1}/_{16}$, «Times New Roman»
гарнитурада рақамли босма усулида босилди.
Шартли босма табоғи 2,7. Адади: 100. Буюртма: № 228.

Ўзбекистон Республикаси ИИВ Академияси,
100197, Тошкент, Интизор кўчаси, 68.

«АКАДЕМИЯ НОШИРЛИК МАРКАЗИ»
Давлат унитар корхонасида чоп этилди.