САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ИЛМИЙ ДАРАЖАСИНИ БЕРУВЧИ PhD.27.06.2017.FM.02.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

ЛАТИПОВ ШЕРДОР МИРЗОЕВИЧ

БИР УМУМЛАШГАН ФРИДРИХС МОДЕЛИНИНГ МУХИМ ВА ДИСКРЕТ СПЕКТРЛАРИ

01.01.01 – Математик анализ

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Самарқанд шаҳри – 2017 йил

УДК: 517.984

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Contents of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ИЛМИЙ ДАРАЖАСИНИ БЕРУВЧИ PhD.27.06.2017.FM.02.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

ЛАТИПОВ ШЕРДОР МИРЗОЕВИЧ

БИР УМУМЛАШГАН ФРИДРИХС МОДЕЛИНИНГ МУХИМ ВА ДИСКРЕТ СПЕКТРЛАРИ

01.01.02 – Математик анализ

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Самарқанд шаҳри – 2017 йил

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида - B2017.2.PhD/FM51 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация Самарқанд давлат университетида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифасида (www.samdu.uz) ва «Ziyonet» Ахборот таълим порталида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар:	**Лақаев Саидаҳмат Норжигитович** физика-математика фанлари доктори, профессор
Расмий оппонентлар:	**Эшкабилов Юсуп Халбаевич** физика-математика фанлари доктори
	Қўчқоров Эркин Иброхимович физика-математика фанлари номзоди
Етакчи ташкилот:	**Математика институти**

Диссертация ҳимояси Самарқанд давлат университети ҳузуридаги PhD.27.06.2017.FM.02.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2017 йил «___»_________ соат____ даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 140104, Самарқанд ш., Университет хиёбони, 15-уй. Тел.: (+99866) 231-06-32, факс: (+99866) 235-19-38, 239-12-47, e-mail: patent@samdu.uz).

Диссертация билан Самарқанд давлат университетининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (___ рақами билан рўйхатга олинган). Манзил: 140104, Самарқанд ш., Университет хиёбони, 15-уй. Тел.: (+99866) 231-06-32.

Диссертация автореферати 2017 йил «____» _______________куни тарқатилди.
(2017 йил «____» ___________ даги _______ рақамли реестр баённомаси)

А.С. Солеев
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш раиси, ф.-м.ф.д., профессор

А.М. Халхўжаев
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш илмий котиби, ф.-м.ф.д.

И.А.Икромов
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш қошидаги илмий семинар раиси ўринбосари, ф.-м.ф.д., профессор

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида олиб борилаётган кўплаб илмий-амалий тадқиқотлар панжарада сони сақланмайдиган заррачалар системасига мос умумлашган Фридрихс моделларини ўрганишга келтирилади. Тартибланган муҳитларда мураккаб турғун объектлар пайдо бўлишини тавсифлашда фойдаланиладиган Бозе-Хаббард модели, хусусан, панжарадаги икки заррачали Шредингер операторлари экспериментал кузатишларнинг назарий асоси ва қўллашнинг назарий базаси ҳисобланади. Шунинг учун қаттиқ жисмлар физикаси ҳамда квант майдонлар назарияси ва чизиқли чегараланган ўз-ўзига қўшма операторларнинг спектрал назариясида учрайдиган панжарадаги заррачалар системасига мос Шредингер операторлари ва умумлашган Фридрихс моделларига оид тадқиқотларни ривожлантириш муҳим вазифалардан бири бўлиб қолмоқда.

Мустақиллик йилларида мамлакатимизда фундаментал фанларнинг илмий ва амалий тадбиқига эга бўлган математик анализнинг долзарб йўналишларига эътибор кучайтирилди. Жумладан, панжарадаги сони сақланадиган ва сақланмайдиган икки заррачали системага мос Фридихс моделларини ўрганишга алоҳида эътибор қаратилди. Умумлашган Фридрихс моделлари узлуксиз спектри, хос қийматлари, хос қийматларнинг пайдо бўлиши ва ютилиши, хос қийматлар сонини аниқлашга оид салмоқли натижаларга эришилди. «Математика, физика, амалий математика фанларининг устивор йўналишлари бўйича халқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш асосий вазифалар ва фаолият йўналишлари» этиб белгиланди[1]. Қарор ижросини таъминлашда квант майдонлар назарияси ва чизиқли операторларнинг спектрал назариясини ривожлантириш муҳим аҳамиятга эга.

Ҳозирги кунда жаҳонда ўз-ўзига қўшма операторларнинг спектри ва резонансларини ўрганиш ҳақидаги муаммо замонавий математик анализ долзарб масалаларидан бири ҳисобланади. Таъкидлаш жоизки, ушбу масала панжарадаги сони иккидан ошмайдиган заррачалар системасига мос умумлашган Фридрихс модели спектри ва резонансларини ўрганиш билан чамбарчас боғлиқ. Хусусан, панжарадаги сони иккидан ошмайдиган заррачалар системасига мос умумлашган Фридрихс моделини нуқтада ва бир қадамда тасирлашувчи икки заррачали Шредингер оператори ёрдамида аниқлаш ва унинг спектрини тадқиқ қилиш муҳим аҳамият касб этмоқда. Бу борада: панжарадаги сони иккидан ошмайдиган заррачалар системасига мос умумлашган Фридрихс модели муҳим спектри ўрнини тавсифлаш; муҳим спектрдан ташқаридаги хос қийматлар сонининг ўзгаришини оператор параметрларига ва қаралаётган фазонинг ўлчамига боғлиқлигини кўрсатиш мақсадли илмий тадқиқотлар ҳисобланади.

[1] Ўзбекистон Республикаси Вазирлар маҳкамасининг 2017йил 18 майдаги «Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш тўғрисида»ги 292-сонли қарори.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2008 йил 15 июлдаги ПҚ-916-сон «Инновацион лойиҳалар ва технологияларни ишлаб чиқаришга татбиқ этишни рағбатлантириш борасидаги қўшимча чора-тадбирлар тўғрисида»ги, 2017 йил 17 февралдаги ПҚ-2789-сон «Фанлар академияси фаолияти, илмий-тадқиқот ишларини ташкил этиш, бошқариш ва молиялаштиришни янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги Қарори ва 2017 йил 8 февралдаги ПФ-4947-сон «Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича ҳаракатлар стратегияси тўғрисида»ги Фармони ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий хужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишга ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига боғлиқлиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Атом ва молекуляр ҳамда қаттиқ жисмлар физикаси, математик физика, квант майдонлар назариясининг асосий масалалари аксарият ҳолларда Фридрихс моделлари ва Шредингер операторлари деб аталувчи чизиқли чегараланган ўз-ўзига қўшма операторлар махсус синфларининг спектрал хоссаларини ўрганишга келтирилади.

К.О. Фридрихс томонидан биринчи бўлиб, ўз-ўз қўшма операторлар қўзғалишлар назарияси модели сифатида эркли ўзгарувчига кўпайтириш ва унинг интеграл оператор ёрдамидаги қўзғалиши киритилган. Кейинчалик О.А.Ладиженская ва Л.Д.Фаддеевларнинг ишларида бу оператор Фридрихс модели деб аталган ҳамда Шредингер операторини ўрганиш масаласи Фридрихс моделини ўрганиш масаласига келтирилган. Фридрихс моделида узлуксиз спектрнинг карралиги ўзгармас бўлгани учун С.Н.Лақаев томонидан умумлашган Фридрихс модели узлуксиз спектрнинг карралиги ўзгарувчан бўлган ҳол модели сифатида киритилди. Бу моделнинг спектрал хоссалари, яъни узлуксиз спектри, хос қийматлари ва резонанслари, хос қийматларнинг пайдо бўлиши ва ютилиши, ҳамда хос қийматлар сонининг чеклилиги Р.А.Минлос, С.Н.Лақаев, Ж.И.Абдуллаев, С.А.Степен, С.Албеверио, Е.Л.Лакштанов, Э.Р.Акчурин, И.А.Икромов, Ф.Шарипов, Ю. Эшқобилов ва Т.Ҳ.Расулов ишларида ўрганилган.

С.Н.Лақаев, Ж.И.Абдуллаевларнинг ишларида заррачалар сони иккидан ошмайдиган системага мос умумлашган Фридрихс моделининг хос қийматлари ва резонанслари ҳамда улар сонининг чеклилиги исботланган.

С.А.Степен ва М.Э.Мўминов ишларида ўз-ўзига қўшма бўлмаган Фридрихс моделининг спектрал хоссалари ўрганилган, жумладан хос қийматлари сонининг чеклилик шартлари топилган. Ҳозирги пайтда ҳам умумлашган Фридрихс моделининг спектрал хоссаларини тадқиқ қилишга оид тадқиқотларни ривожлантириш муҳим вазифалардан бири бўлиб қолмоқда.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти ЎзР ФА Самарқанд бўлимининг ФА-Ф1-Ф045 «Панжарадаги кўп заррачали система гамильтонианлари. Спектр ва резонанслар» (2007-2011 йй.), Самарқанд давлат университетининг Ф4-ФА-Ф079 «Панжарадаги сони сақланмайдиган заррачалар системаси гамильтонианларининг спектрал таҳлили» (2012-2016 йй) ва ОТ-Ф4-66 «Панжарадаги чекли сондаги заррачалар системаси моделлари. Энергия операторларининг муҳим ва дискрет спектрлари» (2017) мавзусидаги илмий тадқиқотлар лойиҳалари доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади Панжарадаги сони иккидан ошмайдиган заррачалар системасига мос бир умумлашган Фридрихс моделининг муҳим спектри ўрнини ҳамда муҳим спектрдан ташқаридаги хос қийматларининг сонини оператор параметрларидан боғлиқлигини кўрсатишдан иборат иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари:

панжарадаги сони иккидан ошмайдиган заррачалар системасига мос, яратувчи ва йўқотувчи операторлар ҳамда нуқтада ва бир қадамда таъсирлашувчи икки заррачали дискрет Шредингер оператори ёрдамида аниқланган бир умумлашган Фридрихс моделининг муҳим спектри ўрнини топиш;

бир ва икки ўлчамли панжарадаги сони иккидан ошмайдиган заррачалар системасига мос, яратувчи ва йўқотувчи операторлар ҳамда нуқтада таъсирлашувчи икки заррачали дискрет Шредингер оператори ёрдамида аниқланган бир умумлашган Фридрихс моделининг муҳим спектр ташқарисида камида битта хос қийматга эга эканлигини кўрсатиш;

ўлчами учдан кам бўлмаган панжарадаги сони иккидан ошмайдиган заррачалар системасига мос, яратувчи ва йўқотувчи операторлар ҳамда нуқтада таъсирлашувчи икки заррачали дискрет Шредингер оператори ёрдамида аниқланган бир умумлашган Фридрихс модели муҳим спектридан ташқаридаги хос қийматининг мавжуд ёки мавжуд эмаслиги оператор параметрларига боғлиқлигини кўрсатиш;

бир ўлчамли панжарадаги сони иккидан ошмайдиган заррачалар системасига мос, яратувчи ва йўқотувчи операторлар ҳамда нуқтада ва бир қадамда таъсирлашувчи икки дискрет Шредингер оператори ёрдамида аниқланган бир умумлашган Фридрихс моделининг муҳим спектрдан қуйида камида битта хос қийматга эга эканлигини ҳамда иккинчи хос қийматнинг мавжуд ёки мавжуд эмаслиги оператор параметрларига боғлиқлигини ўрнатиш;

Тадқиқотнинг объекти Панжарада сони иккитадан ошмайдиган заррачалар системасига мос умумлашган Фридрихс моделидан иборат.

Тадқиқотнинг предмети. Яратувчи ва йўқотувчи операторлар ҳамда нуқтада ва бир қадамда таъсирлашувчи икки заррачали Шредингер оператори ёрдамида аниқланган сони иккидан ошмайдиган заррачалар системасига мос умумлашган Фридрихс моделининг спектрал тадқиқотларидан иборат.

Тадқиқотнинг усуллари. Тадқиқот ишида математик анализ, математик физика, функционал анализ ва комплекс ўзгарувчили функциялар назарияси, чизиқли чегараланган ўз-ўзига қўшма операторлар назарияси усулларидан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

панжарадаги сони иккидан ошмайдиган заррачалар системасига мос, яратувчи ва йўқотувчи операторлар ҳамда нуқтада ва бир қадамда таъсирлашувчи икки заррачали дискрет Шредингер оператори ёрдамида аниқланган бир умумлашган Фридрихс моделининг муҳим спектри ўрни топилган;

бир ва икки ўлчамли панжарадаги сони иккидан ошмайдиган заррачалар системасига мос, яратувчи ва йўқотувчи операторлар ҳамда нуқтада таъсирлашувчи икки заррачали дискрет Шредингер оператори ёрдамида аниқланган бир умумлашган Фридрихс моделининг муҳим спектр ташқарисида камида битта хос қийматга эга эканлиги кўрсатилган;

ўлчами учдан кам бўлмаган панжарадаги сони иккидан ошмайдиган заррачалар системасига мос, яратувчи ва йўқотувчи операторлар ҳамда нуқтада таъсирлашувчи икки заррачали дискрет Шредингер оператори ёрдамида аниқланган бир умумлашган Фридрихс модели муҳим спектридан ташқаридаги хос қийматининг мавжуд ёки мавжуд эмаслиги оператор параметрларига боғлиқлиги кўрсатилган;

бир ўлчамли панжарадаги сони иккидан ошмайдиган заррачалар системасига мос, яратувчи ва йўқотувчи операторлар ҳамда нуқтада ва бир қадамда таъсирлашувчи дискрет Шредингер оператори ёрдамида аниқланган бир умумлашган Фридрихс моделининг муҳим спектрдан қуйида камида битта хос қийматга эга эканлиги ҳамда иккинчи хос қийматнинг мавжуд ёки мавжуд эмаслиги оператор параметрларига боғлиқлиги исботланган;

Тадқиқотнинг амалий натижалари. Умумлашган Фридрихс моделининг хос функциялари ҳақидаги хулосалар қаттиқ жисмлар физикаси ва квант механикасида экспериментал татқиқотларнинг сифат кўрсаткичини аниқлашда ва сонли ҳисоблашларда қўлланилган.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги математик анализ, чизиқли чегараланган ўз-ўзига қўшма операторлар назарияси ва комплекс ўзгарувчили функциялар назарияси усулларидан фойдаланилганлиги ҳамда математик мулоҳазаларнинг қатъийлиги билан асосланган.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти ўз-ўзига қўшма чегараланган операторлар спектрал назарияси, қатиқ жисмлар физикаси, квант майдонлар назариясининг умумлашган Фридрихс модели боғланган ҳолатлари мавжудлиги билан боғлиқ масалаларни ҳал этишда фойдаланиш мумкинлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти олинган илмий натижаларнинг қатиқ жисмлар физикаси соҳасидаги экспериментал тадқиқотлар натижаларини назарий ва қатъий математик асослаш ҳамда янги экспериментлар ўтказишга асос сифатида хизмат қилади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Диссертация тадқиқоти жараёнида олинган илмий натижалар қуйидаги йўналишларда амалиётга жорий қилинган:

бир умумлашган Фридрихс моделининг муҳим ва дискрет спектрлари билан боғлиқ натижаларидан QJ130000.2726.01K82 рақамли грант лойиҳасида дискрет Шредингер операторининг спектрал хоссаларини тадқиқ қилишда фойдаланилган (Малайзия технология университети, 2017 йил 16 ноябрдаги маълумотномаси). Илмий натижанинг қўлланилиши дискрет Шредингер операторининг хос қийматларининг сони топиш имконини берган;

бир умумлашган Фридрихс моделининг дискрет спектрларини мавжудлигини ўрганиш усулидан QJ130000.2726.01K82 рақамли грант лойиҳасида дискрет Шредингер операторининг дискрет спектрини ўрганишда фойдаланилган (Малайзия технология университети, 2017 йил 16 ноябрдаги маълумотномаси). Илмий натижанинг қўлланилиши Шредингер оператори спектрал назариясида муҳим ўрин эгаллаган интеграл операторларнинг хоссаларини ўрганиш имконини берган;

умумлашган Фридрихс моделининг параметларига боғлиқ аналитик хос қийматидан QJ130000.2726.01K82 рақамли грант лойиҳасида икки заррачали Шредингер операторинин боғланган ҳолатларининг мавжудлигини кўрсатиш учун фойдаланилган (Малайзия технология университети, 2017 йил 16 ноябрдаги маълумотномаси). Илмий натижанинг қўлланилиши Шредингер оператори спектрал назариясида муҳим ўрин эгаллаган интеграл операторларига мисол қуриш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари, 11 та илмий-амалий анжуманларда, жумладан 2 та халқаро ва 9 та республика илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Диссертация мавзуси бўйича жами 16 та илмий иш чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий Аттестация комиссиясининг докторлик диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 5 та мақола, жумладан, 1 таси хорижий ва 4 таси республика журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг ҳажми ва тузилиши. Диссертация кириш қисми, учта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан ташкил топган. Диссертациянинг ҳажми 107 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган, мавзу бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг **«Ҳилберт фазосида ўз-ўзига қўшма операторлар ва уларнинг баъзи хоссалари»** деб номланувчи биринчи бобида диссертациянинг асосий натижаларини баён қилишда зарур бўладиган ёрдамчи маълумотлар, чизиқли нормаланган фазолар, ички кўпайтмали фазолар, Ҳилберт фазосида чизиқли чегараланган операторлар, Ҳильберт фазосида тескари операторлар, Ҳилберт фазосида қўшма операторлар, мусбат ва компакт операторлар, операторнинг спектри ҳақидаги таърифлар ҳамда муҳим теоремалар, панжарада сони иккитадан ошмайдиган заррачалар системасига мос Фридрихс моделининг импульс кўриниши келтирилган.

Диссертациянинг **«Панжарадаги сони иккитадан ошмайдиган заррачалар системасига мос бир умумлашган Фридрихс моделининг хос қиймати мавжудлиги»** деб номланувчи иккинчи бобида Ўлчами d бўлган панжарада сони иккитадан ошмайдиган заррачалар системасига мос Фридрихс модели яратувчи ва йўқотувчи операторлар ва нуқтада таъсирлашувчи икки заррачали Шредингер оператори ёрдамида аниқланган операторнинг муҳим спектрдан ташқаридаги хос қийматининг мавжудлик шартлари топилади ва муҳим спектр бўсағалари виртуал сатҳ ёки хос қиймат бўлиши заррачалар квазиимпульсига боғлиқлиги кўрсатилади.

$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ билан $\mathcal{H}_0 = \mathbb{C}^1$ комплекс сонлар Ҳилберт фазоси ва $\mathcal{H}_1 = L^{2,e}(T^d, d\eta)$ - $T^d = (-\pi, \pi]^d$ да модулининг квадрати билан интегралланувчи жуфт функциялар Ҳилберт фазоси тўғри йиғиндисидан иборат Ҳилберт фазосини белгилаймиз, бунда $d\eta$ Хаар ўлчови, яъни

$$\eta(\mathrm{d}p) = \frac{\mathrm{d}^d p}{(2\pi)^d}.$$

$E(k),\ k = (k_1, \ldots, k_d) \in T^d$ − оператор $\mathcal{H}_0$ Ҳилберт фазосида кўпайтириш оператори бўлиб, қуийидагича аниқланган:

$$E(k) f_0 = \varepsilon(k) f_0, \quad f_0 \in \mathcal{H}_0,$$

бунда

$$\varepsilon(k) = \sum_{i=1}^{d} (1 - \cos k_i).$$

$H_{\mu\lambda}(k),\ k\in \mathrm{T}^d,\ \lambda\geq 0, \mu\in R$ оператор $\mathcal{H}_1$ фазода аниқланган нуқтада ва бир қадамда таъсирлашувчи икки заррачали Шредингер оператори бўлиб, қуйидаги формула билан аниқланган:

$$H_{\mu\lambda}(k)=H_0(k)-V_{\mu\lambda}.$$

Қўзғалмас $H_0(k)$ оператор $\varepsilon_k(\cdot)$ функцияга кўпайтириш операторидан иборат, яъни

$$(H_0(k)f_1)(q)=\varepsilon_k(q)f_1(q),\, f_1\in\mathcal{H}_1,$$

бунда

$$\varepsilon_k(q)=\varepsilon\left(\frac{k}{2}-q\right)+\varepsilon\left(\frac{k}{2}+q\right),$$

$V_{\mu\lambda}-$ ўзаро таъсир (қўзғатиш) оператори қуйидаги формула билан аниқланган:

$$(V_{\mu\lambda}f_1)(q)=\int\limits_{\mathrm{T}^d}\sum_{i=1}^{d}\left(\mu+\lambda\cos s_i\cos q_i\right)f_1(s)\eta(\mathrm{d}s),\, f_1\in\mathcal{H}_1,$$

$H_{\gamma\mu\lambda}(k),\quad k\in T^d,\quad \gamma\in R$ оператор $\mathcal{H}$ Ҳилберт фазосида қуйидаги формула ёрдамида аниқланган:

$$H_{\gamma\mu\lambda}(k)\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1(q)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E(k)f_0+C_\gamma^* f_1 \\ C_\gamma f_0+(H_{\mu\lambda}(k)f_1)(q)\end{pmatrix},$$

бунда $(C_\gamma^* f_1)(q)=\gamma(f_1,1)_{\mathcal{H}_1}$ ва $C_\gamma f_0=\gamma(f_0,1)_{\mathcal{H}_0}$ мос равишда йўқотувчи ва яратувчи операторлар.

$H_{\gamma\mu 0}(k)$ операторни $H_{\gamma\mu}(k)$ оператори деб қараб кетамиз.

$H_{\gamma\mu\lambda}(k)$ ва $H_{0\mu\lambda}(k),\ k\in T^d$ операторлар айирмасининг ранги иккига тенг бўлгани учун муҳим спектр турғунлиги ҳақидаги Вейл теоремасига кўра $H_{\gamma\mu\lambda}(k)$ ва $H_{0\mu\lambda}(k)$ операторларнинг муҳим спектрлари устма-уст тушади, яъни

$$\sigma_{ess}(H_{\gamma\mu\lambda}(k))=\sigma_{ess}(H_{0\mu\lambda}(k))=\sigma_{ess}(H_{\mu\lambda}(k))=\sigma(H_0(k))=[\varepsilon_{\min}(k),\varepsilon_{\max}(k)]$$

тенглик ўринли бўлади, бунда

$$\varepsilon_{\min}(k)=\min_{q\in\mathrm{T}^d}\varepsilon_k(q)=2\sum_{i=1}^{d}\left(1-\cos\frac{k^{(i)}}{2}\right),$$

$$\varepsilon_{\max}(k)=\max_{q\in\mathrm{T}^d}\varepsilon_k(q)=2\sum_{i=1}^{d}\left(1+\cos\frac{k^{(i)}}{2}\right).$$

Ҳар бир тайинланган $\gamma\in R,\ \mu\geq 0$ лар учун қуйидаги тўпламларни аниқлаймиз:

$$M_{\gamma\mu,\max}^{\leq}=\{k\in T^d:\gamma^2\leq\mu(\varepsilon_{\max}(k)-\varepsilon(k))\},$$

$$M^{>}_{\gamma\mu,\max}=\{k\in T^d:\gamma^2>\mu(\varepsilon_{\max}(k)-\varepsilon(k))\}.$$

1-*Теорема* . Фараз қилайлик $d=1,2$ ва $\gamma\in R,\ \mu\geq 0$ бўлсин.

а) $\gamma^2+\mu^2>0$ ва $k\in T^d$ бўлсин. У ҳолда $H_{\gamma\mu}(k)$ оператор $(-\infty,\varepsilon_{\min}(k))$ интервалда ягона $E_{L,\gamma\mu}(k)$ хос қийматга эга. Унга мос $f_k=(f_{0,k},f_{1,k})\in\mathcal{H}$ хос вектор

$$f_{0,k}=\frac{-c\gamma}{\varepsilon(k)-E_{L,\gamma\mu}(k)},\quad f_{1,k}(q)=\left(\frac{\gamma^2}{\varepsilon(k)-E_{L,\gamma\mu}(k)}+\mu\right)\frac{c}{\varepsilon_k(q)-E_{L,\gamma\mu}(k)}$$

кўринишга эга ва T^d да аналитик бўлади, бунда $c\neq 0-$ нормалловчи кўпайтувчи.

Бундан ташқари, $E_{L,\gamma\mu}(k):T^d\to R,\ \ k\to E_{L,\gamma\mu}(k)$ акслантириш T^d да жуфт ва аналитик, $f:T^d\to\mathcal{H},\ k\to f_k\in\mathcal{H}$ акслантириш эса T^d даги вектор қийматли аналитик акслантириш бўлади.

б) $\gamma\neq 0$ ва $k\in M^{>}_{\gamma\mu,\max}$ бўлсин. У ҳолда $H_{\gamma\mu}(k)$ оператор $(\varepsilon_{\max}(k),+\infty)$ интервалда ягона $E_{R,\gamma\mu}(k)$ хос қийматга эга. Унга мос $f_k=(f_{0,k},f_{1,k})\in\mathcal{H}$ хос вектор

$$f_{0,k}=\frac{-c\gamma}{\varepsilon(k)-E_{R,\gamma\mu}(k)},\quad f_{1,k}(q)=\left(\frac{\gamma^2}{\varepsilon(k)-E_{R,\gamma\mu}(k)}+\mu\right)\frac{c}{\varepsilon_k(q)-E_{R,\gamma\mu}(k)}$$

кўринишга эга ва $M^{>}_{\gamma\mu,\max}$ да аналитик бўлади, бунда $c\neq 0-$нормалловчи кўпайтувчи.

Бундан ташқари, $E_{R,\gamma\mu}(k):M^{>}_{\gamma\mu,\max}\to R,\ \ k\to E_{R,\gamma\mu}(k)$ акслантириш $M^{>}_{\gamma\mu,\max}$ да жуфт ва аналитик, $f:M^{>}_{\gamma\mu,\max}\to\mathcal{H},\ k\to f_k\in\mathcal{H}$ акслантириш эса $M^{>}_{\gamma\mu,\max}$ даги вектор қийматли аналитик акслантириш бўлади.

в) $k\in M^{\leq}_{\gamma\mu,\max}$ бўлсин. У ҳолда $H_{\gamma\mu}(k)$ оператор $(\varepsilon_{\max}(k),+\infty)$ интервалда хос қийматга эга эмас.

Ҳар бир тайинланган $\gamma\in R,\ \mu<0$ лар учун қуйидаги тўпламларни аниқлаймиз:

$$M^{\leq}_{\gamma\mu,\min}=\{k\in T^d:\gamma^2\leq\mu(\varepsilon_{\min}(k)-\varepsilon(k))\},$$

$$M^{>}_{\gamma\mu,\min}=\{k\in T^d:\gamma^2>\mu(\varepsilon_{\min}(k)-\varepsilon(k))\}.$$

2-*Теорема* . Фараз қилайлик $d=1,2$ ва $\gamma\in R,\ \mu<0$ бўлсин.

а) $k\in T^d$ бўлсин. У ҳолда $H_{\gamma\mu}(k)$ оператор $(\varepsilon_{\max}(k),+\infty)$ интервалда ягона $E_{R,\gamma\mu}(k)$ хос қийматга эга. Унга мос $f_k=(f_{0,k},f_{1,k})\in\mathcal{H}$ хос вектор

$$f_{0,k} = \frac{-c\gamma}{\varepsilon(k) - E_{R,\gamma\mu}(k)}, \quad f_{1,k}(q) = \left(\frac{\gamma^2}{\varepsilon(k) - E_{R,\gamma\mu}(k)} + \mu\right)\frac{c}{\varepsilon_k(q) - E_{R,\gamma\mu}(k)}$$

кўринишга эга ва T^d да аналитик бўлади, бунда $c \neq 0$ – нормалловчи кўпайтувчи.

Бундан ташқари, $E_{R,\gamma\mu}(k): T^d \to R, \quad k \to E_{R,\gamma\mu}(k)$ акслантириш T^d да жуфт ва аналитик, $f: T^d \to \mathcal{H}, \ k \to f_k \in \mathcal{H}$ акслантириш эса T^d даги вектор қийматли аналитик акслантириш бўлади.

б) $\gamma \neq 0$ ва $k \in M^{>}_{\gamma\mu,\min}$ бўлсин. У ҳолда $H_{\gamma\mu}(k)$ оператор $(-\infty, \varepsilon_{\min}(k))$ интервалда ягона $E_{L,\gamma\mu}(k)$ хос қийматга эга. Унга мос $f_k = (f_{0,k}, f_{1,k}) \in \mathcal{H}$ хос вектор

$$f_{0,k} = \frac{-c\gamma}{\varepsilon(k) - E_{L,\gamma\mu}(k)}, \quad f_{1,k}(q) = \left(\frac{\gamma^2}{\varepsilon(k) - E_{L,\gamma\mu}(k)} + \mu\right)\frac{c}{\varepsilon_k(q) - E_{L,\gamma\mu}(k)}$$

кўринишга эга ва $M^{>}_{\gamma\mu,\min}$ да аналитик бўлади, бунда $c \neq 0$ – нормалловчи кўпайтувчи.

Бундан ташқари, $E_{L,\gamma\mu}(k): M^{>}_{\gamma\mu,\min} \to R, \quad k \to E_{L,\gamma\mu}(k)$ акслантириш $M^{>}_{\gamma\mu,\min}$ да жуфт ва аналитик, $f: M^{>}_{\gamma\mu,\min} \to \mathcal{H}, \ k \to f_k \in \mathcal{H}$ акслантириш эса $M^{>}_{\gamma\mu,\min}$ даги вектор қийматли аналитик акслантириш бўлади.

в) $k \in M^{\leq}_{\gamma\mu,\min}$ бўлсин. У ҳолда $H_{\gamma\mu 0}(k)$ оператор $(-\infty, \varepsilon_{\min}(k))$ интервалда хос қийматга эга эмас.

$\Pi^{(3)}_{\chi}$ - шундай $k = (k^{(1)}, \ldots, k^{(d)}) \in T^d$ векторларнинг тўпламики, уларнинг ҳеч бўлмаганда учта координатаси χ дан фарқли ва $\tilde{\Pi}_{\xi,\eta}$ - шундай $k = (k^{(1)}, \ldots, k^{(d)}) \in T^d$ векторларнинг тўпламики, уларнинг барча координаталари ё ξ га, ё η га тенг. $\tilde{\Pi}^{\perp}{}_{\xi,\eta}$ орқали шундай $k = (k^{(1)}, \ldots, k^{(d)}) \in T^d$ векторлар тўпламини белгилаймизки, уларнинг ҳеч бўлмаганда битта координатаси ξ га ҳам, η га ҳам тенг эмас, яъни $\tilde{\Pi}^{\perp}{}_{\xi,\eta} = T^d \setminus \tilde{\Pi}_{\xi,\eta}$.

3-Теорема. $d \geq 3$ бўлсин. У ҳолда ихтиёрий $\gamma \neq 0, \ \ \mu \geq 0$ ва $k \in \tilde{\Pi}_{0,\pi}$ ларда $H_{\gamma\mu}(k)$ оператор $\varepsilon_{\min}(k)$ дан қуйида ётувчи ягона хос қийматга эга.

4-Теорема. $d \geq 3, \ \ \gamma \neq 0$ ва $\mu \geq 0$ бўлсин. У ҳолда қуйидаги тасдиқлар ўринли:

а) Агар $k \in \tilde{\Pi}_{0,\pi} \setminus \{\vec{\pi}\}$ бўлса, бунда $\vec{\pi} = (\pi, \ldots, \pi)$, яъни унинг координаталарининг ҳар бири ё 0 га, ё π га тенг бўлса у ҳолда $z = \varepsilon_{\min}(k)$ сони $H_{\gamma\mu}(k)$ операторнинг хос қиймати ҳам, виртуал сатҳи ҳам бўлмайди.

б) Агар $k=\vec{\pi}=(\pi,...,\pi)$ бўлса, у ҳолда $z=\varepsilon_{\min}(k)$ сони $H_{\gamma\mu}(k)$ операторнинг чексиз каррали хос қиймати бўлади. Бундан ташқари, унга мос барча хос векторлар $1\in\mathcal{H}_1$ бирлик векторга ортогонал бўлади.

Ҳар бир тайинланган $k\in T^d$ учун $C\setminus[\varepsilon_{\min}(k),\varepsilon_{\max}(k)]$ даги аналитик функция (Фредгольм детерминанти) ни қуйидагича аниқлаймиз

$$\Delta_{\gamma\mu}(k;z)=1-\left[\frac{\gamma^2}{\varepsilon(k)-z}+\mu\right]a(k,z).$$

$d\geq 3$ бўлсин. У ҳолда ихтиёрий $k\in\Pi_{\pi}^{(3)}\cap\tilde{\Pi}^{\perp}{}_{0,\pi}$ учун қуйидаги чекли

$$\Delta_{\gamma\mu}(k)=\lim_{z\to\varepsilon_{\min}(k)-}\Delta_{\gamma\mu}(k;z)=\Delta_{\gamma\mu}(k;\varepsilon_{\min}(k))$$

лимит мавжуд.

Қуйидаги тўпламларни киритамиз:

$$G_{\gamma\mu}^{0}=\{k\in\Pi_{\pi}^{(3)}\cap\tilde{\Pi}^{\perp}{}_{0,\pi}:\Delta_{\gamma\mu}(k)=0\},$$
$$G_{\gamma\mu}^{<}=\{k\in\Pi_{\pi}^{(3)}\cap\tilde{\Pi}^{\perp}{}_{0,\pi}:\Delta_{\gamma\mu}(k)<0\},$$
$$G_{\gamma\mu}^{>}=\{k\in\Pi_{\pi}^{(3)}\cap\tilde{\Pi}^{\perp}{}_{0,\pi}:\Delta_{\gamma\mu}(k)>0\}.$$

5-*Теорема.* $d\geq 3$ бўлсин. У ҳолда

а) $\gamma^2+\mu^2>0,\quad k\in\Pi_{\pi}^{(3)}\cap\tilde{\Pi}^{\perp}{}_{0,\pi}$ ва $\Delta_{\max}(\gamma\mu)<0$ бўлсин, у ҳолда $G_{\gamma\mu}^{<}=\Pi_{\pi}^{(3)}\cap\tilde{\Pi}^{\perp}{}_{0,\pi}$ бўлади.

б) Ихтиёрий $k\in G_{\gamma\mu}^{<}$ учун $H_{\gamma\mu}(k)$ оператор $(-\infty,\varepsilon_{\min}(k))$ интервалда ягона $E_{\gamma\mu}(k)<\varepsilon_{\min}(k)$ хос қийматга эга. Унга мос $f_k=(f_{0,k},f_{1,k})\in\mathcal{H}$ хос вектор

$$f_{0,k}=\frac{-c\gamma}{\varepsilon(k)-E_{\gamma\mu}(k)},\quad f_{1,k}(q)=\left(\frac{\gamma^2}{\varepsilon(k)-E_{\gamma\mu}(k)}+\mu\right)\frac{c}{\varepsilon_k(q)-E_{\gamma\mu}(k)},$$

кўринишга эга ҳамда $G_{\gamma\mu}^{<}$ да аналитик, бунда $c\neq 0-$ нормалловчи кўпайтувчи. Бунда $E_{\gamma\mu}(\cdot)$ $G_{\gamma\mu}^{<}$ даги жуфт аналитик функция. $f:G_{\gamma\mu}^{<}\to\mathcal{H}$, $k\to f_k\in\mathcal{H}$ акслантириш вектор қийматли аналитик акслантириш бўлади.

в) $\gamma^2+\mu^2>0$ ва $k\in G_{\gamma\mu}^{0}$ бўлсин. У ҳолда $z=\varepsilon_{\min}(k)$ сони $k\in\left[\Pi_{d-3,\pi}\cup\Pi_{d-4,\pi}\right]\cap\tilde{\Pi}^{\perp}{}_{0,\pi}$ да $H_{\gamma\mu}(k)$ операторнинг виртуал сатҳи ($k\in\Pi_{\pi}^{(5)}\cap\tilde{\Pi}^{\perp}{}_{0,\pi}$ да хос қиймати) бўлади. Унга мос f_k виртуал (мос равишда боғланган) ҳолат $f_k=(f_{0,k},f_{1,k})$ кўринишда бўлади,

$$f_{0,k}=\frac{-c\gamma}{\varepsilon(k)-\varepsilon_{\min}(k)},\quad f_{1,k}(q)=\left(\frac{\gamma^2}{\varepsilon(k)-\varepsilon_{\min}(k)}+\mu\right)\frac{c}{\varepsilon_k(q)-\varepsilon_{\min}(k)},$$

бунда $c\neq 0-$нормалловчи кўпайтувчи.

г) $k \in G^0_{\gamma\mu} \cup G^>_{\gamma\mu}$ бўлсин. У ҳолда $H_{\gamma\mu}(k)$ оператор $\varepsilon_{\min}(k)$ дан қуйида ётувчи хос қийматга эга эмас.

$d \ge 3$ бўлсин. У ҳолда ихтиёрий $k \in \Pi^{(3)}_\pi$ учун

$$\Delta_{\gamma\mu}(k) = \lim_{z \to \varepsilon_{\max}(k)+} \Delta_{\gamma\mu}(k;z) = \Lambda_{\gamma\mu}(k;\varepsilon_{\max}(k))$$

тенглик ўринли.

Қуйидаги тўпламларни киритамиз:

$$M^0_{\gamma\mu} = \{k \in \Pi^{(3)}_\pi \cap T^d : \Lambda_{\gamma\mu}(k) = 0\},$$
$$M^<_{\gamma\mu} = \{k \in \Pi^{(3)}_\pi \cap T^d : \Lambda_{\gamma\mu}(k) < 0\},$$
$$M^>_{\gamma\mu} = \{k \in \Pi^{(3)}_\pi \cap T^d : \Lambda_{\gamma\mu}(k) > 0\}.$$

6-Теорема . $d \ge 3$ *ва* $\gamma \in R, \mu \le 0$ *бўлсин.* У ҳолда

а) Ихтиёрий $k \in M^<_{\gamma\mu}$ ларда $H_{\gamma\mu}(k)$ оператор $(\varepsilon_{\max}(k), +\infty)$ интервалда ягона $E_{\gamma\mu}(k)$ хос қийматга эга бўлади ва бу хос қийматга мос хос вектор $f_k = (f_{0,k}, f_{1,k}) \in \mathcal{H}$ қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$f_{0,k} = \frac{c\gamma}{E_{\gamma\mu}(k) - \varepsilon(k)}, \quad f_{1,k}(q) = \left(\frac{\gamma^2}{E_{\gamma\mu}(k) - \varepsilon(k)} + \mu\right)\frac{c}{E_{\gamma\mu}(k) - \varepsilon_k(q)}$$

ва у $M^<_{\gamma\mu}$ да аналитик бўлади, бунда $c \ne 0-$ нормалловчи кўпайтувчи. Бу ҳолда $E_{\gamma\mu}(\cdot)$ функция $M^<_{\gamma\mu}$ да жуфт аналитик функция бўлади. $f : M^<_{\gamma\mu} \to \mathcal{H}$, $k \to f_k \in \mathcal{H}$ акслантириш вектор қийматли аналитик акслантириш бўлади.

б) $\gamma^2 + \mu^2 > 0$ ва $k \in M^0_{\gamma\mu}$ бўлсин. У ҳолда $z = \varepsilon_{\max}(k)$ сони $k \in [\Pi_{d-3,\pi} \cup \Pi_{d-4,\pi}] \cap \mathrm{T}^d$ ларда $H_{\gamma\mu}(k)$ операторнинг виртуал сатҳи(мос равишда $d \ge 5$ ва $k \in \Pi^{(3)}_\pi \cap \mathrm{T}^d$ ларда хос қиймати) бўлади. Унга мос $f_k = (f_{0,k}, f_{1,k})$ виртуал (мос равишда боғланган) ҳолат қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$f_{0,k} = \frac{c\gamma}{\varepsilon_{\max}(k) - \varepsilon(k)}, \quad f_{1,k}(q) = \left(\frac{\gamma^2}{\varepsilon_{\max}(k) - \varepsilon(k)} + \mu\right)\frac{c}{\varepsilon_{\max}(k) - \varepsilon_k(q)},$$

бунда $c \ne 0-$ нормаловчи кўпайтувчи.

в) $k \in M^0_{\gamma\mu} \cup M^>_{\gamma\mu}$ бўлсин. У ҳолда $H_{\gamma\mu}(k)$ оператор $(\varepsilon_{\max}(k), +\infty)$ интервалда хос қийматга эга бўлмайди.

Диссертациянинг **«Панжарадаги сони иккидан ошмайдиган заррачалар системасига мос бир умумлашган Фридрихс моделининг муҳим спектрдан қуйидаги хос қийматлари сони»** деб номланувчи учинчи бобида бир ўлчамли панжарада сони иккитадан ошмайдиган заррачалар системасига мос Фридрихс модели яратувчи ва йўқотувчи операторлар ҳамда нуқтада ва бир қадамда таъсирлашувчи икки заррачали Шредингер оператори ёрдамида аниқланган операторнинг муҳим спектридан қуйидаги хос қийматлари сони ва жойлашиш ўрнинг ўзгариши заррачалар квазиимпульси ва ўзаро тасир энергиялари, ҳамда яратувчи ва йўқотувчи операторларга боғлиқлиги кўрсатилади.

7-Теорема. $d=1$, $\gamma^2+\mu^2>0$ ва $\lambda>0$ бўлсин. У ҳолда ихтиёрий $k\in T^d$ лар учун $H_{\gamma\mu}$ ва $H_{00\lambda}$ операторлар $(-\infty,\varepsilon_{min}(k))$ интервалда мос равишда ягона $E_{\gamma\mu}(k)$ ва $E_{00\lambda}(k)$ хос қийматга эга.

Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$E_{min}(\gamma,\mu,\lambda,k)=\min\{E_{\gamma\mu}(k),E_{00\lambda}(k)\},$$

$$E_{max}(\gamma,\mu,\lambda,k)=\max\{E_{\gamma\mu}(k),E_{00\lambda}(k)\}$$

Ҳар бир тайинланган $\gamma\in R,\mu,\lambda\geq 0$ лар учун $T^1=(-\pi,\pi]$ да қуйидаги

$$F_{\gamma\mu\lambda}(k)=\gamma^2(\lambda-2\cos\frac{k}{2})+2\cos\frac{k}{2}(1-\cos\frac{k}{2})[\mu\lambda-2\cos\frac{k}{2}(\mu+\lambda)]$$

жуфт функцияни аниқлаймиз. Тайинланган $\gamma\in R$ ва $\mu,\lambda\geq 0$ лар учун қуйидаги тўпламларни киритамиз:

$$G^{=}_{\gamma\mu\lambda}=\{k\in T^1:F_{\gamma\mu\lambda}(k)=0\},$$

$$G^{<}_{\gamma\mu\lambda}=\{k\in T^1:F_{\gamma\mu\lambda}(k)<0\},$$

$$G^{>}_{\gamma\mu\lambda}=\{k\in T^1:F_{\gamma\mu\lambda}(k)>0\}.$$

8-Теорема. *a*) $k\in G^{=}_{\gamma\mu\lambda}\cup G^{<}_{\gamma\mu\lambda}$ бўлсин. У ҳолда $H_{\gamma\mu\lambda}(k)$ оператор $(-\infty,\varepsilon_{min}(k))$ интервалда ягона $E^{(1)}_{\gamma\mu\lambda}(k)$ хос қийматга эга. Бунда $E^{(1)}_{\gamma\mu\lambda}:G^{=}_{\gamma\mu\lambda}\cup G^{<}_{\gamma\mu\lambda}\to R,\quad k\to E^{(1)}_{\gamma\mu\lambda}(k)$ функция $G^{=}_{\gamma\mu\lambda}\cup G^{<}_{\gamma\mu\lambda}$ даги жуфт, ҳақиқий-аналитик бўлади ва қуйидаги $E^{(1)}_{\gamma\mu\lambda}(k)<E_{min}(\gamma,\mu,\lambda,k)$ тенгсизликни қаноатлантиради. Мос $f_k\in\mathcal{H}$ хос вектор $f_k=(f_{0,k},f_{1,k})\in\mathcal{H}$ кўринишга эга,

$$f_{0,k}=\frac{-c_1\gamma}{\varepsilon(k)-E^{(1)}_{\gamma\mu\lambda}(k)},$$

$$f_{1,k}(q)=\left(\frac{\gamma^2}{\varepsilon(k)-E^{(1)}_{\gamma\mu\lambda}(k)}+\mu\right)\frac{c_1}{\varepsilon_k(q)-E^{(1)}_{\gamma\mu\lambda}(k)}+\frac{\lambda c_2\cos q}{\varepsilon_k(q)-E^{(1)}_{\gamma\mu\lambda}(k)}$$

ва $G^{=}_{\gamma\mu\lambda}\cup G^{<}_{\gamma\mu\lambda}$ да аналитик, бунда c_1,c_2 – нормаловчи кўпайтувчилар. Натижада, $f:G^{=}_{\gamma\mu\lambda}\cup G^{<}_{\gamma\mu\lambda}\to\mathcal{H},\quad k\to f_k\in\mathcal{H}$ акслантириш вектор-қийматли аналитик бўлади.

b) $k\in G^{>}_{\gamma\mu\lambda}$ бўлсин. У ҳолда $H_{\gamma\mu\lambda}(k)$ оператор $(-\infty,\varepsilon_{min}(k))$ интервалда иккита $E^{(1)}_{\gamma\mu\lambda}(k)$ ва $E^{(2)}_{\gamma\mu\lambda}(k)$ хос қийматларга эга бўлади. Бунда $E^{(j)}_{\gamma\mu\lambda}:G^{>}_{\gamma\mu\lambda}\to R,\quad k\to E^{(j)}_{\gamma\mu\lambda}(k), j=1,2$ функция $G^{>}_{\gamma\mu\lambda}$ да жуфт, ҳақиқий-аналитик бўлади ва

$$E^{(1)}_{\gamma\mu\lambda}(k) < E_{\min}(\gamma,\mu,\lambda,k) \le E_{\max}(\gamma,\mu,\lambda,k) < E^{(2)}_{\gamma\mu\lambda}(k)$$

тенгсизликлар бажарилади.

$E^{(j)}_{\gamma\mu\lambda}(k),\ j=1,2$ хос қийматга мос $f^{(j)}_k \in \mathcal{H}$ хос вектор

$$f_{0,k} = \frac{-c_j\gamma}{\varepsilon(k)-E^{(j)}_{\gamma\mu\lambda}(k)},$$

$$f_{1,k}(q) = \left(\frac{\gamma^2}{\varepsilon(k)-E^{(j)}_{\gamma\mu\lambda}(k)} + \mu\right)\frac{c_j}{\varepsilon_k(q)-E^{(j)}_{\gamma\mu\lambda}(k)} + \frac{\lambda c_2 \cos q}{\varepsilon_k(q)-E^{(j)}_{\gamma\mu\lambda}(k)},$$

кўринишга эга бўлади, бунда $c_1, c_2 -$ нормалловчи кўпайтувчилар.

Бундан ташқари $f^{(j)}: T \to \mathcal{H},\quad k \to f^k_j \in \mathcal{H}, j=1,2$ акслантириш $G^{>}_{\gamma\mu\lambda}$ даги вектор қийматли аналитик акслантириш бўлади.

ХУЛОСА

Диссертация иши панжарада сони иккитадан ошмайдиган заррачалар системасига мос Фридрихс моделининг муҳим ва дискрет спектрларини ўрганишга бағишланган.

Диссертацияда олинган илмий натижалар асосида қуйидаги хулосаларга келинди:

1. Яратувчи ва йўқотувчи операторлар, нуқтада ва бир қадамда таъсирлашувчи икки заррачали Шредингер оператори ёрдамида аниқланган панжарадаги сони иккидан ошмайдиган заррачалар системасига мос бир умумлашган Фридрихс моделининг муҳим спектри ўрни топилган;

2. Бир ва икки ўлчамли панжарадаги сони иккидан ошмайдиган заррачалар системасига мос ва нуқтада таъсирлашувчи икки заррачали Шредингер оператори ёрдамида аниқланган бир умумлашган Фридрихс моделининг муҳим спектр ташқарисида камида битта хос қийматга эга эканлигин кўрсатилган;

3. Ўлчами учдан кам бўлмаган панжарада нуқтада таъсирлашувчи икки заррачали Шредингер оператори ёрдамида аниқланган сони иккидан ошмайдиган заррачалар системасига мос умумлашган Фридрихс моделининг муҳим спектрдан ташқаридаги хос қийматининг мавжуд ёки мавжуд эмаслиги оператор параметрларига боғлиқлиги кўрсатилган;

4. Яратувчи ва йўқотувчи операторлар, нуқтада ва бир қадамда таъсирлашувчи икки заррачали Шредингер оператори ёрдамида аниқланган бир ўлчамли панжарадаги сони иккидан ошмайдиган заррачалар системасига мос бир умумлашган Фридрихс моделининг муҳим спектрдан қуйида камида битта хос қийматга эга эканлигини ҳамда иккинчи хос қийматнинг мавжуд ёки мавжуд эмаслиги оператор параметрига боғлиқлиги исботланган;

5. Қаралаётан операторнинг хос қиймат ва хос функциялари квазиимпульснинг аналитик функцияси эканлиги кўрсатилган;

Олинган натижалар қаттиқ жисмлар физикаси ва квант майдонлар назарияси экспериментал татқиқотларнинг сифат кўрсаткичини аниқлашда ҳамда математик физикада қўлланилиши мумкин.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ PhD.27.06.2017.FM.02.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD) ПРИ САМАРКАНДСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

САМАРКАНДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ЛАТИПОВ ШЕРДОР МИРЗОЕВИЧ

СУЩЕСТВЕННЫЙ И ДИСКРЕТНЫЙ СПЕКТРЫ ОДНОЙ ОБОБЩЕННОЙ МОДЕЛИ ФРИДРИХСА

01.01.01 – Математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD) ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

г. Самарканд – 2017 год

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2017.2.PhD/FM51

Диссертация выполнена в Самаркандском государственном университете.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (www.samdu.uz) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (www.ziyonet.uz).

Научный руководитель:	**Лакаев Саидахмат Норжигитович** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Эшкабилов Юсуп Халбаевич** доктор физико-математических наук
	Кучкоров Эркин Иброхимович кандидат физико-математических наук
Ведущая организация:	**Институт Математики**

Защита диссертации состоится «____» _____________2017 года в ____ часов на заседании Научного совета PhD.27.06.2017.FM.02.01 при Самаркандском государственном университете. (Адрес: 140104, г. Самарканд, Университетский бульвар, 15. Тел.: (99866)231-06-32, факс: (99866) 235-19-38, e-mail: patent@samdu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Самаркандского государственного университета (зарегистрирована за №_____). (Адрес: 140104, г. Самарканд, Университетский бульвар, 15. Тел.: (99866)231-06-32, факс: (99866) 235-19-38).

Автореферат диссертации разослан «____» _______________2017 года.
(протокол рассылки №________ от «____» _______________2017 года).

А.С. Солеев
Председатель Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., профессор

А.М. Халхужаев
Ученый секретарь Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н.

И.А. Икромов
Замиститель председателья научного семинара при Научном совете по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., профессор

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии(PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Многие научно-прикладные исследования, проводимые на мировом уровне, приводятся к исследованию обобщенных моделей Фридрихса, соответствующих системе с несохраняющимся числом частиц на решетке. Модель Бозе-Хаббарда, в частности, двухчастичные операторы Шредингера на решетке, используемые для описания существования устойчивых сложных объектов в упорядоченных средах, является теоретическим обоснованием экспериментального наблюдения и теоретической базой для применения. Поэтому развитие исследования операторов Шредингера, соответствующих системам частиц на решетке, и обобщенных моделей Фридрихса, которые встречаются в моделях физики твердого тела, а также квантовой теории поля и спектральной теории самосопряженных операторов, является одним из приоритетных направлений.

В нашей стране за годы независимости большое внимание уделялось и продолжает уделяться направлениям, имеющим фундаментальное и прикладное значения современного математического анализа. В частности, особое внимание было уделено исследованию моделей Фридрихса, соответствующих системам с сохраняющимся и несохраняющимся числом частиц. Значительные результаты были достигнуты по нахождения непрерывного спектра, собственных значений, появления и поглощения собственных значений, число собственных значений обобщенных моделей Фридрихса. Проведение научных исследований по приоритетным направлениям математических наук, на уровне международных стандартов по математике, физике, прикладной математике, обозначено основной задачей и направлением деятельности[1]. Развитие квантовой теории поля и спектральной теории линейных операторов играет важную роль в исполнении постановления.

В настоящее время в мире одной из важнейших задач математического анализа и его приложения является задача об исследовании спектров и резонансов самосопряженных операторов. Следует отметить, что эта задача имеет тесную связь с исследованием спектров и резонансов обобщенной модели Фридрихса, соответствующей системе, состоящей из не более чем двух частиц на решетке. В частности, в настоящее время актуальную роль играет определение обобщенной модели Фридрихса, соответствующей системе, состоящей из не более чем двух частиц на решетке, с помощью двухчастичного оператора Шредингера с контактным взаимодейтвием, как самосопряженный ограниченный оператор и исследование её спектральных свойств. В связи с этим реализация целевых научных исследований в следующих направлениях является одной из важных задач: описывать местонахождение существенного спектра обобщенной модели Фридрихса,

[1] Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан от 18 мая 2017 года №292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений академии наук Республики Узбекистан»

соответствующей системе состоящей из не более чем двух частиц на решетке; устанавливать число собственных значений вне существенного спектра в зависимости от параметров оператора и размерности рассматриваемого пространства.

Эта диссертация, в определенной степени, служит осуществлению задач, обозначенных в Постановлениях Президента Республики Узбекистан №-ПП-916 «О дополнительных мерах по стимулированию внедрения инновационных проектов и технологий в производство» от 15 июля 2008 года, №-ПП-2789 «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности» от 17 февраля 2017 года и №-УП-4947 «О стратегии действий по дальнейшему развитию Республики Узбекистан» от 8 февраля 2017 года а также в других нормативно-правовых актах по данной деятельности.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Основные задачи атомной и молекулярной физики, физики твердого тела, математической физики и квантовой теории поля приводятся к изучению спектральных свойств специального класса линейных ограниченных самосопряженных операторов, так называемых моделями Фридрихса и операторами Шредингера.

Впервые К.О. Фридрихсом был введен, в качестве модели теории возмущений самосопряженных операторов, оператор умножения на независимую переменную и его возмущение с помощью интегрального оператора. Позднее, в работах российских ученых О.А.Ладыженской и Л.Д.Фаддеева этот оператор назывался моделью Фридрихса и задача изучения оператора Шредингера приведена к задаче изучения модели Фридрихса. Поскольку, кратность непрерывного спектра модели Фридрихса постоянная, обобщенная модель Фридрихса введена С.Н.Лакаевом, когда кратность непрерывного спектра непостоянная. Спектральные свойства этой модели, т.е. непрерывный спектр, собственные значения и резонансы, появление и поглощение собственных значений и конечность числа собственных значений изучены в работах Р.А.Минлоса, С.Н.Лакаева, Ж.И.Абдуллаева, С.А.Степена, С.Албеверио, Е.Л.Лакштанова, Э.Р.Акчурина, И.А.Икромова, Ф.Шарипова, Ю.Эшкобилова и Т.Х.Расулова.

В работах С.Н.Лакаева, Ж.И.Абдуллаева изучены собственные значения и резонансы обобщенной модели Фридрихса системы, состоящей из не более двух частиц, и доказана ограниченность их числа.

В работах С.А.Степена и М.Э.Муминова изучены спектральные свойства несамосопряженной модели Фридрихса, в частности, установлены условия ограниченности числа собственных значений. В настоящее время развитие исследования спектральных свойств обобщенной модели Фридрихса является одним из существенных задач.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами высшего учебного заведения, в которой выполняется диссертация. Диссертационная работа выполнена в соответствии с плановой темой научно-исследовательских работ ФА-Ф1-Ф045 «Гамильтонианы систем нескольких частиц на решетке. Спектр и резонансы» Самаркандского отделения АН РУз (2007-2011 гг.), Ф4-ФА-Ф079 «Спектральный анализ гамильтонианов систем с несохраняющимся ограниченным числом частиц на решетке» (2012-2016 гг.) и ОТ-Ф4-66 «Модели системы с ограниченным числом частиц на решетке. Существенный и дискретный спектры операторов энергии» (2017 г.) Самаркандского государственного университета.

Целью исследования является изучение местонахождения существенного спектра и число собственных значений вне существенного спектра одной обобщенной модели Фридрихса, соответствующей системе, состоящей из не более чем двух частиц на решетке, в зависимости от параметров оператора.

Задачи исследования:

- изучить местоположение существенного спектра одной обобщенной модели Фридрихса, соответствующей системе, состоящей из не более чем двух частиц на решетке, определенной с помощью операторов рождения и уничтожения, а также двухчастичного дискретного оператора Шредингера с контактным взаимодействием и взаимодействием на соседних узлах;

- показать существование по крайней мере одного собственного значения, вне существенного спектра, одной обобщенной модели Фридрихса, ассоциированной системе, состоящей из не более чем двух частиц на одномерной и двухмерной решетках, определенной с помощью операторов рождения и уничтожения, а также двухчастичного дискретного оператора Шредингера с контактным взаимодействием;

- установить, наличие или же, отсутствие собственного значения вне существенного спектра, обобщенной модели Фридрихса, ассоциированной системе, состоящей из не более двух частиц на решетке размерности не меньше трех, определенной с помощью операторов рождения и уничтожения, а также двухчастичного дискретного оператора Шредингера с контактным взаимодействием, в зависимости от параметров оператора;

- доказать существование по крайней мере одного собственного значения вне существенного спектра, и наличие или отсутствие второго собственного значения одной обобщенной модели Фридрихса, ассоциированной системе, состоящей из не более двух частиц на одномерной и двухмерной решетках, определенной с помощью операторов рождения и уничтожения, а также двухчастичного дикретного оператора Шредингера с контактным взаимодействием и взаимодействием на соседних узлах, в зависимости от параметров оператора.

Объект исследования. Обобщенная модель Фридрихса, ассоциированная системе, состоящей из не более двух частиц на решетке.

Предмет исследования. Спектральный анализ обобщенной модели Фридрихса, ассоциированной системе, состоящей из не более двух частиц, взаимодействующихся с помощью операторов рождения и уничтожения, а также двухчастичного оператора Шредингера, взаимодействующего контактно и на соседних узлах решетки.

Методы исследования. В диссертационной работе использованы методы математического анализа, математической физики, функционального анализа, теории функций комплексного переменного и теории линейных ограниченных самосопряженных операторов.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

Изучено местоположение существенного спектра одной обобщенной модели Фридрихса, соответствующей системе, состоящей из не более чем двух частиц на решетке, определенной с помощью операторов рождения и уничтожения, а также двухчастичного дискретного оператора Шредингера с контактным взаимодействием и взаимодействием на соседних узлах.

Показано существование по крайней мере одного собственного значения вне существенного спектра одной обобщенной модели Фридрихса, ассоциированной системе, состоящей из не более чем двух частиц на одномерной и двухмерной решетках, определенной с помощью операторов рождения и уничтожения, а также двухчастичного дискретного оператора Шредингера с контактным взаимодействием.

Установлено наличие или же, отсутствие собственного значения вне существенного спектра, обобщенной модели Фридрихса, ассоциированной системе, состоящей из не более двух частиц на решетке размерности не меньше трех, определенной с помощью операторов рождения и уничтожения, а также двухчастичного дискретного оператора Шредингера с контактным взаимодействием, в зависимости от параметров оператора.

Доказано существование по крайней мере одного собственного значения вне существенного спектра, и наличие или отсутствие второго собственного значения одной обобщенной модели Фридрихса, ассоциированной системе, состоящей из не более двух частиц на одномерной и двухмерной решетках, определенной с помощью операторов рождения и уничтожения, а также двухчастичного дискретного оператора Шредингера, с контактным взаимодействием и взаимодействием на соседних узлах, в зависимости от параметров оператора.

Практические результаты исследования состоят в возможности применения выводов о собственных функциях обобщенной модели Фридрихса при исследовании качественных свойств экспериментальных наблюдений и численных вычислений в физике твердого тела и квантовой механики.

Достоверность результатов исследования обоснована строгостью математических рассуждений и использованием методов математического анализа, теории линейных ограниченных самосопряженных операторов и теории функций комплексного переменного.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научное значение результатов исследования заключается в том, что они могут быть использованы в спектральной теории ограниченных самосопряженных операторов, физике твердого тела, при решениях задач квантовой теории поля, связанных с существованием связанных состояний обобщенной модели Фридрихса.

Практическая значимость диссертации состоит в том, что результаты диссертации, могут служить теоретической и строго математической основой результатов экспериментальных наблюдений и основой проведения новых экспериментов в физике твердого тела.

Внедрение результатов исследования. Полученные в диссертации результаты были использованы в следующих научно-исследовательских проектах:

результаты, связанные с существенным и дискретным спектрами одной обобщенной модели Фридрихса, использованы в исследованиях гранта QJ130000.2726.01K82, при исследовании спектральных свойств дискретного оператора Шредингера (Университет технологии Малайзии, справка от 16 ноября 2017 года). Применение этих научных результатов дало возможность нахождения числа собственных значений;

методы исследования существования дискретных спектров одной обобщенной модели Фридрихса, использованы в исследованиях гранта QJ130000.2726.01K82, для изучения дискретного спектра дискретного оператора Шредингера (Университет технологии Малайзии, справка от 16 ноября 2017 года). Применение этих научных результатов дало возможность исследования свойств интегральных операторов, играющую важную роль в спектральной теории операторов Шредингера;

аналитические собственные значения, зависящие от параметров, обобщенной модели Фридрихса, использовано в исследованиях гранта QJ130000.2726.01K82, для показания существования связанных состояний двухчастичного оператора Шредингера (Университет технологии Малайзии, справка от 16 ноября 2017 года). Применение этих научных результатов дало возможность составить примеры интегральных операторов, играющую важную роль в спектральной теории операторов Шредингера.

Апробация результатов исследования. Результаты данного исследования были обсуждены на 11 научно-практических конференциях, в том числе на 2 международных и 9 республиканских научно - практических конференциях.

Публикация результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 16 научных работ, из них 5 входят в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты докторских диссертаций, в том числе 1 опубликована в зарубежном журнале и 4 – в республиканских научных изданиях.

Объём и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 107 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснованы актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведен обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В первой главе диссертации, названной **«Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве и некоторые их свойства»**, приведены необходимые предварительные сведения, определения и теоремы о линейных нормированных пространствах, пространствах со скалярными произведениями, линейных ограниченных операторов в гильбертовом пространстве, самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве, положительных и компактных операторов, спектрах операторов, которые будут использованы при изложении результатов диссертации, а так же, импульсное представление одной модели Фридрихса, ассоциированной системой не более двух частиц на решетке.

Во второй главе диссертации, названной **«Существование собственного значения одной обобщенной модели Фридрихса, соответствующей системе, состоящей из не более двух частиц на решетке»**, найдены условия существования собственного значения вне существенного спектра модели Фридрихса, ассоциированной системе, состоящей из не более двух частиц на $d-$ мерной решетке, взаимодействующихся с помощью операторов рождения и уничтожения а также двухчастичного оператора Шредингера, взаимодействующего с помощью контактных потенциалов и в соседних узлах, и установлено что, что пороги существенного спектра являются либо виртуальным уровнем, либо собственным значением в зависимости от квазиимпульса частиц.

Обозначим через $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ - гильбертово пространство, состоящее из прямой суммы комплексного гильбертова пространства $\mathcal{H}_0 = C^1$ и гильбертова пространства $\mathcal{H}_1 = L^{2,e}(T^d, d\eta)$ -чётных квадратично интегрируемых функций на $T^d = (-\pi, \pi]^d$, где $d\eta$ мера Хаара, т.е.,

$$\eta(\mathrm{d}p) = \frac{\mathrm{d}^d p}{(2\pi)^d}.$$

Пусть $E(k),\ \ k = (k_1, \ldots, k_2) \in T^d -$ оператор произведения на число, действующий в гильбертовом пространстве по формуле

$$E(k) f_0 = \varepsilon(k) f_0, \quad f_0 \in \mathcal{H}_0,$$

где

$$\varepsilon(k)=\sum_{i=1}^{d}(1-\cos k_i).$$

Пусть оператор $H_{\mu\lambda}(k)$, $k\in T^d$, $\lambda\geq 0, \mu\in R$ - двухчастичный оператор Шредингера, действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_1$ по формуле

$$H_{\mu\lambda}(k)=H_0(k)-V_{\mu\lambda}.$$

Невозмущенный оператор $H_0(k)$ - оператор умножения на функцию $\varepsilon_k(\cdot)$:

$$(H_0(k)f_1)(q)=\varepsilon_k(q)f_1(q), f_1\in\mathcal{H}_1$$

где

$$\varepsilon_k(q)=\varepsilon\left(\frac{k}{2}-q\right)+\varepsilon\left(\frac{k}{2}+q\right),$$

и $V_{\mu\lambda}$ – оператор взаимодействия (возмущения) определяется по формуле:

$$(V_{\mu\lambda}f_1)(q)=\int_{T^d}\sum_{i=1}^{d}\left(\mu+\lambda\cos s_i\cos q_i\right)f_1(s)\eta(\mathrm{d}s), f_1\in\mathcal{H}_1$$

Оператор $H_{\gamma\mu\lambda}(k)$, $k\in T^d$, $\gamma\in R$ действует в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ по формуле:

$$H_{\gamma\mu\lambda}(k)\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1(q)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E(k)f_0+C_\gamma^* f_1 \\ C_\gamma f_0+(H_{\mu\lambda}(k)f_1)(q)\end{pmatrix},$$

где $(C_\gamma^* f_1)(q)=\gamma(f_1,1)_{\mathcal{H}_1}$ и $C_\gamma f_0=\gamma(f_0,1)_{\mathcal{H}_1}$ операторы уничтожения и рождения, соответственно.

Так как разность операторов $H_{\gamma\mu\lambda}(k)$ и $H_{\mu\lambda}(k)$, $k\in T^d$ является оператором ранга два, согласно теореме Вейля об устойчивости существенного спектра, существенные спектры операторов $H_{\gamma\mu\lambda}(k)$ и $H_{0\mu\lambda}(k)$ совпадают, а именно верны равенства

$$\sigma_{ess}(H_{\gamma\mu\lambda}(k))=\sigma_{ess}(H_{0\mu\lambda}(k))=\sigma_{ess}(H_{\mu\lambda}(k))=\sigma(H_0(k))=[\varepsilon_{\min}(k),\varepsilon_{\max}(k)],$$

где

$$\varepsilon_{\min}(k)=\min_{q\in T^d}\varepsilon_k(q)=2\sum_{i=1}^{d}\left(1-\cos\frac{k^{(i)}}{2}\right),$$

$$\varepsilon_{\max}(k)=\max_{q\in T^d}\varepsilon_k(q)=2\sum_{i=1}^{d}\left(1+\cos\frac{k^{(i)}}{2}\right).$$

Для каждого фиксированного $\gamma\in R$, $\mu\geq 0$ определяем следующие множества:

$$M^{\le}_{\gamma\mu,\max}=\{k\in T^d:\gamma^2\le\mu(\varepsilon_{\max}(k)-\varepsilon(k))\},$$

$$M^{>}_{\gamma\mu,\max}=\{k\in T^d:\gamma^2>\mu(\varepsilon_{\max}(k)-\varepsilon(k))\}.$$

Теорема 1. Пусть $d=1,2$ и $\gamma\in R,\ \mu\ge 0$.

а) Пусть $\gamma^2+\mu^2>0$ и $k\in T^d$. Тогда оператор $H_{\gamma\mu}(k)$ имеет единственное собственное значение $E_{L,\gamma\mu}(k)$ в интервале $(-\infty,\varepsilon_{\min}(k))$. Соответствующий собственный вектор $f_k=(f_{0,k},f_{1,k})\in\mathcal{H}$ имеет вид

$$f_{0,k}=\frac{-c\gamma}{\varepsilon(k)-E_{L,\gamma\mu}(k)},\quad f_{1,k}(q)=\left(\frac{\gamma^2}{\varepsilon(k)-E_{L,\gamma\mu}(k)}+\mu\right)\frac{c}{\varepsilon_k(q)-E_{L,\gamma\mu}(k)}$$

и является аналитическим в $M^{>}_{\gamma\mu,\max}$, где $c\ne 0-$нормирующий множитель.

Более того, отображение $E_{L,\gamma\mu}(k):T^d\to R,\quad k\to E_{L,\gamma\mu}(k)$ является чётным и аналитическим в T^d, а отображение $f:T^d\to\mathcal{H},\quad k\to f_k\in\mathcal{H}$ является векторнозначным аналитическим отображением в T^d.

б) Пусть $\gamma\ne 0$ и $k\in M^{>}_{\gamma\mu,\max}$. Тогда оператор $H_{\gamma\mu}(k)$ имеет единственное собственное значение $E_{R,\gamma\mu}(k)$ в интервале $(\varepsilon_{\max}(k),+\infty)$. Соответствующий собственный вектор $f_k=(f_{0,k},f_{1,k})\in\mathcal{H}$ имеет вид

$$f_{0,k}=\frac{-c\gamma}{\varepsilon(k)-E_{R,\gamma\mu}(k)},\quad f_{1,k}(q)=\left(\frac{\gamma^2}{\varepsilon(k)-E_{R,\gamma\mu}(k)}+\mu\right)\frac{c}{\varepsilon_k(q)-E_{R,\gamma\mu}(k)}$$

и является аналитичиским в $M^{>}_{\gamma\mu,\max}$, где $c\ne 0-$нормирующий множитель.

Более того, отображение $E_{R,\gamma\mu}(k):M^{>}_{\gamma\mu,\max}\to R,\ \ k\to E_{R,\gamma\mu}(k)$ является чётным и аналитическим в $M^{>}_{\gamma\mu,\max}$, а отображение $f:M^{>}_{\gamma\mu,\max}\to\mathcal{H}$, $k\to f_k\in\mathcal{H}$ является векторнозначным аналитическим отображением в $M^{>}_{\gamma\mu,\max}$.

в) Пусть $k\in M^{\le}_{\gamma\mu,\max}$. Тогда оператор $H_{\gamma\mu}(k)$ не имеет собственного значения в интервале $(\varepsilon_{\max}(k),+\infty)$.

Для каждого фиксированного $\gamma\in R,\ \mu<0$ определяем следующие множества:

$$M^{\le}_{\gamma\mu,\min}=\{k\in T^d:\gamma^2\le\mu(\varepsilon_{\min}(k)-\varepsilon(k))\},$$

$$M^{>}_{\gamma\mu,\min} = \{k \in T^d : \gamma^2 > \mu(\varepsilon_{\min}(k) - \varepsilon(k))\}.$$

Теорема 2. Пусть $d = 1{,}2$ и $\gamma \in R,\ \mu < 0$.

а) Пусть $k \in T^d$. Тогда оператор $H_{\gamma\mu}(k)$ имеет единственное собственное значение $E_{R,\gamma\mu}(k)$ в интервале $(\varepsilon_{\max}(k), +\infty)$. Соответствующий собственный вектор $f_k = (f_{0,k}, f_{1,k}) \in \mathcal{H}$ имеет вид

$$f_{0,k} = \frac{-c\gamma}{\varepsilon(k) - E_{R,\gamma\mu}(k)}, \quad f_{1,k}(q) = \left(\frac{\gamma^2}{\varepsilon(k) - E_{R,\gamma\mu}(k)} + \mu\right)\frac{c}{\varepsilon_k(q) - E_{R,\gamma\mu}(k)}$$

и является аналитическим в T^d, где $c \neq 0$ – нормирующий множитель.

Более того, отображение $E_{R,\gamma\mu}(k): T^d \to R,\ k \to E_{R,\gamma\mu}(k)$ является чётным и аналитическим в T^d, а отображение $f: T^d \to \mathcal{H},\ \ k \to f_k \in \mathcal{H}$ является векторнозначным аналитическим отображением в T^d.

б) Пусть $\gamma \neq 0$ и $k \in M^{>}_{\gamma\mu,\min}$. Тогда оператор $H_{\gamma\mu}(k)$ имеет единственное собственное значение $E_{L,\gamma\mu}(k)$ в интервале $(-\infty, \varepsilon_{\min}(k))$. Соответствующий собственный вектор $f_k = (f_{0,k}, f_{1,k}) \in \mathcal{H}$ имеет вид

$$f_{0,k} = \frac{-c\gamma}{\varepsilon(k) - E_{R,\gamma\mu}(k)}, \quad f_{1,k}(q) = \left(\frac{\gamma^2}{\varepsilon(k) - E_{R,\gamma\mu}(k)} + \mu\right)\frac{c}{\varepsilon_k(q) - E_{R,\gamma\mu}(k)}$$

и является аналитичиским в $M^{>}_{\gamma\mu,\min}$, где $c \neq 0$ – нормирующий множитель.

Более того, отображение $E_{L,\gamma\mu}(k): M^{>}_{\gamma\mu,\min} \to R,\ k \to E_{L,\gamma\mu}(k)$ является чётным и аналитическим в $M^{>}_{\gamma\mu,\min}$, а отображение $f: M^{>}_{\gamma\mu,\min} \to \mathcal{H},\ \ k \to f_k \in \mathcal{H}$ является векторнозначным аналитическим отображением в $M^{>}_{\gamma\mu,\min}$.

в) Пусть $k \in M^{\leq}_{\gamma\mu,\min}$. Тогда оператор $H_{\gamma\mu}(k)$ не имеет собственного значения в интервале $(-\infty, \varepsilon_{\min}(k))$.

$\Pi^{(3)}_{\chi}$ - множество векторов $k = (k^{(1)}, \ldots, k^{(d)}) \in T^d$, у которых по крайней мере три координаты отличны от χ и $\tilde{\Pi}_{\xi,\eta}$ - множество векторов $k = (k^{(1)}, \ldots, k^{(d)}) \in T^d$ у которых все координаты равны либо ξ, либо η. Обозначим через $\tilde{\Pi}^{\perp}{}_{\xi,\eta}$ множество векторов $k = (k^{(1)}, \ldots, k^{(d)}) \in T^d$ у которых хотябы одна координата отлична от ξ и η т.е. $\tilde{\Pi}^{\perp}{}_{\xi,\eta} = T^d \setminus \tilde{\Pi}_{\xi,\eta}$.

Теорема 3. Пусть $d \ge 3$. Тогда при любых $\gamma \ne 0$, $\mu \ge 0$ и $k \in \widetilde{\Pi}_{0,\pi}$ оператор $H_{\gamma\mu}(k)$ имеет единственное собственное значение, лежащее ниже $\varepsilon_{\min}(k)$.

Теорема 4. Пусть $d \ge 3$, $\gamma \ne 0$ и $\mu \ge 0$. Тогда имеют места следующие утверждения:

а) Если $k \in \widetilde{\Pi}_{0,\pi} \setminus \{\vec{\pi}\}$, где $\vec{\pi} = (\pi,\ldots,\pi)$, т.е. каждая из его координат равна либо 0, либо π, то число $z = \varepsilon_{\min}(k)$ не является ни собственным значением, ни виртуальным уровнем оператора $H_{\gamma\mu}(k)$.

б) Если $k = \vec{\pi} = (\pi,...,\pi)$, то число $z = \varepsilon_{\min}(k)$ является собственным значением оператора $H_{\gamma\mu}(k)$ бесконечной кратности. Более того, все соответствующие собственные векторы ортогональны единичному вектору $1 \in \mathcal{H}_1$.

Для каждого фиксированного $k \in T^d$ определим аналитическую в $C \setminus [\varepsilon_{\min}(k), \varepsilon_{\max}(k)]$ функцию (определитель Фредгольма)

$$\Delta_{\gamma\mu}(k;z) = 1 - \left[\frac{\gamma^2}{\varepsilon(k) - z} + \mu \right] a(k,z).$$

Пусть $d \ge 3$. Тогда для любого $k \in \Pi_{\pi}^{(3)} \cap \widetilde{\Pi}^{\perp}{}_{0,\pi}$ существует конечный предел

$$\Delta_{\gamma\mu}(k) = \lim_{z \to \varepsilon_{\min}(k)-} \Delta_{\gamma\mu}(k;z) = \Delta_{\gamma\mu}(k;\varepsilon_{\min}(k)).$$

Введём следующие множества:

$$G_{\gamma\mu}^{0} = \{k \in \Pi_{\pi}^{(3)} \cap \widetilde{\Pi}^{\perp}{}_{0,\pi} : \Delta_{\gamma\mu}(k) = 0\},$$

$$G_{\gamma\mu}^{<} = \{k \in \Pi_{\pi}^{(3)} \cap \widetilde{\Pi}^{\perp}{}_{0,\pi} : \Delta_{\gamma\mu}(k) < 0\},$$

$$G_{\gamma\mu}^{>} = \{k \in \Pi_{\pi}^{(3)} \cap \widetilde{\Pi}^{\perp}{}_{0,\pi} : \Delta_{\gamma\mu}(k) > 0\}.$$

Теорема 5. Предположим, что $d \ge 3$.

а) Пусть $\gamma^2 + \mu^2 > 0$, $k \in \Pi_{\pi}^{(3)} \cap \widetilde{\Pi}^{\perp}{}_{0,\pi}$ и $\Delta_{\max}(\gamma\mu) < 0$, то $G_{\gamma\mu}^{<} = \Pi_{\pi}^{(3)} \cap \widetilde{\Pi}^{\perp}{}_{0,\pi}$.

б) Для любого $k \in G_{\gamma\mu}^{<}$ оператор $H_{\gamma\mu}(k)$ имеет единственное собственное значение $E_{\gamma\mu}(k) < \varepsilon_{\min}(k)$ в интервале $(-\infty, \varepsilon_{\min}(k))$. Соответствующий собственный вектор $f_k = (f_{0,k}, f_{1,k}) \in \mathcal{H}$ имеет вид

$$f_{0,k} = \frac{-c\gamma}{\varepsilon(k) - E_{\gamma\mu}(k)}, \quad f_{1,k}(q) = \left(\frac{\gamma^2}{\varepsilon(k) - E_{\gamma\mu}(k)} + \mu\right)\frac{c}{\varepsilon_k(q) - E_{\gamma\mu}(k)},$$

и является аналитическим в $G^{<}_{\gamma\mu}$, где $c \neq 0$ – нормирующий множитель. Таким образом, $E_{\gamma\mu}(\cdot)$ является четной аналитической функцией в $G^{<}_{\gamma\mu}$. Отображение $f : G^{<}_{\gamma\mu} \to \mathcal{H}$, $k \to f_k \in \mathcal{H}$ является векторнозначным аналитическим отображением.

в) Пусть $\gamma^2 + \mu^2 > 0$, и $k \in G^{0}_{\gamma\mu}$. Тогда число $z = \varepsilon_{\min}(k)$ является виртуальным уровнем при $k \in \left[\Pi_{d-3,\pi} \cup \Pi_{d-4,\pi}\right] \cap \tilde{\Pi}^{\perp}{}_{0,\pi}$ (соотв. собственным значением при $k \in \Pi^{(5)}_{\pi} \cap \tilde{\Pi}^{\perp}{}_{0,\pi}$) оператора $H_{\gamma\mu}(k)$. Соответствующее виртуальное (соотв. связанное) состояние f_k имеет вид $f_k = (f_{0,k}, f_{1,k})$,

$$f_{0,k} = \frac{-c\gamma}{\varepsilon(k) - \varepsilon_{\min}(k)}, \quad f_{1,k}(q) = \left(\frac{\gamma^2}{\varepsilon(k) - \varepsilon_{\min}(k)} + \mu\right)\frac{c}{\varepsilon_k(q) - \varepsilon_{\min}(k)},$$

где $c \neq 0$ – нормирующий множитель.

г) Пусть $k \in G^{0}_{\gamma\mu} \cup G^{>}_{\gamma\mu}$. Тогда оператор $H_{\gamma\mu}(k)$ не имеет собственного значения, лежащего ниже точки $\varepsilon_{\min}(k)$.

Пусть $d \geq 3$. Тогда для любого $k \in \Pi^{(3)}_{\pi}$ существует конечный предел

$$\Delta_{\gamma\mu}(k) = \lim_{z \to \varepsilon_{\max}(k)+} \Delta_{\gamma\mu}(k; z) = \Lambda_{\gamma\mu}(k; \varepsilon_{\max}(k)).$$

Введём следующие множества:

$$M^{0}_{\gamma\mu} = \{k \in \Pi^{(3)}_{\pi} \cap T^d : \Lambda_{\gamma\mu}(k) = 0\},$$
$$M^{<}_{\gamma\mu} = \{k \in \Pi^{(3)}_{\pi} \cap T^d : \Lambda_{\gamma\mu}(k) < 0\},$$
$$M^{>}_{\gamma\mu} = \{k \in \Pi^{(3)}_{\pi} \cap T^d : \Lambda_{\gamma\mu}(k) > 0\}.$$

Теорема 6. Пусть $d \geq 3$ и $\gamma \in R$, $\mu \leq 0$,. Тогда

а) для любого $k \in M^{<}_{\gamma\mu}$ оператор $H_{\gamma\mu}(k)$ имеет единственное собственное значение $E_{\gamma\mu}(k)$ на полуоси $(\varepsilon_{\max}(k), +\infty)$. Соответствующий собственный вектор $f_k = (f_{0,k}, f_{1,k}) \in \mathcal{H}$ имеет вид:

$$f_{0,k} = \frac{c\gamma}{E_{\gamma\mu}(k) - \varepsilon(k)}, \quad f_{1,k}(q) = \left(\frac{\gamma^2}{E_{\gamma\mu}(k) - \varepsilon(k)} + \mu\right)\frac{c}{E_{\gamma\mu}(k) - \varepsilon_k(q)}$$

и является аналитическим в $M^{<}_{\gamma\mu}$, где $c \neq 0$ – нормирующий множитель. Таким образом, $E_{\gamma\mu}(\cdot)$ является четной аналитической функцией в $M^{<}_{\gamma\mu}$.

Отображение $f: M^{<}_{\gamma\mu} \to \mathcal{H}$, $k \to f_k \in \mathcal{H}$ является векторнозначным аналитическим отображением.

б) Пусть $\gamma^2 + \mu^2 > 0$, и $k \in M^{0}_{\gamma\mu}$. Тогда число $z = \varepsilon_{\max}(k)$ является виртуальным уровнем при $k \in [\Pi_{d-3,\pi} \cup \Pi_{d-4,\pi}] \cap T^d$ (соот. собственным значением при $d \geq 5$ и $k \in \Pi^{(3)}_{\pi} \cap T^d$) оператора $H_{\gamma\mu}(k)$. Соответствующее виртуальное (соот. связанное) состояние $f_k = (f_{0,k}, f_{1,k}) \in \mathcal{H}$ имеет вид:

$$f_{0,k} = \frac{c\gamma}{\varepsilon_{\max}(k) - \varepsilon(k)}, \quad f_{1,k}(q) = \left(\frac{\gamma^2}{\varepsilon_{\max}(k) - \varepsilon(k)} + \mu\right) \frac{c}{\varepsilon_{\max}(k) - \varepsilon_k(q)},$$

где $c \neq 0$ – нормирующий множитель.

в) Пусть $k \in M^{0}_{\gamma\mu} \cup M^{>}_{\gamma\mu}$. Тогда оператор $H_{\gamma\mu}(k)$ не имеет собственного значения на полуоси $(\varepsilon_{\max}(k), +\infty)$.

В третье главе диссертации, названной **«Число собственных значений ниже существенного спектра одной обобщенной модели Фридрихса, соответствующей системе, состоящей из не более двух частиц на решетке»**, показано, что число и местонахождения собственных значений одной обобщенной модели Фридрихса, соответствующей системе, состоящей из не более чем двух частиц с контактным взаимодействием и взаимодействием на соседних узлах, меняется в зависимости от квазиимпульса частиц, от энергии взаимодействия, от операторов рождения и уничтожения.

Теорема 7. Пусть $d = 1$, $\gamma^2 + \mu^2 > 0$ и $\lambda > 0$. Тогда для любого $k \in T^d$ операторы $H_{\gamma\mu 0}$ и $H_{00\lambda}$ имеют единственное собственное значение соответственно $E_{\gamma\mu 0}(k)$ и $E_{00\lambda}(k)$ на полуоси $(-\infty, \varepsilon_{min}(k))$.

Введем следующие обозначения:

$$E_{min}(\gamma, \mu, \lambda, k) = \min\{E_{\gamma\mu 0}(k), E_{00\lambda}(k)\},$$
$$E_{max}(\gamma, \mu, \lambda, k) = \max\{E_{\gamma\mu 0}(k), E_{00\lambda}(k)\}$$

Для любого фиксированного $\gamma \in R$ и $\mu, \lambda \geq 0$ определим следующую четную функцию

$$F_{\gamma\mu\lambda}(k) = \gamma^2(\lambda - 2\cos\frac{k}{2}) + 2\cos\frac{k}{2}(1 - \cos\frac{k}{2})[\mu\lambda - 2\cos\frac{k}{2}(\mu + \lambda)]$$

в $T^1 = (-\pi, \pi]$. Для любого фиксированного $\gamma \in R$ и $\mu, \lambda \geq 0$ определим следующие множества:

$$G^{=}_{\gamma\mu\lambda} = \{k \in T^1 : F_{\gamma\mu\lambda}(k) = 0\},$$

$$G^{<}_{\gamma\mu\lambda} = \{k \in T^1 : F_{\gamma\mu\lambda}(k) < 0\},$$

$$G^{>}_{\gamma\mu\lambda} = \{k \in T^1 : F_{\gamma\mu\lambda}(k) > 0\}.$$

Теорема 8. *a*) Пусть $d=1$, $k \in G_{\gamma\mu\lambda}^{=} \cup G_{\gamma\mu\lambda}^{<} \subset T^d$. Тогда оператор $H_{\gamma\mu\lambda}(k)$ имеет единственное собственное значение $E_{\gamma\mu\lambda}^{(1)}(k)$ на полуоси $(-\infty, \varepsilon_{min}(k))$. Таким образом, функция $E_{\gamma\mu\lambda}^{(1)} : G_{\gamma\mu\lambda}^{=} \cup G_{\gamma\mu\lambda}^{<} \to R, \quad k \to E_{\gamma\mu\lambda}^{(1)}(k)$ является четной вещественно-аналитичной в $G_{\gamma\mu\lambda}^{=} \cup G_{\gamma\mu\lambda}^{<}$ и имеет место неравенство $E_{\gamma\mu\lambda}^{(1)}(k) < E_{min}(\gamma, \mu, \lambda, k)$. Соответствующий собственный вектор $f_k = (f_{0,k}, f_{1,k}) \in \mathcal{H}$ имеет вид

$$f_{0,k} = \frac{-c_1\gamma}{\varepsilon(k) - E_{\gamma\mu\lambda}^{(1)}(k)},$$

$$f_{1,k}(q) = \left(\frac{\gamma^2}{\varepsilon(k) - E_{\gamma\mu\lambda}^{(1)}(k)} + \mu \right) \frac{c_1}{\varepsilon_k(q) - E_{\gamma\mu\lambda}^{(1)}(k)} + \frac{\lambda c_2 \cos q}{\varepsilon_k(q) - E_{\gamma\mu\lambda}^{(1)}(k)}$$

и является аналитическим в $G_{\gamma\mu\lambda}^{=} \cup G_{\gamma\mu\lambda}^{<}$, где $c_1, c_2 -$ нормирующие множители. Отображение $f : G_{\gamma\mu\lambda}^{=} \cup G_{\gamma\mu\lambda}^{<} \to \mathcal{H}, \qquad k \to f_k \in \mathcal{H}$ является векторнозначным аналитическим отображением.

b) Пусть $k \in G_{\gamma\mu\lambda}^{>}$. Тогда оператор $H_{\gamma\mu\lambda}(k)$ имеет две $E_{\gamma\mu\lambda}^{(1)}(k)$ и $E_{\gamma\mu\lambda}^{(2)}(k)$ собственные значения на полуоси $(-\infty, \varepsilon_{min}(k))$. Функция E $E_{\gamma\mu\lambda}^{(j)} : G_{\gamma\mu\lambda}^{>} \to R, \quad k \to E_{\gamma\mu\lambda}^{(j)}(k), j = 1, 2$ является четной вещественно-аналитичной в $G_{\gamma\mu\lambda}^{>}$ и имеют места неравенства

$$E_{\gamma\mu\lambda}^{(1)}(k) < E_{\min}(\gamma, \mu, \lambda, k) \le E_{\max}(\gamma, \mu, \lambda, k) < E_{\gamma\mu\lambda}^{(2)}(k)$$

Соответствующие собственные функции $f_k^{(j)} \in \mathcal{H}$ имеют вид

$$f_{0,k} = \frac{-c_j\gamma}{\varepsilon(k) - E_{\gamma\mu\lambda}^{(j)}(k)},$$

$$f_{1,k}(q) = \left(\frac{\gamma^2}{\varepsilon(k) - E_{\gamma\mu\lambda}^{(j)}(k)} + \mu \right) \frac{c_j}{\varepsilon_k(q) - E_{\gamma\mu\lambda}^{(j)}(k)} + \frac{\lambda c_2 \cos q}{\varepsilon_k(q) - E_{\gamma\mu\lambda}^{(j)}(k)},$$

где $c_1, c_2 -$ нормирующие множители. Более того, отображение $f^{(j)} : T^1 \to \mathcal{H}, \qquad k \to f_k^j \in \mathcal{H}, \ j = 1, 2$ является векторнозначным аналитическим отображением в $G_{\gamma\mu\lambda}^{>}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данная диссертация посвящена исследованию существенного и дискретного спектров модели Фридрихса, соответствующей системе, состоящей из не более двух частиц.

Основные результаты исследования состоят в следующем:

1. Найдено местонахождение существенного спектра одной обобщенной модели Фридрихса, соответствующей сестеме, состоящей из не более двух частиц на решетке, взаимодействующей с помощью операторов рождения и уничтожения, двухчастичного оператора Шредингера, с контактным потенциалом и с взаимодействием в соседних узлах.

2. Установлено, что существует по крайней мере одно собственное значение вне существенного спектра одной обобщенной модели Фридрихса, соответствующей системе, состоящей из не более двух частиц на одномерной и двухмерной решетках, взаимодействующей с помощью двухчастичного оператора Шредингера, с контактным потенциалом.

3. Установлено наличие или же, отсутсвие собственного значения вне существенного спектра, обобщенной модели Фридрихса, ассоциированной системе, состоящей из не более двух частиц на решетке размерности не меньше трех, взаимодействующих с помощью двухчастичного оператора Шредингера с контактным взаимодействием, в зависимости от параметров оператора.

4. Доказано существование по крайней мере одного собственного значения вне существенного спектра, и наличие или отсутствие второго собственного значения одной обобщенной модели Фридрихса, ассоциированной системе, состоящей из не более двух частиц на одномерной и двухмерной решетках, взаимодействующих с помощью операторов рождения и уничтожения, двухчастичного оператора Шредингера, с контактным взаимодействием, и взаимодействием на соседних узлах, зависимости от параметров оператора.

5. Установлены, что собственные значения и соответствующие собственные векторы рассматриваемого оператора, являются аналитическими функциями квазиимпульса.

Полученные выводы о собственных функций обобщенной модели Фридрихса, могут быть использованы при исследовании качественных свойств экспериментальных наблюдений и численных вычислений в физике твердого тела и квантовой механики.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) PhD.27.06.2017.FM.02.01 SAMARKAND STATE UNIVERSITY

SAMARKAND STATE UNIVERSITY

LATIPOV SHERDOR MIRZOYEVICH

ESSENTIAL AND DISCRETE SPECTRA OF A CERTAIN GENERALIZED FRIDRICHS MODEL

01.01.01-Mathematical analysis

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Samarkand -2017

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2017.2.PhD/FM51 .

Dissertation has been prepared at Samarkand State University.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (uzbek, russian, english (resume)) on the website (www.samdu.uz) and the «Ziyonet» Information and educational portal (www.ziyonet.uz).

Scientific supervisor:	**Lakaev Saidakhmat Norzhigitovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Official opponents:	**Eshkabilov Yusup Khalbayevich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences
	Kuchkorov Erkin Ibrokhimovich Candidate of Physical and Mathematical Sciences
Leading organization:	**Institute of Mathematics**

Defense will take place «____» _____________2017 at _____ at the meeting of Scientific Council number PhD.27.06.2017.FM.02.01 at Samarkand State University. (Address: University Boulevard 15, Samarkand, 140104, Uzbekistan, Ph.: (+99866) 231-06-32, fax: (+99866) 235-19-38, e-mail: patent@samdu.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at Samarkand State University (is registered №____) (Address: University Boulevard 15, Samarkand, 140104, Uzbekistan, Ph.: (+99866) 231-06-32).

Abstract of dissertation sent out on «____» _______________2017 year
(Mailing report № ___________on «____» _______________2017 year)

A.S. Soleev
Chairman of scientific council on award of scientific degrees, D.F.-M.S., professor

A.M. Xalxujayev
Scientific secretary of scientific council on award of scientific degrees, D.F.-M.S.

I.A. Ikromov
Vice-chairman of scientific Seminar under Scientific Council on award of scientific degrees, D.F.-M.S., professor

INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

The aim of the research work is study location of essential spectrum and a number of eigenvalues out of essential spectrum of certain generalized Friedrichs model, corresponding to a system of no more than two particles on lattice.

The object of the research work is a generalized Friedrichs model, corresponding to a system of no more than two particles on lattice.

Scientific novelty of the research work is as follows:

It is found location of essential spectrum of certain generalized Friedrichs model, corresponding to a system of no more than two particles on lattice, interacting via creation and annihilation operators and two particle Schroedinger operator, interacting via contact potentials;

It is shown existence at least one eigenvalue out of essential spectrum of certain generalized Friedrichs model, interacting via two particle Schrödinger operator, corresponding to a system of no more than two particles on one and two dimensional lattice and interacting via contact potentials;

It is shown the existence of eigenvalue out of essential spectrum of certain generalized Friedrichs model, corresponding to a system of no more than two particles on a lattice, represented by two particle Schroedinger operator, interacting via contact potentials on lattice with dimension no less than three, or its absence depending on parameters of the operator;

It is proved the existence at least one eigenvalue lying below the essential spectrum of certain generalized Friedrichs model, corresponding to a system of no more than two particles on one dimensional lattice, interacting via creation and annihilation operators and two particle Schrödinger operator, interacting via contact potentials, and established that existence or absence second eigenvalue depends on parameters of the operator.

Implementation of the research results. The results obtained during the dissertation research are applied in the following areas:

the results on essential and discrete spectra of certain generalized Friedrichs model have been used for researching the spectral properties of discrete Schrödinger operators in the foreign project research QJ130000.2726.01K82. (Malaysia Technology University, a certificate dated November 16, 2017). The application of our results allows finding the number of eigenvalues;

our methods of researching existence of discrete spectra of certain generalized Friedrichs model have been used for studying the discrete spectrum of discrete Schrödinger operators in the foreign project research QJ130000.2726.01K82. (Malaysia Technology University, a certificate dated November 16, 2017). The application of our results allows studying the properties of integral operators, which important in the spectral theory of Schrödinger operators.

the analytical eigenvalues, related on paramaters, of certain generalized Friedrichs model have been used to show the existence of bound states of two-particle Schrödinger operators, in the foreign project research QJ130000.2726.01K82. (Malaysia Technology University, a certificate dated November 16, 2017). The application of our results allows to construct an example for integral operators, which important in the spectral theory of Schroedinger operators.

The structure and volume of the thesis. The thesis consists of an introduction, three chapters, conclusion and bibliography. The volume of the thesis is 107 pages.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (I часть; I part)

1. С.Н.Лакаев, Ш.М.Латипов. О существовании и аналитичности собственных значений двухканалной молекулярно резонансной модели. // ДАН РУз.,- 2010.- №6. -С. 8-11.(01.00.00; №7).
2. С.Н.Лакаев, Ш.М.Латипов. Число связанных состояний двухканальной молекулярно-резонансной модели. // Узбекский Математический Журнал.- Тошкент, 2011-№3.-С. 184-195. (01.00.00; №6).
3. С.Н.Лакаев., Ш.М.Латипов. О существование и аналитичности собственных значений двухканальной молекулярно – резонансной модели. //Теоретическая и математическая физика –Москва, 2011,т. **169,** № 3.С. 1657–1666.(№ 39. Impact Factor Search. IF=0.984).
4. Ш.М.Латипов. О существовании собственных значений двухканальной молекульярной модели. // Узбекский Математический Журнал.- Тошкент, 2015-№2.-С. 63-74. (01.00.00; №6).
5. Ш.М.Латипов. О числе собственных значений вне существенного спектра двухканального модельного оператора. // Узбекский Математический Журнал.- Тошкент, 2015-№3.-С. 65-75. (01.00.00; №6).

II бўлим (II часть; II part)

6. З.Э.Мўминов, Ш.М.Латипов. Бир модел операторининг мухим спектри хакида. // « Ёш олимлар илмий конференсиясида.». 2004 . С.57-58.
7. Ш.М.Латипов. Оценка для числа собственных значений оператора энергии системы с несохраняющимся числом частиц.. // Труды КНИИРП Сам Отд АНРУз- Самарканд 2008-Вып № 4, стр. 144-147
8. Sh.M.Latipov: On the eigenvalues of the two-channel molecular-resonance model. //The International Training and Seminars on Mathematics (ITSM), Samarkand, Uzbekistan, 2011, pp.168-170.
9. Ш.М.Латипов. О соотношениях собственных значений двухканальной молекулярно-резонансной модели. //»Замонавий математиканинг долзарб муаммолари». Тез. докл. Рес. науч. конф. – Қарши, 2011,С . 164-166.
10. Ш.М.Латипов, Г.Р.Ёдгоров. О существование собственных значений двухканальной молекулярно резонансной модели. //»Актуальные проблемы математического анализа». Тез. докл. Рес. науч. конф. – Ургенч, 2012. − С. 151-152.
11. С.Н.Лакаев, Ш.М.Латипов. О числе собственных значений двухканальной молекулярно-резонансной модели. //International training-seminars on mathematics in conjunction with the joint mathematics meeting, 2013 between Samarkand State University and Malaysian Mathematical Sciences Society, 2013.− P.3-4.

12. Ш.М.Латипов., А.Т.Болтаев. On the existence of eigenvalues of the two-channel s-d model // International training-seminars on mathematics in conjunction with the joint mathematics meeting, 2013 between Samarkand State University and Malaysian Mathematical Sciences Society, 2013.− P.38-39.

13. Ш.М.Латипов., А.Т.Болтаев. О числе собственных значений двухканальной молекулярно-резонансной модели // Международная конференция Прикладной и Геометрический анализ. Самарканд, Узбекистан. 22-25 сентября 2014 г.

14. Ш.М.Латипов. О существовании положительных собственных значений двухканальной молекульярно-резонансной модели. // «Современные методы математической физики и их приложения». Тез. докл. Рес. науч. конф. – Ташкент, 2015. − С.70-72.

15. Ш.М.Латипов., Ж.Асадов. О существовании собственных значений вне сушественногоспектра одной обобщенной модели Фридрихса // «Современные методы математической физики и их приложения». Тез. докл. Рес. науч. конф. – Ташкент, 2015. − С.72-73.

16. Ш.М.Латипов. О существовании собственных значений вне сушественного спектра двухканальной молекульярной модели. // Matematika va uni zamonaviy pedagogik texnologiyalar yordamida o'qitish muammolari. Respublika ilmiy-amaliy konferensiyasi materiallari (Navoiy-2015-y. 25-aprel. – C.50-52.

Авторефератнинг ўзбек, рус ва инглиз тилларидаги нусхалари
«Ўзбекистон математика журнали» таҳририятида таҳрирдан ўтказилди.

Босишга рухсат этилди: _________2017 йил
Бичими 60x44 $^1/_{16}$, «Times New Roman»
гарнитурада рақамли босма усулида босилди.
Шартли босма табоғи 2,6. Адади: 100. Буюртма: № _____.

Ўзбекистон Республикаси ИИВ Академияси,
100197, Тошкент, Интизор кўчаси, 68

«АКАДЕМИЯ НОШИРЛИК МАРКАЗИ»
Давлат унитар корхонасида чоп этилди.