



ISSN 2181-1296

# ILMIY AXBOROTNOMA

НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК

SCIENTIFIC JOURNAL

2021-yil, 3-son (127)

ANIQ FANLAR SERIYASI

Matematika, Mexanika, Informatika, Fizika

Samarqand viloyat matbuot boshqarmasida ro'yxatdan o'tish tartibi 09-25.  
Jurnal 1999-yildan chop qilina boshlagan va OAK ro'yxatiga kiritilgan.

BOSH MUHARRIR  
BOSH MUHARRIR O'RINBOSARLARI:

R. I. XALMURADOV, t.f.d. professor  
H.A. XUSHVAQTOV, f.-m.f.n., dotsent  
A. M. NASIMOV, t.f.d., professor

## TAHRIRIYAT KENGASHI:

SH. A. ALIMOV	- O'zFA akademigi
S. N. LAKAYEV	- O'zFA akademigi
M.M.MIRSAIDOV	- O'zFA akademigi
M. X. ASHUROV	- O'zFA akademigi
T. M. MO'MINOV	- O'zFA akademigi
A. S. SOLEEV	- f.-m.f.d., professor
I. A. IKROMOV	- f.-m.f.d., professor
B. X. XO'JAYAROV	- f.-m.f.d., professor
A.G.YAGOLA	- f.-m.f .d., professor (Moskva davlat universiteti, Rossiya)
I. I. JUMANOV	- f.-m.f .d., professor
X. X. XUDOYNAZAROV	- t.f.d., professor
A.X.BEGMATOV	- f.-m.f .d., professor
Yu.S.VOLKOV	- f.-m.f .d., professor (Novosibirsk davlat universiteti, Rossiya)
N. N. NIZAMOV	- f.-m.f.d., professor
L.SABIROV	- f.-m.f .d., professor
A.JUMABOYEV	- f.-m.f .d., professor
MASLINA DARUS	- Malayziya milliy universiteti professori, Malayziya
ALBERTO DEL BIMBO	- Florensiya universiteti professori, Italiya
GUN-SIK PARK	- Seul univeriteti professori, Koreya

Obuna indeksi – yakka tartbidagi obunachilar uchun - 5583,  
tashkilot, korxonalar uchun - 5584

## MUNDARIJA/СОДЕРЖАНИЕ/CONTENTS

## МАТЕМАТИКА / МАТЕМАТИКА / MATHEMATICS

<b><i>Абдуллаев Ж.И., Шотемиров Й.С., Эргашова Ш.Х.</i></b>		
Инвариантные подпространства и связанные состояния системы двух бозонов на решетке		4-15
<b><i>Radjabov T.A.</i></b>		
Periodic solutions of differential equation with piecewise constant argument		16-20
<b><i>Urunbaev E.</i></b>		
K-valued functions correcting heuristic algorithms		21-27
<b><i>Niyozov I.E., Makhmudov O. I.</i></b>		
The Cauchy problem for the system of the thermoelasticity in a multidimensional bounded domain		28-34
<b><i>Хайдаров А.</i></b>		
Единственность и устойчивость решения коэффициента обратной задачи для эллиптических уравнений		35-38
<b><i>Кулжанов У.Н.</i></b>		
Спектральные свойства двухчастичного оператора Шредингера с точечным потенциалом в двумерном случае		39-45
<b><i>Муминов У.Б.</i></b>		
Задача Коши для нелинейного уравнения Шредингера с дополнительными членами		46-57
<b><i>Itomov A.A., Nazarov Z.A.</i></b>		
On sums of random variables of a special form and their asymptotic behaviors		58-68
<b><i>Kuliyev K., Kuliyeva G., Eshimova M.</i></b>		
Ba'zi Hardi tipidagi operatorlar normasining baholari		69-75
<b><i>Dilmuradov N., Raximov A.</i></b>		
The criterion of tending to zero the powers of a matrix and its applications		76-83
<b><i>Kamoliddinov D.</i></b>		
Kompleks almashtirishlar, belgilashlar va yordamchi funksiya kiritish usullari orqali hal etiladigan masalalar		84-89
<b><i>Kabulov A.V., Berdimurodov M.A., Saymanov I.M.</i></b>		
Kriptografik algoritm mikrobuyruqlarining mantiqiy bul funksiya shakli (AES, El-Gamal)		90-100

## ИНФОРМАТИКА / ИНФОРМАТИКА / INFORMATICS

<b><i>Fozilov Sh.X., Yusupov O.R.</i></b>		
Ko'zning rangdor pardasi tasviri bo'yicha shaxsni identifikatsiyalash masalida qaror qabul qilish uchun bo'sag'aviy qiymatlarni tanlash usullari		101-106

**FIZIKA / ФИЗИКА / PHYSICS**

*Рахматуллаев И.А., Турсункулов О.М., Хайдаров Х.С.*

Морфологические, структурные и люминесцентные свойства  
микропорошков сапфира 107-113

*Кувандиков О.К., Субханкулов И., Имамназаров Д.Х., Хомитов  
Ш.А., Бакаев Г.С.*

Изучение природы спиновых волн в аморфных ферромагнитных  
сплавах 114-118

**Mualliflarga**

УДК: 517.984

## ИНВАРИАНТНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА И СВЯЗАННЫЕ СОСТОЯНИЯ СИСТЕМЫ ДВУХ БОЗОНОВ НА РЕШЕТКЕ

Ж.И.Абдуллаев<sup>1</sup>, Й.С.Шотемиров<sup>2</sup>, Ш.Х.Эргашова<sup>2</sup><sup>1</sup>Самаркандский государственный университет<sup>2</sup>Навоийский государственный педагогический институт

e.mail: jabdullaev@mail.ru, e.mail: shotemirov.y@mail.ru, e.mail: sh.ergashova@mail.ru

**Аннотация.** Рассматривается гамильтониан  $H$  системы двух бозонов на трехмерной решетке  $\mathbb{Z}^3$  с потенциалом  $\hat{v}$  носитель в цилиндре. Доказано, что соответствующий оператор Шредингера  $H(\mathbf{k})$  имеет четыре инвариантных подпространства  $L_1^+$ ,  $L_2^+$ ,  $L_3^+$  и  $L_{123}^+$ . Кроме того установлено, что оператор  $H(k_1, k_2, \pi)$  имеет бесконечно много инвариантных подпространств  $\mathfrak{R}_{3n}^+$ ,  $n \in \mathbb{Z}_+$ . При малых  $\beta$  собственные значения  $z_n(\beta)$  оператора  $H_{3n}^+(\pi - 2\beta, \pi - 2\beta, \pi) := H(\pi - 2\beta, \pi - 2\beta, \pi)|_{\mathfrak{R}_{3n}^+}$  вычислена с точностью до  $\beta^2$ .

**Ключевые слова:** Гамильтониан, связанное состояние, оператор Шредингера, полный квазиимпульс, собственное значение, теория возмущений, принцип Бирмана-Швингера.

**Panjarada ikki bozonli sistemaning invariant qism fazolari va bog‘langan holatlari**

**Annotatsiya.** Uch o‘lchamli panjara  $\mathbb{Z}^3$  da ikki bozonli sistema Hamiltoniani  $H$  ni tashuvchisi silindrda bo‘lgan  $\hat{v}$  potensial bilan qaraymiz. Bu Hamiltonianga mos Shryodinger operatori  $H(\mathbf{k})$  ning to‘rtta  $L_1^+$ ,  $L_2^+$ ,  $L_3^+$  va  $L_{123}^+$  invariant qism fazolari mavjudligi isbotlangan. Bundan tashqari  $H(k_1, k_2, \pi)$  operatorning cheksiz ko‘p  $\mathfrak{R}_{3n}^+$ ,  $n \in \mathbb{Z}_+$  invariant qism fazolari mavjudligi ko‘rsatilgan. Kichik  $\beta$  larda  $H_{3n}^+(\pi - 2\beta, \pi - 2\beta, \pi) := H(\pi - 2\beta, \pi - 2\beta, \pi)|_{\mathfrak{R}_{3n}^+}$  operatorning  $z_n(\beta)$  hos qiymatlari  $\beta^2$  aniqlikda hisoblangan.

**Kalit so‘zlar:** Hamiltonian, bog‘langan holat, Shryodinger operatori, to‘la kvaziimpuls, hos qiymat, qo‘zg‘alishlar nazariyasi, Birman-Schwinger prinsipi.

**Invariant subspaces and bound states of a system of two bosons on a lattice**

**Abstract.** We consider the Hamiltonian  $H$  of a system of two bosons on a three-dimensional lattice  $\mathbb{Z}^3$  with a potential  $\hat{v}$  supported in a cylinder. It is proved that the corresponding Schrödinger operator  $H(\mathbf{k})$  has four invariant subspaces  $L_1^+$ ,  $L_2^+$ ,  $L_3^+$  and  $L_{123}^+$ . In addition, the operator  $H(k_1, k_2, \pi)$  has infinitely many invariant subspaces  $\mathfrak{R}_{3n}^+$ ,  $n \in \mathbb{Z}_+$ . For small  $\beta$ , the eigenvalues  $z_n(\beta)$  of the operator  $H_{3n}^+(\pi - 2\beta, \pi - 2\beta, \pi) := H(\pi - 2\beta, \pi - 2\beta, \pi)|_{\mathfrak{R}_{3n}^+}$  are calculated to an accuracy of  $\beta^2$ .

**Keywords:** Hamiltonian, bound state, Schrödinger operator, total quasimomentum, eigenvalue, perturbation theory, Birman-Schwinger principle.

**1. Введение**

Природа появления связанных состояний двухчастичных кластерных операторов при малых значениях параметра впервые подробно исследовалась Минлосом и Маматовым [1], а потом в более общей ситуации Минлосом и Могильнером [2]. В статье [3] Хауленд показал, что теорема Реллиха о возмущении собственных значений не распространяется на теорию резонансов. Исследование связанных состояний гамильтониана  $H$  системы двух частиц на  $d$  – мерной решетке  $\mathbb{Z}^d$  сводится к изучению собственных значений семейства операторов Шредингера  $H(\mathbf{k})$ ,  $\mathbf{k} \in \mathbb{T}^d = (-\pi, \pi]^d$ , при этом собственные функции оператора  $H(\mathbf{k})$  трактуются как связанные состояния гамильтониана  $H$ , а собственные значения как энергии связанного состояния. Связанные

состояние гамильтониана  $H$  системы двух фермионов на одномерной решетке изучены в [4], возмущении собственных значений и резонансов двухчастичного оператора Шредингера на одномерной решетке исследовалось в работах [5], [6]. Связанные состояния системы двух фермионов на двумерной решетке изучались в [7], а на трехмерной решетке в [8]. Конечность числа собственных значений двухчастичного оператора Шредингера на  $d$  – мерной решетке изучались в работах [9], [10].

Дискретный спектр двухчастичного непрерывного оператора Шредингера

$$h_\lambda = -\Delta + \lambda V$$

исследовалось многими авторами, причем условия на потенциал  $V$  формулировались в его координатном представлении. Условия конечности отрицательного спектра и отсутствия положительных собственных значений оператора  $h_\lambda$  приведены в [11]. Если  $V \leq 0$ , то число отрицательных собственных значений  $N(\lambda)$  – неубывающая функция от  $\lambda \in (0, \infty)$  и каждое собственное значение  $z_n(\lambda)$  убывает в  $(0, \infty)$ . Известно, что с уменьшением константы связи  $\lambda$  значения энергий связанных состояний оператора  $h_\lambda$  приближаются к краю непрерывного спектра (см. [11]) и при некотором конечном значении  $\lambda$  попадают на край. При этом возникает два вопроса: соответствуют ли такому пороговому состоянию связанное или виртуальное состояние (т.е. квадратично-интегрируема ли соответствующая волновая функция) и куда "деваются" связанные состояния при дальнейшем уменьшении  $\lambda$ . Изучению первого вопроса посвящены работы Рауха [5], Саймона [12], Клауза [13]. Что касается второго вопроса, оказывается, что связанное состояние "исчезает, поглощаясь непрерывным спектром" и превращается в резонанс.

В этой работе рассматриваются связанные состояния гамильтониана  $\hat{H}$  (см. (2.1)) системы двух бозонов на трехмерной решетке с потенциалом (4.1), т.е. изучается дискретный спектр семейства операторов Шредингера  $H(\mathbf{k}), \mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{T}^3$  (см. (2.3)) соответствующий гамильтониану  $\hat{H}$ . Из (2.3) и (2.4) вытекает, что

$$H(k_1, k_2, k_3) = H(-k_1, k_2, k_3) = H(k_1, -k_2, k_3) = H(k_1, k_2, -k_3),$$

поэтому можно считать  $k_1, k_2, k_3 \in [0, \pi]$ .

Если предположить, что  $\mathbf{k} = \boldsymbol{\pi} = (\pi, \pi, \pi)$ , то оператор  $H(\boldsymbol{\pi})$  имеет бесконечное число собственных значений вида  $6 + \hat{v}(\mathbf{n}), \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^3$  и существенный спектр состоит из одной точки  $\{6\}$ . Если потенциал  $\hat{v}$  имеет вид (4.1) и  $\bar{v}$  убывает на  $\mathbb{Z}_+$ , то эти собственные значения  $z_n(\boldsymbol{\pi}) = 6 + \bar{v}(n), n \in \mathbb{Z}_+$  располагается в порядке  $z_0(\boldsymbol{\pi}) > z_1(\boldsymbol{\pi}) > \dots > z_n(\boldsymbol{\pi}) > \dots$ , при этом наибольшее собственное значение  $z_0(\boldsymbol{\pi}) = 6 + \bar{v}(0)$  является простым,  $z_1(\boldsymbol{\pi}) = 6 + \bar{v}(1)$  трехкратным,  $z_2(\boldsymbol{\pi}) = 6 + \bar{v}(2)$  семикратным, а остальные  $z_n(\boldsymbol{\pi}) = 6 + \bar{v}(n), n \geq 3$  девятикратными. В этом случае существенный спектр  $z_\infty(\boldsymbol{\pi}) = 6$  является бесконечнократным собственным значением.

Если оператор  $H(\pi - 2\beta, \pi - 2\beta, \pi)$  запишем в виде  $H(\pi - 2\beta, \pi - 2\beta, \pi) = H(\boldsymbol{\pi}) - \sin\beta (W_1 + W_2)$  (см. (4.5)), то применив теорему Като-Реллиха для невырожденного собственного значения  $z_0(\boldsymbol{\pi})$  получим асимптотическую формулу с точностью до  $\beta^2$  (см. теорему 4.2). Доказывается существования инвариантных подпространств  $L_1^+, L_2^+, L_3^+$  и  $L_{123}^+$  относительно оператора  $H(k)$ . Далее рассматриваются инвариантные подпространства относительно оператора  $H(k_1, k_2, \pi)$  и доказывается, что этот оператор имеет бесконечно много инвариантных подпространств  $\mathfrak{R}_{3n}^+, n \in \mathbb{Z}_+$ .

Уравнение Шредингера  $H(\pi - 2\beta, \pi - 2\beta, \pi)f = zf$  с малым параметром  $\beta$  решается с помощью двух различных методов и притом в двух разных формах. Первый метод – метод теории возмущений, разработанный Реллихом и Като. Второй метод принадлежит Фредгольму и называется определителем Фредгольма оператора Фридрихса.

2. Описание двухчастичного гамильтониана

Свободному гамильтониану  $\hat{H}_0$  системы двух бозонов на трехмерной решетке  $\mathbb{Z}^3$  обычно соответствует следующий ограниченный, самосопряженный оператор, действующий в гильбертовом пространстве  $\ell_2^{sym}(\mathbb{Z}^3 \times \mathbb{Z}^3) := \{f \in \ell_2(\mathbb{Z}^3 \times \mathbb{Z}^3) : f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{y}, \mathbf{x})\}$  по формуле

$$\hat{H}_0 = -\frac{1}{2}\Delta_1 - \frac{1}{2}\Delta_2.$$

Здесь  $\Delta_1 = \Delta \otimes I$  и  $\Delta_2 = I \otimes \Delta$ , где  $I$  – единичный оператор, решетчатый Лапласиан  $\Delta$  есть разностный оператор, описывающий перенос частицы с узла на соседний узел, т.е.

$$(\Delta\hat{\psi})(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^3 [\hat{\psi}(\mathbf{x} + \mathbf{e}_j) + \hat{\psi}(\mathbf{x} - \mathbf{e}_j) - 2\hat{\psi}(\mathbf{x})], \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^3, \hat{\psi} \in \ell_2(\mathbb{Z}^3),$$

где  $\mathbf{e}_1 = (1,0,0)$ ,  $\mathbf{e}_2 = (0,1,0)$ ,  $\mathbf{e}_3 = (0,0,1)$  единичные орты в  $\mathbb{Z}^3$ . Полный гамильтониан  $\hat{H}$  действует в гильбертовом пространстве  $\ell_2^{sym}(\mathbb{Z}^3 \times \mathbb{Z}^3)$  и состоит из суммы свободного гамильтониана  $\hat{H}_0$  и потенциала взаимодействия  $\hat{V}_2$  двух частиц (см. [10], [14]), т.е.

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}_2, \quad (2.1)$$

где

$$(\hat{V}_2\hat{\psi})(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \hat{v}(\mathbf{x} - \mathbf{y})\hat{\psi}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \hat{\psi} \in \ell_2^{sym}(\mathbb{Z}^3 \times \mathbb{Z}^3).$$

Всюду в дальнейшем относительно функции  $\hat{v}$  предполагается, что

$$\hat{v} \in \ell_2(\mathbb{Z}^3) \text{ и } \hat{v}(\mathbf{x}) = \hat{v}(-\mathbf{x}) \geq 0 \text{ для всех } \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^3. \quad (2.2)$$

При условии (2.2) гамильтониан  $\hat{H}$  является ограниченным и самосопряженным оператором в пространстве  $\ell_2^{sym}(\mathbb{Z}^3 \times \mathbb{Z}^3)$ .

Переход в импульсное представление осуществляется с помощью преобразования Фурье

$$F: \ell_2^{sym}(\mathbb{Z}^3 \times \mathbb{Z}^3) \rightarrow L_2^{sym}(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{T}^3).$$

Гамильтониан  $H = H_0 + V_2 = F\hat{H}F^{-1}$  в импульсном представлении коммутирует с группой унитарных операторов  $U_{\mathbf{s}}, \mathbf{s} \in \mathbb{Z}^3$ :

$$(U_{\mathbf{s}}f)(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \exp(-i(\mathbf{s}, \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2))f(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2), f \in L_2^{sym}(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{T}^3).$$

Отсюда следует, что существуют разложения пространства  $L_2^{sym}(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{T}^3)$  и операторов  $U_{\mathbf{s}}, H$  в прямые интегралы (см. [11])

$$L_2^{sym}(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{T}^3) = \int_{\mathbb{T}^3} \oplus L_2^{sym}(F_{\mathbf{k}}) d\mathbf{k}, U_{\mathbf{s}} = \int_{\mathbb{T}^3} \oplus U_{\mathbf{s}}(\mathbf{k}) d\mathbf{k}, H = \int_{\mathbb{T}^3} \oplus \tilde{H}(\mathbf{k}) d\mathbf{k}.$$

Здесь

$$F_{\mathbf{k}} = \{(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \in \mathbb{T}^3 \times \mathbb{T}^3 : \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}\}, \mathbf{k} \in \mathbb{T}^3,$$

$U_{\mathbf{s}}(\mathbf{k})$  - оператор умножения на функцию  $\exp(-i(\mathbf{s}, \mathbf{k}))$  в пространстве  $L_2^{sym}(F_{\mathbf{k}})$ . Слой  $\tilde{H}(\mathbf{k})$  оператора  $H$  также действует в  $L_2^{sym}(F_{\mathbf{k}})$  и унитарно эквивалентен оператору  $H(\mathbf{k}) := H_0(\mathbf{k}) + V$  называемой оператором Шредингера, который действует в гильбертовом пространстве  $L_2^e(\mathbb{T}^3) := \{f \in L_2(\mathbb{T}^3) : f(-\mathbf{q}) = f(\mathbf{q})\}$  по формуле

$$(H(\mathbf{k})f)(\mathbf{q}) = \varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{q})f(\mathbf{q}) + (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{T}^3} v(\mathbf{q} - \mathbf{s})f(\mathbf{s}) ds. \quad (2.3)$$

Невозмущенный оператор  $H_0(\mathbf{k})$  есть оператор умножения на функцию

$$\varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}) = \varepsilon\left(\frac{\mathbf{k}}{2} + \mathbf{q}\right) + \varepsilon\left(\frac{\mathbf{k}}{2} - \mathbf{q}\right) = 6 - 2\cos\frac{k_1}{2}\cos q_1 - 2\cos\frac{k_2}{2}\cos q_2 - 2\cos\frac{k_3}{2}\cos q_3. \quad (2.4)$$

Оператор возмущения  $V$  – интегральный оператор в  $L_2^e(\mathbb{T}^3)$  с ядром

$$(2\pi)^{-\frac{3}{2}}v(\mathbf{q} - \mathbf{s}) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}}(F\hat{v})(\mathbf{q} - \mathbf{s})$$

и принадлежит классу Гильберта-Шмидта  $\Sigma_2$ .

### 3. Ширина непрерывного спектра оператора $H(\mathbf{k})$

Заметим, что спектры операторов  $H_0(\mathbf{k})$  и  $V$  известны. Оператор  $H_0(\mathbf{k})$  не имеет собственных значений, его спектр чисто непрерывный и состоит из области значений функции  $\varepsilon_{\mathbf{k}}$ , т.е.

$$\sigma(H_0(\mathbf{k})) = [m(\mathbf{k}), M(\mathbf{k})],$$

где

$$m(\mathbf{k}) = \min_{\mathbf{q} \in \mathbb{T}^3} \varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}), M(\mathbf{k}) = \max_{\mathbf{q} \in \mathbb{T}^3} \varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}).$$

Спектр оператора  $V$  состоит из множества  $\{0, \hat{v}(\mathbf{n}), \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^3\}$ , при этом  $\hat{v}(\mathbf{n})$  есть собственное значение оператора  $V$  соответствующая ему собственная функция является  $\psi_{\mathbf{n}}(\mathbf{q}) = \cos(\mathbf{n}, \mathbf{q})$ . При условии (2.2),  $V$  является оператором Гильберта-Шмидта, в частности, компактным оператором. Поэтому в силу теоремы Вейля, существенный спектр оператора  $H(\mathbf{k})$  совпадает со спектром оператора  $H_0(\mathbf{k})$ , т.е.

$$\sigma_{ess}(H(\mathbf{k})) = [m(\mathbf{k}), M(\mathbf{k})].$$

Длина этого отрезка  $\omega(\mathbf{k}) = M(\mathbf{k}) - m(\mathbf{k})$  назовем шириной непрерывного спектра оператора  $H(\mathbf{k})$  и имеет вид

$$\omega(\mathbf{k}) = 4\cos\frac{k_1}{2} + 4\cos\frac{k_2}{2} + 4\cos\frac{k_3}{2}. \quad (3.1)$$

Отсюда следует, что

$$\min_{\mathbf{k} \in \mathbb{T}^3} \omega(\mathbf{k}) = \omega(\boldsymbol{\pi}) = 0, \max_{\mathbf{k} \in \mathbb{T}^3} \omega(\mathbf{k}) = \omega(\mathbf{0}) = 12.$$

Ширина непрерывного спектра четно по каждому  $k_j \in [0, \pi], j = 1, 2, 3$ , симметрично относительно  $k_i$  и  $k_j$ . Из (3.1) видно, что ширина непрерывного спектра  $\omega(\mathbf{k})$  уменьшается при возрастании координаты  $k_j \in [0, \pi], j = 1, 2, 3$  полного квазиимпульса  $\mathbf{k}$  системы двух частиц. Ширина непрерывного спектра оператора  $H(\mathbf{k})$  по направлению  $\mathbf{e}_j$  определяем по формуле

$$\omega_j(\mathbf{k}) = \max_{p_j \in [-\pi, \pi]} \varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}) - \min_{p_j \in [-\pi, \pi]} \varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}) = 4\cos\frac{k_j}{2}, j = 1, 2, 3$$

и имеет место равенство

$$\omega(\mathbf{k}) = \omega_1(\mathbf{k}) + \omega_2(\mathbf{k}) + \omega_3(\mathbf{k}).$$

Если  $\mathbf{k} = \boldsymbol{\pi}$ , тогда ширина непрерывного спектра обращается в нуль, т.е.  $\omega(\boldsymbol{\pi}) = 0$  и спектр оператора  $H(\boldsymbol{\pi}) = 6I + V$  состоит из собственных значений вида  $6 + \hat{v}(\mathbf{n}), \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^3$  и существенного спектра  $\{6\}$ . С уменьшением ширины непрерывного спектра число собственных значений оператора Шредингера  $H(\mathbf{k})$  возрастает (см. [4], [14]). Если  $k_j = \pi$  (при некотором  $j \in \{1, 2, 3\}$ ), то  $\omega_j(\mathbf{k}) = 0$  и существует потенциал  $\hat{v}$  такой, что ([15]), оператор  $H(\mathbf{k})$  имеет бесконечное число собственных значений вне непрерывного спектра.

Приведем некоторые известные факты и обозначения из теории операторов и возмущений. Для любого самосопряженного оператора  $B$ , действующего в гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}$  и не имеющего существенного спектра правее точки  $\mu \in \mathbb{R}$ , обозначим через  $n(\mu, B)$  число собственных значений оператора  $B$ , лежащих правее от  $\mu$ .

Из самосопряженности оператора  $H(\mathbf{k})$  и положительности  $V$  вытекает, что

$$\sigma(H(\mathbf{k})) \cap (-\infty, m(\mathbf{k})) = \emptyset,$$

отсюда имеем  $\sigma_{disc}(H(\mathbf{k})) \subset (M(\mathbf{k}), \infty)$ . Поэтому мы ищем собственное значение  $z$  только для  $z > M(\mathbf{k})$ . Число  $n(M(\mathbf{k}), H(\mathbf{k}))$  фактически совпадает с числом собственных

значений вне существенного спектра оператора  $H(\mathbf{k})$ . Для любого  $\mathbf{k} \in \mathbb{T}^3$  и  $z > M(\mathbf{k})$  мы определим интегральный оператор

$$G(\mathbf{k}, z) = -V^{\frac{1}{2}}r_0(\mathbf{k}, z)V^{\frac{1}{2}},$$

где  $r_0(\mathbf{k}, z)$  – резольвента невозмущенного оператора  $H_0(\mathbf{k})$ . При условии (2.2) оператор  $V$  положителен, через  $V^{\frac{1}{2}}$  обозначается положительный квадратный корень положительного оператора  $V$ . Решение  $f$  уравнения Шредингера

$$H(\mathbf{k})f = zf$$

и неподвижные точки  $\varphi$  оператора  $G(\mathbf{k}, z)$  связаны соотношениями

$$f = -r_0(\mathbf{k}, z)V^{\frac{1}{2}}\varphi, \quad \varphi = V^{\frac{1}{2}}f.$$

Кроме того, имеет место принцип Бирмана-Швингера.

**Лемма 3.1** Число собственных значений оператора  $H(\mathbf{k})$  лежащих выше  $z > M(\mathbf{k})$  совпадает с числом собственных значений оператора  $G(\mathbf{k}, z)$  больше единицы, т.е. имеет место равенство

$$n(z, H(\mathbf{k})) = n(1, G(\mathbf{k}, z)).$$

**Лемма 3.2** Если для некоторого  $\mathbf{k} \in \mathbb{T}^3$  предельный оператор  $\lim_{z \rightarrow M(\mathbf{k})+} G(\mathbf{k}, z) = G(\mathbf{k}, M(\mathbf{k}))$  существует и компактен, то имеет место равенство

$$n(M(\mathbf{k}), H(\mathbf{k})) = n(1, G(\mathbf{k}, M(\mathbf{k}))). \quad (3.2)$$

Равенство (3.2) означает, что число собственных значений оператора  $H(\mathbf{k})$  лежащих выше  $M(\mathbf{k})$  совпадает с числом собственных значений оператора  $G(\mathbf{k}, M(\mathbf{k}))$  больше единицы.

#### 4. Применение теоремы Като-Реллиха

Здесь и далее мы рассмотрим оператор  $H(\mathbf{k})$  с потенциалом  $\hat{v}(|\mathbf{n}| = |n_1| + |n_2| + |n_3|)$

$$\hat{v}(\mathbf{n}) = \hat{v}(n_1, n_2, n_3) = \begin{cases} \bar{v}(|\mathbf{n}|), & \text{если } |n_1| + |n_2| \leq 1, \\ 0, & \text{если } |n_1| + |n_2| \geq 2. \end{cases} \quad (4.1)$$

Носитель потенциала  $\hat{v}$  совпадает с множеством  $D$ :

$$D = \{\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{Z}^3: n_3 \in \mathbb{Z}, |n_1| + |n_2| \leq 1\}.$$

Здесь функция  $\bar{v}: \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  определено на множестве  $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$  является убывающим (т.е.  $\bar{v}(0) > \bar{v}(1) > \bar{v}(2) > \dots$ ) и  $\bar{v} \in \ell_2(\mathbb{Z}_+)$ . В этом случае  $v$  ядро интегрального оператора  $V$ , т.е. Фурье образ  $v(\mathbf{p}) = (F\hat{v})(\mathbf{p})$  потенциала  $\hat{v}$  имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} v(\mathbf{p}) := (F\hat{v})(\mathbf{p}) &= \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^3} \hat{v}(\mathbf{n})e^{i(\mathbf{n}, \mathbf{p})} = \frac{1}{2\pi^2} [\bar{v}(0) + 2\bar{v}(1)(\cos p_1 + \cos p_2 + \cos p_3) + \\ &+ 2\bar{v}(2)(\cos 2p_3 + 2\cos p_1 \cos p_2 + 2\cos p_1 \cos p_3 + 2\cos p_2 \cos p_3)] + \\ &+ 2 \sum_{n=1}^{\infty} \bar{v}(n+2)(\cos(n+2)p_3 + 2 \cos(n+1)p_3(\cos p_1 + \cos p_3) + 4 \cos p_1 \cos p_2 \cos np_3). \end{aligned}$$

Если  $k_1 = k_2 = k_3 = \pi$ , тогда спектр оператора  $H(\boldsymbol{\pi}) = 6I + V$  состоит из собственных значений вида  $6, 6 + \bar{v}(n), n \in \mathbb{Z}_+$  и из существенного спектра  $\sigma_{ess}(H(\boldsymbol{\pi})) = \{6\}$ . При этом  $z_0(\boldsymbol{\pi}) = 6 + \bar{v}(0)$  есть невырожденное собственное значение оператора  $H(\boldsymbol{\pi})$  с соответствующей нормированной собственной функцией  $\psi_0(\mathbf{p}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2\pi}}$ . Число  $z_1(\boldsymbol{\pi}) = 6 + \bar{v}(1)$  является трехкратным собственным значением с соответствующими собственными функциями

$$\text{cosp}_1, \text{cosp}_2, \text{cosp}_3.$$

Число  $z_2(\boldsymbol{\pi}) = 6 + \bar{\nu}(2)$  - семикратное собственное значение, соответствующая ему собственными функциями являются

$$\text{cos}2p_3, \text{cosp}_1 \text{cosp}_2, \text{cosp}_2 \text{cosp}_3, \text{cosp}_1 \text{cosp}_3, \text{sin}p_1 \text{sin}p_2, \text{sin}p_1 \text{sin}p_3, \text{sin}p_2 \text{sin}p_3.$$

Для всех  $n \geq 3$  число  $z_n(\boldsymbol{\pi}) = 6 + \bar{\nu}(n)$  является девятикратным собственным значением и соответствующие ему собственные функции:

$$\begin{aligned} &\cos np_3, \cos p_1 \cos(n-1)p_3, \cos p_2 \cos(n-1)p_3, \sin p_1 \sin(n-1)p_3, \\ &\sin p_2 \sin(n-1)p_3, \cos p_1 \cos p_2 \cos(n-2)p_3, \sin p_1 \sin p_2 \cos(n-2)p_3, \\ &\sin p_1 \cos p_2 \sin(n-2)p_3, \cos p_1 \sin p_2 \cos(n-2)p_3. \end{aligned}$$

Число  $z_\infty(\boldsymbol{\pi}) = 6$  является бесконечно кратным собственным значением и соответствующие ему собственными функциями, например, являются следующие функции:

$$\varphi_n(\mathbf{p}) = \text{cos}n_1 p_1 \text{cos}n_2 p_2 \text{cos}n_3 p_3, \mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3), n_3 \in \mathbb{Z}_+, n_1 + n_2 \geq 2.$$

Наша основная цель - изучить поведение этих собственных значений при малых возмущениях координат  $k_i, i = 1, 2, 3$  полного квазиимпульса  $\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3)$ .

Следующие сведения из теории возмущений в дальнейшем являются полезными (см [11]).

**Теорема 4.1 (Като-Реллих)** Пусть  $z_0$  - изолированное невырожденное собственное значение оператора  $A$  и  $B$  - ограниченный оператор. Тогда при малых  $\beta \in \mathbb{R}$  оператор  $T(\beta) = A + \beta B$  имеет единственное невырожденное собственное значение  $z_0(\beta)$ , лежащее в некоторой окрестности  $U_\delta(z_0) = \{z \in \mathbb{C}: |z - z_0| < \delta\}$  точки  $z_0$  и  $z_0(\beta)$  аналитична по  $\beta$  в окрестности  $\beta = 0$ .

Там же получена, что для  $z_0(\beta)$  имеет место представление:

$$z_0(\beta) = z_0 + \frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \beta^n}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \beta^n} = z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \beta^n. \quad (4.2)$$

Если  $A$  и  $B$  самосопряженные операторы, тогда  $a_n$  и  $b_n$  коэффициенты Релея-Шредингера можно вычислить с помощью следующих формул

$$a_n = \frac{(-1)^n}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\varepsilon} (\varphi_0, [B(A-zI)^{-1}]^n \varphi_0) dz, \quad (4.3)$$

$$b_n = \frac{(-1)^{n-1}}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\varepsilon} (\varphi_0, (A-zI)^{-1} [B(A-zI)^{-1}]^n \varphi_0) dz. \quad (4.4)$$

Здесь  $\varepsilon > 0$  выбирается так, что в круг  $|z - z_0| < \varepsilon$  попадает ровно одно простое собственное значение оператора  $T(\beta)$ , а  $\varphi_0$  - нормированная собственная функция оператора  $A$  соответствующая собственному значению  $z_0$ . Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \beta^n$  в (4.2) называется рядом Релея-Шредингера для  $z_0(\beta)$  и имеет ненулевой радиус сходимости.

Введем следующие операторы

$$(W_1 f)(\mathbf{p}) = 2\text{cosp}_1 f(\mathbf{p}), (W_2 f)(\mathbf{p}) = 2\text{cosp}_2 f(\mathbf{p}), (W_3 f)(\mathbf{p}) = 2\text{cosp}_3 f(\mathbf{p}), \quad (4.5)$$

и пользуясь (2.3) запишем  $H(k_1, k_2, k_3)$  в виде

$$H(k_1, k_2, k_3) = H(\boldsymbol{\pi}) - \cos \frac{k_1}{2} W_1 - \cos \frac{k_2}{2} W_2 - \cos \frac{k_3}{2} W_3.$$

В частности, пользуясь тождеством  $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \sin\beta$  получим

$$H(\pi - 2\beta_1, \pi - 2\beta_2, \pi - 2\beta_3) = H(\boldsymbol{\pi}) - \sin\beta_1 W_1 - \sin\beta_2 W_2 - \sin\beta_3 W_3.$$

Известно, что число  $z_0(\boldsymbol{\pi}) = 6 + \bar{\nu}(0)$  изолированное невырожденное собственное значение оператора  $H(\boldsymbol{\pi})$ , поэтому к оператору  $H(\pi - 2\beta, \pi - 2\beta, \pi) = H(\boldsymbol{\pi}) - \sin\beta (W_1 + W_2)$  можем применять теорему Като-Реллиха.

Нашим первым результатом является следующая теорема.

**Теорема 4.2** Существует  $\delta > 0$  такое, что для любого  $\beta \in (0, \delta)$  оператор  $H(\pi - 2\beta, \pi - 2\beta, \pi)$  имеет единственное невырожденное собственное значение  $z_0(\pi - 2\beta, \pi - 2\beta, \pi)$ , лежащее в малой окрестности  $z_0(\boldsymbol{\pi})$ , причем имеет место асимптотическая формула:

$$z_0(\pi - 2\beta, \pi - 2\beta, \pi) = 6 + \bar{v}(0) + \frac{4}{\bar{v}(0) - \bar{v}(1)}\beta^2 + O(\beta^4), \beta \rightarrow 0.$$

**Доказательство теоремы 4.2.** Пользуясь теоремой Като-Реллиха (здесь  $A = H(\boldsymbol{\pi}), B = W := W_1 + W_2, \varphi_0 = \psi_0$  и в качестве  $\beta$  идет  $\sin\beta$  для  $z_0(\pi - 2\beta, \pi - 2\beta, \pi)$ ) получаем представление

$$z_0(\pi - 2\beta, \pi - 2\beta, \pi) = z_0(\boldsymbol{\pi}) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \beta^n.$$

Чтобы вычислить собственное значение  $z_0(\pi - 2\beta, \pi - 2\beta, \pi)$  с точностью до  $\beta^2$  достаточно найти коэффициенты  $a_1, a_2$  и  $b_1$  ряда (4.2) Релея-Шредингера. Рассмотрим скалярное произведение

$$(\psi_0, [W(H(\boldsymbol{\pi}) - zI)^{-1}]^n \psi_0),$$

которое участвует при вычислении коэффициентов  $a_n$  и  $b_n$ .

Из определения операторов  $H(\boldsymbol{\pi})$  и  $W = W_1 + W_2$  непосредственно вытекает

$$(H(\boldsymbol{\pi}) - zI)^{-1} \psi_0 = \frac{1}{6 + \bar{v}(0) - z} \psi_0, \\ W(H(\boldsymbol{\pi}) - zI)^{-1} \psi_0 = \frac{\sqrt{2}(\psi_{e_1} + \psi_{e_2})}{6 + \bar{v}(0) - z}. \quad (4.6)$$

Здесь

$$\psi_{\mathbf{n}}(\mathbf{p}) = \frac{e^{i(\mathbf{n}, \mathbf{p})} + e^{-i(\mathbf{n}, \mathbf{p})}}{\sqrt{2}(2\pi)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\cos(\mathbf{n}, \mathbf{p})}{2\pi\sqrt{\pi}}, \quad \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^3, \mathbf{p} \in \mathbb{T}^3.$$

Из равенства (4.6) вытекает

$$(\psi_0, W(H(\boldsymbol{\pi}) - zI)^{-1} \psi_0) = 0. \quad (4.7)$$

Из (4.3) и (4.7) следует  $a_1 = 0$ . Из самосопряженности  $H(\boldsymbol{\pi})$  и (4.6) имеем:

$$(\psi_0, (H(\boldsymbol{\pi}) - zI)^{-1} [W(H(\boldsymbol{\pi}) - zI)^{-1}] \psi_0) = ((H(\boldsymbol{\pi}) - zI)^{-1} \psi_0, [W(H(\boldsymbol{\pi}) - zI)^{-1}] \psi_0) = 0.$$

Отсюда из (4.4) вытекает, что  $b_1 = 0$ . Несложные вычисления показывают, что  $a_{2n-1} = b_{2n-1} = 0$  для любого  $n \in \mathbb{N}$  (см.[14]).

Действуем оператором  $W(H(\boldsymbol{\pi}) - zI)^{-1}$  на обе части равенства (4.6) получим

$$(W(H(\boldsymbol{\pi}) - zI)^{-1})^2 \psi_0 = \frac{4\psi_0 + \sqrt{2}\psi_{2e_1} + \sqrt{2}\psi_{2e_2} + 4\psi_{e_1+e_2}}{(6 + \bar{v}(0) - z)(6 + \bar{v}(1) - z)}.$$

Отсюда имеем

$$(\psi_0, [W(H(\boldsymbol{\pi}) - zI)^{-1}]^2 \psi_0) = \frac{4}{(z_0(\boldsymbol{\pi}) - z)(z_1(\boldsymbol{\pi}) - z)}. \quad (4.8)$$

Умножая (4.8) на  $(2\pi i)^{-1}$  и интегрируя по окружности  $|z - z_0(\boldsymbol{\pi})| = \varepsilon$ , получим:

$$a_2 = \frac{4}{\bar{v}(0) - \bar{v}(1)}.$$

Так как  $c_1 = a_1, c_2 = a_2 - a_1 b_1$ , то следует, что  $c_1 = 0, c_2 = a_2$ . Учитывая, что  $\sin\beta \sim \beta, \beta \rightarrow 0$  мы получим утверждение теоремы 4.2.

### 5. Инвариантные подпространство оператора $H(\mathbf{k})$

Известно, что пространство  $L_2^e(\mathbb{T}^3)$  можно представить в виде прямой суммы:

$$L_2^e(\mathbb{T}^3) = L_1^+ \oplus L_2^+ \oplus L_3^+ \oplus L_{123}^+.$$

Здесь

$$L_1^+ := L_2^+(\mathbb{T}) \otimes L_2^-(\mathbb{T}) \otimes L_2^-(\mathbb{T}), \quad L_2^+ := L_2^-(\mathbb{T}) \otimes L_2^+(\mathbb{T}) \otimes L_2^-(\mathbb{T})$$

$$L_3^+ := L_2^-(\mathbb{T}) \otimes L_2^-(\mathbb{T}) \otimes L_2^+(\mathbb{T}), \quad L_{123}^+ := L_2^+(\mathbb{T}) \otimes L_2^+(\mathbb{T}) \otimes L_2^+(\mathbb{T}),$$

где  $L_2^+(\mathbb{T}) = \{f \in L_2(\mathbb{T}) : f(-q) = f(q)\}$  и  $L_2^-(\mathbb{T}) = \{f \in L_2(\mathbb{T}) : f(-q) = -f(q)\}$  состоит из четных и нечетных функций на отрезке  $\mathbb{T} = [-\pi, \pi]$ .

**Лемма 5.1** Пусть потенциал  $\hat{v}$  имеет виде (4.1). Тогда подпространства  $L_1^+, L_2^+, L_3^+$  и  $L_{123}^+$  являются инвариантными относительно оператора  $H(\mathbf{k})$ .

**Доказательство.** Мы докажем инвариантность подпространства  $L_3^+$  относительно оператора  $H(\mathbf{k})$ . Аналогично доказываются инвариантность подпространств  $L_1^+, L_2^+$  и  $L_{123}^+$  относительно оператора  $H(\mathbf{k})$ .

Сначала докажем инвариантность подпространства  $L_3^+$  относительно невозмущенного оператора  $H_0(\mathbf{k})$ , а потом относительно  $V$ . Из представления (2.4) следует, что функция  $\varepsilon_{\mathbf{k}}$  принадлежит подпространству  $L_{123}^+$ , поэтому из включения  $f \in L_3^+$  вытекает включение  $\varepsilon_{\mathbf{k}} f \in L_3^+$ . Это показывает инвариантность подпространства  $L_3^+$  относительно оператора  $H_0(\mathbf{k})$ .

Несложные вычисления показывают, что функция

$$(Vf)(p_1, p_2, p_3) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^3} v(p_1 - s_1, p_2 - s_2, p_3 - s_3) f(s_1, s_2, s_3) ds_1 ds_2 ds_3$$

является элементом подпространства  $L_3^+$  при  $f \in L_3^+$ . Это означает инвариантность подпространства  $L_3^+$  относительно оператора  $V$ . Поэтому подпространство  $L_3^+$  также инвариантно относительно оператора  $H(k) = H_0(k) + V$ .

Обозначаем через  $H_3^+(\mathbf{k})$  сужение оператора  $H(\mathbf{k})$  в инвариантном подпространстве  $L_3^+$ . Действие оператора  $H_0(\mathbf{k})$  остается неизменной, поэтому мы дадим действия оператора  $V_3^+ = V|_{L_3^+}$  к элементу  $f \in L_3^+$ :

$$(V_3^+ f)(\mathbf{p}) = \frac{4}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{T}^3} \sin p_1 \sin p_2 \sin q_1 \sin q_2 \{ \bar{v}(2) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \bar{v}(n+2) \cos n p_3 \cos n q_3 \} f(\mathbf{q}) d\mathbf{q}.$$

Теперь и далее рассматривается оператор  $H(\mathbf{k})$  в  $L_3^+$ . В дальнейшем мы изучаем собственные значения и собственные функции оператора  $H_3(\mathbf{k})$ . Нетрудно заметить, что семикратное собственное значение  $z_2(\pi) = 6 + \bar{v}(2)$  и все девятикратные собственные значения  $z_n(\pi) = 6 + \bar{v}(n), n \geq 3$  оператора  $H(\pi)$  являются простыми собственными значениями оператора  $H_3^+(\pi)$ .

Пространство  $L_3^+$  представим в виде прямой суммы подпространств  $\mathfrak{R}_{3n}^+$ . Доказывается, что эти подпространства инвариантно относительно оператора  $H(k_1, k_2, \pi)$ .

Система

$$\psi_0^+(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \{ \psi_n^+(q) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nq \}_{n \in \mathbb{N}}$$

образует ортонормированный базис в пространстве  $L_2^+(\mathbb{T})$ . Обозначим через  $L^+(n), n \in \mathbb{Z}_+$  одномерное подпространство, натянутое на вектор  $\psi_n^+$ . При этом пространство  $L_2^+(\mathbb{T})$  разлагается в прямую сумму

$$L_2^+(\mathbb{T}) = \sum_{n=0}^{\infty} \oplus L^+(n). \quad (5.1)$$

Разложение (5.1) порождает разложение

$$L_2^{-+}(\mathbb{T}^3) = \sum_{n=0}^{\infty} \oplus \{ L_2^{--}(\mathbb{T}^2) \otimes L^+(n) \} = \sum_{n=0}^{\infty} \oplus \mathfrak{R}_{3n}^+.$$

Здесь  $\mathfrak{R}_{3n}^+ := L_2^{--}(\mathbb{T}^2) \otimes L^+(n), L_2^{--}(\mathbb{T}^2) = L_2^-(\mathbb{T}) \otimes L_2^-(\mathbb{T})$ .

**Лемма 5.2.** Пусть потенциал  $\hat{v}$  имеет вид (4.1). Тогда для любого  $n \in \mathbb{Z}_+$  подпространство  $\mathfrak{R}_{3n}^+$  является инвариантным относительно оператора  $H_3^+(k_1, k_2, \pi)$ .

**Доказательство.** Пусть  $(f \psi_n^+)(p_1, p_2, p_3) := f(p_1, p_2) \psi_n^+(p_3), f \in L_2^{--}(\mathbb{T}^2), \psi_n^+ \in L^+(n)$  произвольный элемент из  $\mathfrak{R}_{3n}^+$ . Рассмотрим действие оператора  $H_3^+(k_1, k_2, \pi) = H_0(k_1, k_2, \pi) + V_3^+$  к элементу  $f \psi_n^+$ :

$$(H_0(k_1, k_2, \pi) f \psi_n^+)(p_1, p_2, p_3) = \left[ \left( 6 - 2 \cos \frac{k_1}{2} \cos p_1 - 2 \cos \frac{k_2}{2} \cos p_2 \right) f(p_1, p_2) \right] \psi_n^+(p_3), \quad (5.2)$$

$$(V_3^+ f \psi_n^+)(p_1, p_2, p_3) = \left[ \frac{\bar{v}(n+2)}{\pi^2} \int_{\mathbb{T}^2} \sin p_1 \sin p_2 \sin q_1 \sin q_2 f(q_1, q_2) dq_1 dq_2 \right] \psi_n^+(p_3). \quad (5.3)$$

При получении равенства (5.3) мы использовали ортогональности системы  $\{\psi_n^+\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$  в  $L_2^+(\mathbb{T})$ . Из (5.2) и (5.3) вытекает

$$\begin{aligned} (H(k_1, k_2, \pi) f \psi_n^+)(p_1, p_2, p_3) &= (H_0(k_1, k_2, \pi) f \psi_n^+)(p_1, p_2, p_3) + (V_3^+ f \psi_n^+)(p_1, p_2, p_3) = \\ &= \left[ \left( 6 - 2 \cos \frac{k_1}{2} \cos p_1 - 2 \cos \frac{k_2}{2} \cos p_2 \right) f(p_1, p_2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\bar{v}(n+2)}{\pi^2} \int_{\mathbb{T}^2} \sin p_1 \sin q_1 \sin p_2 \sin q_2 f(q_1, q_2) dq_1 dq_2 \right] \psi_n^+(p_3) \end{aligned}$$

что доказывает лемму.

6. Собственные значения и собственные функции оператора  $H_3^+(k_1, k_2, \pi)$

Из (5.2) и (5.3) следует, что сужение  $H_3^+(k_1, k_2, \pi)|_{\mathfrak{R}_{3n}^+} = H_{3n}^+(k_1, k_2, \pi)$  оператора  $H_3^+(k_1, k_2, \pi)$  на инвариантном подпространстве  $\mathfrak{R}_{3n}^+ = L_2^-(\mathbb{T}^2) \otimes L^+(n)$  имеет вид:

$$H_{3n}^+(k_1, k_2, \pi) = [2I + H_0(k_1, k_2) + \bar{v}(n+2)V_{11}] \otimes I. \quad (6.1)$$

Здесь  $I$  – единичный оператор, а  $H_3^{(n)}(\mathbf{k}) := 2I + H_0(\mathbf{k}) + \bar{v}(n+2)V_{11}$ ,  $\mathbf{k} = (k_1, k_2)$  определяет двухчастичный оператор в пространстве  $L_2^-(\mathbb{T}^2)$ , т.е.

$$(H_3^{(n)}(\mathbf{k})f)(\mathbf{p}) = (2 + \varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}))f(\mathbf{p}) + \frac{\bar{v}(n+2)}{\pi^2} \int_{\mathbb{T}^2} \sin p_1 \sin p_2 \sin q_1 \sin q_2 f(\mathbf{q}) d\mathbf{q}. \quad (6.2)$$

Здесь  $\varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}) = 4 - 2 \cos \frac{k_1}{2} \cos p_1 - 2 \cos \frac{k_2}{2} \cos p_2$ ,  $V_{11}$  одномерный интегральный оператор в пространстве  $L_2^-(\mathbb{T}^2)$  с ядром

$$v(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{\pi^2} \sin p_1 \sin p_2 \sin q_1 \sin q_2.$$

Таким образом, изучения спектральных свойств оператора  $H_{3n}^+(k_1, k_2, \pi)$  в силу (6.1) привели к изучению спектральных свойств оператора  $H_3^{(n)}(\mathbf{k}) = 2I + H_0(\mathbf{k}) + \bar{v}(n+2)V_{11}$ , т.е. трехмерную задачу привели к двумерным задачам.

Теперь проверим собственные значения оператора  $H_3^{(n)}(\mathbf{k})$  определённого равенством (6.2) в пространстве  $L_2^-(\mathbb{T}^2)$ . С помощью

$$\Delta_n(\beta, z) = 1 + \frac{\bar{v}(n+2)}{\pi^2} \int_{\mathbb{T}^2} \frac{\sin^2 q_1 \sin^2 q_2 dq_1 dq_2}{6 - 2 \sin \beta (\cos q_1 + \cos q_2) - z} \quad (6.3)$$

обозначим, определитель Фредгольма оператора  $I + \bar{v}(n+2)V_{11} r_0(\beta, z)$ . Здесь  $r_0(\beta, z)$  – резольвента оператора  $2I + H_0(\pi - 2\beta, \pi - 2\beta)$ . Обозначим через  $C_{11}^{--}$  значение следующего интеграла:

$$C_{11}^{--} = \frac{1}{\pi^2} \int_{\mathbb{T}^2} \frac{\sin^2 q_1 \sin^2 q_2 dq_1 dq_2}{2(2 + \cos q_1 + \cos q_2)}$$

Компьютерные вычисления показывают, что

$$C_{11}^{--} \approx 0,302347.$$

Оператор  $V_{11}$  является компактным, поэтому в силу теоремы Вейля, существенный спектр оператора  $H_3^{(n)}(\pi - 2\beta, \pi - 2\beta) = 2I + H_0(\pi - 2\beta, \pi - 2\beta) + \bar{v}(n+2)V_{11}$  совпадает со спектром оператора  $2I + H_0(\pi - 2\beta, \pi - 2\beta)$ , т.е.

$$\sigma_{ess}(H_3^{(n)}(\pi - 2\beta, \pi - 2\beta)) = [6 - 4 \sin \beta, 6 + 4 \sin \beta].$$

**Лемма 6.1.** Число  $z \in \mathbb{R} \setminus [6 - 4 \sin \beta, 6 + 4 \sin \beta]$  является собственным значением оператора  $H_3^{(n)}(\pi - 2\beta, \pi - 2\beta)$  тогда и только тогда, когда  $\Delta_n(\beta, z) = 0$ .

**Доказательство.** Необходимость. Допустим, что число  $z \in \mathbb{R} \setminus [6 - 4 \sin \beta, 6 + 4 \sin \beta]$  является собственным значением оператора  $H_3^{(n)}(\pi - 2\beta, \pi - 2\beta)$  и  $f$  есть соответствующая ему собственная функция, т.е

$$H_3^{(n)}(\pi - 2\beta, \pi - 2\beta)f = zf \quad (6.4)$$

уравнение имеет ненулевое решение. Уравнение (6.4) равносильно уравнению

$$(6 - 2 \sin \beta (\cos p_1 + \cos p_2) - z)f(\mathbf{p}) = -\frac{\bar{v}(n+2)}{\pi^2} \int_{\mathbb{T}^2} \sin p_1 \sin p_2 \sin q_1 \sin q_2 f(\mathbf{q}) d\mathbf{q}. \quad (6.5)$$

Обозначая через

$$C = \frac{1}{\pi^2} \int_{\mathbb{T}^2} \sin q_1 \sin q_2 f(\mathbf{q}) d\mathbf{q} \quad (6.6)$$

из (6.5) получим следующий вид собственной функции  $f$ :

$$f(\mathbf{p}) = -\frac{C \bar{v}(n+2) \sin p_1 \sin p_2}{6 - 2 \sin \beta (\cos p_1 + \cos p_2) - z} \quad (6.7)$$

Подставляя (6.7) в (6.6) получим уравнение относительно  $C$ :

$$C = -\frac{C \bar{v}(n+2)}{\pi^2} \int_{\mathbb{T}^2} \frac{\sin^2 q_1 \sin^2 q_2 dq_1 dq_2}{6 - 2 \sin \beta (\cos q_1 + \cos q_2) - z}$$

либо

$$C \left( 1 + \frac{\bar{v}(n+2)}{\pi^2} \int_{\mathbb{T}^2} \frac{\sin^2 q_1 \sin^2 q_2 dq_1 dq_2}{6 - 2 \sin \beta (\cos q_1 + \cos q_2) - z} \right) = 0.$$

Так как  $C = 0$  противоречит тому, что  $f$  есть собственная функция, поэтому

$$\Delta_n(\beta, z) = 0.$$

Достаточность. Пусть  $\Delta_n(\beta, z) = 0$ . Тогда

$$f(\mathbf{p}) = \frac{\sin p_1 \sin p_2}{6 - 2 \sin \beta (\cos p_1 + \cos p_2) - z}$$

является решением уравнение (6.4) и принадлежит  $L_2^-(\mathbb{T}^2)$ .

**Теорема 6.1** Пусть  $n \in \mathbb{Z}_+, \beta \in (0, \frac{\pi}{2}]$ .

a) Если  $\bar{v}(n+2) > \frac{\sin \beta}{c_{11}^-}$ , тогда оператор  $H_3^{(n)}(\pi - 2\beta, \pi - 2\beta)$  имеет единственное невырожденное собственное значения  $z_3^{(n)}(\beta)$  вне существенного спектра и имеет место  $z_3^{(n)}(\beta) > 6 + 4 \sin \beta := M(\beta)$ .

b) Если  $\bar{v}(n+2) < \frac{\sin \beta}{c_{11}^-}$ , тогда оператор  $H_3^{(n)}(\pi - 2\beta, \pi - 2\beta)$  не имеет собственных значений вне существенного спектра.

c) Если  $\bar{v}(n+2) = \frac{\sin \beta}{c_{11}^-}$ , тогда  $M(\beta) = 6 + 4 \sin \beta$ -правый край существенного спектра оператора  $H_3^{(n)}(\pi - 2\beta, \pi - 2\beta)$  является собственным значением этого оператора.

d) Оператор  $H_3^{(n)}(\pi - 2\beta, \pi - 2\beta)$  не имеет вложенных собственных значений в интервале  $(m(\beta), M(\beta))$ .

**Доказательства теоремы 6.1.** В силу леммы 6.1 доказательство теоремы 6.1 сводится к изучению нулей функции  $\Delta_n(\beta, z)$ , определенной по формуле (6.3).

Если  $z < m(\beta) = 6 - 4 \sin \beta$ , то функция  $\Delta_n(\beta, z) > 1$ . Поэтому она не обращается в нуль на полуоси  $(-\infty, m(\beta))$ .

Пусть  $z > M(\beta) = 6 + 4 \sin \beta$ . Так как производная по  $z \in (M(\beta), +\infty)$

$$\frac{\partial \Delta_n(\beta, z)}{\partial z} = \frac{\bar{v}(n+2)}{\pi^2} \int_{\mathbb{T}^2} \frac{\sin^2 q_1 \sin^2 q_2 dq}{(6 - 2 \sin \beta (\cos p_1 + \cos p_2) - z)^2} > 0,$$

то функция  $\Delta_n(\beta, z)$  строго возрастает на полуоси  $(M(\beta), \infty)$ . Известно, что

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \Delta_n(\beta, z) = 1.$$

С другой стороны имеет место равенство

$$\lim_{z \rightarrow M(\beta)} \Delta_n(\beta, z) = 1 - \frac{\bar{v}(n+2)C_{11}^{--}}{\sin \beta}.$$

Функция имеет нуль на полуоси  $(M(\beta), +\infty)$  тогда и только тогда, когда

$$1 - \frac{\bar{v}(n+2)C_{11}^{--}}{\sin \beta} < 0 \quad (6.8)$$

Для выполнения (6.8) необходимо и достаточно,  $\bar{v}(n+2) > \frac{\sin \beta}{C_{11}^{--}}$ . Из этого вытекает утверждение а) и б) теоремы.

При  $\bar{v}(n+2) = \frac{\sin \beta}{C_{11}^{--}}$  уравнение (6.4) имеет решение

$$f(p) = \frac{\sin p_1 \sin p_2}{2 + \cos p_1 + \cos p_2}$$

и она принадлежит  $L_2^-(\mathbb{T}^2)$ . Это доказывает утверждение части с) теоремы 6.1.

Утверждение d) теоремы 6.1 следует из леммы 7.2 в работе [16].

**Заключение.** Если для некоторого  $n_0 \in \mathbb{Z}_+$  имеет место включение

$$\frac{\sin \beta}{C_{11}^{--}} \in (\bar{v}(n_0 + 3), \bar{v}(n_0 + 2)]$$

то оператор  $H_3^+(\pi - 2\beta, \pi - 2\beta, \pi)$  имеет ровно  $n_0 + 1$  собственных значений. При малых  $\beta$  эти собственные значения с точностью до  $\beta^2$  имеет вид:

$$z_3^{(n)}(\beta) = 6 + \bar{v}(n+2) + \frac{2}{\bar{v}(n+2)} \sin^2 \beta + O(\beta^4).$$

Этим собственным значениям соответствует собственные функции:

$$f_n(p_1, p_2, p_3) = \frac{\sin p_1 \sin p_2}{6 - 2 \sin \beta (\cos p_1 + \cos p_2) - z_3^{(n)}(\beta)} \psi_n^+(p_3) \in \mathfrak{R}_{3n}^+.$$

В случае  $\frac{\sin \beta}{C_{11}^{--}} = \bar{v}(n_0 + 2)$  правый край спектра  $M(\beta) = 6 + 4 \sin \beta$  является собственным значением оператор  $H_3^+(\pi - 2\beta, \pi - 2\beta, \pi)$ .

**Замечание 6.2** Если потенциал  $\hat{v}$  является четным по всем аргументам и  $\hat{v} \in \ell_2(\mathbb{Z}^3)$ , то утверждения леммы 5.1-5.2 остается в силе.

**Замечание 6.3** Если  $k_3 \neq \pi$ , то тогда подпространства  $\mathfrak{R}_{3n}^+, n \in \mathbb{Z}_+$  не являются инвариантными для оператора  $H_3^+(k_1, k_2, k_3)$ .

**Литература**

1. Маматов Ш.С., Минлос Р.А. Связанные состояния двухчастичного кластерного оператора. Теоретическая и Математическая Физика Т.79, 2, 163-179, (1989). <https://doi.org/10.1007/BF01016525>
2. Minlos R.A., Mogilner A.I. Some problems concerning spectra of lattice models. In Schrodinger operators: Standard and Nonstandard (eds. P. Exner, P.Seba). World. Scientific. Singapoer. 1989.
3. Howland J.S. Puiseux Series for Resonances at an Embedded Eigenvalue. Pacific J. Math. V.55, 157-176, (1974). <https://doi.org/10.2140/pjm.1974.55.157>
4. Абдуллаев Ж.И. Связанные состояния системы двух фермионов на одномерной решетке. Теоретическая и Математическая Физика Т.147, 1, 36-47, (2006). <https://doi.org/10.1007/s11232-006-0055-z>
5. Rauch J. Perturbation theory for eigenvalues and resonances of Schrodinger Hamiltonians. J. Funct. Anal. V.35, 304-315, (1980). [https://doi.org/10.1016/0022-1236\(80\)90085-3](https://doi.org/10.1016/0022-1236(80)90085-3)
6. Абдуллаев Ж.И. Теория возмущений для двухчастичного оператора Шредингера на решетке. Теоретическая и Математическая Физика, Т.145, 1, 212-220, (2005).
7. Абдуллаев Ж. И., Кулиев К. Д., Мамиров Б. У. Бесконечность числа связанных состояний системы двух фермионов на двумерной решетке. Узбекский Математический Журнал, 2016, № 4, 3-16.
8. J.I.Abdullaev, A.M.Toshturdiyev Bound states of a system of Two Fermions on Invariant Subspace. Journal of Modern Physics, 2021, 12, 35-49. <https://www.scirp.org/journal/imp>
9. Абдуллаев Ж.И., Икромов И.А. Конечность числа собственных значений двухчастичного оператора Шредингера на решетке. Теоретическая и Математическая Физика, Т 152, 2, 47-57, (2007).
10. M.I.Muminov and S.K.Ghoshal. Spectral Features of Two-Particle Schrodinger Operators on  $d$  – Dimensional Lattice. Complex Analysis and Operator Theory. V., 288-300, (2020). <https://doi.org/10.1007/s11785-019-00978-z>
11. M. Reed and B. Simon. Методы современной математической физики. IV: Анализ операторов. М.: Мир. 1982.
12. Simon B. The bound state of weakly coupled Schrodinger operators in one and two dimensions. Ann. Phys. V.97, 279-288, (1976). [https://doi.org/10.1016/0003-4916\(76\)90038-5](https://doi.org/10.1016/0003-4916(76)90038-5)
13. Klaus M. On the Bound state of Schrodinger operators in one dimension. Anals of Physics. V.108, 288-300, (1977). [https://doi.org/19.1016/0003-4916\(77\)90015-X](https://doi.org/19.1016/0003-4916(77)90015-X)
14. Абдуллаев Ж.И., Кулиев К.Д. Связанные состояния системы двух бозонов на двумерной решетке. Теоретическая и Математическая Физика, Т 186, 2, 272-292, (2016). <https://doi.org/10.1134/S0040577916020082>
15. Абдуллаев Ж.И. Собственные значения двухчастичного оператора Шредингера на двумерной решетке. Узбекский Математический Журнал, 2005. N 1, 3-11.
16. Ando K., Isozaki H and Morioka H. (2016) Annales Henri Poincaré, 17, 2103-2171. <https://doi.org/10.1007/s0023-015-0430-0>

---



---

**PERIODIC SOLUTIONS OF DIFFERENTIAL EQUATION WITH PIECEWISE CONSTANT ARGUMENT**


---

**T.A. Radjabov**

*Samarkand state university  
radjabovtirkash@yandex.com*

**Abstract.** In this paper, differential equations with piecewise constant arguments are studied. The problem of finding the periodic solution of differential equations with piecewise constant arguments (DEPCA) is brought to the solution of the system of algebraic equations. The periodic solution over time using the periodic solution of differential equations with piecewise constant arguments is given.

**Keywords:** differential equation, piecewise constant argument, periodic solution

**Bo'lakli o'zgarmas argumentli differensial tenglamaning davriy yechimlari**

**Annotatsiya.** Ushbu maqolada bo'lakli o'zgarmas argumentli differensial tenglamalar o'rganildi. Bo'lakli o'zgarmas argumentli differensial tenglamalarning davriy yechimini topish masalasi algebraik tenglamalar sistemasini yechish masalasiga keltiriladi. Bo'lakli o'zgarmas argumentli differensial tenglamalarning davriy yechimini topish usulidan foydalanib, vaqt bo'yicha davriy yechimi keltirilgan.

**Kalit so'zlar:** differensial tenglama, bo'lakli o'zgarmas argument, davriy yechim

**Периодические решения дифференциального уравнения с кусочно-постоянным аргументом**

**Аннотация.** В статье исследуется дифференциальное уравнение с кусочно-постоянными аргументами. Проблема нахождения периодического решения дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами сводится к задаче решения системы алгебраических уравнений. Дано периодическое решение по времени с использованием периодического решения дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами.

**Ключевые слова:** дифференциальное уравнение, кусочно-постоянный аргумент, периодическое решение

In this paper we give a method of finding  $N$ -periodic solutions of the differential equation with piecewise constant argument (DEPCA)

$$T'(t) + a^2 T(t) + bT([t]) + cT([t+1]) = f(t), t > 0 \quad (1)$$

where  $f(t)$  is  $N$ -periodic and continuous function on  $[0, \infty)$ .

Let us define a definition of solution for (1)

**Definition.** A function  $T(t)$  is called a solution of (1) if the following conditions are satisfied:

- (i)  $T(t)$  is continuous on  $R_+$ ;
- (ii)  $T'(t)$  exists and is continuous in  $R_+$ , with possible exception at points  $[t] \in R_+$ , where one-sided derivatives exist;
- (iii)  $T(t)$  satisfies Eq. (1) in  $R_+$ , with the possible exception at the points  $[t] \in R_+$ .

**2- periodic solutions DEPCA.** We first give a method of finding periodic solutions of (1) and their existence conditions for the case when  $f(\cdot)$  is 2-periodic function.

We seek a function  $T$  as a 2-periodic function that solves (1).

Integrating (1) we have

$$T(t) = e^{-a^2 t} [T(0) + \Phi(t) - \int_0^t b e^{a^2 s} T([s]) ds - \int_0^t c e^{a^2 s} T([s+1]) ds].$$

where

$$\Phi(t) = \int_0^t e^{a^2s} f(s) ds .$$

The function  $T(t)$  can be represented as

$$T(t) = \begin{cases} e^{-a^2t} [\Phi(t) + \left(1 + \frac{b}{a^2} (1 - e^{a^2t})\right) T(0) + \frac{c}{a^2} (1 - e^{a^2t}) T(1)], t \in [0,1), \\ e^{-a^2t} [\Phi(t) + \left(1 + \frac{b}{a^2} (1 - e^{a^2t})\right) T(0) + \frac{b}{a^2} (e^{a^2} - e^{a^2t}) T(1) + \frac{c}{a^2} (1 - e^{a^2t}) T(1) + \\ + \frac{c}{a^2} (e^{a^2} - e^{a^2t}) T(2)], t \in [1,2). \end{cases}$$

(2)

Let we denote

$$N_i(t) = \frac{b}{a^2} (e^{a^2(i-t)} - 1), i = 1,2,3,\dots$$

$$P_i(t) = \frac{c}{a^2} (e^{a^2(i-t)} - 1), i = 1,2,3,\dots$$

$$M_i(t) = \frac{b}{a^2} (e^{a^2(i-t)} - e^{a^2(1+i-t)}), i = 1,2,3,\dots$$

$$K_i(t) = \frac{c}{a^2} (e^{a^2(i-t)} - e^{a^2(1+i-t)}), i = 1,2,3,\dots$$

Then (2) represents as

$$T(t) = \begin{cases} \left( e^{-a^2t} + N_0(t) \right) T(0) + P_0(t) T(1) + e^{-a^2t} \Phi(t), t \in [0,1), \\ \left( e^{-a^2t} + M_0(t) \right) T(0) + N_1(t) T(1) + K_0(t) T(1) + P_1(t) T(2) + e^{-a^2t} \Phi(t), t \in [1,2). \end{cases} \quad (3)$$

This shows that the right-hand side of (3) contains only unknown numbers  $T(0)$  and  $T(1)$ . Since  $T(\cdot)$  is continuous and periodic,  $T(0) = T(2)$ . We apply (3) to get the system of equations

$$\begin{cases} \left( \frac{b}{a^2} (1 - e^{-a^2}) - e^{-a^2} \right) T(0) + \left( 1 + \frac{c}{a^2} (1 - e^{-a^2}) \right) T(1) = e^{-a^2} \Phi(1), \\ \left( 1 + \frac{b}{a^2} (e^{-a^2} - e^{-2a^2}) + \frac{c}{a^2} (1 - e^{-a^2}) - e^{-2a^2} \right) T(0) + \left( \frac{c}{a^2} (e^{-a^2} - e^{-2a^2}) + \frac{b}{a^2} (1 - e^{-a^2}) \right) T(1) = e^{-2a^2} \Phi(2). \end{cases}$$

or

$$\begin{cases} (E_1 - e^{-a^2}) T(0) + (1 + D_1) T(1) = e^{-a^2} \Phi(1) \\ (1 + E_2 + D_1 - e^{-2a^2}) T(0) + (E_1 + D_2) T(1) = e^{-2a^2} \Phi(2) \end{cases} \quad (4)$$

where

$$\begin{aligned} E_k &:= E_k(a, b) = \frac{b}{a^2} (e^{-(k-1)a^2} - e^{-ka^2}), i = 1,2,3,\dots \\ D_k &:= D_k(a, c) = \frac{c}{a^2} (e^{-(k-1)a^2} - e^{-ka^2}), i = 1,2,3,\dots \end{aligned} \quad (5)$$

Let  $\Delta_2(a, b, c)$  be the determinant of the matrix  $M_2(a, b, c)$  where

$$M_2(a, b, c) = \begin{pmatrix} E_1 - e^{-a^2} & 1 + D_1 \\ 1 + E_2 + D_1 - e^{-2a^2} & E_1 + D_2 \end{pmatrix}$$

Thus, for 2-periodic solution of (1) we obtain

**Theorem 1.** *Let  $f(\cdot)$  be 2-periodic function.*

(i) *If  $\Delta_2(a, b, c) \neq 0$ , then equation (1) has a unique 2-periodic solution having the form (3), where  $(T(0), T(1))$  is the unique solution of (4).*

(ii) *If  $\Delta_2(a, b, c) = 0$  and  $\Phi(1) = \Phi(2) = 0$ , then equation (1) has infinite number of 2-periodic solutions having the form*

$$T_\alpha(t) = \begin{cases} \alpha(e^{-a^2t} + N_0(t))T(0) + \alpha P_0(t)T(1) + e^{-a^2t}\Phi(t), t \in [0,1), \\ \alpha(e^{-a^2t} + M_0(t))T(0) + \alpha(N_1(t) + K_0(t))T(1) + \alpha P_1(t)T(2) + e^{-a^2t}\Phi(t), t \in [1,2). \end{cases}$$

where  $(T(0), T(1))$  is an eigenvector of  $M_2(a, b, c)$  corresponding to 0,  $\alpha$  is any number.

(iii) *If  $\Delta_2(a, b, c) = 0$  and the  $rank[M_2(a, b, c)] < rank[M_2(a, b, c), \Phi^T]$ ,  $\Phi = (\Phi(1), \Phi(2))$ , then equation (1) does not have any 2-periodic solution.*

**Proof** (i) Let  $T$  be a 2-periodic solution of (1). Then  $T$  can be presented by (3), where  $(T(0), T(1))$  is the solution of (4). The linear system (4) is solvable if and only if  $\Delta_2(a, b, c) \neq 0$ . Hence  $\Delta_2(a, b, c) \neq 0$ . Conversely, if  $\Delta_2(a, b, c) \neq 0$ , equation (4) has a unique solution  $(T(0), T(1))$ . One can check that the function  $T$  having the form (4) is the solution of (1).

The uniqueness of solution of (1) is trivial.

(ii) Let  $\Phi(1) = \Phi(2) = 0$ . Then equation (4) reduces to a non-homogeneous equation. This equation has a non-trivial solution if and only if  $\Delta_2(a, b, c) = 0$ . This non-trivial solution  $(T(0), T(1))$  is an eigenvector of  $M_2(a, b, c)$  corresponding to the number 0. Then the 2-periodic function

$$T_\alpha(t) = \begin{cases} \alpha(e^{-a^2t} + N_0(t))T(0) + \alpha P_0(t)T(1) + e^{-a^2t}\Phi(t), t \in [0,1), \\ \alpha(e^{-a^2t} + M_0(t) + P_1(t))T(0) + \alpha(N_1(t) + K_0(t))T(1) + \alpha P_1(t)T(2) + e^{-a^2t}\Phi(t), t \in [1,2). \end{cases}$$

is a solution of (1), where  $\alpha$  is any number.

(iii) If  $\Delta_2(a, b, c) = 0$  and  $rank[M_2(a, b, c)] < rank[M_2(a, b, c), \Phi^T]$ ,  $\Phi = (\Phi(1), \Phi(2))$ , then equation (4) has no solution. Therefore (1) has no 2-periodic solution.

This completes the proof.

**$n$ -periodic solution.** We next solve equation (1), where  $f$  is periodic with positive integer period  $n > 3$ . It is clear that to seek a function  $T(\cdot)$  as a periodic function, we assume that  $T(t) = T(t + n)$ . One can see that the solution  $T(\cdot)$  has a form

$$T(t) = \begin{cases} \left( e^{-a^2t} + N_0(t) \right) T(0) + P_0(t) T(1) + e^{-a^2t} \Phi(t), t \in [0,1), \\ \left( e^{-a^2t} + M_0(t) \right) T(0) + N_1(t) T(1) + K_0(t) T(1) + P_1(t) T(2) + e^{-a^2t} \Phi(t), t \in [1,2), \\ \dots\dots\dots \\ e^{-a^2t} T(0) + \sum_{k=0}^{n-1} M_k(t) T(k) + N_{n-1}(t) T(n-1) + \sum_{k=0}^{n-1} K_k(t) T(k+1) + P_{n-1}(t) T(n) + \\ + e^{-a^2t} \Phi(t), t \in [n-1, n). \end{cases} \tag{6}$$

The right-hand side of (6) contains only unknown numbers  $T(0), T(1), \dots, T(n-1)$ .

Using the periodicity conditions  $T(\cdot)$  from (6) we have  $n$  system of equations

$$\begin{cases} (E_1 - e^{-a^2}) T(0) + (1 + D_1) T(1) = e^{-a^2} \Phi(1) \\ (E_2 - e^{-2a^2}) T(0) + (E_1 + D_2) T(1) + (1 + D_1) T(2) = e^{-2a^2} \Phi(2) \\ \dots\dots\dots \\ (E_{n-1} - e^{-(n-1)a^2}) T(0) + (E_{n-2} + D_{n-1}) T(1) + \dots + (1 + D_1) T(n-1) = e^{-(n-1)a^2} \Phi(n-1) \\ (1 + E_n - e^{-na^2} + D_1) T(0) + (E_{n-1} + D_n) T(1) + \dots + (E_1 + D_2) T(n-1) = e^{-na^2} \Phi(n) \end{cases} \tag{7}$$

where  $E_k$  is defined in (5).

We denote by  $\Delta_n(a, b, c)$  the determinant of the equation (7). Then,  $\Delta_n(a, b, c)$  is the determinant of the matrix

$$M_n(a, b, c) = \begin{pmatrix} E_1 - e^{-a^2} & 1 + D_1 & 0 & \dots & 0 \\ E_1 - e^{-2a^2} & E_1 + D_1 & 1 + D_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ E_{n-1} - e^{-(n-1)a^2} & E_{n-2} + D_{n-1} & E_{n-3} + D_{n-2} & \dots & 1 + D_1 \\ (1 + E_1 + D_1 - e^{-na^2}) & E_{n-1} + D_n & E_{n-2} + D_{n-1} & \dots & E_1 + D_2 \end{pmatrix}$$

Summarizing these results, we get the following result.

**Theorem 2.** *Let  $f(\cdot)$  be  $n$ -periodic function.*

(i) *If  $\Delta_n(a, b, c) \neq 0$ , then equation (1) has a unique  $n$ -periodic solution having the form (6), where  $(T(0), T(1), \dots, T(n-1))$  is the unique solution of (7).*

(ii) *If  $\Delta_n(a, b, c) = 0$  and  $\Phi(1) = \Phi(2) = \dots = \Phi(n) = 0$ , then equation (1) has infinite number of  $n$ -periodic solutions having the form*

$$T_\alpha(t) = \begin{cases} \alpha \left( e^{-a^2t} + N_0(t) \right) T(0) + \alpha P_0(t) T(1) + e^{-a^2t} \Phi(t), t \in [0,1), \\ \alpha \left( e^{-a^2t} + M_0(t) \right) T(0) + \alpha (N_1(t) + K_0(t)) T(1) + \alpha P_1(t) T(2) + e^{-a^2t} \Phi(t), t \in [1,2), \\ \dots\dots\dots \\ \alpha e^{-a^2t} T(0) + \alpha \sum_{k=0}^{n-1} M_k(t) T(k) + \alpha N_{n-1}(t) T(n-1) + \alpha \sum_{k=0}^{n-1} K_k(t) T(k+1) + \alpha P_{n-1}(t) T(n) + \\ + e^{-a^2t} \Phi(t), t \in [n-1, n). \end{cases}$$

where  $(T(0), T(1), \dots, T(n-1))$  is an eigenvector of  $M_n(a, b, c)$  corresponding to 0,  $\alpha$  is any number.

(iii) If  $\Delta_n(a, b, c) = 0$  and the  $\text{rank}[M_n(a, b, c)] < \text{rank}[M_n(a, b, c), \Phi^T]$ ,  $\Phi = (\Phi(1), \dots, \Phi(n))$ , then equation (1) does not have any  $n$ -periodic solution.

**Proof.** The proof of the theorem is similar to the proof of Theorem 1.

**Example.** Let  $a=1$ ,  $b(e-1)=e+1$ ,  $c(1-e)=e$ .

where  $T(\cdot)$  is the 2-periodic solution of the differential equation with piecewise constant argument

$$T'(t) + T(t) = -\frac{e+1}{e-1}T([t]) + \frac{e}{e-1}T([t+1]) + \sin \pi t, t > 0$$

defined as

$$T(t) = \begin{cases} e^{-a^2 t} [T(0) + \Phi(t) - \frac{e+1}{e-1}(e^t - 1)T(0) - \frac{e}{e-1}(e^t - 1)T(1)], t \in [0, 1), \\ e^{-a^2 t} [\Phi(t) - eT(0) + eT(1) - \frac{e+1}{e-1}(e^t - e)T(0) - \frac{e}{e-1}(e^t - e)T(2)], t \in [1, 2). \end{cases}$$

Here

$$\Phi(t) = \int_0^t e^s \sin \pi s ds = \frac{e^t}{1 + \pi^2} (\sin \pi t - \pi \cos \pi t) + \frac{\pi}{1 + \pi^2}$$

and

$$T(0) = \frac{\Phi(1)}{e}, \quad T(1) = \frac{\Phi(2) - \Phi(1)}{e^2}.$$

### References

1. Hale, JK, V. Lunel, SM: *Introduction to Functional Differential Equations*. Springer, New York, 1993.
2. Hino, Y, Naito, T, Minh, NV, Shin, JS: *Almost Periodic Solutions of Differential Equations in Banach Spaces*. Stability and Control: Theory, Method and Applications, vol. 15. Taylor & Francis, London, 2002.
3. K. L. Cooke and J. Wiener, *A survey of differential equations with piecewise continuous arguments*, Delay Differential Equations and Dynamical Systems, vol. 1475 (1991), 115, Springer, Berlin, Germany.
4. Wiener, J., *Generalized Solutions of Functional Differential Equations*, World Scientific, Singapore, 1993.
5. Mukhiddin I. Muminov, *On the method of finding periodic solutions of second-order neutral differential equations with piecewise constant arguments*. Advances in Difference Equations (2017), 2017:336, DOI 10.1186/s13662-017-1396-7.
6. Mukhiddin I. Muminov and Ali H. M. Murid, *Existence conditions for periodic solutions of second-order neutral delay differential equations with piecewise constant arguments*. Open Mathematics, Volume 18, Issue 1, Pages 93-105, DOI: <https://doi.org/10.1515/math-2020-0010>.
7. Veloz and M. Pinto. Existence, computability and stability for solutions of the diffusion equation with general piecewise constant argument. J. Math. Anal. Appl. 426(1): 330-339, 2015.
8. Wiener, J., *Boundary-value problems for partial differential equations with piecewise constant delay*, Internat. J. Math. and Math. Sci. 14 (1991), 301-321
9. Wiener, J., Debnath, L. Partial differential equations with piecewise constant delay, Int. J. Math. Math. Sci. 14 (1991) 485-496.
10. J. Wiener, W. Heller, Oscillatory and periodic solutions to a diffusion equation of neutral type, Int. J. Math. Math. Sci. 22(2) (1999) 313-348.

**К-ЗНАЧНЫЕ ФУНКЦИИ, КОРРЕКТИРУЮЩИЕ ЭВРИСТИЧЕСКИЕ  
АЛГОРИТМЫ****Урунбаев Э.***Самаркандский государственный университет***K-VALUED FUNCTIONS CORRECTING HEURISTIC ALGORITHMS**

**Abstract.** When solving a wide class of practical problems, algorithms are often used that make mistakes in calculating elementary properties or refusal to solve problems. In such cases, to solve the same problem, several incorrect algorithms are usually used, and then a correcting function is constructed [1, 2]. Since the result of calculating an elementary property can be either 0 - refusal to calculate, or 1 - the property is satisfied, or 2 - the property is not satisfied, then the correcting function is a function of three-valued logic. For meaningful reasons, not many corrective functions should be constrained.

**Keywords:** Corrector, evaluation, decoding, function classes, discrete function, closure, discreteness, algorithm, search.

**EVRISTIK ALGORITMLARNI TUZATUVCHI K-QIYMATLI FUNKTSIYALAR**

**Annotatsiya.** Keng sinf amaliy masalalarni echishda elementar xususiyatlarni hisoblashda xatolarga yo'l qo'yadigan yoki masalalarni echishdan bosh tortadigan algoritmlardan tez-tez foydalaniladi. Bunday hollarda, xuddi shu masalani echish uchun odatda bir nechta noto'g'ri algoritmlardan foydalaniladi, so'ngra tuzatuvchi funktsiya tuziladi [1, 2]. Boshlang'ich xususiyatni hisoblash natijasi 0 bo'lishi mumkin - hisoblashdan bosh tortish, yoki 1 - xususiyat qoniqtirilishi yoki 2 - xususiyat qoniqtirilmaligi, keyin tuzatish funktsiyasi uch qiymatli mantiqning funktsiyasi. Ma'noli sabablarga ko'ra ko'pgina tuzatuvchi funktsiyalarni cheklash kerak emas.

**Kalit so'zlar:** Tuzatuvchi, baholash, dekodlash, funktsiyalar sinflari, alohida funktsiya, izolyatsiya, diskret, algoritm, qidirish.

**К-ЗНАЧНЫЕ ФУНКЦИИ, КОРРЕКТИРУЮЩИЕ ЭВРИСТИЧЕСКИЕ  
АЛГОРИТМЫ**

**Аннотация.** В настоящей работе исследованы специальные классы  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  корректирующих функций. Для функций, входящих в эти классы, с использованием результатов работ доказываются теоремы и строятся оценки числа таких функций. Решена задача расшифровки дискретных монотонных функций в Шенноновской постановке и получена оценка.

**Ключевые слова:** Корректор, оценка, расшифровка, классы функций, дискретная функция, замкнутость, дискретность, алгоритм, поиск.

При решении широкого класса практических задач часто используются алгоритмы, допускающие ошибки в вычисления элементарных свойств или отказы от решения задач. В таких случаях для решения одной и той же задачи обычно применяется несколько некорректных алгоритмов, а затем строится корректирующая функция [1, 2]. Так как результатом вычисления элементарного свойства может быть либо 0 – отказ от вычисления, либо 1 – свойство выполнено, либо 2 – свойство не выполнено, то корректирующая функция

является функцией трехзначной логики. Из содержательных соображений не множество корректирующих функций должны быть наложены ограничения.

В настоящей работе рассматриваются специальные классы  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  корректирующих функций. Для функций, входящих в эти классы, с использованием результатов работ [3,4] строятся оценки числа таких функций и решается задача расшифровки.

Пусть задано семейство функций  $\{f\}$  трехзначной логики, т.е. таких, что из  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \{f\}$  следует:  $x_i \in \{0, 1, 2\}, f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \{0, 1, 2\}$ .

Возьмем набор  $L$  подмножеств  $L_1, L_2, \dots, L_k$  множества  $\{0, 1, 2\}$ . Считается, что семейство  $\{f\}$  сохраняет набор  $L$ , если из условий  $\alpha_i \in L_j, j = \overline{1, n}$  вытекает, что  $f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in L_j, j = \overline{1, k}$ .

В дальнейшем в качестве  $\{f\}$  будем рассматривать множество функций трехзначной логики.

$$L^* = \{\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}\}.$$

**Определение 1.** Семейство функций, сохраняющих набор  $L^*$ , называется классом  $\sigma_i$ .

Нетрудно видеть, что класс  $\sigma_i$  функционально замкнут.

В качестве корректирующих функций естественно принять только функции из  $\sigma_i$ . Действительно, пусть, например, по алгоритмам,  $A_1, A_2, \dots, A_m$  при вычислении свойства  $P(S)$  объекта  $S$  сформированы значения  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$  на множество  $\{0, 2\}$ . Это означает, что одни алгоритмы «отказались» от вычислений,  $P(S)$  а с помощью других установлено, что  $P(S)$  не выполнено. Тогда разумно предположить, что  $f(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m) \neq 1$ .

Пусть в множестве  $\{0, 1, 2\}$  частичный порядок

$$0 < 1, \quad 0 < 2 \tag{1}$$

Этот порядок индуцирует частичный порядок в множестве наборов

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \quad \alpha_i \in \{0, 1, 2\} \quad (i = \overline{1, n}):$$

$$\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \leq \gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n), \text{ если } \alpha_i \leq \beta_i \quad (i = \overline{1, n}) \tag{2}$$

**Определение 2.** Класс  $\sigma_2$  функций  $f$  трехзначной логики называется монотонным по порядку (2) (для краткости будем называть  $\sigma_2$  классом монотонных функций), если из условия  $\beta \leq \alpha$  по (2) следует, что  $f(\beta) \leq f(\alpha)$  согласно порядку (1).

Класс функций, сохраняющих  $L^*$  и монотонных, ниже обозначается через  $\sigma_3$ .

Очевидно, что  $\sigma_3 = \sigma_1 \cap \sigma_2$ , и классы  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  функционально замкнуты.

Во многих прикладных задачах естественно рассматривать корректирующие функции только из  $\sigma_2$  или  $\sigma_3$ .

Для решения задач оптимальной корректировки необходимо знать комбинаторные характеристики классов  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ .

К таким важнейшим характеристикам относится число функций от переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , принадлежащих соответствующим классам, и число элементарных шагов,

необходимых для полной расшифровки функций. В дальнейшем производится вычисление этих характеристик. Для краткости число функций от переменных  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , входящих в соответствующий класс, называется числом функций этого класса.

Число функций в классах  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$

Число функций в классе  $\sigma_1$ . Пусть  $S^n$  - множество всех наборов  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ , где  $\alpha_i \in S = \{0, 1, 2\}$  ( $i = \overline{1, n}$ ). Обозначим через  $E^n(0, 2)$  множество всех наборов  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  таких, что  $\alpha_i \in \{0, 1\}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), а через  $E^n(0, 2)$  - множество наборов  $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$  таких, что  $\beta_i \in \{0, 2\}$ . Число его наборов равно  $2^{n+1} - 4$ . На каждом наборе этого множества функция из классов  $\sigma_1$  может принимать только два значения, а на наборах множества  $S^n_4 = S^n \setminus (E^n(0, 1) \cup E^n(0, 2))$  - три значения. Число наборов множества  $S^n$  равно  $3^n - 2^{n+1} + 1$ . И, наконец, на наборах  $\tilde{0}, \tilde{1} \frac{1}{2}$  возможно только одно значение.

Следовательно, число функций класса  $\sigma_1$  равно

$$3^{3^n - 2^{n+1} + 1} \cdot 2^{2^{n+1} - 4}$$

Верхняя оценка числа функций в классах  $\beta_2, \beta_3$ . В.Б. Алексеев [4] получил оценку для нахождения числа  $\psi(n)$  монотонных функций  $K$  - значной логики по произвольному частичному упорядочению  $S$

$$\psi(n) \leq d^{\frac{1}{\sqrt{2\pi D}} \frac{K^n}{\sqrt{\pi}} (1 + \varepsilon(n))}$$

где  $\varepsilon(n) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty, \alpha = (K, S), D = D(S)$ .

Нетрудно показать, что для порядка, определяющего класс функций трехзначной логики, значение  $a$  равно 219. Поэтому для числа  $4; (n)$  функций в классе  $\sigma_2$  справедлива верхняя оценка

$$\psi_1(n) \leq 2^{\frac{1}{2\sqrt{\pi}} * \frac{3^{n+1}}{\sqrt{\pi}} * (1 + \varepsilon_1(n))}$$

где  $\varepsilon_1(n) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$

Ясно, что эта оценка справедлива и для числа функций в классе  $\sigma_2$ .

Нижняя оценка числа функций в классах  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$ . Рассмотрим структуру  $S^n$  наборов  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  с порядком(2). В  $S^n$  существует единственный минимальный элемент  $(0, \dots, 0)$  и  $2^n$  несравнимых максимальных элементов: наборов, все координаты, которых принадлежат множеству  $\{1, 2\}$ .

Разобьем  $S^n$  на уровни  $U_0, U_1, \dots, U_n$ . Уровень  $U_j$  составлен из всех наборов, у которых ровно  $j$  координат принимают значения из  $\{1, 2\}$ , а остальные  $n - j$  координат равны нулю. Уровень  $U_0 = \{(0, \dots, 0)\}$ ,  $U_n$  состоит из всех максимальных элементов  $S^n$ , мощность

$U_j$  равна  $C_n^j 2^j$ . Как обычно, целью в  $S^n$  будем называть множество  $\alpha^{i_1}, \alpha^{i_2}, \dots, \alpha^{i_k}$  такое, что  $\alpha^{i_1} < \alpha^{i_2} < \dots < \alpha^{i_k}$   $\alpha^{i_j} \in U_{i_j}$  ( $j=1, 2, \dots, k$ );  $1 \leq k \leq n+1$ .

**Лемма 1.** Пусть  $q = \lceil (2n-1)/3 \rceil + 1$ . Если  $2n-1 = 3m$ , где  $m$  – целое число, то в  $S^n$  существуют два максимальных уровня:  $U_q$  и  $U_{q-1}$ . В остальных случаях  $U_q$  является единственным максимальным уровнем.

Доказательство. Рассмотрим выражение

$$C_n^{i+1} 2^{i+1} - C_n^i 2^i$$

Знак этого выражения совпадает со знаком величины

$$X(i, n) = 2n - 3i - 1$$

Положим  $m = \lceil (2n-1)/3 \rceil$ . Легко проверить, что при  $0 \leq i \leq m$  будет  $X(i, n) \geq 0$ , а при  $n \geq i > m$  получим.  $X(i, n) < 0$  Пусть теперь  $2n-1 = 3m+t$  ( $t \in \{1, 2\}$ ). Тогда  $X(m, n) > 0$  – единственный максимальный уровень.

Пусть такие  $2n-1 = 3m$ . Отсюда  $X(m, n) = 0$  и  $|U_q| = |U_{q-1}|$ , где  $|M|$  – мощность множества  $M$ . А для всех  $i < m$  будем иметь  $X(i, n) < 0$ . Лемма доказана.

На оборотах множества  $U_q$ , без нарушения монотонности, функции класса  $U_q$  можно задавать двумя способами. Из леммы 1 вытекает, что

$$\psi_1(n) \geq 2^{C_n^q 2^q} \geq 2^{\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{3^{n+1}}{\sqrt{\pi}}} (1 - \varepsilon^1(n)), \quad (\varepsilon^1(n)) \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty$$

Следовательно, имеет место теорема.

**Теорема 1.** Два числа  $\psi_1(n)$  функций от  $n$  переменных классов  $\sigma_2$  на  $S^n$  справедлива оценка

$$\psi_1(n) \geq 3^{\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{3^{n+1}}{\sqrt{\pi}}} (1 - \varepsilon^1(n))$$

Очевидно, что эта оценка справедлива и для числа функций класса  $\sigma_3$ .

О задаче расшифровки монотонных функций класса  $\sigma_3$

Допустим, что для произвольной функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_3)$  класса  $\sigma_3$  любой алгоритм  $F$  с помощью оператора позволяет полностью восстанавливать таблицу значений функции  $f$  при использовании алгоритма.

Рассмотрим функции  $\varphi(F, n) = \max \varphi(F, f)$ . Определим такие  $\varphi(n) = \min \varphi(F, n)$ ,  $f \in \sigma_3$   $\varphi(n)$  – минимальное число обращений к оператору  $A_f$ , достаточное для восстановления таблицы значений функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  из  $\sigma_3$  при использовании алгоритма для решения поставленной задачи. Оценим число  $\varphi(n)$ .

Нижняя оценка. Она может быть получена по аналогии с оценкой, описанной в работе [3]:

$$\varphi(n) \geq C_n^q + C_n^{q+1} 2^{q+1},$$

где  $q = \lceil (2n-1)/3 \rceil + 1$

Верхняя оценка. Для получения ее требуется построить алгоритм восстановления таблицы значений для произвольной функции из  $\sigma_3$ , заданной оператором  $A_f$ .

Чтобы описать алгоритм восстановления таблицы значений для произвольной функции из  $\sigma_3$ , понадобятся понятия правильных функций [3].

Возьмем произвольную функцию  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  из класса  $\sigma_3$  и  $p$  положительных чисел  $K_i = \lfloor (\sqrt{16} - 1) \rfloor = n / (\sqrt{16})^i$   $[(1 \leq i \leq p)]$ , где  $p$  – число, удовлетворяющее условиям  $(p + 1)(\sqrt{316})^{p+1} \geq n \geq p(\sqrt[3]{16})^p$ .

Определим функцию 2-го ранга  $(1 \leq \zeta \leq p)$  как функцию, получающуюся из  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  замещением первых  $a_\zeta$  переменных произвольными константами  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\zeta, a_{\zeta = \sum_{i=1}^{\zeta} k_i}$   $(1 \leq \zeta \leq p)$ .

Функцию  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  будем называть функцией нулевого ранга, т.е. положим  $a_0 = 0$ . Назовем функцию  $f(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\zeta, X_{\zeta+1}, \dots, X_n)$  2-го ранга правильной если все

суммы вида  $\sum_{j=a_{2-1+1}}^{a_i} \sigma_j$ , где  $\sigma_j = 0$  при  $\beta_j = 0; \sigma_j = 1$  при  $\beta_j \neq 0$   $(j = 1, 2, \dots, \zeta)$ ,

делятся на четыре. Заметим, что число правильных функций 2-го ранга равно

$$\sum_{j=0}^{S_i} C_{k_i}^{4j} * 2^{4j} \quad (S_i = \lfloor K_i / 4 \rfloor)$$

Алгоритм  $F(n)$  восстановления таблицы значений для произвольной функции из  $\sigma_3$  от  $n$  переменных будем строить так. В таблице значений функции выделим разряды, соответствующие правильным функциям 2-го ранга  $(0 \leq \zeta \leq p)$ . Первым шагом алгоритма  $F(n)$  является восстановление таблиц значений всех правильных функций 2-го ранга с

помощью оператора  $A_f$ . Для этого потребуется ровно  $\prod_{i=1}^p \sum_{i=0}^{S_i} C_{k_i}^{4j} x 2^{kj} \cdot 3^{n-ap}$  обращений к

оператору  $A_f$ . Второй шаг алгоритма  $F(n)$  – распространение по монотонности полученных значений функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  Вся работа алгоритма будет состоять из  $2(p + 1)$  шагов.

$2(p - \zeta) + 1 - m$  шагом алгоритма  $F(k)$  будет восстановление таблиц значений правильных функций 2-го ранга, а  $2(p - \zeta) + 1 - m$  шагом – распространение по

монотонности значений функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , полученных на  $2(p - \zeta) + 1 - m$  шаге работы алгоритма. Используя результаты В.К. Коробкова [3], мы можем сказать, что для

$2(p - \zeta) + 3$  шага алгоритма  $F(n)$  – восстановление таблиц значений всех правильных функций  $(\zeta - 1)$  ранга -необходимо не более

$$2 \cdot \left( \prod_{j=1}^{\zeta-1} \sum_{j=0}^{\frac{k_i}{4}} C_{k_i}^{4j} \cdot 2^{4j} \right) \cdot C^{\lceil (2k_2-1)/3 \rceil + 1} \cdot 2^{\lceil (2k_2-1)/3 \rceil + 1} \cdot 3^{n-a_2}$$

обращений к оператору  $A_f$  и т.д. Легко заметить что вся работа алгоритма потребует не более

$$\left( \prod_{i=1}^p \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k_i}{4} \rfloor} C_{k_i}^{4j} \cdot 2^{4j} \right) \cdot 3^{n-a_k} + 2 \sum_{i=0}^p C_{k_i}^{\lceil (2k-1)/3 \rceil + 1} \cdot 2^{\lceil (2ki-1)/3 \rceil + 1} \cdot 3^{n-a_i} \cdot \prod_{j=1}^{i-1} \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k_i}{4} \rfloor} C_{k_j}^{4l} \cdot 2^k = \varphi(n)$$

обращений к оператору  $A_f$ .

Имеет место.

**Теорема 2.** Минимальное число  $\varphi(n)$  обращений к оператору  $A_f$ , достаточное для восстановления таблицы значений функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  в классе  $\sigma_3$ , удовлетворяет верхней оценке.

$$\varphi(n) \leq \frac{8}{(2^3 \sqrt{2} - 1)^{3/2}} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 3^n}{\pi \sqrt{n}}} (1 + \varepsilon_2(n))$$

где  $\varepsilon_2(n) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$

Доказательство. Рассмотрим сумму  $\sum_{j=0}^{\lfloor K/4 \rfloor} C^{4j} \cdot 2^{4j}$  покажем, что она равна

$3^n / 4 + (\pi \sqrt{5^n} / 2) \cdot \cos n\alpha$  где  $\alpha = a\zeta \operatorname{ctg} 2$ . В тождестве

$$(1 + 2x^n) C_n^0 2^0 + C_n^1 \cdot x \cdot 2 + \dots + \dots + C_n^{n-1} \cdot x^{n-1} \cdot 2^{n-1} + C_n^n \cdot x^n \cdot 2^n$$

положим последовательно  $x = 1, i, (-i)$ . Тогда получим

$$3^n = C_n^0 \cdot 2^0 + C_n^1 \cdot 2 + \dots + C_n^n \cdot 2^n,$$

$$(1 + 2i)^n = C_n^0 \cdot 2^0 + C_n^1 \cdot 2i + C_n^2 \cdot 2^2 \cdot i^2 + \dots,$$

$$(1 - 2i)^n = C_n^0 \cdot 2^0 + C_n^1 \cdot 2^1 (-i) + C_n^2 \cdot 2^2 \cdot (-i)^2 - \dots$$

Так как  $(1 \pm 2i) = \sqrt{5} (\pi \cos \alpha \pm i \sin \alpha)$  ( $\alpha = a\zeta \operatorname{clg} 2$ )

То  $3^n + (1 + 2i)^n + (1 - 2i)^n = 3^n + 2\sqrt{5^n} \cdot \cos n\alpha$

С другой стороны

$$\begin{aligned} 3^n + 2 \cdot 5^{n/2} \cos nd &= 3C_n^0 \cdot 2^0 + C_n^1 \cdot 2^1 + C_n^2 \cdot 2^2 + C_n^3 \cdot 2^3 + \\ &+ 3C_n^4 \cdot 2^4 + C_n^5 \cdot 2^5 + C_n^6 \cdot 2^6 + C_n^7 \cdot 2^7 + 3C_n^8 \cdot 2^8 + \dots = \\ &= 4(C_n^0 \cdot 2^0 + C_n^4 \cdot 2^4 + C_n^8 \cdot 2^8 + \dots) + (-C_n^2 \cdot 2^2 + C_n^1 \cdot 2^1 - \\ &- C_n^2 \cdot 2^2 + C_n^3 \cdot 2^3 + C_n^4 \cdot 2^4 + \dots) \end{aligned}$$

Легко заметить, что

$$(-C_n^0 \cdot 2^0 + C_n^1 \cdot 2^1 - C_n^2 \cdot 2^2 + C_n^3 \cdot 2^3 - \dots) = -(1-2)^n = -(-1)^n$$

поэтому

$$(C_n^0 + C_n^4 \cdot 2^4 + C_n^8 \cdot 2^8 + \dots) = 3n/4 + (5^{n/2}/2) \cdot \cos nd + (-1)n/4$$

Дальнейшие рассуждения можно провести аналогично доказательству теоремы 2 из работы [3]. Так же как в этом доказательстве можно показать, что  $K_i \rightarrow \infty (1 \leq i \leq p), p \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  откуда

$$\sum_{j=0}^{[k_i/4]} C_{ki}^{4j} 2^{4j} \sim 3^{k_i} / 4,$$

$$\prod_{i=1}^s \sum_{j=0}^{[k_i/4]} C_{ki}^{4j} 2^{4j} \sim 3^{\alpha_s} / 4^s,$$

$$\left[ (2k_i - 1) / 3 \right] + 1 \left[ (2k_i - 1) / 3 \right] + 1 \sim \frac{3^{k_i}}{\sqrt{k_i}} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

И так же, как в теореме 2 указанной работы, из полученных соотношений следует, что

$$\varphi(n) \leq \frac{8}{(2^3 \sqrt{2} - 1)^{3/2}} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{3^n}{\sqrt{n}} (1 + \varepsilon_2(n))$$

Теорема доказана.

#### Литература

1. Мазуров В.Д. Комитеты систем неравенств и задача распознавания. «кибернетика», Киев, 1971, № 3.
2. Журавлев Ю.И. Непараметрические задачи распознавания образов. «кибернетика», Киев, 1976, № 6.
3. Коробков В.К. О монотонных функциях алгебры логики. В об. «проблемы кибернетики», вып. 13, М., «наука», 1965.
4. Алексеев Б.В. О числе монотонных  $k$ - значных функций. В сб. «проблемы кибернетики», вып. 28, М., «наука», 1974.
5. Яблонский С.В. Функциональные построения в  $k$ - значной логике. Труды математического института им. В.А. Стеклова, т. 51, М., Изд-во АН СССР, 1958.
6. Кабулов А.В., Урунбаев Э., Каландаров И., Ашуров А.О. Методы синтеза оптимальных корректоров эвристических алгоритмов на основе функций значной логики// – Монография Т.: Издательство «Наврўз», 2020. –276 с.
7. Кабулов А.В. Норматов И.Х., Урунбаев Э., Ашуров А.О. Алгоритмизация дискретных экстремальных задач в проектировании и управлении сложными системами// – Монография: – Ташкент: «Наврўз», 2019. – 108 с.
8. Kabulov A.V., E. Urunbaev, I. Normatov, A. Ashurov. Synthesis methods of optimal discrete corrective functions // Advances in Mathematics: Scientific Journal 9 (2020), no.9, -p. 6467–6482.

УДК 517.946

**THE CAUCHY PROBLEM FOR THE SYSTEM OF THE THERMOELASTICITY IN A MULTIDIMENSIONAL BOUNDED DOMAIN****I.E. Niyozov, O. I. Makhmudov***Самаркандский государственный университет*

**Abstract.** In this paper, we considered the problem of analytical continuation of the solution of the system equations of the thermoelasticity in spacious bounded domain from its values and values of its strains on part of the boundary of this domain, i.e., the Cauchy's problem.

**Keywords:** the Cauchy problem, system theory of elasticity, elliptic system, ill-posed problem, Carleman matrix, regularization.

**Задача Коши для систем термоупругости в многомерной ограниченной области**

**Аннотация.** Рассматривается задача аналитического продолжения решения системы уравнений термоупругости в пространственной области по его значениям и значениям его напряжений на части границы этой области, т.е. задача Коши.

Ключевые слова: Задача Коши, систем теории упругости, эллиптическая система, некорректная задача, матрица Карлемана.

**Ko'p o'lchamli chekli sohada termoelastiklik nazariyasi sistemasi uchun Koshi masalasi**

**Annotasiya.** Bu ishda termoelastiklik nazariyasi tenglamalari sistemasi yechimini maxsus sohada yechimning soha chegarasining musbat o'lchovli qismida berilganiga ko'ra sohaning ichiga toppish masalasi qaraladi. Bunday masalaga Koshi masalasi deyiladi.

Kalit so'zlar: Koshi masalasi, elastiklik nazariyasi sistemasi, elliptik sistema, nokorrekt masala, Karleman matritsasi.

**1. INTRODUCTION**

In this paper, we considered the problem of analytical continuation of the solution of the system equations of the thermoelasticity in spacious bounded domain from its values and values of its strains on part of the boundary of this domain, i.e., the Cauchy's problem.

Since, in many actual problems, either a part of the boundary is inaccessible for measurement of displacement and tensions or only some integral characteristic are available. In experimental study of the stress-strain state of actual constructions, we can make measurements only on the accessible part of the surface.

In a practical investigation of experimental dates or diagnostic moving object arise problems of estimation concerning deformed position of the object. Solution of the problems by using well known classical propositions is connected to difficulties of absence of experimental dates which is necessary for formulation of boundary value (classical) conditions.

Therefore it is necessary consider the problem of continuation for solution of elasticity system of equations to the domain by values of solutions and normal derivatives in the part of boundary of domain.

System equation of the thermoelasticity is elliptic. Therefore the problem Cauchy for this system is ill-posed. For ill-posed problems, one does not prove the existence theorem: the existence is assumed a priori. Moreover, the solution is assumed to belong to some given subset of the function space, usually a compact one [1]. The uniqueness of the solution follows from the general Holmgren theorem [2]. On establishing uniqueness in the article

studio of ill-posed problems, one comes across important questions concerning the derivation of estimates of conditional stability and the construction of regularizing operators.

Our aim is to construct an approximate solution using the Carleman function method.

Let  $x = (x_1, \dots, x_n)$  and  $y = (y_1, \dots, y_n)$  be points of the  $n$  –dimensional Euclidean space  $E^n$ ,  $D$  a bounded simply connected domain in  $E^n$ , with piecewise-smooth boundary consisting of a piece  $\Sigma$  of the plane  $y_n = 0$  and a smooth surface  $S$  lying in the half-space  $y_n > 0$ .

Suppose that  $n + 1$  – component vector function  $U(x) = (u_1(x), \dots, \dots, u_n(x), u_{n+1}(x))^*$ , where the symbol  $\{\cdot\}^*$  – means the operation of transposition, satisfied in  $D$  the system equations of the thermoelasticity [3]:

$$B(\partial_x, \omega)U(x) = 0, \tag{1.1}$$

where

$$B(\partial_x, \omega) = \llbracket B_{kj}(\partial_x, \omega) \rrbracket_{(n+1) \times (n+1)},$$

and

$$B_{kj}(\partial_x, \omega) = \delta_{kj}(\mu\Delta + \rho\omega^2) + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j}, \quad k, j = 1, \dots, n,$$

$$B_{k(n+1)}(\partial_x, \omega) = -\gamma \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad k = 1, \dots, n,$$

$$B_{(n+1)j}(\partial_x, \omega) = -i\omega\eta \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$B_{(n+1)(n+1)}(\partial_x, \omega) = \Delta + \frac{i\omega}{\theta},$$

$\delta_{kj}$  – is the Kronecker delta,  $i = \sqrt{-1}$ ,  $\omega$  – is the frequency of oscillation and  $\lambda, \mu, \rho, \theta$  are its coefficients which characterizing medium, satisfying the conditions  $\mu > 0, 3\lambda + 2\mu > 0, \rho > 0, \theta > 0, \frac{\gamma}{\eta} > 0$ .

System (1.1) can be written in the form:

$$\begin{cases} \mu\Delta u + (\lambda + \mu)grad \operatorname{div} u - \gamma grad v + \rho\omega^2 u = 0 \\ \Delta v + \frac{i\omega}{\theta} v + i\omega\eta \operatorname{div} u = 0, \end{cases} \tag{1.2}$$

where  $U(x) = (u_1(x), \dots, u_n(x), u_{n+1}(x))^* = (u(x), v(x))^*$ ,  $u(x) = (u_1(x), \dots, u_n(x))$ ,  $v(x) = u_{n+1}(x)$ .

That system is elliptic. As, its characteristic matrix is

$$\chi(\xi) = \begin{pmatrix} (\lambda + \mu)\xi_1^2 + \mu|\xi|^2 & (\lambda + \mu)\xi_1\xi_2 & \dots & (\lambda + \mu)\xi_1\xi_n & 0 \\ (\lambda + \mu)\xi_1\xi_2 & (\lambda + \mu)\xi_2^2 + \mu|\xi|^2 & \dots & (\lambda + \mu)\xi_2\xi_n & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\lambda + \mu)\xi_1\xi_n & (\lambda + \mu)\xi_2\xi_n & \dots & (\lambda + \mu)\xi_n^2 + \mu|\xi|^2 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & |\xi|^2 \end{pmatrix}$$

and for arbitrary real  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ ,  $\xi_k \in R^1$  satisfying conditions  $|\xi|^2 = 1$ , we have  $\det\chi(\xi) = (\lambda + 2\mu)\mu^{n-1} > 0$ .

**Statement of the problem.** Let  $f = (f_1, \dots, f_{n+1})^* \in [C^1(S)]^{n+1}$ ,  $g = (g_1, \dots, g_{n+1})^* \in [C(S)]^{n+1}$  be given vector-functions. It requires to find (if possible) a vector-function  $U(x) \in [C^1(D \cup S) \cap C^2(D)]^{n+1}$  such that

$$\begin{cases} B(\partial_x, \omega)U(x) = 0 \text{ in } D, \\ U(y) = f(y), \quad y \in S, \\ R(\partial_y, n(y))U(y) = g(y), \quad y \in S, \end{cases} \tag{1.3}$$

where  $R(\partial_y, n(y))$  – is the stress operator, i.e.,

$$R(\partial_y, v(y)) = \llbracket R_{kj}(\partial_y, v(y)) \rrbracket_{(n+1) \times (n+1)} = \begin{pmatrix} T & -\gamma v_1 \\ & -\gamma v_2 \\ & \dots \\ & -\gamma v_n \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\partial}{\partial v} \end{pmatrix},$$

$$T = T(\partial_y, v(y)) = \llbracket T_{kj}(\partial_y, v(y)) \rrbracket_{n \times n},$$

$$T_{kj}(\partial_y, v(y)) = \lambda v_k(y) \frac{\partial}{\partial y_j} + \mu v_j(y) \frac{\partial}{\partial y_k} + (\lambda + \mu) \delta_{kj} \frac{\partial}{\partial v(y)}, \quad k, j = 1, \dots, n,$$

$v(y) = (v_1(y), \dots, v_n(y))$  – is the unit outward normal vector on  $\partial D$  at a point  $y$ .

Here  $[C^k(S)]^{n+1}$ ,  $(k = 0, 1, 2, \dots)$  stands for the vector space of all  $n + 1$ -vector valued functions whose components are  $k$  times continuously differentiable on a set  $D \subset R^3$ .

It is known that the system (1.2) is elliptic and problem (1.3) has no more than one solution. However, it is ill-posed, i.e. 1) not for any data there exists a solution; 2) solution do not depend continuously on the Cauchy data on  $S$  (see, for example, [2]). Therefore, solvability conditions cannot be described in terms of continuous linear functional.

In this paper we will apply the integral representation's method to obtain solvability conditions and a formula for solution of the problem.

### 1. CONSTRUCTION OF THE CARLEMAN MATRIX AND APPROXIMATE SOLUTION FOR THE CAP TYPE DOMAIN

It is well known that any regular solution  $U(x)$  of the system (1.1) is specified by the formula [1]

$$2U(x) = \int_{\partial D} (\Psi(x - y, \omega) \{R(\partial_y, n(y)) U(y)\} - \{ \tilde{R}(\partial_y, n(y)) \Psi(y - x, \omega) \}^* U(y)) ds_y, \quad x \in D, \quad (2.1)$$

$\Psi(x - y, \omega)$  is the matrix of the fundamental solutions for the system of equations of steady-state oscillations of the thermoelasticity: given by

$$\begin{aligned} \Psi(x, \omega) &= \llbracket \Psi_{kj}(x, \omega) \rrbracket_{(n+1) \times (n+1)}, \\ \Psi_{kj}(x, \omega) &= \sum_{q=1}^3 \left\{ (1 - \delta_{k(n+1)})(1 - \delta_{j(n+1)}) \left( \frac{\delta_{kj}}{2\pi\mu} \delta_{3q} - \alpha_q \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \beta_q \left[ i\omega\eta(1 - \delta_{j(n+1)}) \frac{\partial}{\partial x_j} - \gamma(1 - \delta_{k(n+1)}) \frac{\partial}{\partial x_k} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \delta_{k(n+1)} \delta_{j(n+1)} \gamma_q \right\} \varphi_n(ik_l r), \end{aligned}$$

where  $r = |x - y|$ ,  $\varphi_n$  – classical fundamental solution of the Helmholtz equation:

$$\begin{aligned} \varphi_n(\Lambda r) &= A_n \left( \frac{\Lambda}{2} \right)^{\frac{n}{2}-1} K_{\frac{n}{2}-1}(\Lambda r), \quad A_{2k} = (-1)^k \cdot 2^{k-1}, \\ A_{2k+1} &= (-1)^k \cdot 2^{-k+\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

$K_q(\Lambda)$  – Macdonald function

$$\begin{aligned} \alpha_q &= \frac{(-1)^q (1 - i\omega\kappa^{-1} k_q^{-2})(\delta_{1q} + \delta_{2q})}{2\pi(\lambda + 2\mu)(k_2^2 - k_1^2)} - \frac{\delta_{nq}}{2\pi\rho\omega^2}, \quad \sum_{q=1}^n \alpha_q = 0, \\ \beta_q &= \frac{(-1)^q (\delta_{1q} + \delta_{2q})}{2\pi(\lambda + 2\mu)(k_2^2 - k_1^2)}, \quad \sum_{q=1}^n \beta_q = 0, \end{aligned}$$

$$\gamma_q = \frac{(-1)^q (k_q^2 - \lambda_1^2) (\delta_{1q} + \delta_{2q})}{2\pi(k_2^2 - k_1^2)}, \quad \sum_{q=1}^n \gamma_q = 1,$$

$$k_j^2 + k_{j+1}^2 = \frac{i\omega}{\kappa} + \frac{i\omega\eta\gamma}{\lambda + 2\mu} + \lambda_j^2, \quad k_j^2 k_{j+1}^2 = \frac{i\omega}{\kappa} \lambda_j^2, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\lambda_j^2 = \frac{\rho\omega^2}{\lambda + 2\mu}, \quad j = 1, \dots, n, \quad k_n^2 = \frac{\rho\omega^2}{\mu}, \quad k_{n+1} = k_1.$$

$$\tilde{R}(\partial_y, v(y)) = \left[ \tilde{R}_{kj}(\partial_y, v(y)) \right]_{(n+1) \times (n+1)} = \begin{pmatrix} T & -i\omega v_1 \\ & -i\omega v_2 \\ & \vdots \\ & -i\omega v_n \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\partial}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

By the Carleman matrix for the domain  $D$  and part  $S$ , we mean an  $(n+1) \times (n+1)$  matrix  $\Pi(y, x, \omega, \sigma)$  depending on the two points  $y, x$  and a positive numerical number parameter  $\sigma$  satisfying the following two conditions:

$$1) \quad \Pi(y, x, \omega, \sigma) = \Psi(y - x, \omega) + G(y, x, \sigma),$$

where the matrix  $G(y, x, \sigma)$  satisfies system (1.1) with respect to the variable  $y$  on  $D$ , and  $\Psi(y - x, \omega)$  is a matrix of the fundamental solutions of system (1.1);

$$2) \quad \int_{\partial D \setminus S} (|\Pi(y, x, \omega, \sigma)| + |R(\partial_y, n(y))\Pi(y, x, \omega, \sigma)|) ds_y \leq \varepsilon(\sigma),$$

where  $\varepsilon(\sigma) \rightarrow 0$ , as  $\sigma \rightarrow \infty$ ; here  $|\Pi|$  is the Euclidean norm of the matrix  $\Pi = \left[ \Pi_{kj} \right]_{4 \times 4}$  i.e.,  $|\Pi|^2 = \sum_{k,j=1}^4 \Pi_{kj}^2$ . In particular,  $|U|^2 = \sum_{k=1}^4 U_k^2$ .

It is well known, that for the regular vector functions  $v(y)$  and  $u(y)$  holds formula [1]:

$$\int_D [v(y)\{B(\partial_y, \omega)u(y)\} - u(y)\{B(\partial_y, \omega)v(y)\}] dy =$$

$$= \int_{\partial D} [v(y)\{R(\partial_y, v(y))u(y)\} - u(y)\{\tilde{R}(\partial_y, v(y))v(y)\}^*] ds_y.$$

Substituting in this equality  $v(y) = G(y, x, \sigma)$  and  $u(y) = U(y)$  is solution system (1), we have

$$0 = \int_{\partial D} [G(y, x, \sigma)\{R(\partial_y, v(y))U(y)\} -$$

$$- \{\tilde{R}(\partial_y, v(y))G^*(y, x, \sigma)\}^* U(y)] ds_y \quad (2.2)$$

Now adding (2.1) and (2.2), we have

**Theorem 2.1.** Any regular solution  $U(x)$  of system (1.1) in the domain  $D$  is specified by the formula

$$2U(x) = \int_{\partial D} (\Pi(y, x, \omega, \sigma)\{R(\partial_y, n(y))U(y)\} -$$

$$- \{\tilde{R}(\partial_y, n(y))\Pi^*(y, x, \omega, \sigma)\}^* U(y)) ds_y, \quad x \in D, \quad (2.3)$$

where  $\Pi(y, x, \omega, \sigma)$  is the Carleman matrix and  $\Pi^*(y, x, \omega, \sigma) = \Psi(y - x, \omega) + G^*(y, x, \sigma)$ .

Using this matrix, one can easily conclude the estimate stability of solution of the problem (1.1), (1.3) and also indicate effective method decision this problem as in [3]- [13].

With a view to construct an approximate solution of the problem (1.1), (1.3) we construct the following matrix:

$$\begin{aligned}
 \Pi(y, x, \omega, \sigma) &= \|\Pi_{kj}(y, x, \omega, \sigma)\|_{(n+1) \times (n+1)}, \\
 \Pi_{kj}(y, x, \omega, \sigma) &= \sum_{q=1}^3 \left\{ (1 - \delta_{k4})(1 - \delta_{j4}) \left( \frac{\delta_{kj}}{2\pi\mu} \delta_{3q} - \alpha_q \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \beta_q \left[ i\omega\eta(1 - \delta_{j4}) \frac{\partial}{\partial x_j} - \gamma(1 - \delta_{k4}) \frac{\partial}{\partial x_k} \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \delta_{k4} \delta_{j4} \gamma_q \right\} \Phi_n(y, x, \sigma, ik_q), \tag{2.4}
 \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned}
 \Phi(y, x, \sigma, \Lambda) &= \frac{1}{-2\pi^2 \exp(\sigma x_n^2)} \frac{\partial^{m-1}}{\partial s^{m-1}} \int_0^\infty \operatorname{Im} \frac{\exp(\sigma w^2) \psi(\Lambda u) du}{w - x_n \sqrt{u^2 + \alpha^2}}, \tag{2.5} \\
 w &= i\sqrt{u^2 + \alpha^2} + y_n, \quad s = \alpha^2 = (y_1 - x_1)^2 + \dots + (y_{n-1} - x_{n-1})^2, \alpha > 0. \\
 C_n &= \begin{cases} (-1)^m \cdot 2^{-m} (n-2)(2m-1)! \pi \omega_n, & n = 2m+1, m \geq 1 \\ (-1)^{m-1} (n-2)(m-1)! \omega_n, & n = 2m, m > 1, \end{cases} \\
 \psi(\Lambda u) &= \begin{cases} u J_0(\Lambda u), & n = 2m, m \geq 1 \\ \cos \Lambda u, & n = 2m+1, m \geq 1, \end{cases}
 \end{aligned}$$

$J_0(\Lambda u)$ -Bessel function of order zero.

The following theorem was proved in [14].

**Lemma 2.1.** For function  $\Phi(y, x, \sigma, \Lambda)$ , the following formula is valid

$$C_n \Phi(y, x, \sigma, i\Lambda) = \varphi_n(i\Lambda r) + g_n(y, x, \sigma, \Lambda), \quad r = |x - y|,$$

where  $\varphi(y, x, \sigma, \Lambda)$  – is a regular function that is defined for all  $y$  and  $x$  satisfies the Helmholtz equation

$$\Delta(\partial_y)\varphi - \Lambda^2\varphi = 0, \quad y \in D, \quad \Lambda^2 > 0.$$

Moreover, for function  $\Phi(y, x, \sigma, i\Lambda)$  holds following inequality

$$\int_{\partial D \setminus S} \left( |\Phi(y, x, \sigma, i\Lambda)| + \left| \frac{\partial \Phi(y, x, \sigma, i\Lambda)}{\partial n} \right| \right) ds_y \leq C(\Lambda, D) \sigma \exp(-\sigma x_n^2), \tag{2.7}$$

where  $C(\Lambda, D)$  certain bounded function independent of  $\sigma$  and

$$\Delta(\partial_y) = \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial y_n^2}.$$

The function  $\Phi(y, x, \sigma, \Lambda)$  we shall call Carleman's functions for the Helmholtz equation. For her holds following inequalities:

$$\begin{aligned}
 |\Phi(y, x, \sigma, i\Lambda)| &\leq C_1 \sigma^{[n/2]} \exp \sigma(y_n^2 - x_n^2), \\
 \left| \frac{\partial \Phi(y, x, \sigma, i\Lambda)}{\partial y_k} \right| &\leq C r^{2-n} \sigma^{[n/2]+1} \exp \sigma((y_n^2 - x_n^2)), k = 1, \dots, n, \tag{2.6} \\
 \left| \frac{\partial^2 \Phi(y, x, \sigma, i\Lambda)}{\partial y_k \partial y_j} \right| &\leq C r^{1-n} \sigma^{[n/2]+2} \exp \sigma((y_n^2 - x_n^2)), k, j = 1, \dots, n,
 \end{aligned}$$

here  $C = \text{const}$ .

From Lemma 2.1 we obtain

**Lemma 2.2.** The matrix  $\Pi(y, x, \omega, \sigma)$  given by (2.4) and (2.5) is Carleman's matrix for problem (1.1), (1.3).

By using (2.4), (2.5) and inequalities (2.6) we obtain

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial D \setminus S} \left( |\Pi(y, x, \omega, \sigma)| + \left| R(\partial_y, n(y)) \Pi(y, x, \omega, \sigma) \right| \right) ds_y &\leq \\
 &\leq C(D) \sigma^{[n/2]+2} \exp(-\sigma x_n^2), \tag{2.7}
 \end{aligned}$$

where  $C(D)$  is a bounded function inside of  $D$ .

Let us set

$$2U_\sigma(x) = \int_S \left( \Pi(y, x, \omega, \sigma) \left\{ R(\partial_y, n(y)) U(y) \right\} - \left\{ \tilde{R}(\partial_y, n(y)) \Pi^*(y, x, \omega, \sigma) \right\}^* U(y) \right) ds_y, \quad x \in D. \quad (2.8)$$

The following theorem holds.

**Theorem 2.2.** Let  $U(x)$  be a regular solution of the system (1.1) in  $D$  such that

$$|U(y)| + \left| R(\partial_y, n(y)) U(y) \right| \leq M, \quad y \in \partial D \setminus S. \quad (2.9)$$

Then for  $\sigma \geq 1$  the following estimate is valid:

$$|U(x) - U_\sigma(x)| \leq MC(x) \sigma^{[n/2]+2} \exp(-\sigma x_n^2),$$

where  $C(x)$  –some function bounded inside  $D$ .

Since, by formulas (2.3) and (2.8) we have

$$\begin{aligned} |U(x) - U_\sigma(x)| &\leq \frac{1}{2} \left| \int_{\partial D \setminus S} \left( \Pi(y, x, \omega, \sigma) \left\{ R(\partial_y, n(y)) U(y) \right\} - \left\{ \tilde{R}(\partial_y, n(y)) \Pi^*(y, x, \omega, \sigma) \right\}^* U(y) \right) ds_y \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\partial D \setminus S} \left( |\Pi(y, x, \omega, \sigma)| + \left| \left\{ \tilde{R}(\partial_y, n(y)) \Pi^*(y, x, \omega, \sigma) \right\}^* \right| \right) \cdot \\ &\quad \cdot \left( |U(y)| + \left| R(\partial_y, n(y)) U(y) \right| \right) ds_y \end{aligned}$$

Now on the basis of (2.7) and (2.9) we obtain the required estimate.

**Corollary.** Provided theorem we have the following equivalent formulas continue

$$U(x) = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} U_\sigma(x) = \frac{1}{2} \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \int_S \left( \Pi(y, x, \omega, \sigma) \left\{ R(\partial_y, n(y)) U(y) \right\} - \left\{ \tilde{R}(\partial_y, n(y)) \Pi^*(y, x, \omega, \sigma) \right\}^* U(y) \right) ds_y, \quad x \in D, \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} U(x) &= \frac{1}{2} \int_S \left( \Pi(y, x, \omega) \left\{ R(\partial_y, n(y)) U(y) \right\} - \left\{ \tilde{R}(\partial_y, n(y)) \Pi^*(y, x, \omega) \right\}^* U(y) \right) ds_y + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^\infty Q(x, \omega, \sigma) d\sigma, \quad x \in D. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Where

$$\begin{aligned} Q(x, \omega, \sigma) &= \int_S \left( P(y, x, \omega, \sigma) \left\{ R(\partial_y, n(y)) U(y) \right\} - \left\{ \tilde{R}(\partial_y, n(y)) P^*(y, x, \omega, \sigma) \right\}^* U(y) \right) ds_y, \quad x \in D, \\ P(y, x, \omega, \sigma) &= \frac{\partial}{\partial \sigma} \Pi(y, x, \omega, \sigma) = \left\| \frac{\partial}{\partial \sigma} \Pi_{kj}(y, x, \omega, \sigma) \right\|_{(n+1) \times (n+1)}. \end{aligned}$$

$\Pi(y, x, \omega)$  matrix constructed according to the formula (2.4) and (2.5) at

$$\Phi(y, x, i\Lambda) = \varphi_n(i\Lambda r).$$

Equivalence formulas continuation (2.11) and (2.12) follows from the formula

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} U_{\sigma}(x) = \int_0^{\infty} \frac{dU_{\sigma}(x)}{d\sigma} d\sigma + U_0(x)$$

based on the continuation of the formula (2.11) and (2.12) we give solvability criterion the Cauchy problem (1.1), (1.3).

**Theorem 2.3.** Let  $S \in C^2$ ,  $f \in C^1(S)$ ,  $g \in C(S)$ . Then, for problem (1.3) to be solvable, it is necessary that

$$\left| \int_0^{\infty} Q(x, \omega, \sigma) d\sigma \right| < \infty,$$

uniformly on any compact  $K \subset D$ ,  $x \in K$ .

## REFERENCES

1. V. D. Kupradze, T. V. Burchuladze, T. G. Gegeliya, ot.ab.Three-Dimensional Problems of the Mathematical Theory of Elasticity and ... [in Russian], Nauka, Moscow, 1976.
2. M. M. Lavrent'ev. Some Ill-Posed Problems of Mathematical Physics [in Russian], Computer Center of the Siberian Division of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk (1962) 92 p.
3. I. E. Niyozov, O. I. Makhmudov . The Cauchy problem for the system of equations of thermoelasticity in  $E^n$ . IIUM Engineering Journal, Vol.15, N1, 2014. pp.81-90.
4. Makhmudov, O.I. and Niyozov, I.E., Regularization of a solution to the Cauchy problem for the system of thermoelasticity, *Contemp. Math. AMS, Primary*, 2005, vol. 382, pp. 285–289.
5. Makhmudov, O.I. and Niyozov, I.E., Regularization of solution of the Cauchy problem for elasticity theory system, *Sib. Mat. Zh.*, 1998, vol. 39, no. 2, pp. 369–376.
6. Makhmudov, O.I. and Niyozov, I.E., A Cauchy problem for the system of elasticity equations, *Differ.Uravn.*, 2000, vol. 36, no. 5, pp. 749–754.
7. Makhmudov, O.I. and Niyozov, I.E., Regularization of solutions of the Cauchy problem for systems of elasticity theory in infinite domains, *Math. Notes*, 2000, vol. 68, no. 4, pp. 471–475.
8. Makhmudov, O.I. and Niyozov, I.E., The Cauchy problem for the Lamre system in infinite domains in  $R^m$ , *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, 2006, vol. 14, no. 9, pp. 905–924.
9. Makhmudov, O.I. and Niyozov, I.E., On the Cauchy problem for a multidimensional system of Lamre equations, *Russ. Math.*, 2006, vol. 50, no. 4, pp. 39–49.
10. Makhmudov, O.I., Niyozov, I.E., and Tarkhanov, N.N., The Cauchy problem of couple-stress elasticity, *Contemp. Math. AMS*, 2008, vol. 455, pp. 297–310.
11. Makhmudov O., Niyozov I. Regularization of a solutions to the Cauchy problem for systems of elasticity theory. More progresses on analysis // Proc. of the Int. 5th ISAAK Congress / Eds. H.G.W. Begehr. Singapore, 2009.
12. Makhmudov, O.I. and Niyozov, I.E., The Cauchy problem of the moment elasticity theory in  $R^m$ , *Russ.Math.*, 2014, vol. 58, no. 2, pp. 24–37.
13. Makhmudov, O.I. and Niyozov, I.E., Cauchy Problem for Dynamic Elasticity Equations. *Differential Equations*, 2020, Vol. 56, No. 9, pp. 1130–1139.

УДК 517.946

## ЕДИНСТВЕННОСТЬ И УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

А.Хайдаров

Самаркандский государственный университет

**Аннотация.** Рассмотрена многомерная коэффициентная обратная задача для эллиптических уравнений в цилиндрических областях, где получены теоремы единственности и устойчивости решения этой обратной задачи.

**Ключевые слова.** Обратная задача, оценка шаудера, устойчивость, равномерная эллиптичность.

### Elliptik turdagi koefitsentli teskari masalalar uchun yechimning mavjudligi va yagonaligi

**Annotatsiya.** Elliptik turdagi ko'p o'zgaruvchili tenglamalar uchun yechimning yagonaligi va turg'unligi silindrik sohalarda isbotlangan.

**Kalitso'zlar.** Teskari masalalar, shauder baholashlari, turg'unlik, tekis elliptiklik.

### Uniqueness and stability of the solution of the coefficient of the inverse problem for elliptic equations

**Annotation.** A multidimensional coefficient inverse problem for elliptic equations in cylindrical domains is considered, where uniqueness and stability theorems for the solution of this inverse problem are obtained.

**Key words.** Inverse problem, schauder estimate, stability, uniform ellipticity.

Обратные задачи для дифференциальных уравнений состоят в отыскании коэффициентов и правых частей по некоторой дополнительной информации о решении.

Многие обратные задачи нелинейны и некорректны в классическом смысле, однако их удаётся поставить корректно по А.Н.Тихонову (условно корректной). Центральным местом в исследовании условно корректной задачи является доказательство теоремы единственности, а также оценок устойчивости.

В силу отсутствия фундаментального решения исследования таких задач проводится методами априорных оценок. Для гиперболических уравнений априорные оценки задаются в виде оценок карлемоновского типа. Для многомерных уравнений карлемоновские оценки построены в работах [1,2,3] и на основании этих оценок доказана условная корректность негиперболической задачи Коши в цилиндрических областях [4,5].

В настоящей работе рассматриваются задачи об определении правой части либо коэффициентов эллиптического уравнения второго порядка. Используя шаудеровской оценки работы [6] получены теоремы единственности и устойчивости решения обратной задачи в цилиндрической области в  $R^n$ .

Пусть  $(x_1, \dots, x_n) \in R^n$ ,  $x'$  обозначает проекцию  $(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$  этой точки на гиперплоскость  $x_n = 0$ . Через  $\Omega$  обозначается ограниченная область в  $R^n$ ,  $C^{k+\lambda}(\bar{\Omega})$  – пространства функций  $u(x_1, \dots, x_n)$ , с конечной нормой  $|u|^{k+\lambda}(\Omega)$ .

Рассматривается линейный дифференциальный оператор

$$A = - \sum_{j,k=1}^n a^{jk}(x) \partial^2 / \partial x_j \partial x_k + \sum_{j=1}^n a^j(x) \partial / \partial x_j + a(x)$$

с коэффициентами  $a^{jk}$ ,  $a^j$ ,  $a$  класса  $C^\lambda(R^n)$ , удовлетворяющий условию равномерной эллиптичности:

$$\sum_{j,k=1}^n a^{jk}(x)\xi_j\xi_k \geq \varepsilon_0|\xi|^2 \quad (1)$$

для всех  $\xi \in R^n$  и  $x \in \Omega$ . Через  $A'$  обозначается оператор  $A$  без членов с производными по  $x_n$ .

Пусть  $\Omega'$  – область в  $R^{n-1}$  с границей  $\partial\Omega'$  класса  $C^{2+\lambda}$ . Рассмотрим область

$$\Omega = \{x: x' \in \Omega', \gamma_H(x') < x_n < \gamma_0(x')\},$$

где  $\gamma_0, \gamma_n$  – функции класса  $C^{2+\lambda}(\bar{\Omega}')$ , удовлетворяющих следующим условиям:

$$\gamma_H < \gamma_0 \text{ на } \bar{\Omega}', \partial\gamma_\tau/\partial x_j = 0 \ (\tau = 0, H) \text{ на } \partial\bar{\Omega}', \quad (2)$$

Зафиксируем весовую функцию  $\rho$ , такую, что

$$0 < \varepsilon_0 < \rho \text{ на } \Gamma_0, \quad |\rho|^\lambda(\Omega) < 1/\varepsilon_0 \quad (3)$$

Рассмотрим задачу I об отыскания пары функций  $(u, q)$  удовлетворяющих условиям:

$$Au = \rho q + f, q_{x_n} = 0 \text{ на } \Omega, \quad (4)$$

$$u = g \text{ на } \partial\Omega, u_{x_n} = h \text{ на } \Gamma_0 \quad (5)$$

В дальнейшем через  $C$  обозначаются постоянные, зависящие от  $\Omega$ , от  $C^\lambda$  – норм коэффициентов оператора  $A$ , функции  $\rho$  и от  $\varepsilon_0$ . Зависимость  $C$  от других параметров будем отмечать особо.

В теореме 1 предполагается, что коэффициенты  $a^{jk}$  при  $j \leq n - 1$  удовлетворяют следующим условиям в угловых точках границы  $\Omega$ :

$$a^{jn}(x', \gamma_\tau(x')) = 0 \text{ на } \partial\Omega' \text{ для } \tau = 0, H \quad (6)$$

**Теорема 1.** Существует постоянная  $C$ , такая, что

$$\begin{aligned} &|u|^{2+\lambda}(\Omega) + |q|^\lambda(\Omega) \leq \\ &\leq C \left( |f|^\lambda(\Omega) + |g|^{2+\lambda}(\partial\Omega) + |h|^{1+\lambda}(\Gamma_0) + |u|^0(\Omega) \right) \end{aligned}$$

для любых функций  $u \in C^{2+\lambda}(\bar{\Omega})$  и  $q \in C^\lambda(\bar{\Omega})$ , являющихся решением задачи I.

Оценка теорема 1 является оценкой шаудеровского типа для задачи (4),(5).

В начале с помощью замены переменных

$$y' = x', y_n = bx_n + c, \quad \text{где } b = \frac{1}{\gamma_0 - \gamma_H}, c = \frac{\gamma_0}{\gamma_H - \gamma_0} \quad (7)$$

сведём общий случай к более простому случаю цилиндрической области  $\Omega = \Omega' \times (-1, 0)$ . Очевидно, что все свойства оператора  $A$ , а также независимость функции  $q$  от  $x_n$  сохраняется и достаточно проверить в новых переменных условие (6). По формулам замены переменных

$$\begin{aligned} \partial/\partial x_j &= \partial/\partial y_j + (b_{y_j}(y_n - c)/b + c_{y_j}) \partial/\partial y_n, \ j < n, \\ \partial/\partial x_n &= b(y') \partial/\partial y_n, \end{aligned}$$

поэтому коэффициент оператора  $A$  в новых переменных  $y$  при  $\partial^2/\partial y_j \partial y_n$  равен

$$\sum_{k=1}^{n-1} a^{kj}(x(y)) [b_{y_k}(y_n - c)/b - c_{y_k}] + a^{jn}(x(y))b,$$

Это выражение обращается в нуль в угловых точках  $\partial\Omega$  (в новых переменных) ввиду формулы (2), (6).

Таким образом, можно считать

$$\Omega = \Omega' \times (-1, 0)$$

Предположим, что коэффициенты  $a^{jk} \in C^{2+\lambda}$ ,  $a^j \in C^{1+\lambda}$  а коэффициенты  $a_*$  сопряженного оператора неотрицателен.

**Теорема 2.** Предположим, что весовая функция  $\rho$  удовлетворяет следующим условиям:

$$\rho, \partial\rho/\partial x_n \in C(\bar{D}), 0 \leq \partial\rho/\partial x_n \text{ на } \Omega, \text{supp } \rho = \bar{\Omega}.$$

Если функции  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ ,  $q \in C(\bar{\Omega})$  является решением следующей задачи

$$\begin{aligned} Au &= \rho q, q_{x_n} = 0 \text{ на } \Omega, u = 0 \text{ на } \partial\Omega \\ u_{x_n} &= 0 \text{ на } \Gamma_0, \end{aligned}$$

то  $u = 0, q = 0$  на  $\Omega$ .

**Следствие.** Пусть оператор  $A$  удовлетворяет условиям теорем 1 и 2. Тогда оценка теоремы 1 справедлива без последнего слагаемого в правой части.

Доказательство теорем 1 и 2, а также следствие приведены в работе [6].

Рассмотрим задачу отыскания пары функций  $(u, q)$  удовлетворяющих следующим условиям:

$$Au + qu = 0, q_{x_n} = 0, q \geq 0 \text{ на } \Omega \quad (8)$$

$$u = g \text{ на } \partial\Omega \quad (9)$$

$$u_{x_n} = h \text{ на } \Gamma_0 \quad (10)$$

Введем следующие ограничения:

$$g \in C^{2+\lambda}, g \geq 0, g = 0 \text{ на } \Gamma_H, g \neq 0, \quad g_{x_n} \geq 0 \text{ на } \Gamma = \partial\Omega(\Gamma_0 \cup \Gamma_H). \quad (11)$$

$$g_{x_n x_n} = 0 \text{ на } \bar{\Gamma}_H \cap \bar{\Gamma} \quad A'g \geq 0 \text{ на } \Gamma_0, \quad Ag = 0 \text{ на } \bar{\Gamma}_0 \cap \bar{\Gamma} \quad (12)$$

$$h = 0, g_{x_n} = 0 \text{ на } \bar{\Gamma}_0 \cap \bar{\Gamma} \quad (13)$$

**Лемма 1.** Если  $g \in C^\lambda(\bar{\Omega})$  и выполнены условия (11), (12), то существует единственное решение задачи (8), (9) в классе  $C^{2+\lambda}(\bar{\Omega})$ .

Доказательство в силу теоремы 5.3 [7, стр.197] и условий на коэффициенты оператора  $A$  задача (8), (9) имеет единственное решение класса  $W_2^1(\Omega)$ . Решая задачу Дирихле в области с гладкой границей, содержащая  $\Omega$ , причём эта гладкая граница содержит  $\Gamma_0$ . на основании теоремы 1.3. [7, стр.157] получим функцию  $u_1$ , такую, что  $Au_1 + qu_1 = 0$  на  $\Omega, u_1 = g$  на  $\Gamma_0, u_1 \in C^{2+\lambda}(\bar{\Omega})$ . Определим  $u_2 = u - u_1$  на  $\Gamma_0$ . Тогда  $Au_2 + qu_2 = 0$  на  $\Omega, u_2 = 0$  на  $\Gamma_0, u_2 = g - u_1$  на  $\Gamma$ .

Продолжим функцию  $u_2$  на множестве  $\{(x', -x_n): x_n \leq 0\}$  по формуле  $u(x', -x_n) = -u(x', x_n)$ . Краевые данные для  $u_2$  на  $\Gamma$  в силу выбора  $u_1$  и второго из условий (12) продолжается до функции класса  $C^{2+\lambda}(\bar{\Gamma})$ . По теоремам 10.1 из [7, стр.229] и 12.1 из [7, стр.235] функция  $u_2 \in C^{2+\lambda}(\Omega \cup \Gamma_0 \cup \Gamma)$ .

Аналогично, с помощью отражения относительно гиперплоскости  $x_n = -H$  доказывается, что  $u \in C^{2+\lambda}(\Omega \cup \Gamma \cup \Gamma_H)$ . Это доказывает леммы 1.

**Лемма 2.** Если  $q \in C^\lambda(\bar{\Omega})$  и выполнены условия (11), (13), то существует единственное решение задачи (8), (9) с данными  $u = g$  на  $\Gamma \cup \Gamma_H$  в классе  $C^{2+\lambda}(\bar{\Omega})$ .

С помощью четного отражения относительно  $x_n$  указанная задача сводится к задаче Дирихле, которая исследуется как в лемме 1.

**Лемма 3.** Если функция  $u$  удовлетворяет условиям (8), (9), где для функций  $g$  и  $h$  выполнены либо условия (11), (12), либо условия (11), (13), то  $u > 0, u_{x_n} \geq 0$  на  $\Omega$ .

**Доказательство.** Положительность  $u$  вытекает из принципа максимума. Рассмотрим случай условий (11), (12). Обозначим  $u_{x_n}$  через  $v$  и дифференцируя уравнения (8) и краевое условие (9) на  $\Gamma$  получим

$$Av + qv = 0 \text{ на } \Omega, v = q_{x_n} \text{ на } \Gamma.$$

В силу уравнения (8)

$$v_{x_n} = u_{x_n x_n} = A'u + qu = A'g + qg \text{ на } \Gamma_0 \cup \Gamma_H$$

ввиду краевого условия (9). Таким образом  $v_{x_n} = 0$  на  $\Gamma_H$  и  $v_{x_n} \geq 0$  на  $\Gamma_0$  по условиям (11) и (12). По принципу максимума с использованием (11), имеем  $v = u_{x_n} \geq 0$  на  $\Omega$ .

Случай условий (11), (13) рассматривается аналогично, причём на  $\Gamma_0$  получается краевое условие  $v = 0$ .

Пусть  $q = q_j, h = h_j$  ( $j = 1, 2$ ).

**Теорема 3.** При условиях (11) и (12) для  $g = g_j$  или условиях (11), (13) для  $g = g_j, h = h_j$  и выполнении неравенства  $g_1 \geq \varepsilon_0$  на  $\Gamma_0$  справедлива следующая оценка.

$$\begin{aligned} & |u_2 - u_1|^{2+\lambda}(\Omega) + |q_2 - q_1|^\lambda(\Omega) \leq \\ & \leq C(M)[|g_2 - g_1|^{2+\lambda}(\Omega) + |h_2 - h_1|^{1+\lambda}(\Gamma_0)], \end{aligned}$$

где

$$M = |q_2|^\lambda(\Omega) + |q_1|^\lambda(\Omega) + |g_1|^\lambda(\partial\Omega) + |h_1|^{1+\lambda}(\Gamma_0)$$

**Доказательство.** Обозначим  $u = u_2 - u_1, q = q_2 - q_1$  и вычитая из равенств (8) – (10) при  $j = 2$  равенства  $j = 1$  получим:

$$Au + q_2u = u_1q, q_{x_n} = 0 \text{ на } \Omega,$$

$$u = g_2 - g_1 \text{ на } \partial\Omega \text{ и } u_{x_n} = h_2 - h_1 \text{ на } \Gamma_0$$

По лемме 3 имеем  $u_1 > 0$  на  $\Omega$  и  $u_{1x_n} \geq 0$  на  $\Omega$ . Положим  $\rho = u_1$ . В силу шаудеровской оценки задачи Дирихле  $|u_1|^{2+\lambda}(\Omega)$  не превосходит  $C(M)$ . Так как

$\rho = g_1 \geq \varepsilon_0$  на  $\Gamma_0$ , то  $\rho \geq \varepsilon_1$  на  $\Omega \times (-\varepsilon, 0)$ , где  $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\varepsilon_0, M)$ . Таким образом выполняется условия следствия с  $A + q_2$  вместо  $A$ . Теперь доказательство теоремы 3 вытекает из следствия.

#### Теорема 4.

Задача (8) – (10) обладает свойством устойчивости.

**Доказательство.** Для этого покажем, что решение задачи непрерывно зависит от данных. Пусть данные  $g_1, g_2$  и  $h_1, h_2$  удовлетворяют условиям:

$$|g_2 - g_1|^{2+\lambda}(\Omega) \leq \varepsilon, |h_2 - h_1|^{1+\lambda}(\Gamma_0) \leq \varepsilon$$

В силу теоремы 3

$$|u_2 - u_1|^{2+\lambda}(\Omega) + |q_2 - q_1|^\lambda(\Gamma_0) \leq 2\varepsilon$$

Отсюда имеем

$$|u_2 - u_1|^{2+\lambda}(\Omega) + |q_2 - q_1|^\lambda(\Gamma_0) \rightarrow 0 \text{ если } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Теорема 4 доказана.

Аналогично можно доказать теорему единственности.

### Литература

1. А. Хайдаров, “Карлемановские оценки и обратные задачи для гиперболических уравнений второго порядка”, *Матем. сб.*, **130(172):2(6)** (1986), 265–274
2. А. Хайдаров, “Оценки устойчивости в обратных задачах для гиперболических уравнений”, *Матем. заметки*, **49:1** (1991), 114–119
3. Хайдаров А., Зарипов З. Единственность и устойчивость решения обратных задач для дифференциальных уравнений второго порядка // Докл. РАН. 1999. Т.368. №3. С. 316-317.
4. Haydarov A. and Shodiyev D.S Uniqueness of solutions of differential equations of the second order. III – Posed and Non-Classical Problems of mathematical Physics and analysis Samarkand. 2003. Pp 199-205.
5. А. Хайдаров, “Обратные задачи для гиперболического уравнений и оценки устойчивости” Международная конференция “Обратные и некорректные задачи”. Самарканд, 2-4 октября, 2019. ст. 133-136.
6. Хайдаров А. Один класс обратных задач для эллиптических уравнений // Дифференциальные уравнения. 1987. Т.23 №7. С. 1376-1383.
7. Ладиженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука. 1973. – 576 с.

УДК 517.984

**СПЕКТРАЛЬНОЕ СВОЙСТВА ДВУХЧАСТИЧНОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА С ТОЧЕЧНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ В ДВУМЕРНОМ СЛУЧАЕ****У.Н.Кулжанов***Самаркандский государственный университет*  
[uquljonov@bk.ru](mailto:uquljonov@bk.ru)

**Аннотация.** В работе рассматривается точно-взаимодействующая двухчастичная квантовая система в двумерном случае. Описан существенный спектр и доказано существование одного отрицательного собственного значения оператора Шредингера при любых значениях параметра расширения. Более того, найдены отрицательные собственные значения и соответствующая собственная функция. Основные результаты работы основываются на изучении спектра расширения оператора  $h_\varepsilon$ , зависящего от параметра расширения  $\varepsilon$ .

**Ключевые слова:** Гамильтониан, собственное значение, собственная функция, существенный спектр, расширения оператора.

**Икки ўлчамли нуқтавий потенциалли икки заррачали Шредингер операторининг спектрал хоссалари**

**Аннотация.** Ушбу ишда нуқтавий таъсирлашувчи икки заррачали квант системаси икки ўлчамли ҳолда қаралган. Шредингер операторининг муҳим спектри топилган ва кенгайтириш параметрининг исталган қийматида ягона манфий хос қиймати мавжудлиги исботланган. Бундан ташқари хос қиймат ва унга мос хос функция топилган. Ишнинг асосий натижалари  $\varepsilon$  кенгайтириш параметрига боғлиқ  $h_\varepsilon$  операторининг спектрини ўрганишга асосланган.

**Калит сўзлар:** Гамильтониан, хос қиймат, хос функция, муҳим спектр, кенгайтириш оператори.

**Spectral properties of a two-particle shredinger operator point potential in two-dimensional case**

**Abstract.** In the current paper it is considered a point-interacting two-particle quantum system in the two-dimensional case. It is described the essential spectrum and for any values  $\varepsilon$  of the extension parameter the existence of unique negative eigenvalue of the Schrödinger operator is proved. An implicit form of the negative eigenvalue of  $h_\varepsilon$  is obtained and the corresponding eigenfunction are found. The main results of the work are based on the study of the spectrum of the extension of the operator depending on the  $\varepsilon$ -extension parameter.

**Keywords:** Hamiltonian, eigenvalue, eigenfunction, essential spectrum, operator extensions.

**1. Введение**

Задачи о точечном взаимодействии двух и трех одинаковых квантовых частиц изучались в различных физических работах. В работах Ф.А. Березина и Л.Д. Фаддеева [1] и Р.А. Минлоса и Л.Д. Фаддеева [2,3] впервые было предложено строгое математическое описание точечного взаимодействия двух и трех частиц соответственно. В работах [2,3] гамильтониан рассматриваемой системы трактовался с помощью теории самосопряженных расширений симметрических операторов и вводился как некоторое самосопряженное расширение симметрического оператора Лапласа, определенного на области функций трех переменных

$x_1, x_2, x_3; x_j \in R^2; j = 1, 2, 3$  обращающихся в нуль при совпадении любых двух аргументов  $x_j = x_k; j \neq k; j, k = 1, 2, 3$ . Предложенное расширение называлось расширением Скорнякова-Тер-Мартиросяна. В работе [4] с использованием результатов работ [1,2] изучался гамильтониан трех частиц (двух фермионов и одной частицы иной природы) с одинаковыми массами, взаимодействующих точечным образом и было показано, что расширения Скорнякова-Тер-Мартиросяна являются самосопряженными и полуограниченными. В работе [5] обобщены результаты работ [1-4] на случай трех различных частиц и показано, что соответствующий гамильтониан имеет неограниченный снизу дискретный спектр.

В настоящей статье, следуя в основном схеме использованной в работах [2-5], мы изучим задачу о точечном взаимодействии двух произвольных частиц. Доказано, что расширение Скорнякова-Тер-Мартиросяна оператора Лапласа, определенного на области функций двух переменных  $x_1, x_2 \in R^2$ , обращающихся в нуль при совпадении переменных, т.е. при  $x_1 = x_2$ , является самосопряженным. Доказано, что существенный спектр рассматриваемого расширения совпадает с полуосью  $[0, \infty)$  и при любом значения  $\varepsilon, \varepsilon \in (-\infty; +\infty)$ , оно имеет одно отрицательное собственное значение. Основные результаты работы основываются на изучение спектра расширения оператора  $h_\varepsilon$ , зависящего от параметра расширения  $\varepsilon$ .

## 2. Предварительные сведения и выбор расширения

Гамильтониан (оператор энергии) рассматриваемой двухчастичной системы задается как некоторое расширение  $\tilde{H}$  следующего симметрического оператора  $\tilde{H}_0$ , действующего в гильбертовом пространстве  $L_2((R^2)^2) \equiv L_2$  по формуле

$$\tilde{H}_0 = \left(-\frac{1}{2m_1} \Delta_{x_1} - \frac{1}{2m_2} \Delta_{x_2}\right) \varphi(x_1, x_2) \quad (1)$$

и определенного на множестве функций

$$D(\tilde{H}_0) = \left\{ \varphi \in L_2 : (\Delta_{x_1} + \Delta_{x_2})\varphi \in L_2, \varphi(x, x) = 0 \right\}$$

где  $\Delta_{x_i}$  -оператор Лапласа по переменной  $x_i \in R^2$ ,  $m_i$  -масса  $i$ -й частицы,  $i = 1, 2$ .

После соответствующего преобразования Фурье оператор  $\tilde{H}$  перейдет в оператор

$$H_0 f(p_1, p_2) = \left(\frac{1}{2m_1} p_1^2 + \frac{1}{2m_2} p_2^2\right) f(p_1, p_2),$$

определенный на множестве  $D(H_0) \subset L_2$  функций  $f(p_1, p_2)$ , удовлетворяющих условиям:

$$\int_{(R^2)^2} (p_1^4 + p_2^4) |f(p_1, p_2)|^2 dp_1 dp_2 < \infty, \int_{\Gamma_p} f(p_1, p_2) d\nu_p = 0.$$

где обозначение  $p^2, p \in R^2$  означает  $p^2 = (p^{(1)})^2 + (p^{(2)})^2$ .

Здесь  $\Gamma_p = \{(p_1, p_2) \in (R^2)^2 : p_1 + p_2 = p, p \in R^2\}$  - семейство трехмерных многообразий с естественной Лебеговой мерой  $d\nu_p$ . Замена переменных  $P = p_1 + p_2$ ,

$p = \frac{m_2}{M} p_1 - \frac{m_1}{M} p_2$  осуществляем естественный изоморфизм между пространствами

$$L_2\left(\left(R^2\right)^2\right) \text{ и } L_2\left(R^2_p\right) \otimes L_2\left(\Gamma_p\right).$$

Последнее пространство может быть отождествлено с пространством  $L_2\left(R^2\right) \otimes L_2\left(R^2\right)$ , при этом оператор  $h_0$  записывается в виде тензорной суммы следующие операторов

$$H_0 = \left( \frac{1}{2M} P^2 + \frac{1}{2m} h_0 \right) \otimes I,$$

где  $I$  - единичный оператор,  $M = m_1 + m_2$ ,  $m = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ ,  $(1/2M)P^2$  - оператор умножения на функцию  $(1/2M)P^2$  в пространстве  $L_2(R^2)$ , и является самосопряженным,  $h_0$ -замкнутый неотрицательный симметрический оператор, действующий в  $L_2(R^2)$  по формуле:

$$h_0 f(p) = p^2 f(p)$$

и его область определения  $D(h_0)$  состоит из функций  $f \in L_2(R^2)$ , удовлетворяющих условиям:

$$\int p^4 |f(p)|^2 dp < \infty; \int f(p) dp = 0, \quad (2)$$

В дальнейшем интеграл без указания пределов понимается как интегрирование по всему пространству  $R^2$ .

**Лемма 1.** Для любого  $z \in \Pi_0 = C^1 \setminus [0, \infty)$  дефектное подпространство  $\mathfrak{R}_z \subset L_2(R^2)$  оператора  $h_0$  состоит из функций вида

$$u(p) = \frac{c}{p^2 - \bar{z}}, c \in C^1.$$

**Доказательство.** Пусть  $g \in \mathfrak{R}_z$ . Тогда для любого  $f \in D(h_0)$  выполняется соотношение

$$\left( (h_0 - z)f, g \right) = \int (p^2 - z) f(p) \overline{g(p)} dp = \int f(p) \overline{(p^2 - \bar{z})g(p)} dp = 0$$

Из последнего равенства и условия (2) следует, что

$$(p^2 - \bar{z})g(p) = c, c \in C^1$$

или

$$g(p) = \frac{c}{p^2 - \bar{z}}.$$

Лемма доказана.

Из доказанной леммы следует, что для любого  $z \in \Pi_0$  дефектное подпространство  $\mathfrak{R}_z$  является одномерным. Следовательно,  $h_0$  есть симметрический оператор с индексами дефекта (1,1). Используя общую теорию расширений [4] получим, что оператор  $h_0$  имеет однопараметрическое семейство самосопряженных расширений.

Поскольку оператор  $h_0$  неотрицателен, как и в работах [2-5] воспользуемся теорией расширений полуограниченных операторов. Дефектное подпространство  $\mathfrak{R}_{-1}$  оператора  $h_0$  состоит из функций вида

$$u_c(p) = \frac{c}{p^2 + 1}, c \in C^1.$$

Более того, следуя схемам этих работ сопряженный оператор  $h_0^*$  описывается с помощью следующей леммы.

**Лемма 2.** Область определения  $D(h_0^*)$  оператора  $h_0^*$  состоит из функций вида

$$g(p) = f(p) + \frac{c_1}{p^2 + 1} + \frac{c_2}{(p^2 + 1)^2}, \quad (3)$$

где  $f \in D(h_0)$ ,  $c_1, c_2 \in C^1$ . Оператор  $h_0^*$  действует на функцию  $g$  вида (3) по формуле

$$h_0^*g(p) = p^2g(p) - c_1,$$

где  $c_1$  - константа взятая из разложения (3) функции  $g$ .

Теперь выберем расширения оператора  $h_0$ . Для любого  $\varepsilon \in R$  ставим соответствие множество  $D(h_\varepsilon), D(h_0) \subset D(h_\varepsilon) \subset D(h_0^*)$ , следующим образом:

$$D(h_\varepsilon) = \left\{ g \in D(h_0^*) : g(p) = f(p) + \frac{c}{p^2 + 1} + \frac{(\varepsilon - 1)c}{(p^2 + 1)^2}, f \in D(h_0) \right\} \quad (4)$$

Сужение оператора  $h_0^*$  на область  $D(h_\varepsilon)$  обозначим через  $h_\varepsilon$ . По определению  $h_\varepsilon$  является расширением оператора  $h_0$ .

**Тереома 1.** Для любого  $\varepsilon \in R$  расширение  $h_\varepsilon$  является самосопряженным оператором.

**Доказательство.** Нетрудно проверить, что для любых  $g_1, g_2 \in D(h_\varepsilon)$  выполняется соотношение  $(h_\varepsilon g_1, g_2) = (g_1, h_\varepsilon g_2)$ , т.е.  $h_\varepsilon$  является симметрическим оператором. Достаточно доказать, что индексы дефекта оператора  $h_\varepsilon$  равны  $(0,0)$ .

Пусть  $\psi \in \mathfrak{R}_{-1}(h_\varepsilon)$ . Тогда функция  $\psi(p)$  имеет вид

$$\psi(p) = \frac{b}{p^2 + 1}, b \in C^1$$

и для любого  $g \in D(h_\varepsilon)$  имеет место равенство  $((h_\varepsilon + 1)g, \psi) = 0$ . Если учесть (4), то последнее равенство имеет вид

$$\begin{aligned} & \int \left[ (p^2 + 1) \left( f(p) + \frac{c}{p^2 + 1} + \frac{(\varepsilon - 1)c}{(p^2 + 1)^2} \right) - c \right] \overline{\psi(p)} dp = \\ & = \int (p^2 + 1) f(p) \overline{\psi(p)} dp + (\varepsilon - 1)c \int \frac{\overline{b}}{(p^2 + 1)^2} dp = 0. \end{aligned}$$

Так как

$$\int (p^2 + 1) f(p) \overline{\psi(p)} dp = 0$$

и  $\varepsilon - 1 \neq 0$ ,  $c \neq 0$ , то  $b = 0$ . Это означает, что  $\psi(p) = 0$ . Тем самым доказано, что индексы дефекта оператора равны  $(0, 0)$ .

### 3. Спектральные свойства оператора $h_\varepsilon$

Основным результатом этой работы является следующая теорема.

**Теорема 2.** Для любого  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  существенный спектр оператора  $h_\varepsilon$  совпадает с полуосью  $[0, \infty)$ . При любом значении  $\varepsilon$ ,  $h_\varepsilon$  имеет одно простое собственное значение  $z = -\frac{1}{e^\varepsilon}$ , соответствующая собственная функция с точностью до постоянного множителя имеет вид

$$g_\varepsilon(p) = \frac{1}{p^2 + \frac{1}{e^\varepsilon}}.$$

**Доказательство.** Сначала докажем, что существенный спектр оператора совпадает с полуосью  $[0, \infty)$ . Для этого при каждом  $z \geq 0$  рассмотрим последовательности круговых колец

$$G_n(z) = \left\{ p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{z} + \frac{1}{n+1} < |p| < \sqrt{z} + \frac{1}{n} \right\}, n = 1, 2, 3, \dots$$

Каждый круговых колец  $G_n(z)$  разделим на полуслоев вида

$$G_n^+(z) = \{p \in G_n(z) : p_2 \geq 0\}, \quad G_n^-(z) = \{p \in G_n(z) : p_2 < 0\}$$

По построению площади (меры) этих частей равны и  $\mu(G_n^+(z)) = \mu(G_n^-(z)) = \frac{1}{2} \mu(G_n(z))$ .

С помощью простого вычисления получим, что площади круговых колец  $G_n(z)$  равен

$$V_n(z) = \mu(G_n(z)) = \frac{\pi}{n(n+1)} \left( 2\sqrt{z} + \frac{n+2}{n(n+1)} \right)$$

Определим последовательность функций

$$f_n^{(z)}(p) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{V_n(z)}} & \text{при } p \in G_n^+(z) \\ -\frac{1}{\sqrt{V_n(z)}} & \text{при } p \in G_n^-(z), \quad n = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & \text{при } p \in \mathbb{R}^2 \setminus G_n(z), \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Легко проверить, что  $f_n^{(z)} \in L_2(\mathbb{R}^2)$ ,  $\|f_n^{(z)}\| = 1$ ,  $(f_n^{(z)}, f_m^{(z)}) = 0$  при  $n \neq m$  и  $f_n^{(z)} \in D(h_0)$ , то есть

$$\int f_n^{(z)}(p) dp = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Более того,

$$\begin{aligned} \|(h_\varepsilon - zI)f_n^{(z)}\|^2 &= \int |(p^2 - z)f_n^{(z)}(p)|^2 dp = \\ &= \int_{G_n(z)} \frac{1}{V_n(z)} (p^2 - z)^2 dp = \frac{1}{V_n(z)} \int_{\sqrt{z+\frac{1}{n+1}}}^{\sqrt{z+\frac{1}{n}}} (p^2 - z)^2 dp < \\ &< \frac{1}{V_n(z)} \left(2\sqrt{z} + \frac{1}{n}\right)^2 \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{n(n+1)} = \\ &\frac{1}{\pi^2} \cdot \left(2\sqrt{z} + \frac{1}{n}\right)^2 \left(2\sqrt{z} + \frac{2n+1}{n(n+1)}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

Отсюда видно что,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(h_\varepsilon - zI)f_n^{(z)}\| = 0.$$

Это означает, что если  $z \geq 0$ , то  $z \in \sigma_{ess}(h_\varepsilon)$ , следовательно  $[0, \infty) \subset \sigma_{ess}(h_\varepsilon)$ . Для полного описания спектра построим резольвенту оператора  $h_\varepsilon$ . Пусть  $(h_\varepsilon - z)g = \psi$ . Тогда

$$(p^2 - z)g(p) - c = \psi(p)$$

или

$$g(p) = \frac{\psi(p)}{p^2 - z} + \frac{c}{p^2 - z} \quad (5)$$

Сравнивая (4) и (5) получим уравнения относительно  $c$ :

$$f(p) + \left(\frac{1}{p^2 + 1} - \frac{1}{p^2 - z}\right)c + \frac{(\varepsilon - 1)c}{(p^2 + 1)^2} = \frac{\psi(p)}{p^2 - z},$$

где  $f \in D(h_0)$ .

Интегрируя последнее равенство по всему  $R^2$  приходим к уравнению для определения  $c$ :

$$\pi(\ln(-z) + \varepsilon) = \int \frac{\psi(p)}{p^2 - z} dp \quad (6)$$

Находя из уравнения (6) постоянное  $c$  и подставляя его в (5) получим выражения для  $g(p)$ :

$$g(p) = \frac{\psi(p)}{p^2 - z} + \frac{1}{\pi(\ln(-z) + \varepsilon)} \cdot \frac{1}{p^2 - z} \int \frac{\psi(q)}{q^2 - z} dq.$$

Таким образом, если  $z \in \Pi_0$  и  $\ln(-z) + \varepsilon \neq 0$ , то резольвента оператора  $h_\varepsilon$  действует в  $L_2(R^2)$  по формуле

$$R_z(h_\varepsilon)g(p) = \frac{g(p)}{p^2 - z} + \frac{1}{\pi(\ln(-z) + \varepsilon)} \cdot \frac{1}{p^2 - z} \int \frac{g(q)}{q^2 - z} dq \quad (7)$$

и является органичным оператором. Отсюда непосредственно следует, что

$$\sigma_{ess}(h_\varepsilon) = [0, \infty).$$

При любом  $\varepsilon, \varepsilon \in \mathbb{R}$  уравнение  $\ln(-z) + \varepsilon = 0$  имеет одно отрицательное решение  $z = -\frac{1}{e^\varepsilon}$ . Из уравнения  $(h_\varepsilon - z)g(p) = 0$  получим, что

$$g(p) = \frac{c}{p^2 - z} \quad (8)$$

Сравнивая (4) и (8) получим равенство

$$f(p) + \frac{c}{p^2 + 1} + \frac{(\varepsilon - 1)c}{(p^2 + 1)^2} = \frac{c}{p^2 - z}.$$

Интегрируя последнее равенство по всему пространству  $\mathbb{R}^2$  получим  $(\ln(-z) + \varepsilon)c = 0$ . Так как  $c(\ln(-z) + \varepsilon) = 0$  то в качестве  $c$  можем взять любое число, в частности,  $c = 1$ .

Таким образом, при любом значении  $\varepsilon$ ,  $z = -\frac{1}{e^\varepsilon}$  является собственным значением, а функция

$$g_\varepsilon(p) = \frac{1}{p^2 + \frac{1}{e^\varepsilon}}$$

соответствующей собственной функцией оператора  $h_\varepsilon$ . Теорема доказана.

### Список литературы

1. Ф. А. Березин, Л.Д. Фаддеев // Замечание об уравнение Шредингера с сингулярным потенциалом. ДАН СССР, 1961, Т.137, №5.
2. Р.А. Минлос, Л.Д. Фаддеев // О точечном взаимодействии для системы из трех частиц в квантовой механике. ДАН СССР, 1961, Т.141, №6, с.1335-1338.
3. Р.А. Минлос, Л.Д. Фаддеев // Замечание о задаче трех частиц с точечным взаимодействием. ЖЭТФ. 1961.Т.41. №12. с. 1850-1851.
4. Р.А. Минлос, М.Х. Шерматов // О точечном взаимодействии трех частиц. Вестник МГУ, сер.1, 1989, №6, с.7-14.
5. А. М. Mel'nikov, R.A. Minlos // Advances in Soviet Mathematics, v.5, 1991, P.99-122.
6. Н.И. Ахиезер, И.М.Глазман // Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1966.
7. М.Х.Шерматов, У.Н.Кулжанов // О спектре двухчастичного оператора Шредингера с точечным потенциалом. УзМЖ, 2010, №3, с.168-192.
8. М.Х.Шерматов, А.А.Омонов // О спектре гамильтониана одной системы трехчастич с точечными взаимодействиями. УзМЖ, 2004, №3, с.99-111.
9. Z.Muminov, U.Kuljanov, Sh.Lakaev // On the spectrum of the two-particle Shrodinger operator with point interaction. Lobachevskii Journal of Mathematics 41 (6), pages 1094-1102, 2021.

УДК 517.957

**ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ****У.Б. Муминов***Самаркандский государственный университет***Задача Коши для нелинейного уравнения Шредингера с дополнительными членами**

**Аннотация.** В статье методом обратных спектральных задач интегрируются нелинейные уравнения Шредингера с дополнительными членами в классе бесконечнозонных периодических функций.

**Ключевые слова.** Нелинейного уравнения Шредингера, оператор Дирака, обратная спектральная задача, спектральные данные, система уравнений Дубровина, формулы следов.

**Қўшимча ҳадларга эга бўлган ночизикли Шредингер тенгламаси учун Коши масаласи**

**Аннотация.** Ушбу мақолада тескари спектрал масалалар усулида қўшимча ҳадларга эга бўлган ночизикли Шредингер тенгламаси чексиз зонали даврий функциялар синфида интегралланган.

**Калит сўзлар.** Ночизикли Шредингер тенгламаси, Дирак оператори, тескари спектрал масала, спектрал берилганлар, Дубровин тенгламалар системаси, излар формуласи.

**Cauchy problem for nonlinear Schrödinger equation with additional terms**

**Abstract.** In this paper, the method of the inverse spectral problem is applied to the integration of the nonlinear Schrodinger equation with a loaded terms in the class of infinite – zone, periodic function.

**Keywords.** Nonlinear Schrödinger equation, Dirac operator, inverse spectral problem, spectral data, system of Dubrovin equations, trace formulas.

Одним из представителей интегрируемых нелинейных уравнений в частных производных, имеющей большое прикладное значение, является нелинейные уравнения Шредингера (НУШ), которые впервые было интегрировано В.Е. Захаровым и А.Б. Шабатом [1] в классе быстроубывающих функций.

Хорошо известно, что нахождение явной формулы для решения нелинейного уравнения Шредингера в классе периодических функций существенно зависят от количество нетривиальных лакун в спектре периодического оператора Дирака.

В работах А.Р. Итса [2], А.Р.Итса и В.П. Катлярова [3], а также А.О. Смирнова [4] исследовано нелинейное уравнение Шредингера (НУШ)

$$iu_t = u_{xx} - 2|u|^2 \cdot u$$

в классе конечнозонных функций. Замечательная часть этих работ заключается в том, что решение обратной задачи для оператора Дирака в случая конечнозонных потенциалов было сведено к проблеме обращения Якоби абелевых интегралов на двулистной римановой поверхности с конечным числом действительных точек ветвления. Кроме того, для конечнозонных потенциалов (т.е. для решения НУШ) была выведена явная формула через тета – функции Римана. Более подробно эта теория изложена в монографиях [5] - [8] и [9].

В [10, стр. 221-222] доказано, что если  $q(x) = 2a \cos 2x$ ,  $a \neq 0$ , то в спектре оператора Штурма – Лиувилля  $Ly \equiv -y'' + q(x)y$ ,  $x \in R$ , открыты все лакуны, иначе говоря  $q(x) = 2a \cos 2x$ ,  $a \neq 0$  – бесконечнозонный периодический потенциал. Аналогичные примеры имеются для периодического оператора Дирака [11].

В работе А.Б. Хасанова, М.М. Хасанова [12], было исследовано нелинейное уравнения Шредингера с дополнительным членом вида

$$u_t = 2i|u|^2 \cdot u - iu_{xx} + \gamma(t)|u(0,t)|^2 \cdot u_x$$

в классе бесконечнозонных периодических функций.

Следует отметить, что в работе [13] рассмотрен вещественно – аналитическое решение нелинейного уравнения Шредингера вида

$$iu_t = Au_{xx} + B|u|^2 \cdot u + Cu,$$

где  $A, B, C \in R$  – заданные константы, которые удовлетворяет условию  $A \cdot B \neq 0$ . Это уравнение можно переписать в виде эквивалентной ему системы на вещественную и мнимую части функции  $u(x,t) = q(x,t) - ip(x,t)$ :

$$q_t = -Ap_{xx} - B(p^2 + q^2)p - cp,$$

$$p_t = Aq_{xx} + B(p^2 + q^2)q + cq.$$

В соответствии с физическим смыслом решений этих уравнений различают фокусирующий случай  $AB > 0$  и дефокусирующий случай  $AB < 0$ .

Рассмотрим задачу Коши для нелинейного уравнения Шредингера с дополнительными членами вида

$$\begin{cases} p_t = -q_{xx} + 2q(p^2 + q^2) + a(t)[p^2(x_0,t) + q^2(x_0,t)]p_x + \\ \quad + \{b(t) + c(t)[p^2(x_1,t) + q^2(x_1,t)]\} \cdot q, \\ q_t = p_{xx} - 2p(p^2 + q^2) + a(t)[p^2(x_0,t) + q^2(x_0,t)]q_x - \\ \quad - \{b(t) + c(t)[p^2(x_1,t) + q^2(x_1,t)]\} \cdot p, \end{cases} \quad (1)$$

при начальных условиях

$$p(x,t)|_{t=0} = p_0(x), \quad q(x,t)|_{t=0} = q_0(x), \quad x \in R \quad (2)$$

в классе действительных бесконечнозонных  $\pi$  - периодических по  $x$  функций:

$$\begin{aligned} p(x + \pi, t) &= p(x, t), \quad q(x + \pi, t) = q(x, t), \quad x \in R, \quad t > 0, \\ p(x, t), q(x, t) &\in C_x^2(t > 0) \cap C_t^1(t > 0) \cap C(t \geq 0). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $a(t), b(t), c(t) \in C[0, \infty)$  – заданные непрерывные ограниченные функции, а  $x_0, x_1 \in R$ . Следуя [13] уравнение (1) относится к дефокусирующему случаю, т.к.  $A = -1$ ,  $B = 2$ , ( $AB = -2 < 0$ ). При  $a(t) = 0$ ,  $c(t) = 0$  и  $b(t) = c = const$ , из (1) получим

$$\begin{cases} q_t = p_{xx} - 2(p^2 + q^2)p - cp, \\ p_t = -q_{xx} + 2(p^2 + q^2)q + cq. \end{cases} \quad (4)$$

В данной статье используя методику работы [14] предлагается алгоритм построения решения  $p(x,t)$ ,  $q(x,t)$ ,  $x \in R$ ,  $t > 0$  задачи(1)-(3), с помощью обратной спектральной задачи для оператора Дирака:

$$L(\tau, t)y \equiv By' + \Omega(x + \tau, t)y = \lambda y, \quad x \in R, \quad t > 0 \quad (5)$$

где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega(x, t) = \begin{pmatrix} p(x, t) & q(x, t) \\ q(x, t) & -p(x, t) \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через  $c(x, \lambda, \tau, t) = (c_1(x, \lambda, \tau, t), c_2(x, \lambda, \tau, t))^T$  и  $s(x, \lambda, \tau, t) = (s_1(x, \lambda, \tau, t), s_2(x, \lambda, \tau, t))^T$  решения уравнения (5) с начальными условиями  $c(0, \lambda, \tau, t) = (1, 0)^T$  и  $s(0, \lambda, \tau, t) = (0, 1)^T$ .

Функция  $\Delta(\lambda, \tau, t) = c_1(\pi, \lambda, \tau, t) + s_2(\pi, \lambda, \tau, t)$  называется функцией Ляпунова для уравнения (5).

Корни уравнений  $\Delta(\lambda, \tau, t) = \pm 2$  обозначим через  $\lambda_n(\tau, t)$ , она совпадает с собственными значениями периодической и антипериодической задачи  $y(0, \tau, t) = \pm y(\pi, \tau, t)$  для уравнения (5).

Теперь рассмотрим задачу Дирихле

$$y_1(0, \tau, t) = 0, \quad y_1(\pi, \tau, t) = 0 \quad (6)$$

для уравнения (5). Первая компонента вектор – функций  $s(x, \lambda, \tau, t)$  удовлетворяет первую граничную условие (6), подставляя его на вторую граничную условие, получим  $s_1(\pi, \lambda, \tau, t) = 0$ . Решая его относительно  $\lambda$ , находим собственное значение  $\xi_n = \xi_n(\tau, t)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  задачи Дирихле (5), (6). Обозначим через  $\sigma_n(\tau, t)$  знак:

$$\sigma_n(\tau, t) = \text{sign}\{s_2(\pi, \xi_n, \tau, t) - c_1(\pi, \xi_n, \tau, t)\}.$$

Набор  $\xi_n(\tau, t), \sigma_n(\tau, t), n \in \mathbb{Z}$  называются спектральными параметрами, а  $\{\lambda_n(\tau, t), \xi_n(\tau, t), \sigma_n(\tau, t), n \in \mathbb{Z}\}$  – спектральными данными оператора  $L(\tau, t)$ . Восстановление коэффициента  $\Omega(x, t)$  оператора  $L(\tau, t)$  по спектральным данным называется обратной задачей. Коэффициент  $\Omega(x, t)$  – оператора  $L(\tau, t)$  определяется однозначно по спектральным данным  $\{\lambda_n(\tau, t), \xi_n(\tau, t), \sigma_n(\tau, t), n \in \mathbb{Z}\}$ .

Теперь с помощью начальной функций  $p_0(x + \tau), q_0(x + \tau), \tau \in R$  построим оператор Дирака вида

$$L(\tau, 0)y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_0(x + \tau) & q_0(x + \tau) \\ q_0(x + \tau) & -p_0(x + \tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad x \in R.$$

Решая прямую задачу, находим спектральные данные

$\{\lambda_n, \xi_n^0(\tau), \sigma_n^0(\tau), n \in \mathbb{Z}\}$  оператора  $L(\tau, 0)$ . Отсюда следует, что  $\xi_n^0(\tau + \pi) = \xi_n^0(\tau), \sigma_n^0(\tau + \pi) = \sigma_n^0(\tau), n \in \mathbb{Z}$ , так как  $p_0(x + \pi + \tau) = p_0(x + \tau), q_0(x + \tau + \pi) = q_0(x + \tau)$ . В частности, если  $p_0(x) = 0, q_0(x) = 0$ , то спектральные данные оператора  $L(\tau, 0)$  состоит из следующего набора

$$\{\lambda_{4n-1} = \lambda_{4n} = 2n; \lambda_{4n+1} = \lambda_{4n+2} = 2n + 1, \xi_n^0(\tau) = n, \sigma_n^0(\tau) = 1, n \in \mathbb{Z}\}.$$

В этом случае, все лакуны закрываются, т.к.  $\Delta(\lambda) = 2 \cos \pi \lambda$ . Следовательно корни уравнения  $\Delta(\lambda) = \pm 2$  являются кратными  $\lambda_{2n-1} = \lambda_{2n} = \xi_n^0(\tau), n \in \mathbb{Z}$ .

Основной результат настоящей работы содержится в следующей теореме.

**Теорема 1.** Пусть  $p(x, t), q(x, t), x \in R, t > 0$  является решением задачи Коши (1)-(3). Тогда спектральные данные  $\{\lambda_n(\tau, t), \xi_n(\tau, t), \sigma_n(\tau, t), n \in \mathbb{Z}\}$  оператора  $L(\tau, t)$  удовлетворяют аналогу системы уравнений Дубровина:

$$\begin{aligned} 1). \lambda_n(\tau, t) &= \lambda_n, n \in \mathbb{Z} \\ 2). \frac{\partial \xi_n(\tau, t)}{\partial t} &= 2(-1)^n \sigma_n(\tau, t) h_n(\xi(\tau, t)) \cdot \{q^2(\tau, t) + q_\tau(\tau, t) + \\ &+ [p(\tau, t) + \xi_n(\tau, t)]^2 + \xi_n^2(\tau, t) - a(t)(p(\tau, t) + \xi_n(\tau, t))[p^2(x_0, t) + \\ &+ q^2(x_0, t)] + \frac{1}{2} [b(t) + c(t)(p^2(x_1, t) + q^2(x_1, t))]\}, n \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{7}$$

Знак  $\sigma_n(\tau, t) = \pm 1, n \in \mathbb{Z}$  меняется при каждом столкновении точки  $\xi_n(\tau, t), n \in \mathbb{Z}$  с границами своей лакуны  $[\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$ . Кроме того, выполняются следующие начальные условия

$$\xi_n(\tau, t)|_{t=0} = \xi_n^0(\tau), \sigma_n(\tau, t)|_{t=0} = \sigma_n^0(\tau), n \in \mathbb{Z}. \tag{8}$$

Последовательность участвующего в уравнение (7) определяется по формуле:

$$h_n(\xi) = \sqrt{(\xi_n - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n)} \cdot \sqrt{\prod_{\substack{k=-\infty \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n)(\lambda_{2k} - \xi_n)}{(\xi_k - \xi_n)^2}}. \tag{9}$$

**Доказательство.** Пусть  $y_n = (y_{n,1}(x, \tau, t), y_{n,2}(x, \tau, t))^T, n \in \mathbb{Z}$  ортонормированные собственные вектор-функции оператора  $L(\tau, t)$  рассматриваемого на отрезки  $[0, \pi]$  с граничными условиями Дирихле

$$y_1(0, \tau, t) = 0, y_1(\pi, \tau, t) = 0 \tag{10}$$

соответствующее собственным значениями  $\xi_n = \xi_n(\tau, t), n \in \mathbb{Z}$ . Дифференцируя по  $t$  тождество

$$\xi_n(\tau, t) = (L(\tau, t)y_n, y_n), n \in \mathbb{Z}$$

и используя симметричность оператора  $L(\tau, t)$ , имеем

$$\frac{\partial \xi_n(\tau, t)}{\partial t} = (\dot{\Omega}(x + \tau, t) y_n, y_n), n \in Z. \quad (11)$$

Используя явный вид скалярного произведения

$$(y, z) = \int_0^\pi [y_1(x) \overline{z_1(x)} + y_2(x) \overline{z_2(x)}] dx, \quad y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \end{pmatrix},$$

равенство (11) перепишем в виде

$$\frac{\partial \xi_n(\tau, t)}{\partial t} = \int_0^\pi [(y_{n,1}^2 - y_{n,2}^2) p_t + 2y_{n,1} y_{n,2} q_t] dx \quad (12)$$

Подставляя выражения (1) в (12), получаем равенство

$$\frac{\partial \xi_n(\tau, t)}{\partial t} = I_1 + a(t)[p^2(x_0, t) + q^2(x_0, t)]I_2 + [b(t) + c(t)[p^2(x_1, t) + q^2(x_1, t)]]I_3, \quad (13)$$

где

$$I_1 = \int_0^\pi \{(y_{n,1}^2 - y_{n,2}^2)[-q_{xx} + 2q(p^2 + q^2)] + 2y_{n,1} y_{n,2} [p_{xx} - 2p(p^2 + q^2)]\} dx,$$

$$I_2 = \int_0^\pi [(y_{n,1}^2 - y_{n,2}^2) p_x + 2y_{n,1} y_{n,2} q_x] dx,$$

$$I_3 = \int_0^\pi [(y_{n,1}^2 - y_{n,2}^2) q - 2y_{n,1} y_{n,2} p] dx.$$

Применяя тождество

$$\begin{cases} y'_{n,1} = qy_{n,1} - py_{n,2} - \xi_n y_{n,2}, \\ y'_{n,2} = \xi_n y_{n,1} - py_{n,1} - qy_{n,2}. \end{cases}$$

нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned} & (y_{n,1}^2 - y_{n,2}^2)[-q_{xx} + 2q(p^2 + q^2)] + 2y_{n,1} y_{n,2} [p_{xx} - 2p(p^2 + q^2)] = \\ & = \{[-q_x + q^2 + (p - \xi_n)^2 + \xi_n^2] y_{n,1}^2 + (2p_x - 4q\xi_n) y_{n,1} y_{n,2} + [q_x + q^2 + (p + \xi_n)^2 + \xi_n^2] y_{n,2}^2\}', \\ & (y_{n,1}^2 - y_{n,2}^2) p_x + 2y_{n,1} y_{n,2} q_x = \{(p - \xi_n) y_{n,1}^2 + 2q y_{n,1} y_{n,2} - (p + \xi_n) y_{n,2}^2\}', \\ & (y_{n,1}^2 - y_{n,2}^2) q - 2y_{n,1} y_{n,2} p = \left\{ \frac{1}{2} y_{n,1}^2 + \frac{1}{2} y_{n,2}^2 \right\}'. \end{aligned}$$

Тогда интегралы в правой части формулы (13) принимают вид

$$\begin{cases} I_1 = (q_x + q^2 + p^2 + 2p\xi_n + 2\xi_n^2)[y_{n,2}^2(\pi, \tau, t) - y_{n,2}^2(0, \tau, t)], \\ I_2 = -(p + \xi_n)[y_{n,2}^2(\pi, \tau, t) - y_{n,2}^2(0, \tau, t)], \\ I_3 = \frac{1}{2}[y_{n,2}^2(\pi, \tau, t) - y_{n,2}^2(0, \tau, t)]. \end{cases} \quad (14)$$

Отсюда с помощью выражений (13) и (14) выводим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_n(\tau, t)}{\partial t} = & \{q^2(\tau, t) + q_\tau(\tau, t) + (p(\tau, t) + \xi_n(\tau, t))^2 + \xi_n^2(\tau, t) - \\ & - a(t)(p^2(x_0, t) + q^2(x_0, t))(p(\tau, t) + \xi_n(\tau, t)) + \\ & + \frac{1}{2}[b(t) + c(t)(p^2(x_1, t) + q^2(x_1, t))]\} [y_{n,2}^2(\pi, \tau, t) - y_{n,2}^2(0, \tau, t)]. \end{aligned} \quad (15)$$

Так как собственные значения  $\xi_n(\tau, t)$  задача Дирихле (10) для уравнения (5) простые, поэтому

$$y_n(x, \tau, t) = \frac{1}{c_n(\tau, t)} s(x, \xi_n(\tau, t), \tau, t)$$

где

$$c_n^2(\tau, t) = \int_0^\pi [s_1^2(x, \xi_n, \tau, t) + s_2^2(x, \xi_n, \tau, t)] dx = -\frac{\partial s_1(\pi, \xi_n, \tau, t)}{\partial \lambda} \cdot s_2(\pi, \xi_n, \tau, t).$$

Используя эти равенства, имеем

$$y_{n,2}^2(\pi, \tau, t) - y_{n,2}^2(0, \tau, t) = -\frac{s_2(\pi, \xi_n, \tau, t) - \frac{1}{s_2(\pi, \xi_n, \tau, t)}}{\frac{\partial s_1(\pi, \xi_n, \tau, t)}{\partial \lambda}}.$$

Подставим в это соотношение равенство

$$s_2(\pi, \xi_n, \tau, t) - \frac{1}{s_2(\pi, \xi_n, \tau, t)} = \sigma_n(\tau, t) \sqrt{\Delta^2(\xi_n) - 4}$$

и получим

$$y_{n,2}^2(\pi, \tau, t) - y_{n,2}^2(0, \tau, t) = -\frac{\sigma_n(\tau, t) \sqrt{\Delta^2(\xi_n) - 4}}{\frac{\partial s_1(\pi, \xi_n, \tau, t)}{\partial \lambda}}. \quad (16)$$

Учитывая разложение

$$\Delta^2(\lambda) - 4 = -4\pi^2 \prod_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(\lambda - \lambda_{2k-1})(\lambda - \lambda_{2k})}{a_k^2}, \quad \frac{\partial s_1(\pi, \xi_n, \tau, t)}{\partial \lambda} = \prod_{\substack{k=-\infty \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{(\xi_k - \xi_n)}{a_k^2}$$

где  $a_0 = 1$  при  $k = 0$  и  $a_k = k$  при  $k \neq 0$ , перепишем равенство (16) в виде

$$y_{n,2}^2(\pi, \tau, t) - y_{n,2}^2(0, \tau, t) = 2(-1)^n \sigma_n(\tau, t) h_n(\xi(\tau, t))$$

Подставляя это выражение в тождество (15), получим (7).

Если заменить граничные условия Дирихле периодическими  $y(0) = y(\pi)$  или антипериодической  $y(0) = -y(\pi)$  граничными условиями, то вместо уравнения (15) мы будем иметь

$$\frac{\partial \lambda_n(\tau, t)}{\partial t} = 0, \text{ т.е. } \lambda_n(\tau, t) = \lambda_n(\tau, 0), n \in Z.$$

Теперь, в уравнение  $L(\tau, t)v_n = \lambda_n(\tau, t)v_n, n \in Z$  положим  $t = 0$ . Так как собственные значения  $\lambda_n(\tau) = \lambda_n(\tau, 0), n \in Z$  периодической или антипериодической задачи для уравнения  $L(\tau, 0)v_n = \lambda_n(\tau)v_n, n \in Z$  не зависят от параметра  $\tau \in R$ , имеем  $\lambda_n(\tau, t) = \lambda_n(\tau, 0), n \in Z$ . Теорема доказана.

**Следствие 1.** Учитывая формулы следов

$$p(\tau, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( \frac{\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k}}{2} - \xi_k(\tau, t) \right), \quad (17)$$

$$q(\tau, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{k-1} \sigma_k(\tau, t) h_k(\xi(\tau, t)), \quad (18)$$

$$q^2(\tau, t) + q_\tau(\tau, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( \frac{\lambda_{2k-1}^2 + \lambda_{2k}^2}{2} - \xi_k^2(\tau, t) \right). \quad (19)$$

систему дифференциальных уравнений (7) можно переписать в замкнутой форме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_n(\tau, t)}{\partial t} = & 2(-1)^n \sigma_n(\tau, t) h_n(\xi(\tau, t)) \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( \frac{\lambda_{2k-1}^2 + \lambda_{2k}^2}{2} - \xi_k^2(\tau, t) \right) + \right. \\ & + \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( \frac{\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k}}{2} - \xi_k(\tau, t) \right) + \xi_n(\tau, t) \right]^2 + \xi_n^2(\tau, t) - \\ & - a(t) \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( \frac{\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k}}{2} - \xi_k(\tau, t) \right) + \xi_n(\tau, t) \right] \times \\ & \times \left[ \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( \frac{\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k}}{2} - \xi_k(x_0, t) \right) \right)^2 + \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{k-1} \sigma_k(x_0, t) h_k(\xi(x_0, t)) \right)^2 \right] + \\ & + \frac{1}{2} \left[ b(t) + c(t) \left[ \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( \frac{\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k}}{2} - \xi_k(x_1, t) \right) \right)^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{k-1} \sigma_k(x_1, t) h_k(\xi(x_1, t)) \right)^2 \right] \right\}. \quad (20) \end{aligned}$$

**Следствие 2.** Теорема 1 дает метод решения задачи (1)-(3). Для этого сначала найдем спектральные данные  $\lambda_n, \xi_n^0(\tau), \sigma_n^0(\tau) = \pm 1, n \in Z$ , оператора  $L(\tau, 0)$  соответствующие коэффициентам  $p_0(x + \tau), q_0(x + \tau), \tau \in R$ . Обозначим спектральные данные оператора  $L(\tau, t)$  через  $\lambda_n, \xi_n(\tau, t), \sigma_n(\tau, t) = \pm 1, n \in Z$ . Теперь в систему уравнения (20) и начальным условиям (8) последовательно положим  $\tau = x_0$  и  $\tau = x_1$ . Решая полученную задачу Коши, находим  $\xi_n(x_0, t), \sigma_n(x_0, t), n \in Z$  и  $\xi_n(x_1, t), \sigma_n(x_1, t), n \in Z$ . Затем из формулы следов (17), (18) определим функции  $p(x_0, t), q(x_0, t)$  и  $p(x_1, t), q(x_1, t)$ . После этого подставляя эти данные в систему уравнение (7) и решая задачу Коши (7)-(8) при

произвольном значении  $\tau$ , находим  $\xi_n(\tau, t)$ ,  $\sigma_n(\tau, t)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Из формул следов (17), (18) определим  $p(\tau, t)$  и  $q(\tau, t)$ , т.е. решение задачи (1)-(3).

Используя результаты работы [15], [16] мы получим следующее:

**Следствие 3.** Если начальная функция  $p_0(x)$  и  $q_0(x)$  являются действительной  $\pi$ -периодической аналитической функцией, то решения  $p(x, t)$ ,  $q(x, t)$  являются действительной аналитической функцией по  $x$ .

**Следствие 4.** Если число  $\frac{\pi}{2}$  является периодом (антипериодом) для начальной функции  $p_0(x)$  и  $q_0(x)$ , то все корни уравнения  $\Delta(\lambda) + 2 = 0$  ( $\Delta(\lambda) - 2 = 0$ ) являются двукратными. Так как функция Ляпунова соответствующая коэффициентам  $p(x, t)$ ,  $q(x, t)$ , совпадает с  $\Delta(\lambda)$ , то по аналогу обратной теореме Борга (см. [17], [18]), число  $\frac{\pi}{2}$  являются также периодом (антипериодом) для решения  $p(x, t)$ ,  $q(x, t)$  по переменной  $x$ .

**Замечание 1.** Равномерная сходимость рядов в вышеуказанных формулах следуют из оценки (см. [19]):

$$\gamma_k \equiv \lambda_{2k} - \lambda_{2k-1} = \frac{|q_{2k}^n|}{2^{n-1}|k|^n} + \frac{\delta_k}{k^{n+1}}, \quad n \geq 0 \quad (21)$$

и

$$|h_k(\xi)| \leq c_1 \gamma_k, \quad k \geq 0, \quad c_1 = \text{const} \quad (22)$$

где

$$q_{2k}^n \equiv \frac{1}{\pi} \int_0^\pi Q_0^{(n)}(t) e^{-2ikt} dt, \quad Q_0(t) = -q_0(t) + ip_0(t), \quad (23)$$

$$Q_0^{(n)}(t) \in L^2(0, \pi), \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\delta_k|^2 < \infty.$$

Приведем примеры иллюстрирующий изложенный алгоритм.

**Пример1.** Рассмотрим однозонный потенциал  $u_0(x) = q_0(x) - ip_0(x)$ ,  $i = \sqrt{-1}$  задаваемый спектром  $E = \mathbb{R} \setminus (\lambda_{-1}, \lambda_0)$  и спектральными параметрами  $\xi_0(0) \in [\lambda_{-1}, \lambda_0]$ ,  $\sigma_0(0) = \pm 1$ .

В этом случае система уравнений Дубровина состоит из одного уравнения

$$\dot{\xi}_0(\tau) = -(\lambda_{-1} + \lambda_0) \sigma_0(\tau) \sqrt{(\xi_0(\tau) - \lambda_{-1})(\lambda_0 - \xi_0(\tau))}.$$

После замены переменной

$$\xi_0(\tau) = \lambda_{-1} + (\lambda_0 - \lambda_{-1}) \sin^2 \varphi(\tau),$$

$$\varphi(0) = \arcsin \sqrt{\frac{\xi_0(0) - \lambda_{-1}}{\lambda_0 - \lambda_{-1}}},$$

имеем

$$\dot{\varphi}(\tau) = -\frac{\lambda_{-1} + \lambda_0}{2} \sigma_0(0).$$

Отсюда находим

$$\xi_0(\tau) = \frac{\lambda_{-1} + \lambda_0}{2} - \frac{\lambda_0 - \lambda_{-1}}{2} \cos\{(\lambda_{-1} + \lambda_0)\tau - 2\sigma_0(0)\varphi(0)\}.$$

Из формул следов

$$p_0(\tau) = \frac{\lambda_{-1} + \lambda_0}{2} - \xi_0(\tau),$$

$$q_0(\tau) = -\sigma_0(\tau) \sqrt{(\xi_0(\tau) - \lambda_{-1})(\lambda_0 - \xi_0(\tau))} = \frac{\dot{\xi}_0(\tau)}{\lambda_{-1} + \lambda_0},$$

получим

$$p_0(\tau) = \frac{\lambda_0 - \lambda_{-1}}{2} \cos\{(\lambda_{-1} + \lambda_0)\tau - 2\sigma_0(0)\varphi(0)\},$$

$$q_0(\tau) = \frac{\lambda_0 - \lambda_{-1}}{2} \sin\{(\lambda_{-1} + \lambda_0)\tau - 2\sigma_0(0)\varphi(0)\}.$$

**Пример 2.** Рассмотрим следующую задачу Коши для нелинейного уравнения Шредингера с дополнительным членом вида

$$\begin{cases} p_t = -q_{xx} + 2q(p^2 + q^2) + a(t)[p^2(0,t) + q^2(0,t)]p_x, \\ q_t = p_{xx} - 2p(p^2 + q^2) + a(t)[p^2(0,t) + q^2(0,t)]q_x, \end{cases} \quad (24)$$

при начальных условиях

$$\begin{aligned} p(x,t)|_{t=0} &= \frac{\lambda_0 - \lambda_{-1}}{2} \cos\{(\lambda_{-1} + \lambda_0)x - 2\sigma_0(0)\varphi(0)\}, \\ q(x,t)|_{t=0} &= \frac{\lambda_0 - \lambda_{-1}}{2} \sin\{(\lambda_{-1} + \lambda_0)x - 2\sigma_0(0)\varphi(0)\}. \end{aligned} \quad (25)$$

В этом случае, система уравнений Дубровина (7) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_0(\tau,t)}{\partial t} &= 2\sigma_0(\tau,t) \sqrt{(\xi_0(\tau,t) - \lambda_{-1})(\lambda_0 - \xi_0(\tau,t))} \{q^2(\tau,t) + q_\tau(\tau,t) + \\ &+ [p(\tau,t) + \xi_0(\tau,t)]^2 + \xi_0^2(\tau,t) - a(t)[p(\tau,t) + \xi_0(\tau,t)][p^2(0,t) + q^2(0,t)]\}. \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь начальные условия имеют вид

$$\xi_0(\tau,t)|_{t=0} = \frac{\lambda_{-1} + \lambda_0}{2} - \frac{\lambda_0 - \lambda_{-1}}{2} \cos\{(\lambda_{-1} + \lambda_0)\tau - 2\sigma_0(0)\varphi(0)\}, \quad \sigma_0(\tau,t)|_{t=0} = \sigma_0(\tau). \quad (27)$$

Используя формулу следов

$$q^2(\tau,t) + q_\tau(\tau,t) = \frac{\lambda_{-1}^2 + \lambda_0^2}{2} - \xi_0^2(\tau,t),$$

$$p(\tau, t) = \frac{\lambda_{-1} + \lambda_0}{2} - \xi_0(\tau, t),$$

$$q(\tau, t) = -\sigma_0(\tau, t) \sqrt{(\xi_0(\tau, t) - \lambda_{-1})(\lambda_0 - \xi_0(\tau, t))}$$

Систему (26) перепишем в виде

$$\frac{\partial \xi_0(\tau, t)}{\partial t} = \sigma_0(\tau, t) \sqrt{(\xi_0(\tau, t) - \lambda_{-1})(\lambda_0 - \xi_0(\tau, t))} \left\{ \lambda_{-1}^2 + \lambda_0^2 + \frac{(\lambda_{-1} + \lambda_0)^2}{2} - \frac{(\lambda_{-1} + \lambda_0)(\lambda_0 - \lambda_{-1})^2}{4} a(t) \right\}$$

Нетрудно найти решение этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию (27)

$$\begin{aligned} \xi_0(\tau, t) = & \frac{\lambda_{-1} + \lambda_0}{2} - \frac{\lambda_0 - \lambda_{-1}}{2} \cos \left\{ (\lambda_{-1} + \lambda_0)\tau - \left( \lambda_{-1}^2 + \lambda_0^2 + \frac{(\lambda_{-1} + \lambda_0)^2}{2} \right) t + \right. \\ & \left. + \frac{(\lambda_{-1} + \lambda_0)(\lambda_0 - \lambda_{-1})^2}{4} \int_0^t a(s) ds - 2\sigma_0(0)\varphi(0) \right\}. \end{aligned}$$

Из формул следов, получим решение задачи Коши (24)-(25)

$$\begin{aligned} p(\tau, t) = & \frac{\lambda_0 - \lambda_{-1}}{2} \cos \left\{ (\lambda_{-1} + \lambda_0)\tau - \left( \lambda_{-1}^2 + \lambda_0^2 + \frac{(\lambda_{-1} + \lambda_0)^2}{2} \right) t + \right. \\ & \left. + \frac{(\lambda_{-1} + \lambda_0)(\lambda_0 - \lambda_{-1})^2}{4} \int_0^t a(s) ds - 2\sigma_0(0)\varphi(0) \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q(\tau, t) = & \frac{\lambda_0 - \lambda_{-1}}{2} \sin \left\{ (\lambda_{-1} + \lambda_0)\tau - \left( \lambda_{-1}^2 + \lambda_0^2 + \frac{(\lambda_{-1} + \lambda_0)^2}{2} \right) t + \right. \\ & \left. + \frac{(\lambda_{-1} + \lambda_0)(\lambda_0 - \lambda_{-1})^2}{4} \int_0^t a(s) ds - 2\sigma_0(0)\varphi(0) \right\}. \end{aligned}$$

**Пример 3.** Рассмотрим следующую задачу Коши для нелинейного уравнения Шредингера с дополнительными членами вида

$$\begin{cases} p_t = -q_{xx} + 2q(p^2 + q^2) + a(t) \left[ p^2(x_0, t) + q^2(x_0, t) \right] p_x + \\ \quad + \left\{ b(t) + c(t) \left[ p^2(x_1, t) + q^2(x_1, t) \right] \right\} q, \\ q_t = p_{xx} - 2p(p^2 + q^2) + a(t) \left[ p^2(x_0, t) + q^2(x_0, t) \right] q_x - \\ \quad - \left\{ b(t) + c(t) \left[ p^2(x_1, t) + q^2(x_1, t) \right] \right\} p, \end{cases} \quad (28)$$

при начальных условиях

$$\begin{aligned} p(x, t)|_{t=0} &= \frac{\lambda_0 - \lambda_{-1}}{2} \cos \left\{ (\lambda_{-1} + \lambda_0)x - 2\sigma_0(0)\varphi(0) \right\}, \\ q(x, t)|_{t=0} &= \frac{\lambda_0 - \lambda_{-1}}{2} \sin \left\{ (\lambda_{-1} + \lambda_0)x - 2\sigma_0(0)\varphi(0) \right\}. \end{aligned} \quad (29)$$

В этом случае, система уравнений Дубровина (20), примет вид

$$\frac{\partial \xi_0(\tau, t)}{\partial t} = 2\sigma_0(\tau, t) \sqrt{(\xi_0(\tau, t) - \lambda_{-1})(\lambda_0 - \xi_0(\tau, t))} \left\{ \frac{\lambda_{-1}^2 + \lambda_0^2}{2} + \frac{(\lambda_{-1} + \lambda_0)^2}{4} - a(t) \frac{(\lambda_{-1} + \lambda_0)(\lambda_0 - \lambda_{-1})^2}{8} + \frac{1}{2} \left[ b(t) + c(t) \frac{(\lambda_{-1} - \lambda_0)^2}{4} \right] \right\}. \quad (30)$$

Здесь начальные условия имеют вид

$$\xi_0(\tau, t) \Big|_{t=0} = \frac{\lambda_{-1} + \lambda_0}{2} - \frac{\lambda_0 - \lambda_{-1}}{2} \cos\{(\lambda_{-1} + \lambda_0)\tau - 2\sigma_0(0)\varphi(0)\},$$

$$\sigma_0(\tau, t) \Big|_{t=0} = \sigma_0(\tau). \quad (31)$$

Отсюда находим, что

$$\xi_0(\tau, t) = \frac{\lambda_{-1} + \lambda_0}{2} - \frac{\lambda_0 - \lambda_{-1}}{2} \cos \left\{ (\lambda_{-1} + \lambda_0)\tau - \left( \lambda_{-1}^2 + \lambda_0^2 + \frac{(\lambda_{-1} + \lambda_0)^2}{2} \right) t + \frac{(\lambda_{-1} + \lambda_0)(\lambda_0 - \lambda_{-1})^2}{4} \int_0^t a(s) ds - \int_0^t b(s) ds - \frac{(\lambda_{-1} - \lambda_0)^2}{4} \int_0^t c(s) ds - 2\sigma_0(0)\varphi(0) \right\}. \text{ Из}$$

формул следов, получим искомое решение задачи Коши:

$$p(\tau, t) = \frac{\lambda_0 - \lambda_{-1}}{2} \cos \left\{ (\lambda_{-1} + \lambda_0)\tau - \left( \lambda_{-1}^2 + \lambda_0^2 + \frac{(\lambda_{-1} + \lambda_0)^2}{2} \right) t + \frac{(\lambda_{-1} + \lambda_0)(\lambda_0 - \lambda_{-1})^2}{4} \int_0^t a(s) ds - \int_0^t \left[ b(s) + \frac{(\lambda_{-1} - \lambda_0)^2}{4} c(s) \right] ds - 2\sigma_0(0)\varphi(0) \right\},$$

$$q(\tau, t) = \frac{\lambda_0 - \lambda_{-1}}{2} \sin \left\{ (\lambda_{-1} + \lambda_0)\tau - \left( \lambda_{-1}^2 + \lambda_0^2 + \frac{(\lambda_{-1} + \lambda_0)^2}{2} \right) t + \frac{(\lambda_{-1} + \lambda_0)(\lambda_0 - \lambda_{-1})^2}{4} \int_0^t a(s) ds - \int_0^t \left[ b(s) + \frac{(\lambda_{-1} - \lambda_0)^2}{4} c(s) \right] ds - 2\sigma_0(0)\varphi(0) \right\}.$$

Отсюда, при  $a(t) = 0$ ,  $b(t) = C = const$  и  $c(t) = 0$ , получим однозонные решение уравнения (4) с начальными условиями (29):

$$p(\tau, t) = \frac{\lambda_0 - \lambda_{-1}}{2} \cos \left\{ (\lambda_{-1} + \lambda_0)\tau - \left( \lambda_{-1}^2 + \lambda_0^2 + \frac{(\lambda_{-1} + \lambda_0)^2}{2} + C \right) t - 2\sigma_0(0)\varphi(0) \right\},$$

$$q(\tau, t) = \frac{\lambda_0 - \lambda_{-1}}{2} \sin \left\{ (\lambda_{-1} + \lambda_0)\tau - \left( \lambda_{-1}^2 + \lambda_0^2 + \frac{(\lambda_{-1} + \lambda_0)^2}{2} + C \right) t - 2\sigma_0(0)\varphi(0) \right\}.$$

Таким образом, при наличии дополнительного члена в уравнений НУШ скорость распространения периодической бегущей волны, в зависимости коэффициентов  $a(t)$ ,  $b(t)$  и  $c(t)$ , увеличится или уменьшится, а амплитуда не меняется.

### Список литературы

1. Захаров В.Е., Шабат А.Б. Точная теория двумерной самофокусировки в одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах // ЖЭТФ, 61:1 (1971), 118-134.
2. Итс А.Р. Обращения гиперэллиптический интегралов и интегрирование нелинейных дифференциальных уравнений. Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. Матем. Механ. Астрон., 7:2 (1976), 39-46.
3. Итс А.Р., Котляров В.П. Явные формулы для решений нелинейного уравнения Шредингера // Докл. АН УССР. Сер.А., 1976, №11, 965-968.
4. Смирнов А.О. Эллиптические по  $t$  решение нелинейного уравнения Шредингера // ТМФ, 107:2 (1996), 188-200.
5. Марченко В.А. Операторы Штурм-Лиувилля и их приложения, Наукова думка, Киев, 1977.
6. Левитан Б.М. Обратные задачи Штурм-Лиувилля, Наука, М., 1984.
7. Митропольский Ю.А., Боголюбов Н.Н.(мл.), Прикарпатский А.К., Самойленко В.Г. Интегрируемые динамические системы: спектральные и дифференциально-геометрические аспекты. // Киев: Наукова думка, 1987.
8. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов: метод обратной задачи. –М.: Наука, 1980.
9. Дубровин Б.А., Матвеев В.Б., Новиков С.П. Нелинейные уравнения типа Кортевега–де Фриза. УМН, 1976, т.187, №1, 55–136
10. Айнс Э.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Факториал пресс, 2005.
10. Джаков П.Б., Митягин Б.С. Зоны неустойчивости одномерных периодических операторов Шредингера и Дирака. // УМН, 61:4(370) (2006), с.77-182.
11. Хасанов А.Б., Хасанов М.М. Интегрирование нелинейного уравнения Шредингера с дополнительным членом в классе периодических функций. // ТМФ., 2019., т.199, №1, с.60-68.
12. Домрин А.В. О вещественно – аналогических решениях нелинейного уравнения Шредингера. Тр. ММО, 2014, т.75, вып.2, 205-218.
13. Дубровин Б.А. Периодическая задача для уравнения Кортевега-де Фриза в классе конечнозонных потенциалов. // Функциональный анализ и его прил. – Москва, 1975. т.9. вып.3. с.41-51.
14. Trubowitz E. The inverse problem for periodic potentials. // Comm. Pure. Appl. Math., –New York, 1977. V. 30. – P. 321-337.
15. Хасанов А.Б., Ибрагимов А.М. Обратной задаче для оператора Дирака с периодическим потенциалом. // Узб.матем.журн., 2001, №3-4., с.48-55.
16. Хасанов А.Б., Яхшимуратов А.Б. Аналог обратной теоремы Г.Борга для оператора Дирака. // Узб.матем.журн., 2000, №3-4, с.40-46.
17. Currie S., Roth T., Watson B. Borg's periodicity theorems for first-order self-adjoint systems with complex potentials. Proc. Edinb. Math. Soc., 60:3 (2017), 615-633.
18. Мисюра Т.Б. Характеристика спектров периодической и антипериодической краевых задач, порождаемых операцией Дирака I. Теория функции, функциональный анализ и их приложения, 30, ред. В.А. Марченко, Вища школа, Хорьков, 1978, 90 - 101; Характеристика спектров периодической и антипериодической краевых задач, порождаемых операцией Дирака II. 31, 1979, 102-109.

UDK: 519.214.4

## ON SUMS OF RANDOM VARIABLES OF A SPECIAL FORM AND THEIR ASYMPTOTIC BEHAVIORS

A.A.Imomov<sup>1</sup>, Z.A.Nazarov<sup>2</sup><sup>1</sup> Karshi State University<sup>2</sup> National University of Uzbekistan[imomov\\_azam@mail.ru](mailto:imomov_azam@mail.ru), [zuhrov13@gmail.com](mailto:zuhrov13@gmail.com)

**Abstract.** In this paper, we will consider some functionals of the sums of independent identically distributed random variables. In connection with the application in various probabilistic models, we are interested in the fulfillment of the law of large numbers and the central limit theorem for these sums.

**Keywords:** Random variables, Sum in a special form, Law of large numbers, Central limit theorem.

**О суммах случайных величин специального вида и их асимптотические поведения**

**Аннотация.** В этой статье мы рассмотрим некоторые функционалы сумм независимых одинаково распределенных случайных величин. В связи с применением в различных вероятностных моделях нас интересует выполнение закона больших чисел и центральной предельной теоремы для этих сумм.

**Ключевые слова:** Случайные величины, Сумма в специальной форме, Закон больших чисел, Центральная предельная теорема.

**Tasodifiy miqdorlarning Maxsus ko'rinishdagi yig'indilari va ularning asimptotik xossalari**

**Annotatsiya.** Bu maqolada biz bog'liqsiz bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar yig'indisining ayrim funksiyalarini ko'rib chiqamiz. Turli ehtimoliy modellarda qo'llanilishi munosabati bilan biz katta sonlar qonuni va bu yig'indilar uchun markaziy limit teoremaning bajarilishi bilan qiziqamiz.

**Kalit so'zlar:** Tasodifiy miqdorlar, Maxsus ko'rinishdagi yig'indi, Katta sonlar qonuni, Markaziy limit teorema.

### 1. Introduction

Let  $\mathbb{N}$  be set of natural numbers and  $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$  – a sequence of random variables. The solution of important problems in many areas of probability theory and mathematical statistics leads to the determination of the asymptotic state of the sum

$$S_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$$

as  $n \rightarrow \infty$ . The asymptotic behavior of  $S_n$  has been widely studied in probability theory, in which the law of large numbers, strong law of large numbers and central limit theorems play an important role. Along with this, in many cases it becomes necessary to study the asymptotic behaviors of random variables in the form of the sum  $\sum_{k=1}^n f_{nk}(S_k)$ , where  $f_{nk}$  is some functional. For example, we considering the first-order autoregressive process

$$X_k = \mu X_{k-1} + \varepsilon_k, \quad k \in \mathbb{N}$$

with lag coefficient  $\mu$ , we can rewrite this relation as an sum of a purely random process using reverse substitution as follows:

$$X_n = \sum_{k=1}^n m^{n-k} \varepsilon_k,$$

where  $\varepsilon_k$  are independent random variables; see [2].

Similarly, the Galton-Watson branching process allowing immigrations is determined by the random sum

$$X_0 = 0, \quad X_k = \sum_{j=1}^{X_{k-1}} \xi_{k,j} + \varepsilon_k,$$

where  $\xi_{k,j}$  and  $\varepsilon_k$  are number of “aborigines” and number of immigrants entered the system in the time  $k$ , respectively; see [1]. Then the deviation of the random variable  $X_n$  from its mean will take the form

$$X_n - \mathbf{E}X_n = \sum_{k=1}^n m^{n-k} M_k,$$

where  $m$  is the per mean capita number of “aborigines” and  $M_k$  is martingale difference; see for instance [3]. In this model, it will be necessary to study the asymptotes of the random variables  $\sum_{k=1}^n f_{nk}(S_k)$  where

$$f_{nk}(x) = m^{n-k} x.$$

The Chebyshev inequality (also called the Bienem-Chebyshev inequality), the Bernoulli and Chebyshev theorems, the Moivre-Laplace integral theorem, the Lindeberg condition, and the Lindeberg theorem are important concepts of limit theorems. The study of limit theorems for a sum of random variables is one of the main problems of probability theory and mathematical statistics. In this field, significant results have been achieved by P.L.Chebyshev, A.N.Kolmogorov, B.V.Gnedenko, A.Ya.Khinchin, W.Feller, A.V.Prokhorov, Ya.V.Lindeberg, V.M.Zolotarev and etc.; see [4], [5].

In this report, we define the condition for the applicability of the central limit theorem for sums of a special form, which have not been studied previously. In particular, our aim is to determine the conditions under which the central limit theorem is applicable to sums of a special form. We observe limit theorems for sums of random variables of a special form and describe the main results obtained. The main assumptions in the paper are the presence of second-order moments for the variables under consideration and the fulfillment of the Lindeberg condition. The main results obtained are of theoretical importance and can be applied to determine fluctuations of branching processes that allow immigration, as well as the asymptotic behavior of autoregressive processes.

### 1.1 The law of large numbers and the strong law of large numbers

In probability theory, one often has to work with the sum of a fairly large number of random variables. This sum loses its random character when the number of terms is large enough, and the terms themselves satisfy certain conditions. In probability theory there are a number of statements and theorems called limit theorems. They represent the relationship between random variables in a fairly large number of trials. Limit theorems are conventionally divided into two groups. The first group of theorems is called the laws of large numbers. These theorems state the stability of the mean of random variables. In a sufficiently large number of trials, the mean of random variables loses its randomness. The second group of theorems is called central limit theorems. In these theorems, conditions are given under which, in a sufficiently large number of trials, the distribution of the sum of random variables converges to the normal distribution.

According to papers we give the following Theorems and Definitions about the law of large numbers and the strong law of large numbers; see [6]–[11].

Let  $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$  be a sequence of independent and identically distributed random variables determined on the probability space  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Put

$$S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i \quad \text{and} \quad A_n = \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \xi_i .$$

**Definition 1.** If for any  $\varepsilon > 0$  the relation

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|S_n - A_n| \geq n\varepsilon) = 0$$

holds, then the sequence  $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$  is said to satisfy the **law of large numbers (LLN)**.

**Definition 2.** If

$$\frac{S_n - A_n}{n} \rightarrow 0 \quad \text{with prob. 1}$$

as  $n \rightarrow \infty$ , that is

$$P\left(\omega: \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |S_n(\omega) - A_n| = 0\right) = 1,$$

then the sequence  $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$  is said to satisfy the **strong law of large numbers (SLLN)**.

Thus LLN, often referred as a simple or weak law of large numbers, is associated with convergence in probability, and SLLN is associated with almost sure convergence or convergence with Probability 1.

Now we present well-known classical results related to LLN and SLLN in the following Theorems [1]–[3].

**Theorem 1. (Khinchin theorem).** Let  $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$  be a sequence of independent and identically distributed random variables and  $\mathbb{E}|\xi_1| < \infty$ . Then the sequence  $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$  satisfies LLN.

**Theorem 2. (Markov theorem).** Suppose that the sequence of arbitrary random variables  $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$  satisfies the condition

$$\frac{1}{n^2} \text{Var} S_n \rightarrow 0 \quad \text{as} \quad n \rightarrow \infty .$$

Then  $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$  satisfies LLN.

**Theorem 3.** Let for the sequence of random variables  $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ , the following conditions hold:

$$\sigma_n^2 = \text{Var} \xi_n < \infty \quad \text{and} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n^2}{n^2} < \infty$$

Then  $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$  satisfies SLLN.

## 1.2 Central limit theorem

The solution of the central limit problem allows us to describe the class of limit distribution functions for sums of independent random variables, when the contribution of each term is infinitely less than their sum. Under certain conditions, the sum of independent random variables, each of which is infinitesimal, has a distribution close to the normal distribution (the Gaussian distribution). The value of this result goes far beyond the scope of probability theory. It serves as the basis for using the normal distribution in the solution of many practical problems.

According to papers we give the following Definition and Theorem about the central limit theorem; see [4], [5].

Let  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  be an arbitrary probability space and  $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$  be a sequence of random variables defined on this space. And let  $\mathbb{R}$  is the set of real numbers.

**Definition 3.** *If for any  $x \in \mathbb{R}$*

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{\text{Var}S_n}} \leq x\right) \rightarrow \Phi(x) \quad (1)$$

where

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2/2} du$$

then the sequence of random variables  $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$  is said to satisfy the **central limit theorem (CLT)**.

Under certain conditions, the central limit theorem also holds for a sequence of random variables with different distributions. If for any  $\tau > 0$

$$L_\tau(n) := \frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^n \int_{|x-a_k| > \tau B_n} (x-a_k)^2 dF_k(x) \rightarrow 0 \quad (2)$$

as  $n \rightarrow \infty$ , then the sequence  $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$  is said to satisfy the Lindeberg condition, where

$$a_k = \mathbb{E}\xi_k, \quad B_n^2 = \sum_{k=1}^n \text{Var}\xi_k$$

and  $F_k(x)$  is the distribution function of the random variable  $\xi_k$ .

**Theorem 4. (Lindeberg CLT).** *If for the sequence of random variables  $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$  the Lindeberg condition (2) holds, then*

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n - \sum_{k=1}^n a_k}{B_n} \leq x\right) \rightarrow \Phi(x) \quad \text{as } n \rightarrow \infty$$

for any  $x \in \mathbb{R}$ .

## 2. Sums of random variables in a special form and asymptotes of their variances

Now let  $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$  be a sequence of independent and identically distributed random variables with

$$\mathbb{E}\xi_1 = 0 \quad \text{and} \quad \text{Var}\xi_1 = \sigma^2 > 0.$$

Denote

$$S_0 = 0, \quad S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i, \quad B_n^2 = \text{Var}S_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

It is easy to see, that  $\mathbb{E}S_n = 0$ ,  $B_n^2 = \sigma^2 n$ .

Let  $\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \dots, \xi_n^{(n)}, \dots$  be a sequence of independent and identically distributed random variables with

$$\mathbb{E}\xi_i^{(n)} = 0 \quad \text{and} \quad \text{Var}\xi_i^{(n)} = \sigma_n^2 > 0.$$

Put

$$S_0^{(n)} = 0, \quad S_n^{(n)} = \sum_{i=1}^n \xi_i^{(n)}$$

for all  $n \in \mathbb{N}$ .

Define the following sums of random variables of a special form:

$$X_n = \sum_{k=1}^n m^k S_k, \quad Y_n = \sum_{k=1}^n m^{n-k} S_k$$

for some  $m > 0$  and

$$Z_n = \sum_{k=1}^n m_n^k S_k, \quad T_n = \sum_{k=1}^n m_n^{n-k} S_k,$$

$$J_n^{(n)} = \sum_{k=1}^n m_n^k S_k^{(n)}, \quad K_n^{(n)} = \sum_{k=1}^n m_n^{n-k} S_k^{(n)},$$

where

$$m_n = 1 + \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{as } n \rightarrow \infty$$

for some  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

We calculate the mean and variance of these sums and we study the asymptotic behavior of variances.

At first, we can see

$$\mathbb{E}X_n = \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^n m^k S_k\right) = \sum_{k=1}^n m^k \mathbb{E}S_k = 0 \quad (3)$$

Similar to equality (3), it is easy to see that the mathematical expectations of the sums  $Y_n$ ,  $Z_n$ ,  $T_n$ ,  $J_n^{(n)}$  and  $K_n^{(n)}$  are also equal to 0.

To calculate the variance of random variable  $X_n$  let's rewrite it as follows:

$$X_n = \begin{cases} \sum_{i=1}^n \frac{m^{n+1} - m^i}{m-1} \xi_i, & \text{if } m \neq 1, \\ \sum_{i=1}^n (n-i+1) \xi_i, & \text{if } m = 1. \end{cases} \quad (4)$$

Now taking into account independence of random variables  $\xi_i$  and relation (4), we can calculate the variance of  $X_n$ :

$$\text{Var}X_n = \Sigma(m) \left[ nm^{2n+2} - 2 \frac{m^{n+2}(m^n - 1)}{m-1} + \frac{m^2(m^{2n} - 1)}{m^2 - 1} \right]$$

if  $m \neq 1$ , where

$$\Sigma(m) := \frac{\sigma^2}{(m-1)^2}$$

and

$$\text{Var}X_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \sigma^2$$

if  $m = 1$ .

It is known, for  $0 \leq m < 1$  the following relations hold:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m^n = 0 \quad \text{and} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} nm^n = 0. \quad (5)$$

Therefore, we obtain the following asymptotes for the variance of  $X_n$ :

$$\text{Var}X_n \sim \begin{cases} \Sigma(m) \frac{m^2}{1-m^2}, & \text{if } m < 1, \\ \frac{n^3}{3} \sigma^2, & \text{if } m = 1, \\ \Sigma(m) nm^{2n+2}, & \text{if } m > 1 \end{cases} \quad (6)$$

as  $n \rightarrow \infty$ .

To calculate the variance of  $Y_n$ , we rewrite it as follows:

$$Y_n = \sum_{k=1}^n m^{n-k} S_k = \sum_{i=1}^n \frac{m^{n-i+1} - 1}{m-1} \xi_i. \quad (7)$$

Taking into account independence of random variables  $\xi_i$  and relation (7) we obtain

$$\text{Var}Y_n = \Sigma(m) \left[ \frac{m^2(m^{2n} - 1)}{m^2 - 1} - 2 \frac{m(m^n - 1)}{m-1} + n \right].$$

Due to the relations (5), it follows that

$$\text{Var}Y_n \sim \begin{cases} \Sigma(m)n & , \text{ if } m < 1, \\ \Sigma(m) \frac{m^{2n+2}}{m^2 - 1}, & \text{ if } m < 1 \end{cases} \quad (8)$$

as  $n \rightarrow \infty$ .

Similarly, one can rewrite the random variable  $Z_n$  as follows:

$$Y_n = \sum_{i=1}^n \frac{m_n^{n+1} - m_n^i}{m_n - 1} \xi_i. \quad (9)$$

Taking into account independence of random variables  $\xi_i$  and relation (9), we obtain

$$\text{Var}Z_n = \Sigma(m_n) \left[ nm_n^{2n+2} - 2 \frac{m_n^{n+2}(m_n^n - 1)}{m_n - 1} + \frac{m_n^2(m_n^{2n} - 1)}{m_n^2 - 1} \right],$$

where

$$\Sigma(m_n) := \frac{\sigma^2}{(m_n - 1)^2}.$$

Since

$$m_n = 1 + \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \text{ as } n \rightarrow \infty,$$

it is easy to see that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_n^n = e^\alpha. \quad (10)$$

Therefore,

$$\text{Var}Z_n \sim \frac{n^3 \sigma^2}{2\alpha^3} \cdot [e^{2\alpha}(2\alpha - 3) + 4e^\alpha - 1] \quad (11)$$

as  $n \rightarrow \infty$ .

Further, rewrite  $T_n$  as follows:

$$T_n = \sum_{i=1}^n \frac{m_n^{n-i+1} - 1}{m_n - 1} \xi_i \quad (12)$$

Relation (12) gives

$$\text{Var}T_n = \Sigma(m_n) \left[ \frac{m_n^2(m_n^{2n} - 1)}{m_n^2 - 1} - 2 \frac{m_n(m_n^n - 1)}{m_n - 1} + n \right].$$

Using (10) we obtain asymptotic relation for the variance of  $T_n$ :

$$\text{Var}T_n \sim \frac{n^3 \sigma^2}{2\alpha^3} \cdot (e^{2\alpha} - 4e^\alpha + 2\alpha + 3) \quad (13)$$

as  $n \rightarrow \infty$ .

Now we can see

$$J_n^{(n)} = \sum_{k=1}^n m_n^k S_k^{(n)} = \sum_{i=1}^n \frac{m_n^{n+1} - m_n^i}{m_n - 1} \xi_i^{(n)}$$

and taking into account independence of random variables  $\xi_i^{(n)}$  we obtain

$$\text{Var}J_n^{(n)} = \Sigma_n(m_n) \left[ nm_n^{2n+2} - 2 \frac{m_n^{n+2}(m_n - 1)}{m_n - 1} + \frac{m_n^2(m_n^{2n} - 1)}{m_n^2 - 1} \right]$$

where

$$\Sigma_n(m_n) = \frac{\sigma_n^2}{(m_n - 1)^2}.$$

Due to the relation (2.8), the following asymptotic relation follows:

$$\text{Var}J_n^{(n)} \sim \frac{n^3 \sigma_n^2}{2\alpha^3} \cdot [e^{2\alpha}(2\alpha - 3) + 4e^\alpha - 1] \tag{14}$$

as  $n \rightarrow \infty$ .

Finally, we rewrite the random variable  $K_n^{(n)}$  as follows:

$$K_n^{(n)} = \sum_{i=1}^n \frac{m_n^{n-i+1} - 1}{m_n - 1} \xi_i^{(n)}$$

and calculate the variance of  $K_n^{(n)}$ :

$$\text{Var}K_n^{(n)} = \Sigma_n(m_n) \left[ \frac{m_n^2(m_n^{2n} - 1)}{m_n^2 - 1} - 2m_n \frac{m_n^n - 1}{m_n - 1} + n \right].$$

Formula (10) yields the following asymptote:

$$\text{Var}K_n^{(n)} \sim \frac{n^3 \sigma_n^2}{2\alpha^3} \cdot (e^{2\alpha} - 4e^\alpha + 2\alpha + 3) \tag{15}$$

as  $n \rightarrow \infty$ .

Let's now check if the above defined special form sums satisfy LLN.

For the random variable  $X_n$ , it follows from (6) that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \cdot \text{Var}X_n = \begin{cases} 0, & \text{if } m < 1, \\ \infty, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{16}$$

Relation (16) implies that the sum  $X_n$  satisfies LLN if  $m < 1$ . Relation (8) implies that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \cdot \text{Var}Y_n = \begin{cases} 0, & \text{if } m < 1, \\ \infty, & \text{if } m > 1. \end{cases}$$

So that the sum  $Y_n$  satisfies LLN if  $m < 1$ . From relations (11), (13)–(15) follows that

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \cdot \text{Var}Z_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \cdot \text{Var}T_n = \infty, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \cdot \text{Var}J_n^{(n)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \cdot \text{Var}K_n^{(n)} = \infty. \end{aligned}$$

Thus, these variables do not satisfy LLN.

### 3. Central limit theorem analogues

The theorems below reveal the asymptotic properties of the sums

$$X_n, Y_n, Z_n, T_n, J_n^{(n)} \text{ and } K_n^{(n)} \text{ as } n \rightarrow \infty.$$

**Theorem 5.** *The following assertions hold:*

- (i) for  $m < 1$  the sequence of random variables  $X_n$  will converge with probability one;
- (ii) for  $m > 1$

$$\mathbb{P}\left(\frac{(m-1) \cdot X_n}{\sigma m^{n+1} \sqrt{n}} \leq x\right) \rightarrow \Phi(x) \quad \text{as } n \rightarrow \infty;$$

(iii) for  $m=1$

$$\mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{3} \cdot X_n}{\sigma n \sqrt{n}} \leq x\right) \rightarrow \Phi(x) \quad \text{as } n \rightarrow \infty.$$

The following result follows from Theorem 5.

**Corollary 1.** The following assertions hold:

(i) for  $m < 1$

$$\mathbb{P}\left(\frac{(m-1) \cdot Y_n}{\sigma \sqrt{n}} \leq x\right) \rightarrow \Phi(x) \quad \text{as } n \rightarrow \infty;$$

(ii) for  $m > 1$

$$\mathbb{P}\left(\frac{(m-1) \cdot Y_n}{\sigma m^{n+1} \sqrt{m^2 - 1}} \leq x\right) \rightarrow \Phi(x) \quad \text{as } n \rightarrow \infty.$$

**Remark.** We omit the case  $m=1$ , since  $Y_n = X_n$  in this case, Part (3) of Theorem 5 holds identically.

**Theorem 6.** The following assertions hold:

$$\mathbb{P}\left(\frac{\alpha \sqrt{2\alpha} \cdot Z_n}{\sigma n \sqrt{n}} \leq x\right) \rightarrow \Phi(x) \quad \text{as } n \rightarrow \infty;$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{\alpha \sqrt{2\alpha} \cdot T_n}{\sigma n \sqrt{n}} \leq x\right) \rightarrow \Phi(x) \quad \text{as } n \rightarrow \infty.$$

The following result follows from the Theorem 6.

**Corollary 2.** The following assertions hold:

$$\mathbb{P}\left(\frac{\alpha \sqrt{2\alpha} \cdot J_n^{(n)}}{\sigma_n n \sqrt{n}} \leq x\right) \rightarrow \Phi(x) \quad \text{as } n \rightarrow \infty;$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{\alpha \sqrt{2\alpha} \cdot K_n^{(n)}}{\sigma_n n \sqrt{n}} \leq x\right) \rightarrow \Phi(x) \quad \text{as } n \rightarrow \infty.$$

#### 4. Proof of Theorems

**Proof of Theorem 5.** For the case  $m < 1$  we recall

$$X_n = \sum_{i=1}^n x_i, \quad (17)$$

where

$$x_i := \frac{m^{n+1} - m^i}{m-1} \xi_i.$$

Since  $\xi_i$  are independent and identically distributed variables,  $x_i$  have the same properties. It follows from (6) that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \text{Var} x_i < \infty.$$

Then according to Kolmogorov and Khinchin's theorems, the sequence  $\{X_n\}$  converges with probability one.

The Part (i) is proved.

Now for  $m > 1$  we define

$$F_i(x) := \mathbb{P}(x_i < x).$$

Then

$$F_i(x) = F\left(\frac{m-1}{m^{n+1}-m^i}x\right), \tag{18}$$

where

$$F(x) = \mathbb{P}(\xi_1 < x).$$

We check the random variable  $X_n$  for the fulfillment of condition (2). Write the Lindeberg function for the sum  $X_n = \sum_{i=1}^n x_i$ . We have  $\mathbb{E}x_i = 0$  since  $\mathbb{E}\xi_i = 0$ . Then

$$L_\varepsilon(n) = \frac{1}{B_n^2} \sum_{i=1}^n \int_{|x|>\varepsilon B_n} x^2 dF_i(x)$$

for any  $\varepsilon > 0$ , where

$$B_n^2 := \text{Var}X_n = \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}} x^2 dF_i(x).$$

According to relation (18), the Lindeberg function can be written in the following form:

$$L_\varepsilon(n) = \frac{1}{B_n^2} \sum_{i=1}^n \int_{|x|>\varepsilon B_n} x^2 dF\left(\frac{m-1}{m^{n+1}-m^i}x\right) = \frac{1}{B_n^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{m^{n+1}-m^i}{m-1}\right)^2 \int_{I_n(i)} y^2 dF(y)$$

where

$$I_n(i) := \left\{ |y| > \frac{m-1}{m^{n+1}-m^i} \varepsilon B_n \right\}.$$

Now let's estimate the last integral. So we see

$$\int_{I_n(i)} y^2 dF(y) \leq \int_{I_n(1)} y^2 dF(y).$$

Due to the relation (6) for  $m > 1$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m-1}{m(m^n-1)} \varepsilon B_n = \infty.$$

Hence, it follows that

$$\int_{I_n(1)} y^2 dF(y) \rightarrow 0 \quad \text{as } n \rightarrow \infty \tag{19}$$

since

$$\sigma^2 = \int_{\mathbb{R}} y^2 dF(y) < \infty.$$

It follows from (17) that

$$\frac{1}{B_n^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{m^{n+1}-m^i}{m-1}\right)^2 = \frac{1}{\sigma^2}.$$

Due to this, and with considering (19), we see that the Lindeberg condition (2) is fulfilled.

Therefore, the Part (ii) is proved according to CLT for independent random variables.

Now for the case  $m = 1$  we recall

$$X_n = \sum_{i=1}^n (n-i+1)\xi_i.$$

Defining  $z_i := (n-i+1)\xi_i$ , we have

$$F_i(x) := \mathbb{P}(z_i < x) = F\left(\frac{x}{n-i+1}\right),$$

where  $F(x) := \mathbb{P}(\xi_i < x)$  Then the Lindeberg function is

$$L_\varepsilon(n) = \frac{1}{B_n^2} \sum_{i=1}^n (n-i+1)^2 \int_{I_n(i)} t^2 dF(t)$$

where

$$B_n^2 = \text{Var}X_n \quad \text{and} \quad I_n(i) := \left\{ |t| > \frac{\varepsilon B_n}{n-i+1} \right\}$$

for any  $\varepsilon > 0$ .

We easily make sure that

$$\int_{I_n(i)} t^2 dF(y) \leq \int_{I_n(1)} t^2 dF(y).$$

Due to the relation (6) for  $m=1$ , it follows that

$$\frac{\varepsilon B_n}{n} \rightarrow \infty \quad \text{as} \quad n \rightarrow \infty. \quad (20)$$

Therefore, it follows that

$$\int_{I_n(1)} y^2 dF(y) \rightarrow 0 \quad \text{as} \quad n \rightarrow \infty \quad (21)$$

since

$$\sigma^2 = \int_{\mathbb{R}} y^2 dF(y) < \infty.$$

It is convincing that

$$\frac{1}{B_n^2} \sum_{i=1}^n (n-i+1)^2 = \frac{1}{\sigma^2}.$$

Then the fulfillment of the Lindeberg condition follows from relations (20) and (21).

So the Part (iii) is proved according to CLT for independent random variables.

The Theorem 5 is proved completely.

**Proof of Theorem 6.** In accordance with formula (9), we need a distribution function of the random variable

$$\eta_i := \frac{m_n^{n+1} - m_n^i}{m_n - 1} \xi_i,$$

which is

$$\mathbb{P}(\eta_i < x) = F\left(\frac{m_n - 1}{m_n^{n+1} - m_n^i} x\right).$$

Then we can write the Lindeberg function as follows:

$$L_\varepsilon(n) = \frac{1}{\text{Var}Z_n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{m_n^{n+1} - m_n^i}{m_n - 1}\right)^2 \int_{J_n(i)} y^2 dF(y).$$

where

$$J_n(i) := \left\{ |y| > \frac{m_n - 1}{m_n^{n+1} - m_n^i} \varepsilon \text{Var}Z_n \right\}$$

for any  $\varepsilon > 0$ .

As before

$$\int_{J_n(i)} y^2 dF(y) \leq \int_{J_n(1)} y^2 dF(y).$$

Decidedly  $Z_n \geq Z_1 = m_n S_1 > \xi_1$  and thus  $\text{Var}Z_n > \sigma^2$ . Hence we obtain

$$L_\varepsilon(n) \leq \frac{1}{\sigma^2} \cdot \int_{J_n(1)} y^2 dF(y).$$

On the other hand it follows from (10) and (11) that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m_n - 1}{m_n^{n+1} - m_n} \varepsilon \text{Var}Z_n = \infty. \quad (22)$$

Therefore

$$\int_{J_n(1)} y^2 dF(y) \rightarrow 0 \quad \text{as} \quad n \rightarrow \infty \quad (23)$$

since

$$\sigma^2 = \int_{\mathbb{R}} y^2 dF(y) < \infty.$$

Now the fulfillment of the Lindeberg condition follows from relations (22) and (23).

$$\frac{1}{\text{Var}Z_n} \sum_{i=1}^n \left( \frac{m_n^{n+1} - m_n^i}{m_n - 1} \right)^2 = \frac{1}{\sigma^2}.$$

The Part (i) is proved according to CLT for independent random variables.

The part of the theorem on  $T_n$  is proved in a same way.

### References

1. Imomov A.A. On long-time behaviors of states of Galton-Watson branching processes allowing immigration. Jour. of Siberian Fed. Univ.: Math. and Physics, 2015, vol.8(4), 394–405.
2. Ispany M., Pap G., M.C.A. Van Zuijlen. Asymptotic Inference for Nearly Unstable INAR(1) Models. Jour. Appl. Prob. 2003, vol. 40(3), 750–765.
3. Ispany M., Pap G., M.C.A. Van Zuijlen. Fluctuation limit of branching processes with immigration and estimation of the means. Adv. Appl. Prob. 2005, vol. 37, 523–538.
4. Borovkov A.A. Teoriya veroyatnostey. URSS, Moscow, 2009 (in Russian).
5. Feller W. An Introduction to Probability Theory and its Applications, vol.1. John Wiley & Sons, 1968.
6. Petrov V.V. One-sided law of large numbers for ruled sums. Vestnik Leningrad. Univ., 1974, 55–59.
7. Heyde C.C. A pair of complementary theorems on convergence rates in the law of large numbers. Proc. Camb. Phil. Soc. 1967, vol. 63(1), 73–82.
8. Hsu P.L., Robbins H. Complete convergence and the law of large numbers. Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1947, vol. 33(2), 25–31.
9. Bennett G. Probability inequalities for the sum of independent random variables. Journ. Amer Statist. Assoc. 1962, vol. 57, 33–45.
10. Hatori H., Maejima M., Mori T. Convergence rates in the law of large numbers when extreme terms are excluded. Z.Wahrscheinlichkeitstheorie verw., Gebiete. 1979, vol. 47, 1–12.

UDK 517.518.5

## BA'ZI HARDI TIPIDAGI OPERATORLAR NORMASINING BAHOLARI

K.Kuliyev<sup>1</sup>, G.Kuliyeva<sup>2</sup>, M.Eshimova<sup>3</sup><sup>1</sup>Samarqand davlat universiteti; UzFA matematika instituti,<sup>2</sup>Toshkent axborot texnologiyalari universiteti Samarqand filiali,<sup>3</sup>Samarqand davlat arxitektura-qurilish institutiE-mail: [komilkuliev@gmail.com](mailto:komilkuliev@gmail.com), [kulievag@mail.ru](mailto:kulievag@mail.ru), [eshimova\\_math@mail.ru](mailto:eshimova_math@mail.ru)

**Annotatsiya.** Ushbu ishda vaznli Lebeg fazolarida berilgan Hardi tipidagi operatorlar normasining yuqori bahosi olingan.

**Kalit soʻzlar:** Hardi tipidagi operatorlar, vaznli Lebeg fazolari, operator normasi, Oynarov yadrosi.

## Оценки нормы некоторых операторов типа Харди

**Аннотация.** В этой работе получена оценка сверху нормы операторов типа Харди, действующих в некоторых весовых пространствах Лебега.

**Ключевая слова:** Операторы типа Харди, весовые пространства Лебега, норма оператора, ядро Ойнарова.

## Estimates for the norm of some Hardy type operators

**Abstract.** In this work is obtained an upper estimate for the norm of the Hardy type operators acting in some weighted Lebesgue spaces.

**Keywords:** Hardy type operators, weighted Lebesgue spaces, norm of operator, Oinarov's kernel.

Faraz qilaylik  $(a, b) \subset \mathbb{R}$  va  $u(t), v(t)$  lar  $(a, b)$  da aniqlangan nomanfiy oʻlchovli funksiyalar boʻlsin. Berilgan  $p, q \geq 1$  sonlar uchun quyidagi vaznli Lebeg fazolarini kiritamiz:

$$L_p(a, b; v) = \left\{ f: \|f\|_{p,v}^p = \int_a^b |f(t)|^p v(t) dt < \infty \right\}$$

va

$$L_q(a, b; u) = \left\{ f: \|f\|_{q,u}^q = \int_a^b |f(t)|^q u(t) dt < \infty \right\}.$$

Hardi tipidagi operator deb, ushbu koʻrinishda aniqlangan

$$H: L_p(a, b; v) \rightarrow L_q(a, b; u), \quad (Hf)(x) := \int_a^x k(x, t) f(t) dt \quad (1)$$

operatorga aytiladi. Bu yerda  $k(x, t)$   $(a, b) \times (a, b)$  da aniqlangan oʻlchovli funksiyaga shu operatorning yadrosi deyiladi.

Ushbu ishda  $k(x, t)$  funksiyadan quyidagi shartlarni qanoatlantirishi talab etiladi:

1.  $k(x, t) \geq 0$  barcha  $(x, t) \in (a, b) \times (a, b)$  uchun;
2.  $k(x, t)$  funksiya  $x$  boʻyicha oʻsuvchi va  $t$  boʻyicha kamayuvchi;
3. Shunday  $C_1, C_2 > 0$  sonlar mavjudki, quyidagi tengsizliklar barcha

$a < t < z < x < b$  lar uchun oʻrinli:

$$C_1(k(x, z) + k(z, t)) \leq k(x, t) \leq C_2(k(x, z) + k(z, t)).$$

Bu turdagi yadrolarga Hardi tengsizliklari nazariyasida Oynarov yadrolari deyiladi. Masalan, quyidagi yadrolar Oynarov yadrolariga misol boʻla oladi:

a)  $\varphi = \varphi(x)$  – nomanfiy monoton oʻsuvchi funksiya  $\varphi(a + b) \leq \varphi(a) + \varphi(b)$ ,  $0 < a, b < \infty$  shartni qanoatlantirsin. Agar yadroni

$$k(x, t) = \varphi(x - t)$$

ko`rinishida aniqlasak, u holda  $k(x, t)$  – Oynarov yadrosi bo`ladi.

b) Agar  $\Phi = \Phi(x)$  nomanfiy funksiya  $\Phi(ab) \leq \Phi(a) + \Phi(b)$ ,  $0 < a, b < \infty$  shartni qanoatlantirsa, u holda

$$k(x, t) = \Phi\left(\frac{t}{x}\right)$$

ko`rinishda aniqlangan yadro ham Oynarov yadrosidir.

c) Bundan tashqari ushbu funksiyalar ham Oynarov yadrolariga misol bo`la oladi:

$$k(x, t) = (x - t)^\alpha, \quad \alpha \geq 0, \quad x > t > 0,$$

$$k(x, t) = \log^\beta \frac{x}{t}, \quad \beta \geq 0, \quad x > t > 0,$$

nomanfiy  $\varphi$  funksiya uchun  $k(x, t) = \int_t^x \varphi(\tau) d\tau$ ,  $x > t > 0$ .

R.Oynarov (1) ko`rinishda berilgan operatorlarning chegaralanganlik va kompaktilik shartlarini o`tgan asrning 90-yillarida olgan, [1] ga qarang. Operatorning chegaralanganlik masalasi boshqa turdagi yadrolar uchun ham keng o`rganilgan, masalan S.Bloom va R.Kerman [4], F.J.Martin-Reyes va E.Sawyer [5], V.D.Stepanov [6]. 2021 yil A.Kalybay va O.Baiarystanov tomonidan [7] da  $1 < p \leq q < \infty$  holda (1) operatorning normasi uchun  $k(x, t)$  Oynarov yadrosi bo`lganida baholar olingan. Shunday bo`lsada, (1) operatorning normasi uchun  $1 < q < p < \infty$  holda aniq baholar shu vaqtgacha olinmagan edi.

Ishning asosiy natijasi quyidagi teoremdir:

**Teorema.** Faraz qilaylik  $k(x, t)$  - Oynarov yadrosi va  $1 < q < p < \infty$  bo`lsin. U holda (1) Hardi tipidagi operatorning normasi uchun quyidagi baho o`rinlidir

$$\|H\|_{L_{p,v} \rightarrow L_{q,u}} \leq (2C_2)^{\frac{1}{q'}} \frac{1}{q} B \left[ (p')^{\frac{q}{p'q'}} \cdot q + (p')^{\frac{q}{p'}} (q')^{\frac{q}{p}} \right]^{\frac{1}{q}} \|f\|_{p,v},$$

bu yerda  $p' = \frac{p}{p-1}$ ,  $q' = \frac{q}{q-1}$  va  $B = \max\{B_0, B_1\}$ ,

$$B_0 = \left( \int_a^b \left( \int_x^b k^q(t, x) u(t) dt \right)^{\frac{r}{q}} \left( \int_a^x v^{1-p'}(t) dt \right)^{\frac{r}{q'}} v^{1-p'}(x) dx \right)^{\frac{1}{r}}$$

va

$$B_1 = \left( \int_a^b \left( \int_x^b u(t) dt \right)^{\frac{r}{p}} \left( \int_a^x k^{p'}(x, t) v^{1-p'}(t) dt \right)^{\frac{r}{p'}} u(x) dx \right)^{\frac{1}{r}}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$$

**Isbot.** Isbotning dastlabki qismida Fubini teoremasi, Oynarov yadrosining 3-shartidan va ushbu tengsizlikdan

$$(a + b)^{q-1} \leq 2^{q-1}(a^{q-1} + b^{q-1})$$

ketma-ket foydalanamiz:

$$I = \int_a^b \left( \int_a^x k(x, t) f(t) dt \right)^q u(x) dx =$$

$$= q \int_a^b \left[ \int_a^x k(x, t) f(t) \left( \int_a^t k(x, s) f(s) ds \right)^{q-1} dt \right] u(x) dx =$$

$$= q \int_a^b f(t) \left[ \int_t^b k(x, t) u(x) \left( \int_a^t k(x, s) f(s) ds \right)^{q-1} dx \right] dt \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq qC_2^{q-1} \int_a^b f(t) \left[ \int_t^b k(x,t)u(x) \left( k(x,t) \int_a^t f(s)ds + \int_a^t k(t,s)f(s)ds \right)^{q-1} dx \right] dt \leq \\
&\leq 2^{q-1}qC_2^{q-1} \left[ \int_a^b f(t) \left( \int_t^b k^q(x,t)u(x)dx \right) \left( \int_a^t f(s)ds \right)^{q-1} dt + \right. \\
&\quad \left. + \int_a^b f(t) \left( \int_a^t k(t,s)f(s)ds \right)^{q-1} \left( \int_t^b k(x,t)u(x)dx \right) dt \right] = \\
&= 2^{q-1}qC_2^{q-1} [I_1 + I_2].
\end{aligned}$$

Endi,  $I_1$  va  $I_2$  ifodalarni alohida-alohida baholaymiz. Dastlab, bo`laklab integrallash formulasiidan foydalanib  $I_1$  ning ko`rinishini o`zgartirib olamiz:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_a^b f(t) \left( \int_t^b k^q(x,t)u(x)dx \right) \left( \int_a^t f(s)ds \right)^{q-1} dt = \\
&= \frac{1}{q} \int_a^b \left( \int_t^b k^q(t,x)u(x)dx \right) d \left( \int_a^t f(s)ds \right)^q = \\
&= \frac{1}{q} \int_a^b \left( \int_a^t f(s)ds \right)^q d \left( - \int_t^b k^q(x,t)u(x)dx \right) = \\
&= \frac{1}{q} \int_a^b \left( \int_a^t f(s)ds \right)^q \frac{d}{dt} \left( - \int_t^b k^q(x,t)u(x)dx \right) dt,
\end{aligned}$$

so`ng ifodani baholashda Hardi tengsizligidan [5-teorema, 3] foydalanamiz:

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \left( \int_a^t f(s)ds \right)^q \frac{d}{dt} \left( - \int_t^b k^q(s,t)u(s)ds \right) dt \\
&\leq C_{p,q}^q \left( \int_a^b f^p(t)v(t)dt \right)^{\frac{q}{p}} = C_{p,q}^q \|f\|_{p,v}^q.
\end{aligned}$$

Yuqoridagi tengsizlikdan foydalanish mumkinligini quyidagi shart bajarilishidan bilish mumkin:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \left( \int_a^b \left( \int_x^b \frac{d}{dt} \left( - \int_t^b k^q(s,t)u(s)ds \right) dt \right)^{\frac{r}{q}} \left( \int_a^x v^{1-p'}(t)dt \right)^{\frac{r}{q'}} v^{1-p'}(x)dx \right)^{\frac{1}{r}} = \\
&= \left( \int_a^b \left( \int_x^b k^q(t,x)u(t)dt \right)^{\frac{r}{q}} \left( \int_a^x v^{1-p'}(t)dt \right)^{\frac{r}{q'}} v^{1-p'}(x)dx \right)^{\frac{1}{r}} = B_0 < \infty.
\end{aligned}$$

Demak,

$$I_1 \leq \frac{1}{q} C_{p,q}^q \|f\|_{p,v}^q,$$

bunda  $C_{p,q}$  – yuqoridagi Hardi tengsizligining eng yaxshi konstantasi bo`lib, u uchun quyidagi baho o`rinlidir [3]:

$$C_{p,q} \leq (p')^{\frac{1}{pq'}} \cdot q^{\frac{1}{q}} \cdot B_0. \quad (2)$$

Endi  $I_2$  integralni baholaymiz. Dastlab, Gyolder tengsizligidan foydalanamiz

$$I_2 = \int_a^b f(t) \left( \int_a^t k(t,s) f(s) ds \right)^{q-1} \left( \int_t^b k(x,t) u(x) dx \right) dt \leq \left( \int_a^b f^p(t) v(t) dt \right)^{\frac{1}{p}} \times \\ \times \left( \int_a^b v^{1-p'}(t) \left( \int_a^t k(t,s) f(s) ds \right)^{(q-1)p'} \left( \int_t^b k(x,t) u(x) dx \right)^{p'} dt \right)^{\frac{1}{p'}} = \|f\|_{p,v} \cdot J_1^{\frac{1}{p'}}.$$

Demak,  $I_2$  ifodani baholash  $J_1$  ni baholashga keltirildi.  $J_1$  ifodada bo'laklab integrallash formulasidan foydalanamiz:

$$J_1 = \int_a^b v^{1-p'}(t) \left( \int_a^t k(t,s) f(s) ds \right)^{(q-1)p'} \left( \int_t^b k(x,t) u(x) dx \right)^{p'} dt = \\ = \int_a^b \left( \int_a^t k(t,s) f(s) ds \right)^{(q-1)p'} d \left( - \int_t^b \left( \int_s^b k(x,s) u(x) dx \right)^{p'} v^{1-p'}(s) ds \right) = \\ = \int_a^b \left( \int_t^b \left( \int_s^b k(x,s) u(x) dx \right)^{p'} v^{1-p'}(s) ds \right) d \left( \int_a^t k(t,s) f(s) ds \right)^{(q-1)p'} \leq$$

ichki integralda Minkovskiy integral tengsizligini qo'llab quyidagini olamiz

$$\leq \int_a^b \left( \int_t^b u(x) \left( \int_a^x k^{p'}(x,s) v^{1-p'}(s) ds \right)^{\frac{1}{p'}} dx \right)^{p'} d \left( \int_a^t k(t,s) f(s) ds \right)^{(q-1)p'}.$$

Oxirgi tengsizlikning ichki integralini quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$\int_a^b \left( \int_t^b \left[ \left( \int_x^b u(s) ds \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_a^x k^{p'}(x,s) v^{1-p'}(s) ds \right)^{\frac{1}{p'}} u^{1-\frac{q}{p}}(x) \right] \times \right. \\ \left. \times \left[ \left( \int_x^b u(s) ds \right)^{\frac{1}{p}} u^{\frac{q}{p}}(x) \right] dx \right)^{p'} d \left( \int_a^t k(t,s) f(s) ds \right)^{(q-1)p'} \leq$$

Endi  $\frac{p}{p-q}$  va  $\frac{p}{q}$  darajali Gyolder tengsizligidan foydalanib ifodani quyidagicha baholaymiz:

$$\leq \int_a^b \left[ \int_t^b \left( \int_x^b u(s) ds \right)^{\frac{1}{p-q}} \left( \int_a^x k^{p'}(x,s) v^{1-p'}(s) ds \right)^{\frac{p}{p'(p-q)}} u(x) dx \right]^{\frac{p'(p-q)}{p}} \times \\ \times \left[ \int_t^b \left( \int_x^b u(s) ds \right)^{\frac{1}{q}} u(x) dx \right]^{\frac{qp'}{p}} d \left( \int_a^t k(t,s) f(s) ds \right)^{(q-1)p'} =$$

$$\begin{aligned}
&= (q')^{\frac{qp'}{p}} (q-1)p' \times \\
&\times \int_a^b \left( \int_t^b \left( \int_x^b u(t) dt \right)^{\frac{1}{p-q}} \left( \int_a^x k^{p'}(x,s)v^{1-p'}(s) ds \right)^{\frac{p}{p'(p-q)}} u(x) dx \right)^{\frac{p'(p-q)}{p}} \times \\
&\quad \times \left( \int_t^b u(s) ds \right)^{\frac{p'}{q'p}} \left( \int_a^t k(t,s)f(s) ds \right)^{(q-1)p'-1} d \left( \int_a^t k(t,s)f(s) ds \right) = \\
&= p'(q-1)(q')^{\frac{qp'}{p}} \times \\
&= \int_a^b \left[ \left( \int_t^b \left( \int_x^b u(s) ds \right)^{\frac{1}{p-q}} \left( \int_a^x k^{p'}(x,s)v^{1-p'}(s) ds \right)^{\frac{p}{p'(p-q)}} u(x) dx \right)^{\frac{p'(p-q)}{p}} \times \right. \\
&\quad \left. \times \left( \int_a^t k(t,s)f(s) ds \right)^{p'(q-1)\left(\frac{1}{p} + \frac{p-q}{p}\right) - 1} \right] \times \\
&\quad \times \left[ \left( \int_t^b u(s) ds \right)^{\frac{p'}{q'p}} \left( \int_a^t k(t,s)f(s) ds \right)^{(q-1)\left(1 - \frac{p'(p-q)}{p}\right)} \right] d \left( \int_a^t k(t,s)f(s) ds \right).
\end{aligned}$$

Bu yerda  $\frac{p}{p'(p-q)}$  va  $\frac{p}{p-p'(p-q)}$  darajalar bilan Gyolder tengsizligini qo'llaymiz va quyidagini hosil qilamiz:

$$\begin{aligned}
&\leq p'(q-1)(q')^{\frac{qp'}{p}} \times \\
&\times \left[ \int_a^b \left( \int_t^b \left( \int_x^b u(s) ds \right)^{\frac{1}{p-q}} \left( \int_a^x k^{p'}(x,s)v^{1-p'}(s) ds \right)^{\frac{p}{p'(p-q)}} u(x) dx \right) \times \right. \\
&\quad \left. \times \left( \int_a^t k(t,s)f(s) ds \right)^{q-2} d \left( \int_a^t k(t,s)f(s) ds \right) \right]^{\frac{p'(p-q)}{p}} \times \\
&\quad \times \left[ \int_a^b \left( \int_t^b u(s) ds \right) \left( \int_a^t k(t,s)f(s) ds \right)^{q-1} d \left( \int_a^t k(t,s)f(s) ds \right) \right]^{1 - \frac{p'(p-q)}{p}} =
\end{aligned}$$

Oxirgi ifodada Fubini teoremasidan foydalanib tenglikni davom ettiramiz:

$$= q^{\frac{p'(p-q)}{p} - 1} p'(q-1)(q')^{\frac{qp'}{p}} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \left[ \int_a^b \left( \int_t^b \left( \int_x^b u(s) ds \right)^{\frac{1}{p-q}} \left( \int_a^x k^{p'}(x,s) v^{1-p'}(s) ds \right)^{\frac{p}{p'(p-q)}} u(x) dx \right) \times \right. \\ & \quad \times \left( \int_a^t k(t,s) f(s) ds \right)^{q-2} \left. d \left( \int_a^t k(t,s) f(s) ds \right) \right]^{\frac{p'(p-q)}{p}} \times \\ & \quad \times \left( \int_a^b u(t) \left( \int_a^t k(t,s) f(s) ds \right)^q dt \right)^{1-\frac{p'(p-q)}{p}} = \\ & = q^{\frac{p'(p-q)}{p}-1} (q-1) p'(q')^{\frac{qp'}{p}} I^{1-\frac{p'(p-q)}{p}} \times \\ & \times \left( \int_a^b \left( \int_t^b \left( \int_x^b u(s) ds \right)^{\frac{1}{p-q}} \left( \int_a^x k^{p'}(x,s) v^{1-p'}(s) ds \right)^{\frac{p}{p'(p-q)}} u(x) dx \right) d \left( \frac{\int_a^t k(t,s) f(s) ds}{q-1} \right)^{q-1} \right)^{\frac{p'(p-q)}{p}} \end{aligned}$$

Bo`laklab integrallash formulasidan ushbu tenglikka erishamiz:

$$\begin{aligned} & = q^{\frac{p'(p-q)}{p}-1} (q-1) p'(q')^{\frac{qp'}{p}} q^{-\frac{p'(p-q)}{p}} (q')^{-\frac{p'(p-q)}{p}} I^{1-\frac{p'(p-q)}{p}} \times \\ & \times \left[ \int_a^b \left( \int_a^t k(t,s) f(s) ds \right)^{q-1} \left( \int_t^b u(s) ds \right)^{\frac{1}{p-q}} \left( \int_a^t k^{p'}(t,s) v^{1-p'}(s) ds \right)^{\frac{p}{p'(p-q)}} u(t) dt \right]^{\frac{p'(p-q)}{p}} \\ & = p'(q')^{p'-1} I^{1-\frac{p'(p-q)}{p}} \times \\ & \times \left( \int_a^b \left[ \left( \int_t^b u(s) ds \right)^{\frac{1}{p-q}} \left( \int_a^t k^{p'}(t,s) v^{1-p'}(s) ds \right)^{\frac{p}{p'(p-q)}} u^{\frac{1}{q}}(t) \right] \times \right. \\ & \quad \left. \times \left[ \left( \int_a^t k(t,s) f(s) ds \right)^{q-1} u^{\frac{1}{q'}}(t) \right] dt \right)^{\frac{p'(p-q)}{p}}. \end{aligned}$$

Bu yerda  $q$  va  $q'$  darajalar bilan Gyolder tengsizligini qo`llaymiz:

$$\begin{aligned} & p'(q')^{p'-1} I^{1-\frac{p'(p-q)}{p}} \left( \left[ \int_a^b \left( \int_t^b u(s) ds \right)^{\frac{r}{p}} \left( \int_a^t k^{p'}(t,s) v^{1-p'}(s) ds \right)^{\frac{r}{p'}} u(t) dt \right]^{\frac{1}{q}} \times \right. \\ & \quad \left. \times \left[ \int_a^b \left( \int_a^t k(t,s) f(s) ds \right)^q u(t) dt \right]^{\frac{1}{q'}} \right)^{\frac{p'(p-q)}{p}} = p'(q')^{p'-1} I^{1-\frac{p'(p-q)}{p}} B_1^{p'} I^{\frac{p'(p-q)}{q'p}}. \end{aligned}$$

Demak,

$$I_2 \leq \left(\frac{p'}{q'}\right)^{\frac{1}{p'}} q' \|f\|_{p,v} B_1 \left(I^{\frac{1}{q'}}\right)^{\frac{1}{p'}} = \\ = (p')^{\frac{1}{p'}} (q')^{\frac{1}{p}} \|f\|_{p,v} B_1 I^{\frac{1}{q'}}.$$

$I$  integral uchun quyidagiga ega bo'lamiz:

$$I \leq 2^{q-1} q C_2^{q-1} [I_1 + I_2] \leq \\ \leq (2C_2)^{q-1} q \left[ \frac{1}{q} C_{p,q}^q \|f\|_{p,v}^q + (p')^{\frac{1}{p'}} (q')^{\frac{1}{p}} \|f\|_{p,v} B_1 I^{\frac{1}{q'}} \right] = \\ = (2C_2)^{q-1} C_{p,q}^q \|f\|_{p,v}^q + 2^{q-1} q C_2^{q-1} (p')^{\frac{1}{p'}} (q')^{\frac{1}{p}} \|f\|_{p,v} B_1 I^{\frac{1}{q'}}.$$

Yung tengsizligidan foydalansak:

$$I \leq (2C_2)^{q-1} C_{p,q}^q \|f\|_{p,v}^q + \frac{1}{q} \left( 2^{q-1} q C_2^{q-1} (p')^{\frac{1}{p'}} (q')^{\frac{1}{p}} \|f\|_{p,v} B_1 \right)^q + \frac{1}{q'} I.$$

Demak,  $I$  integral uchun ushbu baho o'rinli ekan:

$$I \leq (2C_2)^{q-1} q \left[ C_{p,q}^q + (p')^{\frac{q}{p'}} (q')^{\frac{q}{p}} B_1^q \right] \|f\|_{p,v}^q.$$

Bundan

$$\|H\|_{L_{p,v} \rightarrow L_{q,u}} \leq \left( (2C_2)^{q-1} q \left[ C_{p,q}^q + (p')^{\frac{q}{p'}} (q')^{\frac{q}{p}} B_1^q \right] \|f\|_{p,v}^q \right)^{\frac{1}{q}} = \\ = (2C_2)^{\frac{1}{q'}} q^{\frac{1}{q}} \left[ C_{p,q}^q + (p')^{\frac{q}{p'}} (q')^{\frac{q}{p}} B_1^q \right]^{\frac{1}{q}} \|f\|_{p,v}.$$

$C_{p,q}$  uchun (2) bahoni e'tiborga olsak, teorema isboti kelib chiqadi:

$$\|H\|_{L_{p,v} \rightarrow L_{q,u}} \leq (2C_2)^{\frac{1}{q'}} q^{\frac{1}{q}} B \left[ (p')^{\frac{q}{p'}} \cdot q + (p')^{\frac{q}{p'}} (q')^{\frac{q}{p}} \right]^{\frac{1}{q}} \|f\|_{p,v}.$$

### Adabiyotlar

1. A.Kufner, L.-E.Persson, Weighted inequalities of Hardy type. World scientific: New Jersey, London, Singapore, Hong Kong, 2003y.
2. K.Andersen, H.Heinig, Weighted norm inequalities for certain integral operators, SIAM J. Math. Anal. 14 (1983), 834-844.
3. A.Kufner, L.Maligranda, L.-E. Persson, The Hardy inequality-about its history and some related results. Pilsen, 2007 y.
4. S.Bloom, R.Kerman, Weighted norm inequalities for operators of Hardy type, Proc. Amer. Math. Soc. 113 (1991) (1), 135-141.
5. F.J.Martin-Reyes, Weights, one-sided operators, singular integrals and ergodic theorems, in: Nonlinear Analysis, Function Spaces and Applications, Vol. 5 (Eds: M. Krbeč, A. Kufner, B. Opic and J. Rakosnik), Prometheus, Prague, 1994, 103-137.
6. E.Sawyer, Weighted Lebesgue and Lorentz norm inequalities for the Hardy operator, Trans. Amer. Math. Soc. 281 (1984) (1), 329-337.
7. A.Kalybay, A.Baiarystanov, Exact estimate of norm of integral operator with Oinarov condition. Kaz. Math. Jour. 21(2021), 6-14.

---

---

**UDK<sup>1</sup>: 512.83, UDK<sup>2</sup>: 517****THE CRITERION OF TENDING TO ZERO THE POWERS OF A MATRIX AND ITS APPLICATIONS****Dilmuradov Nasriddin<sup>1</sup>, Raximov Abror<sup>2</sup>***Karshi State University**[nosir@mail.ru](mailto:nosir@mail.ru), [abror2094@gmail.com](mailto:abror2094@gmail.com)*

**Abstract.** In this article the criterion for convergence of a sequence of powers to zero matrix and its practical applications are presented. The linear discrete dynamic system with constant coefficients is explored and the sufficient and necessary condition for the all eigenvalues of a given matrix have a negative real part in the complex plane is obtained.

It is proved that if the maximum of modules of the all eigenvalues of the Jacobi matrix at zero of a complex valued holomorphic vector function with several variables is less than one then the zero fixed point of the function is attractive.

**Keywords:** the powers of a matrix, eigenvalues of a matrix, Jordan matrix, discrete dynamical systems, fixed point, attracting fixed point.

**Matrixning quvvatlari va ularning qo'llanilishini nol qilish maydoni**

**Annotatsiya.** Maqolada matritsa darajalari ketma-ketligining nol matritsaga yaqinlashish mezonini va uning amaliy tadbirlari keltirilgan. Shuningdek o'zgarmas koeffitsientli chiziqli diskret dinamik sistemalar tadqiq qilingan. Berilgan matritsaning barcha xos qiymatlari kompleks chap yarim tekislikka tegishli bo'lishi uchun yetarli va zaruriy shart topilgan.

Nol nuqtadagi Yakobian matritsaning barcha xos qiymatlari modullarining maksimali birdan kichik bo'lish shartidan, ko'p kompleks o'zgaruvchili vektor funktsiyasining nol qo'zg'almas nuqtasi tortuvchi bo'lishi haqidagi teorema to'la isbotlangan.

**Kalit so'zlar:** Matritsaning darajasi, matritsaning xos qiymatlari, Jordan matritsasi, diskret dinamik sistemalar, qo'zg'almas nuqta, tortuvchi qo'zg'almas nuqta

**Критерий стремления к нулю мощностей матрицы и ее приложений.**

**Аннотация.** В статье представлен критерий сходимости последовательности степеней матрицы к нулевой матрице и их практические приложения. Также исследована линейная дискретная динамическая система с постоянными коэффициентами и получено условие, необходимое и достаточное для того, чтобы все собственные значения данной матрицы имели отрицательную действительную часть в комплексной плоскости.

Доказано, что, если максимум модулей всех собственных значений матрицы Якоби комплекснозначной вектор-функции многих переменных в нулевой точке меньше единицы, то нулевая неподвижная точка является притягивающей.

**Ключевые слова:** степени матрицы, собственные значения матрицы, жорданова матрица, дискретные динамические системы, неподвижная точка, притягивающая неподвижная точка.

**Introduction.** It is important to know the criterion of tending to zero the powers of a matrix. That is because it has many applications. It follows from the criteria the necessary and sufficient condition of belonging to the unit disc centered at the origin all eigenvalues of a given square matrix which is given by theorem 2. We use the criterion in applications I, II, and III.



It is known [2] that in (2) the transformation matrix  $S$  has the form  $S = [s^1 : s^2 : \dots : s^n]$  where  $s^1, s^2, \dots, s^n$  are Jordan basis.

From (2) we have

$$A^k = SJ^kS^{-1}, k \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

It is clear that

$$J^n = \text{diag}(J^n_{\lambda_1, n_1}, \dots, J^n_{\lambda_2, n_2}, \dots, J^n_{\lambda_s, n_s}) = \begin{pmatrix} J^n_{\lambda_1, n_1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & J^n_{\lambda_2, n_2} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & J^n_{\lambda_s, n_s} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

It follows from the formula (6) that in order to calculate  $J^n$  we need to find the  $n^{\text{th}}$  degree of Jordan blocks. The typical Jordan block is

$$J_{\lambda, m} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \lambda & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix} \in M_{m \times m}(\mathbb{C}). \tag{7}$$

We introduce the denotations

$$E_m = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad N_m = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Dimensions of  $E_m$  and  $N_m$  are  $m \times m$ . From (8) we have

$$J_{\lambda, m} = \lambda E_m + N_m. \tag{9}$$

It is clear that  $N_m^m, N_m^{m+1} \dots$  are null matrices. From (8) and (9) we get

$$J_{\lambda, m}^k = (\lambda E_m + N_m)^k = \lambda^k E_m + \frac{n\lambda^{k-1}N_m}{1!} + \dots + \frac{k!}{(m-1)!(k-m+1)!} \lambda^{k-m+1} N_m^{m-1}. \tag{10}$$

We have from (10)

$$J_{\lambda,m}^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & \frac{k\lambda^{k-1}}{1!} & \frac{k(k-1)\lambda^{k-2}}{2!} & \dots & \frac{k!\lambda^{k-m+1}}{(k-1)!(k-m+1)!} \\ 0 & \lambda^k & \frac{k\lambda^{k-1}}{1!} & \dots & \frac{k!\lambda^{k-m+1}}{(k-2)!(k-m+2)!} \\ \vdots & \vdots & \lambda^k & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{k\lambda^{k-1}}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda^k \end{pmatrix}. \tag{11}$$

It is easy to understand that if the inequality  $|\lambda| < 1$  hold, then  $\lim_{k \rightarrow \infty} J_{\lambda,m}^k = O$ . It follows from this if the conditions  $\{|\lambda_j| < 1, j = \overline{1, n}\}$  hold, then  $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = O$ .

Conversely, let  $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = O$ . It is clear that if the conditions  $|\lambda_j| \geq 1$  hold,  $\lim_{n \rightarrow \infty} J_{\lambda,m}^k$  does not exist. We conclude from this contradiction that all eigenvalues of the matrix  $A$  are in the unit disc centered at the origin.

It is important to know the sufficient and necessary condition for the all eigenvalues of a given matrix have a negative real part in the complex plane  $\mathbb{C}$ .

**Theorem 2.** Let  $\lambda_j (j = \overline{1, s}, s \leq n)$  be the eigenvalues of the matrix  $A$  and let  $\det A \neq 0$ . For all eigenvalues  $\mu_j$  of the matrix  $B = (A - E)(E + A)^{-1}$  the conditions  $\{\operatorname{Re} \mu_j < 0\}$  hold, iff all  $\lambda_j$  belong to the unit disc centered at the origin  $\{|\lambda_j| < 1\}$ .

**Proof.** Suppose, the conditions  $\operatorname{Re} \mu_j < 0$  hold. Let's construct the characteristic equation of the matrix  $B = (A - E)(A + E)^{-1}$ :

$$\det\left((A - E)(E + A)^{-1} - \mu E\right) = 0. \tag{13}$$

The equation (13) is equivalent to the following equation:

$$\det\left(A - \frac{1 + \mu}{1 - \mu} E\right) = 0. \tag{14}$$

It is followed from (14) that all eigenvalues of the matrix  $A$  belong to the unit disc centered at the origin, i.e.  $|\lambda_j| < 1$ . That is because the rational function  $\lambda = \frac{1 + \mu}{1 - \mu}$  maps the complex left half-plane to the unit disc centered at the origin. Then if the conditions  $|\lambda_j| < 1$  hold, then  $(A + E)^{-1}$  exists.

Conversely, suppose that all eigenvalues of the matrix  $A$  belong to the unit disc centered at the origin. Let's construct characteristic equation of the matrix  $A$  as following:

$$\det(A - \lambda E) = \det\left((E - B)^{-1}(E + B) - \lambda E\right) = 0. \tag{15}$$

We can rewrite (15) as  $\det\left(B - \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} E\right) = 0$ .

It is easy to conclude that all eigenvalues of the matrix  $B$  are in the complex left half-plane.

### Applications

I. Let  $\mathbb{C}^n$  be, as usual,  $n$  dimensional complex linear space. Its elements  $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)^T \in \mathbb{C}^n$  ( $z_j \in \mathbb{C}$ ) are complex vectors. In the space  $\mathbb{C}^n$  distance between points  $z$  and  $w$  is defined by the following formula

$$|z - w| = \sqrt{\sum_{j=1}^n |z_j - w_j|^2}.$$

It is known that

$$\left| \sum_{j=1}^n w_j \cdot z_j \right| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^n |w_j|^2} \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^n |z_j|^2} \quad (16)$$

Cauchy-Bunyakovsky's inequality holds.

The norm of a matrix  $A$ ,  $A \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$  is defined by the following formula

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{k,j=1}^n a_{kj}^2} \quad (17)$$

We obtain from (16) the inequality

$$|A \cdot z| \leq \|A\| \cdot |z|, \quad z \in \mathbb{C}^n. \quad (18)$$

Let,  $f : D \rightarrow D$ ,  $D \subset \mathbb{C}^n$ , ( $f = (f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z))$ ,  $z \in D$ ) be a vector function.

**Definition 1.** A vector function  $f$  is called differentiable at  $z^0 \in D \subset \mathbb{C}^n$ , if exists a matrix  $A \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$  such that

$$f(z) - f(z^0) = A \cdot (z - z^0) + r(z)(z - z^0).$$

Where  $|r(z)| \rightarrow 0$  as  $z \rightarrow z^0$  and the matrix  $A$  is called the derivative of the vector function  $f$  at the point  $z_0$  and it is defined by the following Jacoby matrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(z^0)}{\partial z_1} & \frac{\partial f_1(z^0)}{\partial z_2} & \dots & \frac{\partial f_1(z^0)}{\partial z_n} \\ \frac{\partial f_2(z^0)}{\partial z_1} & \frac{\partial f_2(z^0)}{\partial z_2} & \dots & \frac{\partial f_2(z^0)}{\partial z_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(z^0)}{\partial z_1} & \frac{\partial f_n(z^0)}{\partial z_2} & \dots & \frac{\partial f_n(z^0)}{\partial z_n} \end{pmatrix} = f'(z^0).$$

**Definition 2.** The function  $f$  is called analytic on  $D$ , if  $f$  is differentiable at the every point of  $D$ .

It is known that. If function is analytic at some point, it also is analytik on its some neighborhood.

**Definition 3.** A point  $z' \in D$  is called fixed point of  $f$  if  $f(z') = z'$ .

**Definition 4.** A fixed point  $z'$  of the function  $f$  is called attracting (repilling), if  $z'$  has some  $U_\delta(z')$  ( $|z - z'| < \delta$ ) neighborhood and there exists  $q, 0 < q < 1$  ( $q, q > 1$ ) such that for any  $z \in U_\delta(z')$  the inequality  $|f(z) - z'| \leq q|z - z'|$  ( $|f(z) - z'| \geq q|z - z'|$ ) holds.

Let a matrix  $A$  be in  $M_{n \times n}(\mathbb{C})$  and  $z^0 \in \mathbb{C}^n$ . We consider the following iterative sequence

$$z^k = Az^{k-1}, k \in \mathbb{N}. \tag{19}$$

Now we will explore the linear discrete dynamic system (19).

From (19) we have the equalities

$$z^k = Az^{k-1} = A^2z^{k-2} = \dots = A^kz^0.$$

We have obtained the following theorem from the theorem 1.

**Theorem 3.** A sequence  $z^k$  tends to  $o$  if for all eigenvalues  $\lambda_j$  of the matrix  $A$  the inequalities  $|\lambda_j| < 1$  hold ( $o$  – null vector). In other word, the fixed point  $o$  is attracting.

II. Let  $f : B \rightarrow B$ ,  $B = \{z : |z| < R, z \in \mathbb{C}^n\}$  be an analytic function with the condition  $f(o) = o$ . Then we can take following equation from the definition of analyticity of  $f(z)$ :

$$f(z) = Az + r(z)z \tag{20}$$

where  $A = f'(o) \in M_{n \times n}$  and  $|r(z)| \xrightarrow{z \rightarrow o} 0$ .

Taking the point  $z^0$  nearest to the origin and putting it in the equation (20), we formulate following sequences:

$$\begin{aligned} z^1 &= Az^0 + r(z^0)z^0, z^2 = Az^1 + r(z^1)z^1, \dots, \\ z^{k+1} &= Az^k + r(z^k)z^k. \end{aligned} \tag{21}$$

Suppose the numbers  $\lambda_j, 1 \leq j \leq n$  are eigenvalues of the matrix  $A$ .

**Theorem 4.** If the inequalities  $|\lambda_j| < 1$  hold, then there is some neighborhood of  $o$  on which  $\lim_{k \rightarrow \infty} z^k = o$ , i.e. origin  $o$  is attracting.

**Proof.** It is easy to verify that the solution of the equation (21) has the form:

$$z^k = A^k z^0 + \sum_{i=0}^{k-1} A^{(k-1)-i} r(z^i) z^i \tag{22}$$

In the formula (22) we assume that  $A^0$  is the identical matrix  $E$ . Now let's state the following lemma which is important to evaluate the solution of (21).

**Lemma. (Gronwall inequality)** If for nonnegative real sequence  $x_k$  and  $a \geq 0$ ,  $b \geq 0$  the inequalities  $x_k \leq a \sum_{i=0}^{k-1} x_i + b$  hold, then  $x_k \leq b(1+a)^k$ .

**Proof.** In the inequality  $x_k \leq a \sum_{i=0}^{k-1} x_i + b$  we assume  $x_0 = b$ . Since  $x_k - x_{k-1} \leq ax_{k-1}$  we obtain the inequalities  $x_k \leq (a+1)x_{k-1}$ , therefore  $x_k \leq b(a+1)^k$ .

Now we evaluate the solution  $z^k = A^k z^0 + \sum_{i=1}^{k-1} A^{(k-1)-i} r(z^i) z^i$ :

$$\begin{aligned} |z^k| &= \left| A^k z^0 + \sum_{i=1}^{k-1} A^{(k-1)-i} r(z^i) z^i \right| \leq |A^k z^0| + \left| \sum_{i=1}^{k-1} A^{(k-1)-i} r(z^i) z^i \right| \leq \\ &\|A^k\| |z^0| + \sum_{i=1}^{k-1} \|A^{(k-1)-i}\| \|r(z^i)\| |z^i|. \end{aligned}$$

As a result;

$$|z^k| \leq \|A^k\| |z^0| + \sum_{i=1}^{k-1} \|A^{(k-1)-i}\| \|r(z^i)\| |z^i|.$$

It is known from the above that the matrix  $A$  can be transformed to the form  $A = SJS^{-1}$ . Therefore, the next inequalities hold:

$$\|A^k\| \leq \|S\| \|S^{-1}\| \|J^k\| = c_0 \|J^k\|.$$

Let  $\rho = \max_j |\lambda_j|$ . By the condition of the theorem 4 we have  $\rho < 1$ . We can easily check that  $\|J^k\| \leq c_1 \rho^k n^k, c_1 - const$  [1] and there exists  $\rho', (\rho < \rho' < 1)$  such that for sufficiently large  $k$  the inequalities  $\|J^k\| \leq c_1 \rho^k n^k \leq c_1 (\rho')^k$  is satisfied. Therefore  $\|A^k\| \leq c (\rho')^k, c = c_1 c_0$ . Thus we obtain the following inequalities

$$|z^k| \leq c (\rho')^k |z^0| + \sum_{i=1}^{k-1} c (\rho')^{(k-1)-i} |r(z^i)| |z^i|. \quad (23)$$

In other hand for any  $k$  and  $\varepsilon > 0$  there exists  $\delta > 0$  such that if  $|z^0| < \delta$ , then  $|r(z^i)| < \varepsilon, (i \leq k-1)$ .

We have from the inequalities (23):

$$(\rho')^{-k} |z^k| \leq c |z^0| + \varepsilon c (\rho')^{-1} \sum_{i=1}^k (\rho')^{-i} |z^i|.$$

It follows from the above lemma that

$$|z^{k+1}| \leq c |z^0| (\rho + c\varepsilon)^{k+1}.$$

Choosing  $\varepsilon > 0$  sufficiently small, we have  $\lim_{k \rightarrow \infty} |z^{k+1}| = 0$ . Therefore  $o$  is attractive.

**Corollary.** Let a vector function  $f : D \rightarrow D$  be analytic at the fixed point  $z' \in D$ . If  $\|f'(z')\| < 1$  then the fixed point  $z' \in D$  is attractive.

III. The theorem 1 can be used to identify whether all the eigenvalues of a given matrix are in the unit disc centered at the origin. To understand this, we consider the following example.

Let us calculate the degrees of the following matrix

$$A = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 2 & 8 & 10 & -8 \\ 17 & 18 & 20 & -33 \\ -12 & -8 & -10 & 28 \\ 17 & 28 & 30 & -23 \end{pmatrix}.$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} -0,29 & -0,36 & -0,4 & 0,46 \\ -1,1525 & -1,56 & -1,65 & 1,47 \\ 1,09 & 1,56 & 1,65 & -1,41 \\ -0,6025 & -0,61 & -0,65 & -0,7725 \end{pmatrix},$$

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = \begin{pmatrix} -0,21415 & -0,2386 & -0,249 & 0,25585 \\ -0,55356 & -0,62372 & -0,64462 & 0,63676 \\ 0,53402 & 0,60810 & 0,629 & -0,61722 \\ -0,29618 & -0,31672 & -0,32712 & 0,33788 \end{pmatrix},$$

$$A^8 = A^4 \cdot A^4 = \begin{pmatrix} -0,030811 & -0,032534 & -0,033185 & 0,033416 \\ -0,06903 & -0,072562 & -0,073864 & 0,074238 \\ 0,067733 & 0,07128 & 0,072582 & -0,072942 \\ -0,036015 & -0,037722 & -0,038373 & 0,038619 \end{pmatrix}$$

As all elements of the given matrix  $A^k$  are small in practical sense we can conclude from theorem 1 that all eigenvalues belong to the unit disc centered at the origin.

### References

1. Roger A. Horn, Charles R. Johnson MATRIX ANALYSIS. Cambridge University Press 1985. –549p.
2. James E. Gentle Matrix Algebra Theory, Computations and Applications in Statistics. 2nd edition: © Springer International Publishing AG 2017. – 648 p.
3. John Milnor Dynamics in one complex variable. Copyright © 2006 by Princeton University Press. –304 p.
4. Alan F. Beardon Iteration of Rational Functions. Springer-Werlag,1990. – 283 p.
5. Robert L. Devaney An introduction to chaotic dynamical system. Copyright 1989 by Addison-Wesley Publication Company. – 331 p.

---

UDK 517.518.5

**КОМПЛЕКС АЛМАСHTИРИШЛАР, БЕЛГИЛАШЛАР ВА YORDAMЧИ  
FUNKSIYA KIRITISH USULLARI ORQALI HAL ETILADIGAN MASALALAR**

**Kamoliddinov Davlat Utkirxon o'g'li**

Samarqand davlat universiteti

**Annotatsiya:** Matematikaning turli yo'nalishlarida masalaga nostandart yondashuv, belgilashlar kiritgan holda sodda holatga keltirish va masala shartlarini qanoatlantiruvchi yordamchi funksiyalar qurish masala yechishni birmuncha qulaylashtiradi. Biz ushbu maqolada matematika bo'yicha o'tkazilgan nufuzli olimpiadalarda taklif etilgan masalalarni hal etish mobaynida yuqorida ta'kidlab o'tilgan usullarini qo'llash imkoniyatlarimizni ko'rib chiqamiz.

**Kalit so'zlar:** ketma-ketliklar, integrallar, blok matritsalar, matritsa rangi, teskarilanuvchi matritsalar, kompleks almashtirishlar, cheksiz yig'indilar.

**Problems to be solved through complex substitutions, denotation and instructions  
of auxiliary functions**

**Annotation:** A non-standard approach to a problem in different areas of mathematics, simplification with the introduction of definitions, and the construction of auxiliary functions that satisfy the conditions of the problem make it much easier to solve the problem. In this article, we will consider the possibilities of using the above-mentioned methods in solving the problems proposed in the prestigious Mathematical Olympiads.

**Keywords:** sequences, integrals, block matrices, rang of matrix, inverse matrix, complex substitutions, infinite sums

**Задачи, решаемые с помощью сложных замещений, определений и методов  
вспомогательных функций**

**Аннотация:** Нестандартный подход к проблеме в разных разделах математики, упрощение с введением определений и построение вспомогательных функций, удовлетворяющих условиям задачи, значительно упрощают ее решение. В этой статье

мы рассмотрим возможности использования вышеупомянутых методов при решении задач, предложенных на престижных математических олимпиадах.

**Ключевые слова:** последовательности, интегралы, блочные матрицы, ранг матриц, обратные матрицы, комплексные подстановки, бесконечная сумма.

Ushbu maqolada turli sohalarga tegishli tushuncha va masalalarda almashtirishlar bajarishning tutgan o'рни va masala ishlash usullari keltirib o'tilgan. Jumladan integrallarda almashtirishlar bajarish juda muhim o'rin tutishi ma'lum. Talabalar o'rtasida o'tkaziladigan xalqaro matematika olimpiadalarida taklif etilgan masalalar muhokamasi va ularni yechish uslublarini keltirib o'tamiz. Mazkur maqolada turli yo'nalishlardagi masalalar keltiriladi va keltiriladigan masalalar birmuncha o'zining qiyinchilik darajasiga ega. Shuning uchun maqolada keltirib o'tiladigan asosiy g'oyalar, usullar va hal etish jarayonini berishdan oldin u haqida bazi tushunchalarni keltirib o'tishga harakat qilamiz.

Avval quyidagi ketma-ketliklarga oid masalani ko'rib o'tamiz.

Masala 1: Aytaylik  $\{a_n\}$  ketma-ketlik va quyidagicha munosabatga ega

$$a_1 = 3, a_{n+1} = a_n^2 - 2 \quad \forall n \geq 2$$

U holda quyidagini hisoblang  $S = \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{k=1}^n \frac{1}{a_k}$

Yechimi: Avval quyidagi belgilashni kiritib olamiz.

$$b_n = \frac{a_n - \sqrt{(a_n^2 - 4)}}{2} \quad (1)$$

Endi (1) dan quyidagicha natija olishimiz mumkin.

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \frac{a_{n+1} - \sqrt{(a_{n+1}^2 - 4)}}{2} = \frac{a_n^2 - 2 - \sqrt{(a_n^2 - 2)^2 - 4}}{2} = \frac{a_n(a_n - \sqrt{a_n^2 - 4})}{2} - 1 \\ &= a_n b_n - 1 \end{aligned}$$

Kelib chiqqan natijani quyidagicha ko'rinishda yozamiz.

$$b_n = \frac{1}{a_n} + \frac{b_{n+1}}{a_n}$$

va shu tariqa ushbu yig'indilar ketma-ketligiga ega bo'lamiz.

$$b_1 = \frac{1}{a_1} + \frac{b_2}{a_1} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1} \left( \frac{1}{a_2} + \frac{b_3}{a_2} \right) = \dots = \dots = \dots$$

Demak kelib chiqadiki  $S = \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{k=1}^n \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} + \frac{b_2}{a_1} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1} \left( \frac{1}{a_2} + \frac{b_3}{a_2} \right) + \dots = b_1$

$$S = b_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \quad [1]$$

Masala 2 : Aytaylik  $f: [0,1] \rightarrow R$  funksiya quyidagi shartni qanoatlantiradi

$$f(x^2) + \sqrt{x}f(x^2\sqrt{x}) = e^x, \quad \forall x \in [0,1]$$

$$\text{Hisoblang : } \int_0^1 f(x)dx$$

Yechimi: Berilgan shartni ikkala tarafini  $x$  ga ko'paytiramiz va  $[0,1]$ bo'yicha integrallasak, quyidagiga ega bo'lamiz .

$$\int_0^1 f(x^2)x dx + \int_0^1 x\sqrt{x}f(x^2\sqrt{x})dx = \int_0^1 xe^x dx$$

$$I_1 = \int_0^1 xf(x^2)x dx \quad \text{va} \quad I_2 = \int_0^1 x\sqrt{x}f(x^2\sqrt{x})dx$$

Endi  $I_1$  va  $I_2$  larni alohida hisoblab olamiz .

$$I_1 = \int_0^1 xf(x^2)x dx = [t = x^2, ] = \frac{1}{2} \int_0^1 f(t)dt$$

$$I_2 = \int_0^1 x\sqrt{x}f(x^2\sqrt{x})dx = [t = x^2\sqrt{x}] = \frac{2}{5} \int_0^1 f(t)dt$$

$$I_1 + I_2 = \frac{1}{2} \int_0^1 f(x)dx + \frac{2}{5} \int_0^1 f(x)dx = \frac{9}{10} \int_0^1 f(x)dx$$

Endi bizga ma'lumki bo'laklab integrallash orqali  $\int_0^1 xe^x dx = 1$  ekanini topishimiz mumkin.[1]

$$\text{Demak} \quad \frac{9}{10} \int_0^1 f(x)dx = 1, \quad \int_0^1 f(x)dx = \frac{10}{9} \quad [2]$$

Masala 3: Quyidagi tenglikni qanoatlantiruvchi barcha funksiyalarni toping.

$$f(x) = \int_0^1 x(1+xy)f(y)dy + \sqrt{x} \quad (1)$$

Yechimi: (1) tenglikni quyidagicha yoyib yozishimiz mumkin.

$$f(x) = x \int_0^1 f(y)dy + x^2 \int_0^1 f(y)ydy + \sqrt{x}$$

Endi  $\int_0^1 f(y)dy$ ,  $\int_0^1 f(y)ydy$  integrallar qiymati biror o'zgarmas songa tengligini inobatga olsak, quyidagi belgilashlarni olishimiz mumkin.

$$\int_0^1 f(y)dy = b, \quad \int_0^1 f(y)ydy = a \quad a, b - \text{sonlar} \quad [3]$$

Demak, biz izlayotgan funksiya  $f(x) = ax^2 + bx + \sqrt{x}$  ko'rinishida va  $a, b$  larni topib joylashtirishimiz yetarli.

$$a = \int_0^1 (ay^2 + by + \sqrt{y}) y dy = \frac{a}{4} + \frac{b}{3} + \frac{2}{5} a = 1,6 \quad b = 2,4$$

$$b = \int_0^1 (ay^2 + by + \sqrt{y}) dy = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + \frac{2}{3}$$

Shu tariqa kelib chiqadiki  $f(x) = 1,6x^2 + 2,4x + \sqrt{x}$

Endi shuni aytib o'tishimiz kerakki keyingi masalalarimiz algebra sohasiga oid tarzda davom etadi .

Keyingi masalalarni yechish uslublarini keltirishdan oldin ularga oid bazi zaruriy tushunchalarni keltirib o'tamiz.

Bizga  $A \in M_{n \times n}(C)$  yani kompleks sonlar maydonida aniqlangan ,  $n \times n$  o'lchamli  $A$  matritsa bo'lsin .

$r(A)$  –  $A$  matritsa rangi,  $I_n$  –  $n \times n$  o'lchamli birlik matritsa

Quyidagi lemmani isbotsiz keltiramiz va undan masalalar ishlash davomida foydalanamiz . Mustaqil ravishda isbotlab ko'rishingizni maslahat berardik.

Lemma 1 : Aytaylik  $A \in M_{s \times n}(C)$  ,  $B \in M_{n \times m}(C)$  matritsalar bo'lsin.

$$(i) \ r \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = r(A) + r(B) \quad (ii) \ r(A) + r(B) \leq r \begin{pmatrix} A & * \\ O & B \end{pmatrix} \leq \min\{r(A) + m, r(B) + s\}$$

Isbotlanishida, keltirib o'tgan lemmamiz katta ahamiyatga ega bo'lgan mashhur Sylvester tengsizligini keltiramiz va uni isbotlaymiz.

Masala-4: ( Sylvester tengsizligi ) Aytaylik  $A \in M_{s \times n}(C)$  ,  $B \in M_{n \times m}(C)$  matritsalar berilgan bo'lsin. U holda quyidagi tengsizlik o'rinli

$$r(AB) \geq r(A) + r(B) - n \quad (1)$$

Isbot: (1) tengsizlikni quyidagicha yozib olamiz.

$$n + r(AB) \geq r(A) + r(B) \quad (1)$$

Endi lemmadagi (i) ga ko'ra quyidagicha olamiz.

$$n + r(AB) = r(AB) + r(I_n) = r \begin{pmatrix} I_n & O \\ O & AB \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} I_n & O \\ O & AB \end{pmatrix}, \quad M - \text{blok matritsa}$$

Belgilangan  $M$  blok matritsa ustida elementar almashtirishlar bajaramiz.

$$M = \begin{pmatrix} I_n & O \\ O & AB \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} I_n & O \\ A & AB \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} I_n & -B \\ A & O \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} B & I_n \\ O & A \end{pmatrix}$$

Ma'lumki elementar almashtirishlar matritsa rangini o'zgartirmaydi.

Demak , quyidagiga egamiz .

$$M = r(AB) + n = r \begin{pmatrix} B & I_n \\ O & A \end{pmatrix} \geq r \begin{pmatrix} B & O \\ O & A \end{pmatrix} = r(A) + r(B)$$

Oxirgi tengsizligimiz lemmaning (ii) tasdig'iga ko'ra o'rinli . Isbotlandi.[3]-[4]

Keyingi ko'rib o'tayotgan masalamiz IMC olimpiadasida 1997 yili P3 masala sifatida olimpiadada taklif etilgan.O'ziga xos ishlanish yo'nalishiga ega , biz masalaga kompleks almashtirish tarafdin yondashgan holda hal etamiz.

Masala 5 : Aytaylik  $A, B \in M_{n \times n}(R)$  va  $A^2 + B^2 = AB$  shart o'rinli.

isbotlang : agar  $BA - AB$  teskarilanuvchi matritsa bo'lsa, u holda  $n : 3$  isbot:

Quyidagi belgilashlarni kiritib olamiz.  $X = A + \omega B$  ,  $\omega = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$X\bar{X} = (A + \omega B)(A + \bar{\omega}B) = A^2 + \omega BA + \bar{\omega}BA + B^2 = AB + \omega BA + \bar{\omega}AB = \omega(BA - AB)$$

chunki  $\bar{\omega} + 1 = -\omega$

$$\det(X\bar{X}) = \det(X) \det(\bar{X}) \text{ va malumki } \det(X\bar{X}) \in R$$

Endi  $\det(\omega(BA - AB)) = \omega^n \det(BA - AB)$  va  $\det(BA - AB) \neq 0$  chunki

$BA - AB$  matritsa teskarilanuvchi

Demak , bundan kelib chiqadiki  $\omega^n \in R$  , bu esa faqat  $n = 3k$  ,  $k \in N$  larda bajariladi .  
 $\Rightarrow n : 3$  . Isbotlandi.[4]

Keyingi masala Ruminiya matematika olimpiadasida 1982 yilda taklif etilgan masala bo'lib, ushbu masala yili jihatidan ancha eski bo'lsada juda ajoyib tuzilganligi hozirgacha har bir matematikni o'ziga jalb etadi. Biz ushbu masalani kompleks belgilash va matritsalarining teskarilanuvchilik xossaligidan foydalanib isbotlaymiz.

Masala 6:  $A, B \in M_{n \times n}(C)$  ,  $n \geq 1$  matritsalar quyidagi shartlarga ega.

$$AB - B^2A^2 = I_n \text{ va } A^3 + B^3 = O_n$$

$$U \text{ holda isbotlang : } BA - A^2B^2 = I_n$$

Isbot: Quyidagi kompleks belgilashlarni kiritib olamiz .

$$X = A + iB^2 , Y = B + iA^2$$

Endi kiritilgan matritsalar ko'paytmasini hisoblaymiz .

$$XY = (A + iB^2)(B + iA^2) = AB - B^2A^2 + i(A^3 + B^3) = I_n$$

Demak bundan X matritsa teskarilanuvchi va uning teskarisi Y matritsa ekani kelib chiqadi . Teskarilanuvchilik xossasiga ko'ra  $YX = I_n$  ekani ravshan .

$$I_n = YX = (B + iA^2)(A + iB^2) = (BA - A^2B^2) + i(A^3 + B^3) = BA - A^2B^2$$

Isbotlandi.[6]

## MUSTAQIL ISHLASH UCHUN MASALALAR

MASALA 1:

Aytaylik  $A \in M_{s \times n}(C)$ ,  $B \in M_{n \times m}(C)$ ,  $C \in M_{m \times k}(C)$  matritsalar bo'lsin.

$U$  holda quyidagi tengsizlikni isbotlang

$$r(ABC) \geq r(AB) + r(BC) - r(B)$$

MASALA 2:

Hisoblang :  $\int_0^{\infty} \frac{t}{(e^{\pi t} - e^{-\pi t})(1+t^2)} dt$

**Adabiyotlar**

1. JoM Journal. Tolaso Network 2020 (2020) P 23-78
2. Problems in real analysis; Advanced calculus on the real Axis Teodora – Liliana T. Radulescu Vientiu D. Radulescu Titu Andreescu(2008) P 34-58
3. Казанские студенческие олимпиады по математике (2011) С 7-16
4. Proof of inequality of rank of Matrix on skew field by constructing block Matrix. Junqing wang and Jiyong Lu (2009) P 1-6
5. Putnam and Beyond. Razvan gelca, Titu Andreescu(2007) P 158-179
6. UMA Putnam Talk Lecture Notes. Determinant; evaluation (2009) P 80-98

УДК 004.056.5

**KRIPTOGRAFIK ALGORITM MIKROBUYRUQLARINING MANTIQUIY BUL  
FUNKSIYA SHAKLI (AES, EL-GAMAL)****A.V. Kabulov, M.A. Berdimurodov, I.M.Saymanov***O'zbekiston Milliy universiteti*

**Annotatsiya.** Ushbu maqolada mikrobuyruqlarning grafsxema ko'rinishi, algebraik ko'rinishi, matritsa ko'rinishlari AES simmetrik, EL-Gamal ochiq kalitni shifrlash algoritmlari uchun qo'llanilishi tadqiq qilingan. Mikrobuyruqlarni xususan shifrlash algoritmlarni qurilmalarga yozishda uni optimal shaklda yozish dolzarb masala hisoblanadi sababi algoritm qancha optimal yozilsa qurulma talab etadigan energiya, xotira resurslari tejaladi hamda tezlik oshishiga yordam beradi. Mikrobuyruqlarning grafsxema ko'rinishi, algebraik ko'rinishi, matritsa ko'rinishlarini tahlil qilish orqali mikrobuyruqlarning optimal(minimal) shaklini aniqlashda foydalanish mumkin. AES simmetrik, EL-Gamal ochiq kalitli shifrlash algoritmlarining mikrobuyruqlarning optimal shakli aniqlangan.

**Kalit so'zlar:** Mikrobuyruq, grafsxema ko'rinish algoritmi (GSA), algebraik ko'rinish(AK), matritsa sxema algoritmi(MSA), Blok sxema(BS), AES(Advanced Encryption Standard), EL-Gamal.

**Логические функции микрокоманд криптографических алгоритмов (AES,  
El-Gamal)**

**Аннотация.** В статье рассмотрены микрокоманды, граф-схемы, алгебраические, матричные представления для алгоритмов шифрования симметричного AES, с открытым ключом EL-Gamal. Рассмотрено оптимальное описание микрокоманд для построения алгоритмов шифрования. Определена оптимальная форма микрокоманд симметричных алгоритмов шифрования AES, с открытым ключом EL-Gamal.

**Ключевые слова:** Микрокоманда, граф-схема алгоритма (ГСА), алгебраический вид (AB), матричной схемы алгоритма (МСА), блок-схема (БС), AES (Advanced Encryption Standard), Эль-Гамаль.

**Logic functions of microinstructions of cryptographic algorithms (AES, El-Gamal)**

**Annotation.** The article discusses microinstructions, graph-schemes, algebraic, matrix representations for symmetric AES encryption algorithms, with the EL-Gamal public key. The optimal description of microinstructions for building encryption algorithms is considered. The optimal form of microinstructions of symmetric encryption algorithms AES, with the public key EL-Gamal, has been determined.

**Key words:** Microcommand, graph-schema of the algorithm (GSA), algebraic form (AB), matrix schema of the algorithm (MSA), block schema (BS), AES (Advanced Encryption Standard), El Gamal.

**Kirish.** Hozirgi kunda axborot hajmini, qiymatini ortishi natijasida, ularni himoyalash muammosi kengayib boradi. Axborotning ko'plab himoya usullari mavjud bo'lib, ular ichida kriptografiya o'zining bardoshligi va ishonchligi bilan ajralib turadi. Kriptologiya fani o'zaro qarama-qarshi bo'lgan, kriptografiya va kriptozanaliz sohalaridan iborat. Kriptografiya yangi

algoritmni yaratish ishlari bilan shug'ullansa, kriptanaliz ushbu yaratilgan algoritmnin qanchalik darajaga bardoshli ekanligi tekshiradi.

Shuningdek, O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017-yil 7-fevraldagi PF-4947-son «O'zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo'yicha harakatlar strategiyasi to'g'risida»ga farmonining 5.1 bandida «Axborot xavfsizligini ta'minlash va axborotni himoya qilish tizimini takomillashtirish, axborot sohasidagi tahdidlarga o'z vaqtida va munosib qarshilik ko'rsatish» ustuvor yo'nalish sifatida belgilangan[3].

**Mavzuga oid adabiyotlarning tahlili (Literature review).** S.I.Baranovning синтез микропрограммных автоматов, A.A. Ожиганов Теория автоматов adabiyotlarida graf sxema, abstrakt avtomat, avtomatni minimumlashtirish, algoritmnin blok sxema ko'rinishidan graf sxema algoritm ko'rinishiga undan matritsa sxema ko'rinishiga o'tkazish algoritmlari va qadamlari tahlil etilgan. D.E.Akbarovning «Axborot xavfsizligini ta'minlashning kriptografik usullari va ularning qo'llanilishi» adabiyotida AES(Advanced Encryption Standard) va El-Gamal shifrlash algoritmlari tahlil etilgan.

### Tadqiqot metodologiyasi (Research Methodology).

Algoritmnin bul funksiya ko'rinishida ifodalash uchun Graf sxemaga o'tgan holda so'ng har bir mikroavtomat buyruqlarini bul funksiya ko'rinishida ifodalash mumkin[1]. Algoritm quyidagi qadamlardan iborat bo'ladi.

1-qadamda. Algoritmning blok sxemasi tuziladi

2-qadamda. Tuzilgan algoritmgaga mos Graf sxema chiziladi.

3-qadamda. Graf sxemaga mos rostlik jadvali tuziladi.

3-qadamda. Rostlik jadvalidan mikrokamandalarning MDNF shaklidagi bul funksiyasi yoziladi.

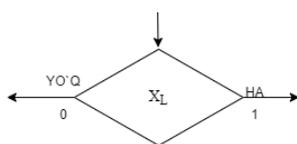
4-qadamda. Hosil qilingan bul funksiya shaklidagi mikrokamandalarni bul algebrasidagi soddalashtirish teng kuchlilik formulalaridan foydalangan holda minimumlashtiramiz.

5-qadamda. Barcha mikrokamadalarni ketma-ket yozamiz.

**GSA** – graflarni yo'naltirilgan bog'langan grafik, to'rt turdagi: boshlang'ich, yakuniy, operator va shartli operatorlardan iborat. Yakuniy, operator va shartli operatorlar bitta kirishga ega, boshlang'ichga kirish yo'q. Boshlang'ich va operatorlarda bitta chiqish, shartli operatorlarda 1(ha) va 0(yo'q) belgilar bilan belgilangan ikkita chiqish. Yakuniy operatorni chiqishi yo'q.

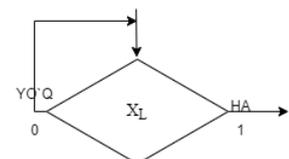
GSA quyidagi shartlarni qondiradi:

- 1) Graflarning kirish va chiqishlari yordamida bir-biriga bog'langan, yo'ylar har doim chiqishdan kirishga yo'naltirilgan;
- 2) har bir chiqish to'liq bitta kirishga ulangan;
- 3) har qanday kirish kamida bitta chiqishga ulanadi
- 4) GSA da hech bo'lmaganda bitta boshlang'ich va yakuniy operatorlarni bog'lovchi yoy mavjud bo'ladi;



- 5) har bir mantiqiy shart operatoriga  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_L\}$  to'plam elementlardan bittasi yozilgan bo'ladi.

- 6) Mantiqiy shartli operatorning chiqishlaridan biri unga ulanishi mumkin operator yoy uchun ruxsat berilmagan kirish; biz ba'zan bunday shartli operatorlarni qaytariladigan yoki kutish deb ataymiz;
- 7) har bir operator yuqori qismida operator (mikrokomanda) yoziladi)  $Y_i$  – bir nechta mikro operatsiyalarning kichik



to'plami  $Y = \{Y_1, \dots, Y_N\}$ ; Xuddi shu mikrokomandlarning har xil operatorlarga kirishga ruxsat beradi.

Misol sifatida El-Gamal shifrlash algoritmining graf sxema algoritmi (GSA) quyidagi 2-rasmga keltirilgan. Graf sxemada "yurish" jarayoni qachon tugaydi:

1. Barcha to'plamlar tugasa;
2.  $Y_K$  operatoriga yetib kelganda;

Ba'zan GSning ekvivalentligini aniqlash vazifasi bor, bir xil dasturni tasvirlab beradi. Ba'zi shartlar berilsin  $\{x_1, x_2, \dots, x_L\}$  o'zgaruvchilar ketma-ketligi (to'plamlar bir xil bo'lishi mumkin)

GSA<sub>1</sub> va GSA<sub>2</sub> teng kuchli yoki bir xil deyiladi.  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_L\}$  to'plamlarning barcha turlarida bir xil qiymat qabul qilsa va GSA<sub>1</sub> = GSA<sub>2</sub> kabi belgilanadi.

### O'tish formula tizimi

$Y_i$  operatsiyadan  $Y_j$  operatorga o'tish formulasi umumiy quyidagicha ifodalanadi

$Y_i x_{i1}^{e_{i1}} \dots x_{iR}^{e_{iR}} Y_j, e_{ir} \in \{0, 1\}$ . Bu yerda  $x_{ir}^0 = \bar{x}_{ir}; x_{ir}^1 = x_{ir}$ . O'tishlarning har bir yo'li alohida

mantiqiy ko'paytirish (konyunksiya) ga mos keladi  $\alpha_{ij} = \bigwedge_{r=1}^R x_{ir}^{e_{ir}}$ ,  $Y_i$  operator yoki  $Y_j$

operatoridan o'tish uchun formula deb  $Y_i = \bigvee_{t=1}^{T+1} \alpha_{it} Y_t$  formulaga aytiladi. Bu yerda

$$\alpha_{ij} Y_j = \begin{cases} Y_j, & \alpha_{ij} = 1 \\ 0, & \alpha_{ij} = 0 \end{cases} \text{ kabi hisoblanadi.}$$

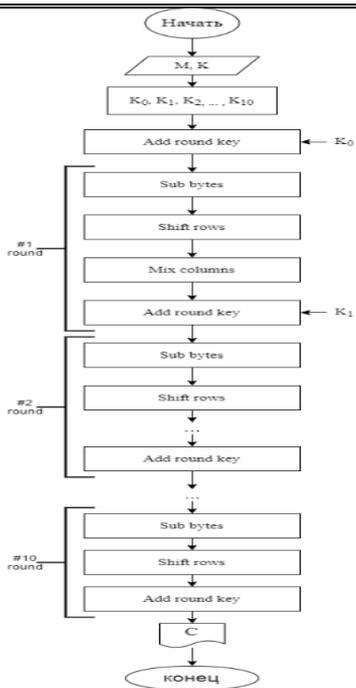
Belgilangan yo'nalishlarga kiritilgan mos bul funksiyalar ustida bul algebrasida barcha soddalashtirish formulalaridan jumladan quyidagi formulalardan foydalanish mumkin:

1.  $\alpha \beta Y_j \vee \alpha \gamma Y_t = \alpha (\beta Y_j \vee \gamma Y_t)$
2.  $\alpha Y_j \vee \beta Y_j = (\alpha \vee \beta) Y_j$
3.  $\alpha = \beta$  bo'lsa,  $\alpha Y_j = \beta Y_j$

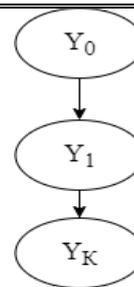
Bu yerda  $\alpha, \beta, \gamma$  funksiyalar  $x_1, x_2, \dots, x_L$  o'zgaruvchilariga bog'liq bo'lgan mantiqiy funksiyalar. Barcha  $i = 1, \dots, t$  uchun ko'plab o'tish formulalar tizimini tashkil qiladi. [1]

Graf sxema algoritmi (GSA), matritsa algoritmi (MA), algoritmining algebraik ko'rinishlari AES, El-Gamal shifrlash algoritmlar tahlilida qo'llanilishi.

AES umumiy holat



1-rasm. AES umumiy holat BS



2-rasm. AES umumiy holat GSA

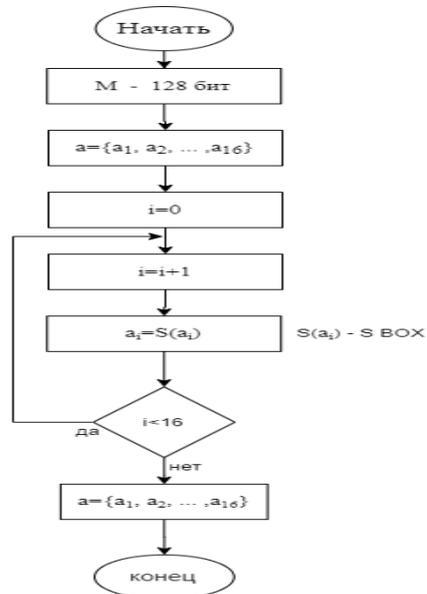
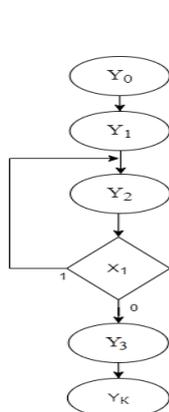
$$Y_0 = 1$$

$$Y_1 = 1$$

$$Y_K = 1$$

AES umumiy holatining Graf sxemasi va bul funksiya shakli

Sub Bytes



3-rasm. SubBytes algoritmining BS

	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_K$
$Y_0$	1			
$Y_1$		1		
$Y_2$		$x_1$	$\bar{x}_1$	
$Y_3$				1

4-rasm. SubBytes algoritmining GSA

1-jadval. Sub Bytes MSA

$$Y_0 = Y_1$$

$$Y_1 = Y_2$$

$$Y_2 = x_1 Y_2 \vee \bar{x}_1 Y_3$$

$$Y_3 = Y_K$$

2-jadval. SubBytes ning rostlik jadvali

$X_1$	$Y_0$	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_K$
0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	0	0

$$Y_0 = 1$$

$$Y_3 = \bar{x}_1$$

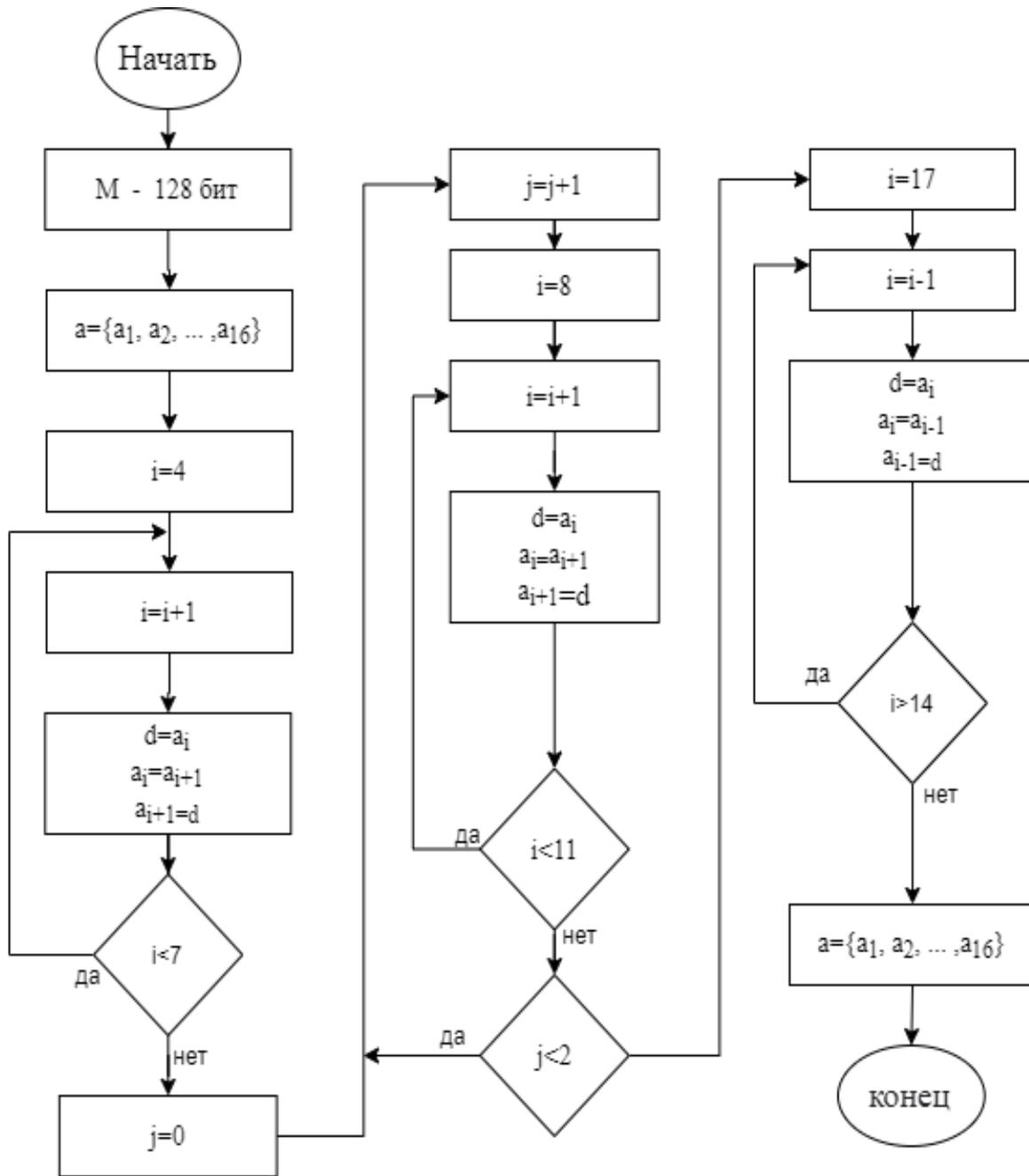
$$Y_1 = 1$$

$$Y_K = \bar{x}_1$$

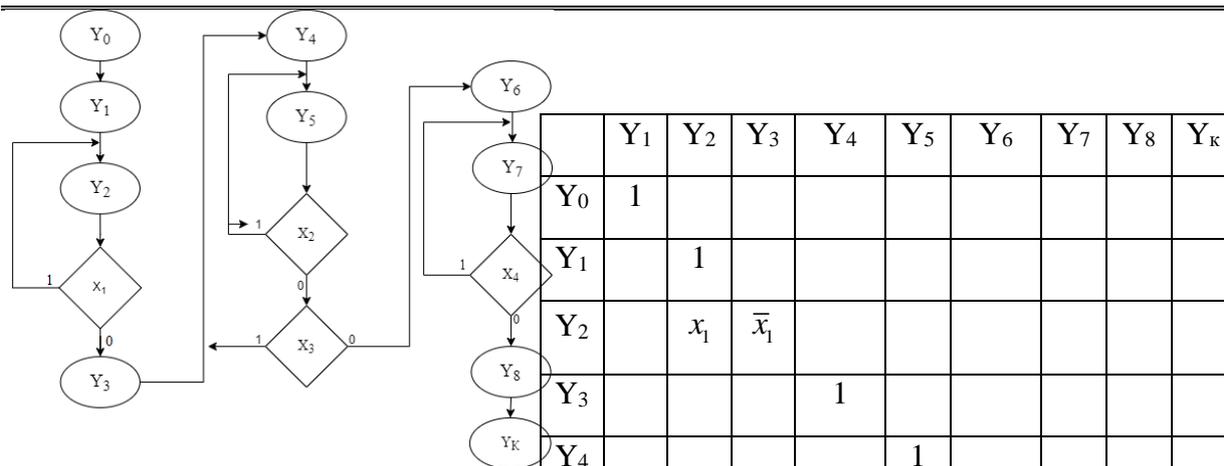
$$Y_2 = 1$$

Sub Bytes algoritmining mikrobuyruqlarining  
algebraik ko‘rinishi

Shift\_Rows



5-rasm. Shift Rows algorithming BS



6-rasm. Shift Rows algoritmining GSA

$$\begin{aligned}
 Y_0 &= Y_1 & Y_6 &= Y_7 \\
 Y_1 &= Y_2 & Y_7 &= x_4 Y_7 \vee \bar{x}_4 Y_8 \\
 Y_2 &= x_1 Y_2 \vee \bar{x}_1 Y_3 & Y_8 &= Y_8 \\
 Y_3 &= Y_4 \\
 Y_4 &= Y_5 \\
 Y_5 &= \bar{x}_2 x_3 Y_4 \vee x_2 Y_5 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3 Y_6
 \end{aligned}$$

	Y <sub>1</sub>	Y <sub>2</sub>	Y <sub>3</sub>	Y <sub>4</sub>	Y <sub>5</sub>	Y <sub>6</sub>	Y <sub>7</sub>	Y <sub>8</sub>	Y <sub>K</sub>
Y <sub>0</sub>	1								
Y <sub>1</sub>		1							
Y <sub>2</sub>		$x_1$	$\bar{x}_1$						
Y <sub>3</sub>				1					
Y <sub>4</sub>					1				
Y <sub>5</sub>				$\bar{x}_2 x_3$	$x_2$	$\bar{x}_2 \bar{x}_3$			
Y <sub>6</sub>							1		
Y <sub>7</sub>								$x_4$	$\bar{x}_4$
Y <sub>8</sub>									1

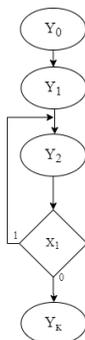
3-jadval. Shift Rows algoritmining MSA

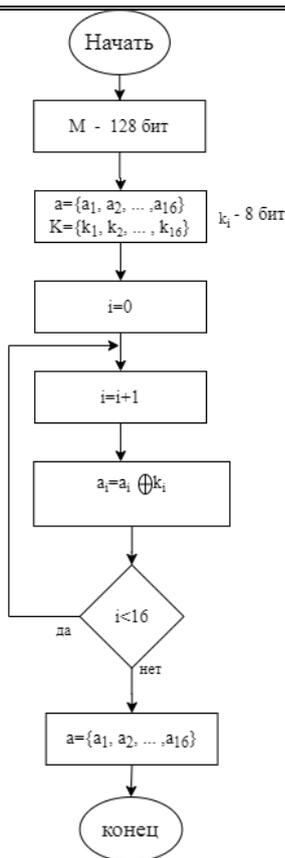
$$\begin{aligned}
 Y_0 &= 1 & Y_6 &= \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \\
 Y_1 &= 1 & Y_7 &= \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \\
 Y_2 &= 1 & Y_8 &= \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \\
 Y_3 &= \bar{x}_1 & Y_K &= \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \\
 Y_4 &= \bar{x}_1 & Y_5 &= \bar{x}_1
 \end{aligned}$$

Shift Rows algoritmining mikrobuyruqlarining algebraik ko‘rinishi

Add\_Round\_Key

8-rasm. AddRoundKey algoritmining GSA





7-rasm. AddRoundKey  
 algoritmining BS

	Y <sub>1</sub>	Y <sub>2</sub>	Y <sub>K</sub>
Y <sub>0</sub>	1		
Y <sub>1</sub>		1	
Y <sub>2</sub>		x <sub>1</sub>	$\bar{x}_1$

$$Y_0 = Y_1$$

$$Y_1 = Y_2$$

$$Y_2 = x_1 Y_2 \vee \bar{x}_1 Y_K$$

4-jadval. AddRoundKey algoritmining rostlik  
 jadvali

X <sub>1</sub>	Y <sub>0</sub>	Y <sub>1</sub>	Y <sub>2</sub>	Y <sub>K</sub>
0	1	1	1	1
1	1	1	1	0

$$Y_0 = 1$$

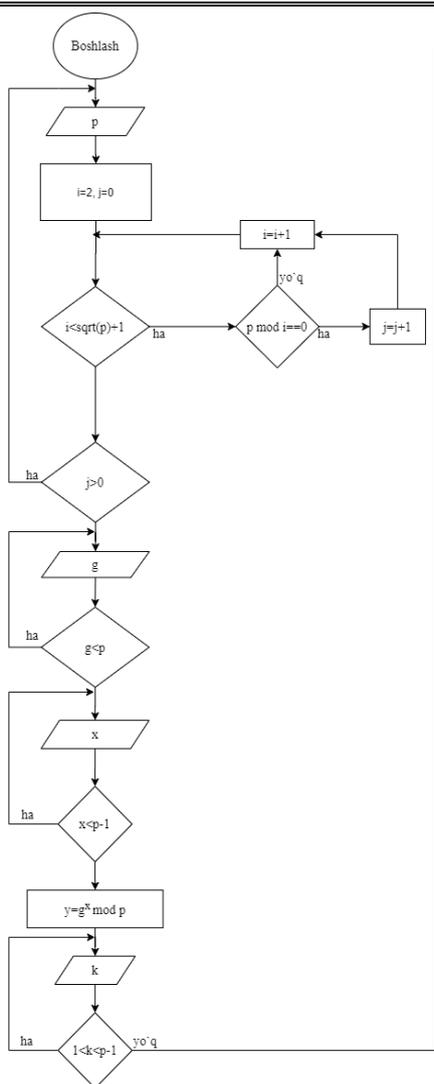
$$Y_1 = 1$$

$$Y_2 = 1$$

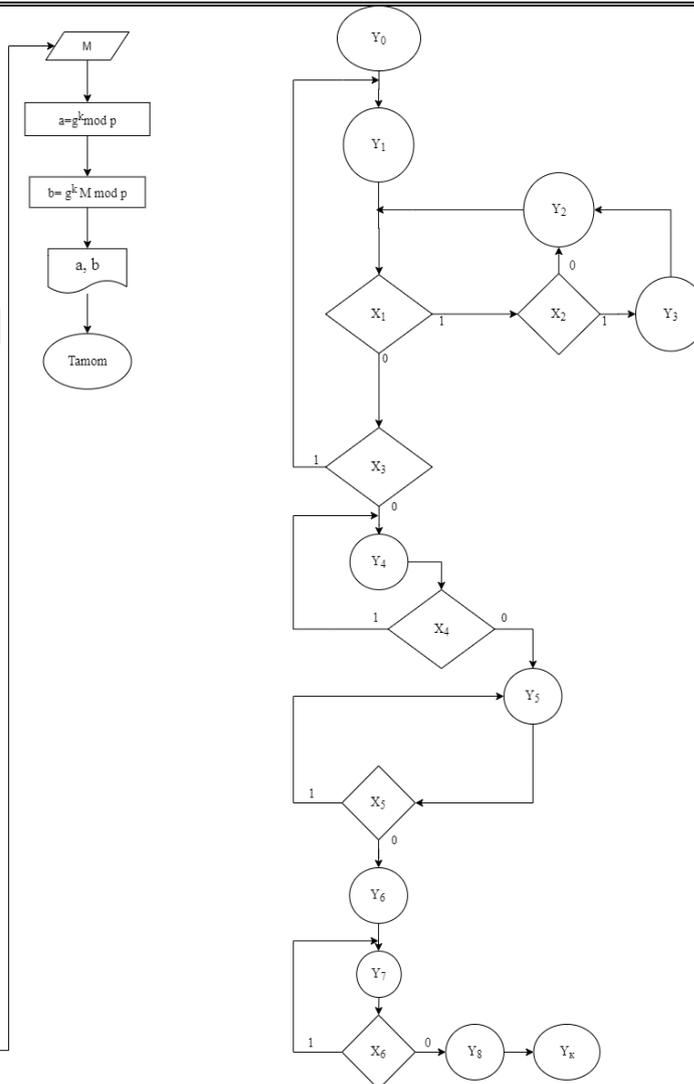
$$Y_K = \bar{x}_1$$

AddRoundKey algoritmining  
 mikrobuyruqlarining algebraik ko‘rinishi

EL-GAMAL asimmetrik shifrlash algoritmini bul funksiya ko‘rinishida ifodalash uchun Graf sxemaga o‘tgan holda so‘ng har bir mikroavtomat buyruqlarni bul funksiya ko‘rinishda ifodalash mumkin.



9-rasm. (EL-GAMAL ochiq kalitli shifrlash algoritmi blok sxemasi)



10-rasm. EL-GAMAL ochiq kalitli shifrlash algoritmi BS

EL-GAMAL ochiq kalitli shifrlash algoritmi Graf sxemasiga bog‘liq ravishda algoritmning matritsa sxemasini keltiramiz

4-jadval. EL-GAMAL ochiq kalitli shifrlash algoritmi

	Y <sub>1</sub>	Y <sub>2</sub>	Y <sub>3</sub>	Y <sub>4</sub>	Y <sub>5</sub>	Y <sub>6</sub>	Y <sub>7</sub>	Y <sub>8</sub>	Y <sub>K</sub>
Y <sub>0</sub>	1								
Y <sub>1</sub>	$\bar{x}_1x_3$	$x_1$	$x_1x_2$	$\bar{x}_1\bar{x}_3$					
Y <sub>2</sub>	$\bar{x}_1x_3$	$x_1$		$\bar{x}_1\bar{x}_3$					
Y <sub>3</sub>		1							
Y <sub>4</sub>				$x_4$	$\bar{x}_4$				
Y <sub>5</sub>					$x_5$	$\bar{x}_5$			
Y <sub>6</sub>			$x_1x_2$				1		
Y <sub>7</sub>							$x_6$	$3\bar{x}_6$	
Y <sub>8</sub>									1

$$Y_0 = Y_1$$

$$Y_1 = \bar{x}_1x_3Y_1 \vee x_1Y_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3Y_4$$

$$Y_2 = Y_1$$

$$Y_3 = Y_2$$

$$Y_4 = x_4Y_4 \vee \bar{x}_4Y_5$$

$$Y_5 = x_5Y_5 \vee \bar{x}_5Y_6$$

$$Y_6 = Y_7$$

$$Y_7 = x_6Y_7 \vee \bar{x}_6Y_8$$

$$Y_8 = Y_K$$

EL-GAMAL ochiq kalitli shifrlash algoritmi algoritmining mikrobuyruqlarining algebraik ko‘rinishi

algoritmining MSA

5-jadval. EL-GAMAL ochiq kalitli shifrlash algoritmi algoritmining rostlik jadvali

X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	X <sub>4</sub>	X <sub>5</sub>	X <sub>6</sub>	Y <sub>0</sub>	Y <sub>1</sub>	Y <sub>2</sub>	Y <sub>3</sub>	Y <sub>4</sub>	Y <sub>5</sub>	Y <sub>6</sub>	Y <sub>7</sub>	Y <sub>8</sub>	Y <sub>K</sub>
1	0					1	1	1	0						0
1	0					1	1	1	0						0
1	1					1	1	1	1						0
1	1					1	1	1	1						0
0		0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1
0		0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0
0		0	0	1		1	1	0	0	1	1				0
0		0	1	0		1	1	0	0	1					1
0		0	1	1		1	1	0	0	1					1

$$\begin{array}{lll}
Y_0 = 1 & Y_5 = \bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_4 & Y_5 = \bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_4 \\
Y_2 = x_1 & Y_6 = \bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_4\bar{x}_5 & Y_6 = \bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_4\bar{x}_5 \\
Y_3 = x_2 & Y_7 = \bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_4\bar{x}_5 & Y_7 = \bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_4\bar{x}_5 \\
Y_4 = x_1x_3 & Y_8 = \bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_4\bar{x}_5\bar{x}_6 & Y_8 = \bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_4\bar{x}_5\bar{x}_6 \\
Y_K = \bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_4\bar{x}_5\bar{x}_6 & & Y_K = \bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_4\bar{x}_5\bar{x}_6
\end{array}$$

EL-GAMAL ochiq kalitli shifrlash algoritmi algoritmining mikrobuyruqlarining algebraik ko‘rinishi

Tahlil va natijalar (Analysis and results).

Algoritmardagi mikrobuyruq ko‘rinishlarini topish. Mikrobuyruqlarni ko‘rinishlari Blok sxema, Graf sxema, Matritsa sxema algoritmlari ketma-ketlikda aniqlanadi o‘rtada biron shaklni tashlab ketish undan keyingi shaklni aniqlashga murakkablik tug‘diradi.

Tahlil uchun o‘rganilayotgan AES simmetrik va El-Gamal assimetrik shifrlash algoritmlariga asoslangan shifrlash yaratishda AES simmetrik, El-Gamal ochiq kalitli shifrlash algoritmining mikrobuyruqlarining algebraik ko‘rinishidan soddalashgan holatlardagi mikrobuyruqlardan o‘zoro tenglarini bittasini qoldirish yetarli bo‘ladi.

Xulosa va takliflar(Conclusion/Recommendations). Algoritmning mikrobuyruqlarini optimal shaklda yozish bizga qurilmani energiya, xotira va vaqt resurslaridan optimal foydalanish imkonini beradi. Shuningdek, qattiq qurilmalarda xotira va energiya cheklanganligini hisobga olinganda bu bizga qattiq qurilmalarni tanlov imkoniyatimizni oshirishga xizmat qiladi. Shuningdek, bu bizga shifrlash qurilmasini samarali ishlashga imkon yaratadi. Shifrlash qurilmalari tez, ishonchli va tejamkor ishlash tizimini yaratilishi va uning amaliyotga joriy qilinishi milliy axborot resurslarini ishonchli himoyasini ta‘minlaydi.

### Adabiyotlar

1. С.И.Баранов “Синтез микропрограммных автоматов(схемы и автоматы)”// Ленинград 1979.
2. А.А. Ожиганов “Теория автоматов” Учебное пособие// Санкт-Петербург 2013
3. Milliy axborot-kommunikatsiya tizimlarining kompyuter xavfsizligini ta‘minlash borasidagi qo‘shimcha chora-tadbirlar to‘g‘risida. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining Qarori. -T., 2005 yil 5 sentabr, PQ-167-son.
4. Карпов Ю.Г. “Теория автоматов”// Питер, 2003.
5. Наумкина Л.Г. Цифровая схемотехника// М.: Горная книга, 2008.

UDK 004.93

**KO‘ZNING RANGDOR PARDASI TASVIRI BO‘YICHA SHAXSNI IDENTIFIKATSIYALASH MASALIDA QAROR QABUL QILISH UCHUN BO‘SAG‘AVIY QIYMATLARNI TANLASH USULLARI****Sh.X. Fozilov<sup>1</sup>, O.R. Yusupov<sup>2</sup>**<sup>1</sup>TATU huzuridagi axborot-kommunikatsiya texnologiyalari ilmiy-innovatsion markazi,<sup>2</sup>Samarqand davlat universiteti

**Annotatsiya.** Maqola shaxsni identifikatsiyalash masalida qaror qabul qilish uchun bo‘ sag‘aviy qiymatlarni tanlash mezonlarining statistik usullarini tadqiq etishga bag‘ishlangan bo‘lib, Bayes, Neyman-Pirson va minimaks mezonlari asoslangan Xemming masofasi asosida bo‘ sag‘aviy qiymatlarni aniqlashga qaratilgan masala o‘rganilgan. Ushbu mezonlardan vaziyatga bog‘liq holda shaxsni ko‘zning rangdor pardasi tasviri bo‘yicha tanib olish tizimlarida foydalanish bo‘yicha tavsiyalar berilgan.

**Kalit so‘zlar:** biometrik texnologiya, ko‘zning rangdor pardasi, identifikatsiya, Xemming masofasi, Bayes mezoni, Neyman-Pirson mezoni, Minimaks mezoni.

**Методы выбора пороговых значений для принятия решений в задаче идентификации личности по изображению радужной оболочки глаз**

**Аннотация.** Статья посвящена исследованию статистических методов выбора критериев пороговых значений для принятия решений в задачах идентификации личности, а также изучению проблемы определения пороговых значений на основе расстояния Хэмминга основанного критериев Байеса, Неймана-Пирсона и минимаксного критерия. Приведены условия применения этих критериев в системах распознавания личности по изображению радужного оболочки глаза.

**Ключевые слова:** биометрическая технология, радужка, идентификация, расстояние Хэмминга, байесовский критерий, критерий Неймана-Пирсона, минимаксный критерий.

**Methods of choosing border values to make decisions on the problem of iris identification of the person**

**Abstract.** The study is devoted for statistical methods of threshold values selection for decision making in the case of iris identification, and the problem of determining threshold values according to Hamming distance based on Bayesian, Neumann-Pearson and minimax criteria is studied in the article. Depending on the situation, the use of these criteria in the iris recognition systems is recommended.

**Key words:** biometric technology, iris, identification, Hamming distance, Bayesian criteria, Neumann-Pearson criteria, Minimax criteria.

**Kirish**

Bugungi kunda jahon hamjamiyatida axborotni himoyalash masalasi dolzarb muammolardan biri bo‘lib turibdi. Amaliyotda qo‘llanilayotgan va ko‘proq ommalashgan identifikatsiyalashning kartochka va yashirish kod kabi tizimlaridan foydalanish esa axborotning xavfsizligini ta‘minlashga qo‘yilayotgan barcha talablarga to‘liq javob bera olmay qoldi. Masalan, xavfsizlikning yetarli darajasini ta‘minlash uchun parol murakkab tuzilmaga ega bo‘lishi talab etiladi. Parolning murakkabligi esa harflar, raqamlar va belgilardan birgalikda foydalanish orqali ta‘minlanadi. Shu bilan birgalikda har bir axborot resursi uchun o‘z yashirin kodini yaratish talab etiladi. Ba‘zi hollarda esa foydalanuvchi o‘zining yashirin kodini esdan chiqarishi yoki boshqa shaxslar tomonidan o‘zlashtirilishi,

kartochkalar esa yo'qotilib qo'yilishi mumkin [1,2,3]. Bunday holatlar esa axborotning xavfsizlik darajasi ta'minlanishiga keskin salbiy ta'sir ko'rsatadi. Shuning uchun ham keyingi yillarda shaxsni tanib olish jarayonida yuqoridagi kamchiliklarda xoli bo'lgan, shaxsni bevosita o'zida saqlaydigan biometrika usullari qo'llanilmoqda.

Biometrik texnologiyalar bugungi kunda quyidagi sohalarda faol qo'llanilmoqda: mashina qurilmasi orqali o'qiladigan xorijga chiqish hujjatlari va vizalardagi shaxsiy ma'lumotlarni himoyalash; hatto shaxsini tasdiqlovchi hujjatlari bo'lmagan holda ham biometrik identifikatorlarni qo'llab muxojirlar va xorijlik ishchilarni hisobga olish; jabrlanganlarni (noma'lum jasadlarni) tanib olish va bolalarni o'g'irlashdan himoyalash; ob'ektlarni kirishga ruxsat etilmagan shaxslardan himoyalash; ovoz berish tizimida; kompyuterlar, smartfonlar va noutbuklarning operatsion tizimlarini ishga tushirish va unga kirish; tashqi tashuvchilarda saqlanayotgan ma'lumotlarni unga kirishga ruxsati bo'lmagan shaxslardan himoyalash; xaridga to'lovni amalga oshirish; korxonalar va tashkilotlarda ish vaqtini hisobga olish tizimida; aholiga ijtimoiy yordam va tibbiy xizmatni taqsimlashni tashkil etish va boshqalarda.

Hozirgi kunda identifikatsiyalash uchun yuz tasviri, barmoq izi, ko'zning rangdor pardasi va ko'zning to'r pardasi tasviri, ovoz signali kabi shaxsning noyob xususiyatlaridan foydalanilmoqda [4,5,6,7]. Bu biometrik parametrlar asosida shaxsni tanib olish tizimlari orasida ko'zning rangdor pardasi bo'yicha shaxsni biometrik identifikatsiyalash bugungi kunda eng istiqbolli yo'nalishlardan biri hisoblanadi va u turli sohalarda, masalan hukumat, harbiy, sud, huquq-tartibot, moliya muassasalaridagi maxfiy va xizmat binolariga kirishni nazorat qilishda, lokal va kompleks tizimlarga kirishni cheklashda, avtomatlashtirilgan chegaraviy nazoratni amalga oshirish va boshqalarda qo'llanilmoqda [3]. Buning asosiy sababi bo'lib, ko'zning rangdor pardasining quyidagi o'ziga xos xususiyatlari hisoblanadi [8]:

- noyoblik. Ko'zning rangdor pardasi tasviri yuqori darajadagi tasodifiylikka ega, tasodifiylik darajasi qanchalik yuqori bo'lsa, aniq tasvirning noyoblilik ehtimoli shunchalik katta bo'ladi. Tasodifiylik matematik nuqtai nazardan erkinlik darajasi bilan tavsiflanadi. Tadqiqotlar shuni ko'satdiki, ko'zning rangdor pardasi teksturasi 250 ta erkinlik darajasiga ega bo'lib, u barmoq izining erkinlik darajasi (35) va yuz tasviri erkinlik darajasi (20) dan ancha yuqori [8, 9];

- genetik bog'likmaslik. Ko'zning rangdor pardasining noyobliligi, uning genetik bog'likmasligi bilan muvofiqlashgan bo'lib, u hattoki egizaklarda ham farqlanadi [8, 10].

- yuqori darajadagi informativlik. Ko'zning rangdor pardasi kichik detallardan tashkil topgan murakkab tasvirga ega bo'lib, ko'plab belgilar to'plamini o'z ichiga oladi;

- tanib olish natijasining yoshga bog'likmasligi. Ko'zning rangdor pardasi rangi o'zgarishi mumkin, ammo uzor (naqsh chiziqlari) doimiy bo'lib qoladi [8];

- kontaktsizlik, ya'ni shaxsni optik qurilmalar bilan qayd etishda fizik kontaktning mavjud emasligi va masofadan tanib olish (10 sm dan 1-3 metrgacha) imkoniyati.

Qayd etilganlar esa, shaxsni tanib olish uchun yuqori ishonchli biometrik tizimlarda ko'zning rangdor pardasidan shaxsni boshqa shaxsdan farqlovchi barqaror, yaxshi ifodalangan va yuqori informativli biometrik ob'ekt sifatida foydalanish mumkinligini ko'rsatadi.

### **Asosiy qism**

Ko'zning rangdor pardasi tasviri bo'yicha shaxsni identifikatsiyalashni formallashtirilgan tanib olish masalasi keltirish mumkin va ushbu shaxsni identifikatsiyalash tizimi quyidagi uchta asosiy bosqichni o'z ichiga oladi: dastlabki tasvirga ishlov berish; tasvirni tasniflovchi belgilarni ajratib olish; ko'zning rangdor pardasi informativ belgilarini ma'lumotlar bazasidan olingan ko'zning rangdor pardasi informativ belgilari bilan taqqoslash. Dastlabki tasvirga ishlov berish jarayoni esa o'z navbatida quyidagi uch bosqichga bo'linadi: ko'zning rangdor pardasi sohasini lokallashtirish, ko'zning rangdor pardasi tasvirini normallashtirish va tasvir sifatini yaxshilash. Ko'zning rangdor pardasi sohasini

lokallashtirish uning ichki va tashqi chegaralarini aniqlashga imkon berdi. Ichki va tashqi chegaralar odatda aylanalar sifatida qaraladi. Ammo, bu aylanalar konsentrik aylanalar emas [11]. Shuning uchun ham ularning o'rnini to'g'ri aniqlash ko'zning rangdor pardasi tasviriga ishlov berishdagi dastlabki muhim qadam bo'lib hisoblanadi.

Ko'zning rangdor pardasi tasviri bo'yicha shaxsni tanib olish jarayonidagi yakuniy bosqich qayta ishlov berish uchun taqdim etilgan tasvirni ma'lumotlar bazasida qayd etilgan tasvirlar bilan taqqoslash orqali taqdim etilgan tasvirni qaysi sinfga tegishligini aniqlashdan iborat. Tasvirlar o'xshashligini baholashning ikkita usuli mavjud bo'lib, ulardan biri ko'p o'lchovli belgilar fazosida tasvirlar o'rtasidagi masofani hisoblash, ikkinchisi esa tasvirlar o'rtasidagi korrelyatsion bog'liqlikni aniqlashdan iborat. Masofani hisoblashda taqqoslanayotgan tasvirlar orasidagi masofa kichik bo'lsa ikkita tasvir bitta sinfga tegishli, aks holda esa tegishli emas deb hisoblanadi. Taqqoslanayotgan tasvirlarning korrelyatsion bog'liqligi yuqori bo'lsa ular bir-biriga o'xshash aks holda esa o'xshash emas deb hisoblanadi.

Ikkita ko'zning rangdor pardasi kodlarining o'rtasidagi o'xshashlikni aniqlash uchun Xemming masofasi ( $HD$ ) dan foydalanamiz:

$$HD = \frac{1}{N - M} \sum_{i=1}^N (X_i \oplus Y_i) \wedge X_{ni} \wedge Y_{ni}, \quad (1)$$

bu yerda  $M = \sum_{k=1}^N (X_{nk} \vee Y_{nk})$ ,  $X_i$  va  $Y_i$  lar taqqoslanayotgan ko'zning rangdor pardasi tasvirlarini xarakterlovchi binar belgilarining qiymatlari,  $X_{ni}$  va  $Y_{ni}$  lar taqqoslanayotgan tasvirlardagi ko'zning rangdor pardasi sohasiga ta'sir etuvchi shovqinlarning binar qiymatlari,  $N$  esa ko'zning rangdor pardasi tasvirini xarakterlovchi binar belgilar soni. Agar taqqoslanayotgan ko'zning rangdor pardasi tasvirlarini xarakterlovchi barcha binar belgilar ustma-ust tushsa, Xemming masofasi qiymati 0 ga teng, birorta ham belgi ustma-ust tushmasa Xemming masofasi 1 ga tengdir. Demak, Xemming masofasining qiymati  $[0,1]$  kesmada bo'ladi [4, 12].

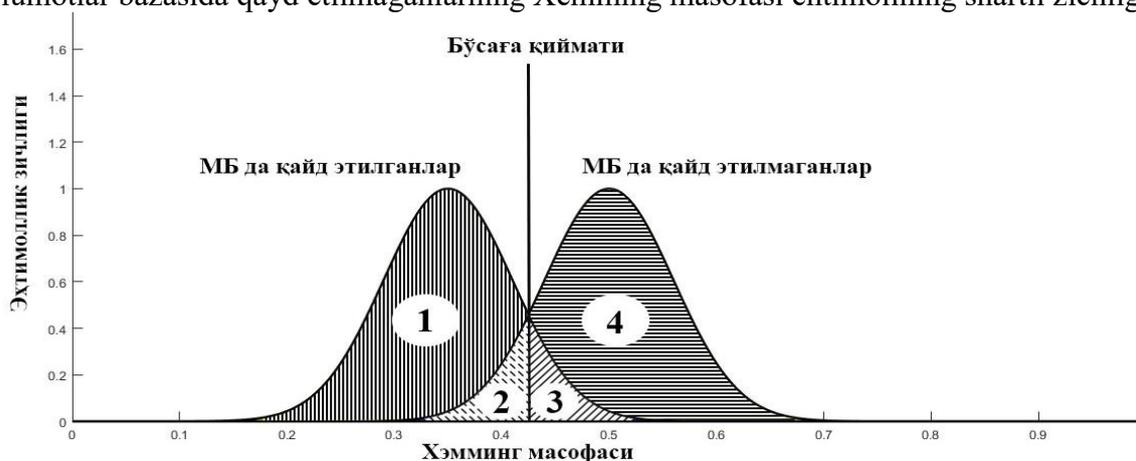
Ma'lumotlar bazasida qayd qilingan va qayd qilinmagan ko'zning rangdor pardasini xarakterlovchi binar belgilar qiymatlari ustma-ust tushishi haqida qaror qabul qilishda to'rtta holat mavjud bo'lib, ularning ikkitasida yechim to'g'ri va qolgan ikkitasida esa yechim noto'g'ri bo'ladi. Bu yechimlarning o'zaro bir-biriga bog'ligi 1-rasmda keltirilgan. Ushbu rasmdan ko'rinib turibdiki, ustma-ust tushadigan va ustma-ust tushmaydigan binar belgilari uchun ehtimollik taqsimoti kesishadigan sohasi mavjud.

1-rasmda keltirilgan sohalar quyidagi holatlarni taqdim etadi: 1-ma'lumotlar bazasida qayd etilgan va tanib olingan shaxslar; 2-ma'lumotlar bazasida qayd etilmagan, lekin tizim tomonidan tanib olingan shaxslar; 3-ma'lumotlar bazasida qayd etilgan, lekin tizim tomonidan tanib olinmagan shaxslar; 4-ma'lumotlar bazasida qayd etilmagan va tizim tomonidan tanib olinmagan shaxslar. Bu sohalar har biri o'tkazilgan tajriba sinov natijalari bo'yicha o'rtachalashgan ma'lumotlarni ifodalab, ulardan 2-soha birinchi tur xatolikni, 3-soha esa ikkinchi tur xatolikni aks ettiradi. Shuni ta'kidlash lozimki, shaxsni biometrik tanib olishning mavjud tizimlarida bo'sag'aviy qiymat  $TH_k$  barcha ko'zning rangdor pardasi tasvirlarining mosligini tekshirishda o'zgarmaydi.  $HD < TH_k$  shart bajarilishi, ko'zning rangdor pardasi tasvirini xarakterlovchi binar belgilari mos tushishini, aks holda esa mos tushmasligini belgilaydi [12].

Noto'g'ri qaror qabul qilish ehtimoli  $P_{AE}$  quyidagi ikkita ehtimol yig'indisidan hosil bo'ladi:

$$\begin{aligned}
 P_{AE} &= P_{SE} + P_{DE}, \\
 P_{SE} &= \int_{TH}^1 P_{sam}(x) dx, \\
 P_{DE} &= \int_1^{TH} P_{diff}(x) dx,
 \end{aligned} \tag{2}$$

bu yerda  $P_{SE}$ -ma'lumotlar bazasida qayd etilgan shaxsni qayd etilmagan deb hisoblash ehtimoli,  $P_{DE}$ -qayd etilmagan shaxsni qayd etilgan deb hisoblash ehtimoli,  $P_{sam}$ -ma'lumotlar bazasida qayd etilganlarning Xemming masofasining ehtimolini shartli zichligi,  $P_{diff}$ -ma'lumotlar bazasida qayd etilmaganlarning Xemming masofasi ehtimolining shartli zichligi.



**1-rasm. Xemming masofasini qiymatlarining shartli ehtimollik taqsimoti**

Qabul qilinadigan qarorning sifati esa kesishgan sohadagi ehtimolli taqsimot miqdori bilan aniqlanadi. Ko'zning rangdor pardasi tasviri bo'yicha shaxsni tanib olish sifatining oshishi ma'lumotlar bazasida qayd etilganlarning Xemming masofalarini o'rtacha qiymati bilan qayd etilmaganlarning Xemming masofalarini o'rtacha qiymati o'rtasidagi masofani kattalashi yoki dispersiya qiymatini kamayishi orqali belgilanadi.

Ikki sinfning ajralishini miqdoriy tavsiflash uchun ajraluvchanlik mezoni  $d'$  dan foydalanish mumkin [13]:

$$d' = \frac{|\mu_s - \mu_d|}{\sqrt{\sigma_s^2 + \sigma_d^2}}, \tag{3}$$

bu yerda  $\mu_s$ -birinchi va  $\mu_d$ -ikkinchi sinflarning matematik kutilmasi,  $\sigma_s$ -birinchi va  $\sigma_d$ -ikkinchi sinflarning o'rtacha kvadratik chetlanishi. Bu mezondan xarakterlovchi belgilarni sifatini baholashda foydalanish mumkin.  $d'$  ning qiymati qanchalik katta bo'lsa, belgilarning ajraluvchanlik qobiliyati shunchalik yaxshi bo'ladi. Belgilarning sifati haqida qaror qabul qilish uchun esa (3) formula orqali topilgan  $d'$  ning qiymati bo'sag'aviy qiymat  $TH_k$  bilan solishtiriladi. Bo'sag'aviy qiymatni topish uchun Bayes, Neyman-Pirson va minimaks mezonlaridan foydalanishni keltiramiz.

Bayes mezoni qaror qabul qilishdagi o'rtacha xatarlilikning minimumini ta'minlaydi. Uni shaxsni ko'zning rangdor pardasi tasviri bo'yicha tanib olish tizimini o'zgarmas belgilar fazosida tanib olishni ko'p marotaba amalga oshirishda qo'llash maqsadga muvofiq.

Agar quyidagi shart bajarilsa

$$c_{DQ} \cdot P_{DE} \cdot P_{diff}(HD(X, Y)) > c_{SQ} \cdot P_{SE} \cdot P_{same}(HD(X, Y)) \tag{4}$$

taqqoslanayotgan ko'zning rangdor pardasi tasvirini xarakterlovchi binar belgilar ikkita sinfining bir-biriga o'xshashligi haqida qaror qabul qilinadi. Bu yerda:  $P_{diff}(HD(X, Y))$

turli sinflarga tegishli ko'zning rangdor pardasi tasvirini xarakterlovchi binar belgilar o'rtasidagi Xemming masofasi ehtimolining shartli zichligi;  $P_{same}(HD(X,Y))$  bitta sinfga tegishli ko'zning rangdor pardasi tasvirini xarakterlovchi binar belgilar o'rtasidagi Xemming masofasi ehtimolining shartli zichligi;  $c_{DQ}$  ma'lumotlar bazasida qayd etilganlarni qayd etilmagan deb hisoblash natijasida vujudga keladigan yo'qotishning bahosi (qiymati);  $c_{SQ}$  ma'lumotlar bazasida qayd etilmaganlarni qayd etilgan deb hisoblash natijasida vujudga keladigan yo'qotishning bahosi (qiymati);  $P_{SE}$ -ma'lumotlar bazasida qayd etilgan ko'zning rangdor pardasi tavsirini xarakterlovchi binar belgilarini qayd etilmagan deb hisoblash ehtimoli;  $P_{DE}$ -ma'lumotlar bazasida qayd etilmagan ko'zning rangdor pardasi tavsirini xarakterlovchi binar belgilarini qayd etilgan deb hisoblash ehtimoli.

Neyman-Pirson mezonini qo'llash uchun esa ma'lumotlar bazasida qayd etilmagan shaxs uchun faqat tanib olish tizimi orqali beriladigan ruxsatning maksimal ehtimoli  $P_{DEmax}$  ni aniqlash talab etiladi. Neyman-Pirson mezonini qo'llash natijasida bo'sag'aviy qiymat  $TH_k$  quyidagi tenglamadan topiladi:

$$\int_0^{TH_k} P_{diff}(X) d(x) = P_{DEmax} . \quad 5$$

Agar taqqoslanayotgan ko'zning rangdor pardasi tasvirlarining taqqoslashda o'xshash va o'xshash emasligini aniqlashga imkon beruvchi hodisalarning aprior ehtimolini baholash mumkin bo'lmasa, u holda minimaks mezonini qo'llash maqsadga muvofiq hisoblanadi. Minimaks mezon maksimal yo'qotishning minimumini ta'minlaydi. Minimaks mezonidan foydalanishda Xemming masofasining bo'sag'aviy qiymati quyidagi tenglamadan topiladi:

$$c_{DQ} \int_{TH_k}^1 P_{diff}(x) dx = c_{SQ} \int_0^{TH_k} P_{same}(x) dx . \quad 6$$

Keltirilgan mezonlardan vaziyatga bog'liq holda shaxsni ko'zning rangdor pardasi tasviri bo'yicha tanib olish tizimlarida foydalanish tavsiya etiladi.

Biometrik tanib olish tizimlarining ishlash samaradorligini belgilashda quyida keltirilgan ko'rsatgichlardan foydalaniladi.

*FRR (False rejection Rate)* tizimda qayd etilgan foydalanuvchining kirishini xatolik bilan taqiqlash ehtimoli yoki birinchi tur xatolik [14]. Bu ko'rsatgich qiymatini hisoblash quyida keltirilgan (7) formula orqali amalga oshiriladi.

$$FRR = \frac{\int_0^{TH_k} P_{same}(x) dx}{\int_0^1 P_{same}(x) dx} . \quad (7)$$

*FAR (False Acceptance Rate)* tizimda qayd etilmagan foydalanuvchini o'tkazib yuborish ehtimoli yoki ikkinchi tur xatolik [14]. Bu ko'rsatgich qiymatini hisoblash quyida keltirilgan (8) formula orqali amalga oshiriladi.

$$FAR = \frac{\int_0^{TH_k} P_{diff}(x) dx}{\int_0^1 P_{diff}(x) dx} . \quad (8)$$

*EER (Equal Error Rate)* tanib olish tizimining xatolik o'lchovi. *FAR* bilan *FRR* qiymati bir-biriga teng bo'lgandan, *EER* ning qiymati *FRR* qiymati teng bo'ladi. *EER* ning qiymati qanchalik kichik bo'lsa, tanib olish tizimining aniqligi shuncha yuqori bo'ladi [14].

**Adabiyotlar**

1. Юсупов О.Р. Биометрические системы идентификации личности по радужной оболочке глаза // Научный вестник СамГУ, 2016. – Т. 95. №1. – С. 61–66.
2. Юсупов О.Р. О необходимости системного подхода анализу биометрических информации// Фан, таълим ва ишлаб чиқариш интеграциясида ахборот-коммуникация технологияларини қўллашнинг ҳозирги замон масалалари. Республика илмий-техник анжумани. Нукус, 2-қисм. 2015й. 371-373 б.
3. Юсупов О.Р. О перспективах идентификации личности по радужной оболочке глаза// Фан, таълим ва ишлаб чиқариш интеграциясида ахборот-коммуникация технологияларини қўллашнинг ҳозирги замон масалалари. Республика илмий-техник анжумани. Нукус, 2-қисм. 2015й. 374-376 б.
4. Журавлев Ю.И., Камилев М.М., Туляганов Ш.Е.. Алгоритмы вычисления оценок и их применение //Узбекской ССР. Изд. «Фан», 1974. – 120 с.
5. Фазылов Ш.Х., Раджабов С.С., Мирзаева Г.Р. Алгоритмы, используемые при создании системы идентификации личности на основе анализа изображения лица //International Conference Dedicated to the 1235th Anniversary of Muhammad al-Khwarizmi “Importance of information-communication technologies in innovative development of sectors of economy”. – Tashkent, 2018. P. 794–797.
6. Фазылов Ш.Х., Мирзаев Н.М., Раджабов С.С. Выделение геометрических признаков лица человека на изображении при идентификации личности // Естественные и технические науки, 2008. – №2. – С. 321–327.
7. Юсупов О.Р. Сравнение математический методы сегментации изображении радужной оболочке глаза// Mathematical Analysis and its Application Mathematical Physics: international scientific conference. September 17-20, 2018 y. Samarkand.
8. Фозилов Ш.Х., Юсупов О.Р. Кўзнинг рангдор пардаси тасвири асосида шахсни таниб олиш муаммоларининг замонавий ҳолати// Информатика ва энергетика муаммолари. -2019 -№1(2019).11-22 б.
9. International center for disability resources on the internet. – URL : [http://www.icdri.org/biometrics/iris\\_biometrics.htm](http://www.icdri.org/biometrics/iris_biometrics.htm)
10. BioMedical engineering online. – URL: <http://www.biomedical-engineering-online.com>
11. Ma L., Wang Y., Tan T. Iris recognition based on multichannel Gabor filtering. Proc. 5th Asian Conf. Computer Vision, vol. 1, pp. 279-283, 2002.
12. Тавбоев С.А, Юсупов О.Р. Об одном способе обнаружения некоторых подделок в изображениях глаз// «Современное состояние и перспективы применения информационных технологий в управлении» Доклады республиканской научно-технической конференции. Джизак, 5-6 сентября 2016 г.
13. Daugman J. The Importance of Being Random: Statistical Principles of Iris Recognition. Pattern Recognition, vol.36, pp. 279-291, 2003.
14. Юсупов О.Р. Основы принципы работы биометрических систем// Иқтисодиёт тармоқлари ривожланишини таъминловчи фан, таълим ҳамда модернизациялашган энергия ва ресурс тежамкор технологиялар, техника воситалари: муаммолари, ечимлари, истиқболлар. Илмий-техника анжуман материаллари тўплами.-Жиззах, 2016 йил 15-16 апрел.

УДК 535.361

**МОРФОЛОГИЧЕСКИЕ, СТРУКТУРНЫЕ И ЛЮМИНЕСЦЕНТНЫЕ  
СВОЙСТВА МИКРОПОРОШКОВ САПФИРА****Рахматуллаев И.А.<sup>1</sup>, Турсункулов О.М.<sup>1</sup>, Хайдаров Х.С.<sup>2</sup>**<sup>1</sup>Центр передовых технологий при Министерстве инновационного  
развития Республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан<sup>2</sup>Самаркандский государственный университет, Самарканд, Узбекистан[ilyoss@rambler.ru](mailto:ilyoss@rambler.ru)

**Аннотация.** Методами сканирующей электронной микроскопии и фотолюминесценции исследованы морфологические, структурные и люминесцентные свойства микропорошков сапфира. Установлено, что люминесцентные свойства образцов существенным образом зависят от типа собственных точечных дефектов кристаллов сапфира, а также от примесей присутствующих в образцах. Показано, что примеси кремния и кальция, даже при малых концентрациях, могут существенным образом влиять на люминесцентные свойства микропорошков сапфира.

**Ключевые слова:** сапфир, морфология, структура, люминесценция, порошок, лазер, сканирующий электронный микроскоп, рентгеновский энергодисперсионный анализ.

**МИКРОН ЁЛЧАМДАГИ САПФИР КУКУНЛАРИНИНГ МОРФОЛОГИК,  
СТРУКТУРАЛИ ВА ЛЮМИНЕСЦЕНТ ХОССАЛАРИ**

**Аннотация.** Сканирловчи электрон микроскоп ва фотолюминесценция усуллари ёрдамида микрон ёлчамдаги сапфир кукунларининг морфологик, структурали и люминесцент хоссалари ўрганилган. Намуналарнинг люминесцент хоссалари сапфир кристалларидаги мавжуд нуқтавий нуқсонлар турлари ҳамда намунадаги кириншмалардан боғлиқлиги аниқланган. Ўта кичик миқдордаги кремний ва кальций киришмалари микрон ёлчамдаги сапфир кукунларининг люминесцент хоссаларига етарли даражада таъсир қилиши кўрсатиб ўтилган.

**Калит сўзлар:** сапфир, морфология, структура, люминесценция, кукун, лазер, сканирловчи электрон микроскоп, рентгенли энергодисперсион таҳлил.

**MORPHOLOGICAL, STRUCTURAL AND LUMINESCENT PROPERTIES  
OF SAPPHIRE MICROPOWDERS**

**Abstract.** Using scanning electron and photoluminescence methods, the structural and luminescent properties of sapphire micropowders were studied. It was found that the luminescent properties of the samples substantially depended on the type of point defects intrinsic to the sapphire crystals, as well as on the impurities present in the samples. We show that impurities of silicon and calcium, even at low concentrations, can significantly affect the luminescent properties of sapphire micropowders.

**Keywords:** sapphire, morphology, structure, luminescence, powder, laser, scanning electron microscope, X-ray energy dispersive analysis.

**Введение**

В настоящее время одним из перспективных направлений развития современной микро- и нанoeлектроники является создание приборов и структур «кремний на изоляторе» [1,2]. Пластины сапфира ( $\alpha\text{-Al}_2\text{O}_3$ ), одной из кристаллических модификаций  $\text{Al}_2\text{O}_3$ , успешно применяются при изготовлении радиационно-стойких структур типа

«кремний на сапфире» (КНС) [2,3]. Сапфир, являющийся широкозонным оксидом ( $E_g \approx 9$  эВ), в данное время широко применяется в науке и электронной технике благодаря своим уникальным физико-химическим свойствам. Он обладает высокой термической (температура плавления — 2050 °С), механической (твёрдость по шкале Мооса — 9) и химической (не растворяется в кислотах и щелочах до 300 °С) стойкостью [4]. Это обеспечивает надежность и стабильность параметров электронных устройств на его основе в сложных условиях эксплуатации. К преимуществам КНС-структур относятся их повышенная стойкость к радиационным воздействиям, термостойкость, низкое энергопотребление интегральных микросхем.

Аморфные пленки  $Al_2O_3$ , рассматриваются в качестве одного из вариантов замены традиционного оксида кремния при формировании сверхтонких подзатворных диэлектрических слоёв при производстве структур по КМОП-технологии [5], благодаря высокой диэлектрической проницаемости, большой ширине запрещенной зоны и высоким барьерам по отношению к границам разрешенных зон в энергетической структуре кремния [1]. С другой стороны, высокая цена и ограниченный объем поставок сырья сдерживают развитие производства синтетических монокристаллов сапфира. В последние годы для альтернативного сырьевого материала предлагается поликристаллический сапфир, получаемый методом гарниссажной плавки оксида алюминия [6].

Формирование нанокристаллического кремния (НК) nc-Si в матрице  $Al_2O_3$  экспериментально было обнаружено в ряде работ [1,5,7,8], в которых также приводятся данные об обнаружении эффективной люминесценции [9].

Следует отметить, что активное изучение радиационно-индуцированных изменений электронных, оптических и механических свойств кристаллического оксида алюминия ( $\alpha-Al_2O_3$ ) началось давно [10], однако, до сих пор имеется повышенный интерес к изучению люминесцентных свойств точечных дефектов кристаллов сапфира и сапфировых подложек [3,4].

Анализ литературных данных показал, что при экспериментальном исследовании фотолюминесценции (ФЛ) сапфира в основном изучались образцы в виде монокристаллов или плёнок. Однако, эти образцы в виде порошков изучены неудовлетворительно.

В настоящей работе для изучения собственных дефектов в порошках сапфира предложено использовать комплексную методику на основе двух методов — сканирующей электронной микроскопии и фотолюминесцентного анализа. При этом в качестве экспресс-метода определения собственных дефектов в порошках сапфира предложено использовать метод фотолюминесцентного анализа.

#### **Методика эксперимента**

Морфология поверхности и исследование микроструктуры порошков оксида алюминия осуществляли с помощью сканирующего электронного микроскопа SEM — EVO MA 10 (Carl Zeiss, Германия). Составы порошков определялись с помощью энергодисперсионного элементного анализатора марки EDX (Oxford Instrument, Великобритания) — Aztec Energy Advanced X-act SDD. Эксперименты на сканирующем электронном микроскопе проводились следующим образом. Для проведения процесса пробоподготовки, на предметный столик микроскопа устанавливался держатель из металлического сплава, поверх которого приклеена алюминиевая фольга с двухсторонней клейкой поверхностью. На эту фольгу наносились исследуемые порошки, после чего предметный столик устанавливался в рабочую камеру микроскопа, из которой откачивался воздух для создания вакуума. Для проведения

измерения на филамент подавалось ускоряющее напряжение 20 кВ. При этом рабочее расстояние составляло 8,5 мм. Изображения были получены в масштабе 20 мкм с помощью программного обеспечения SmartSEM.

Фотолюминесцентные свойства микропорошков сапфира изучались с использованием излучения от активного элемента лазера на парах меди, работающего в режиме неустойчивого резонатора. Излучение фокусировалось длиннофокусной линзой в нелинейно-оптическом кристалле ВаВ<sub>2</sub>О<sub>4</sub> [11]. Кристалл ВаВ<sub>2</sub>О<sub>4</sub> был изготовлен таким образом, чтобы условие синхронизма выполнялось для удвоения частоты исходного лазерного излучения с длиной волны 510,6 нм. Таким образом, на выходе кристалла ВаВ<sub>2</sub>О<sub>4</sub> возникало ультрафиолетовое излучение с длиной волны 255,3 нм. Излучение лазера видимого диапазона устранялось с помощью абсорбционного фильтра, помещаемого сразу после нелинейно-оптического кристалла. Коэффициент преобразования видимого излучения в ультрафиолетовое был около 1 %; полная средняя мощность генерации в двух линиях составляла 3 Вт; частота следования импульсов генерации — 10 кГц; длительность импульса — 20 нс.

Ультрафиолетовое излучение направлялось на плоскопараллельную кювету с окошками из кварца марки КУ. Рассеянное излучение собиралось системой кварцевых линз на входной щели монохроматора МСД-2. Спектральный диапазон монохроматора составлял 200–800 нм, обратная линейная дисперсия — 4,6 нм/мм. Перед входной щелью монохроматора (схема «на отражение») устанавливались абсорбционные светофильтры типа ПС-11 или ОС-11 для подавления возбуждающего излучения. Излучение после монохроматора регистрировалось с помощью фотоумножителя ФЭУ-106, работающего в режиме счета фотонов. За счёт отвода малой доли возбуждающего излучения в строб-генераторе формировался импульс длительностью 30 нс. Этот импульс вводился в систему регистрации для синхронизации с импульсом люминесценции. Строб-импульс позволял регистрировать спектры ФЛ при различных временах задержки 0–300 нс. Дифракционная решетка спектрометра поворачивалась с помощью шагового двигателя, управляемого с помощью компьютера. Время накопления сигнала при фиксированном положении дифракционной решетки изменялось в диапазоне 0.1–100 с в зависимости от интенсивности регистрируемого сигнала ФЛ. Информация от регистрирующего устройства подводилась к компьютеру и накапливалась в цифровом виде и выводилась на экран монитора компьютера. Анализируемый порошок со средним размером  $d \sim 10$  мкм помещался в кювету. ФЛ регистрировалась при комнатной температуре.

### Результаты и обсуждение

Из рассмотрения СЭМ-изображений образцов (рис. 1, а) видно, что порошки содержат агломераты различных удлинённых форм с широким распределением по размерам (6,26–14,07 мкм). Основная фракция — 6,26–10,9 мкм, однако, в небольшом количестве кристаллы достигают размера 12,98–14,07 мкм. Средний размер исследованных образцов составлял 10 мкм.

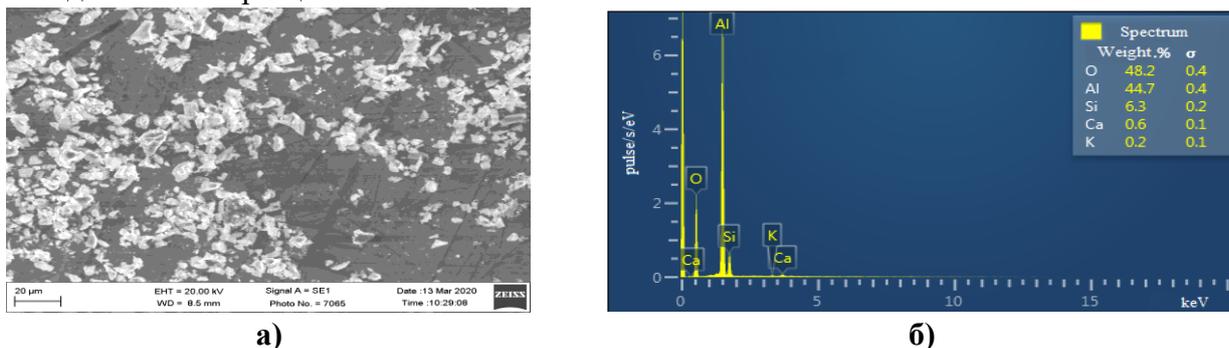


Рис. 1. СЭМ-изображение микропорошков Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> (а) и их элементный состав (б).

Результаты анализа элементного состава образцов приведены на рис. 1,б. Содержание примесей в исследуемом порошке  $\text{Al}_2\text{O}_3$  характеризовалось следующими значениями входящих компонентов в массовых долях (%): Si — 6.3; Ca — 0.6; K — 0.2.

Ранее нами [11] были исследованы спектры фотолюминесценции (ФЛ) кристаллов лейкосапфира, при их возбуждении оптической гармоникой линий (255,3 нм) сгенерированной лазером на парах меди. Для исследования были использованы чистые кристаллы лейкосапфира, а также образцы, подвергнутые  $\gamma$ -облучению, при нескольких дозах облучения. Эти кристаллы облучались источником  $^{60}\text{Co}$  мощностью 1380 Р/с. Экспериментальные исследования проводились при комнатной температуре.

На рис. 2 приведены спектры ФЛ, ранее полученные нами в работе [11] необлученного (кривая 1) и  $\gamma$ -облученных различными дозами кристаллов (кривые 2–4) лейкосапфира. Видно, что спектр ФЛ необлученного кристалла представляет собой широкую бесструктурную полосу со слабым максимумом в фиолетовой области спектра. При дозе  $10^6$  Р (кривая 2) также обнаруживается слабо выраженный максимум (показан стрелкой) с длиной волны  $\lambda_{\text{макс}} = 385$  нм. Из сравнения кривых 1–4 следует, что при увеличении дозы облучения интенсивность ФЛ возрастает. Кроме того, при этом происходит «деформация» контура с возрастанием относительной интенсивности коротковолнового крыла.

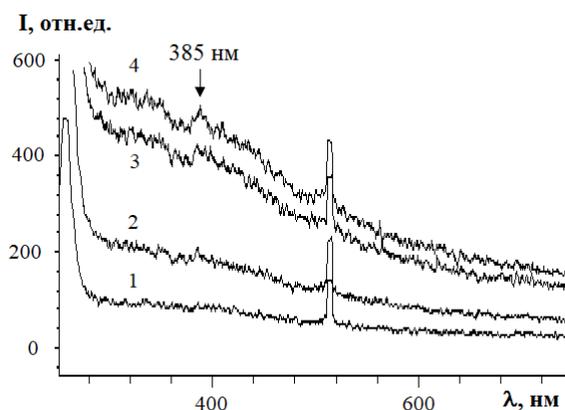


Рис. 2. Спектры ФЛ лейкосапфира, облученного дозой  $10^6$  Р (2),  $10^7$  Р (3),  $10^8$  Р (4); 1 — необлученный кристалл. Данные взяты из работы [11].

Относительно природы дефектов, ответственных за наблюдаемое поглощение, можно высказать следующие соображения. Наиболее подробное описание этих дефектов и их оптических свойств приведено в обзорах [1,12]. Известно, что при облучении кристаллов  $\text{Al}_2\text{O}_3$  высокоэнергетическими частицами [10,11] (или же в условиях в процессе роста [1,13]) приводят к появлению серии дефектов решетки, так называемых центров окраски (ЦО), ответственных за многочисленные полосы анизотропного поглощения и люминесценции в УФ и видимой области спектра. Однако необходимо отметить, что аморфизация сапфира не влияет на люминесценцию собственных дефектов  $F$ -типа, положение полос люминесценции в кристаллическом и аморфном  $\text{Al}_2\text{O}_3$  совпадают [4]. Люминесцентные свойства номинально чистого оксида алюминия главным образом определяются присутствием в нем собственных дефектов, представляющих собой вакансии в анионной подрешетке в различных зарядовых состояниях [4,10]. Основными типами анионных дефектов в кристаллах сапфира являются  $F$ - и  $F^+$ -центры, представляющие собой кислородные вакансии, захватившие два и один электрон соответственно [1,4,10,12]. Наряду с указанными центрами существуют и более сложные дефектные структуры ( $F_2$ ,  $F_2^+$ ,  $F_2^{2+}$ ), полосы поглощения

и люминесценции. Дефекты типа  $F_2$  ( $F_n$ ) — пары и комплексы вакансий, образуются при больших дозах нейтронного облучения. Они в зависимости от зарядового состояния и симметрии обеспечивают поглощение и люминесценцию в видимом и ближнем ИК диапазонах спектра [1,4].  $F_2$ -центры менее стабильны и в отличие от  $F$ - и  $F^+$ -центров характеризуются малыми значениями сдвига Стокса, то есть слабой связью с решеткой  $Al_2O_3$ . К настоящему моменту оптические свойства дефектов типа  $F_2$  ( $F_n$ ) в  $Al_2O_3$  изучены в нескольких работах [1,4,13–14]. В частности, в работе [4] авторами комплексно исследована люминесценция и термическая стабильность дефектов, образующихся в монокристаллах  $\alpha-Al_2O_3$  после импульсной обработки пучком ионов  $C^+/H^+$  с энергией 300 кэВ и длительностью импульса  $\sim 80$  нс. При этом наряду с одиночными от  $F$  и  $F^+$ -центрами были обнаружены образования более сложных дефектов: агрегатных центров  $F_2$ -типа или вакансионно-примесных комплексов. В спектрах ФЛ облученных ионами была обнаружена новая полоса свечения при 2,85 эВ (максимум возбуждения при 4,3 эВ). Однако природа центра, ответственного за люминесценцию при 2,85 эВ, не была выяснена.

Возбуждение в области 6 эВ приводит к возникновению характерных полос поглощения при 4,8 эВ (260 нм) и 5,4 эВ (пик в области 230 нм связаны с  $F^+$ -центром), а также быстрого излучения (время спада  $< 7$  нс) при 3,8 эВ (325 нм). Сопоставление спектров ФЛ показывает, что наши результаты согласуются с данными других исследователей. Поэтому нет сомнений в принадлежности возбуждаемых в этих условиях полос люминесценции к  $F^+$ -центру. Обнаружено, что интенсивность ФЛ ( $\lambda_{\text{макс}} = 385$  нм) зависит от концентрации  $F^+$ -дефекта.

Наряду с собственными дефектами  $Al_2O_3$ , вклад в ультрафиолетовую и видимую люминесценцию могут вносить примесные центры. Двухвалентные катионные примеси типа  $Ca^{2+}$  и  $Mg^{2+}$ , замещающие атомы алюминия в структуре  $F^+$ -центра несколько изменяют энергию излучательных переходов и приводят к проявлению дополнительного пика люминесценции (пик  $F_{\text{cat}}$ ) или плеча при 4,1–4,4 эВ (280–300 нм) [1,15,16].

В настоящее время оксид алюминия (наряду с  $MgO$ ,  $ZrO_2$  и другими оксидами) широко и успешно применяется в качестве диэлектрической матрицы для различных нановключений, однако число работ по НК Si в  $Al_2O_3$  весьма невелико [1]. По мнению авторов, в работе [1] встречаются противоречия в результатах немногочисленных исследований и интерпретация люминесцентных свойств НК Si в  $Al_2O_3$ . Они справедливо утверждают, что это обусловлено тем, что исследователи не всегда приводят сравнительные данные по люминесценции исходных материалов или структур, не содержащих НК, что затрудняет разделение вкладов дефектов, других светоизлучающих центров и непосредственно НК Si. Например, в работе авторы [9] связывают ФЛ в диапазоне 300–500 нм сэндвич-структур  $Al_2O_3/Al_2O_3:nc-Si/Al_2O_3$ , полученных методом лазерной абляции и последующего отжига при 300–500 °С, с квантово-размерным эффектом в НК Si с размерами  $\sim 6$  нм, совершенно не затрагивая вопрос об  $F$ -центрах, ответственных за подобную люминесценцию в слоях оксида алюминия.

В зависимости от дефектного и примесного состава  $Al_2O_3$  может содержать в себе различный набор оптических и люминесцентных характеристик в широком диапазоне спектра, которые необходимо учитывать при интерпретации природы люминесценции в этих структурах.

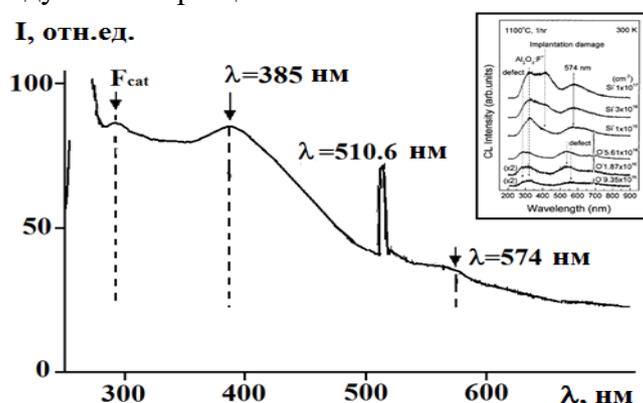
На рис.3 показан спектр ФЛ микропорошков сапфира, полученный при возбуждении второй оптической гармоникой лазера на парах меди ( $\lambda = 255,3$  нм). Как видно, что спектр ФЛ представляет собой широкую бесструктурную полосу с тремя слабыми максимумами в области 280, 385 и 574 нм. В спектре ФЛ также присутствует пик, соответствующему зеленой линии генерации лазера на парах меди ( $\lambda = 510,6$  нм).

На вставке для сравнения приведены спектры катодолюминесценции (КЛ) облученного сапфира после отжига при 1100 °С, полученные в работе [17].

Согласно литературным данным [1,15,16] полоса ФЛ (пик  $F_{\text{cat}}$ ) при 4,1–4,4 эВ (280–300 н) мможет быть связана с катионной примесью двухвалентного кальция ( $\text{Ca}^{2+}$ ) и магния ( $\text{Mg}^{2+}$ ), замещающие атомы алюминия в структуре  $F^+$ -центра. В составе исследованных порошков сапфира присутствовали примеси кремния, кальция и калия (рис. 1,б).

Полоса ФЛ при ~385 нм связана с  $F^+$ -центром, представляющий собой кислородную вакансию, захвативший один электрон [1]. Полоса ФЛ при ~574 нм обусловлена присутствием в образце атомов кремния (рис. 1,б). Эти результаты согласуются также результатами измерения других авторов [1,17] (рис. 3, вставка).

В работе было изучено влияние имплантации  $\text{Si}^+$  ( $10^{17} \text{ см}^{-2}$ ) и последующего отжига на спектр ФЛ сапфира и аморфной пленки  $\text{Al}_2\text{O}_3$ . При этом люминесценция возбуждалась импульсным азотным лазером ( $\lambda = 337 \text{ нм}$ ). В ходе исследований в аморфной пленке была обнаружена широкая полоса ФЛ при 400–650 нм («зелёная полоса») связанной либо с агрегатными  $F$ -центрами и «красная полоса» ФЛ в области 700–850 нм, типичной для НК Si в  $\text{SiO}_2$ . В случае же сапфира такая ФЛ не была обнаружена. В наших экспериментах также не удалось обнаружить «зелёных» и «красных» полос ФЛ. Отсутствие пиков поглощения в указанных областях спектра свидетельствует о низком уровне содержания  $F$ - и  $F_2$ -дефектов, а также примесей в исследуемых порошках. Результаты эксперимента показывает, что при наличии незначительной смеси калия в составе порошка не влияет на оптические характеристики исследуемого образца.



**Рис. 3.** Спектр ФЛ микропорошков сапфира, полученный при возбуждении второй оптической гармоникой лазера на парах меди ( $\lambda = 255,3 \text{ нм}$ ). На вставке приведены спектры катодолюминесценции облученного сапфира после отжига при 1100 °С, полученные в [17].

### Заключение

Таким образом, в работе проведён анализ микропорошков сапфира с применением сканирующей электронной микроскопии и детально исследован механизм возникновения спектров ФЛ в порошках сапфира, связанных как с собственными дефектами, так и с примесью Ca и Si в  $\text{Al}_2\text{O}_3$ . Предложенная методика оказывается весьма эффективной для анализа спектров ФЛ сапфира в ультрафиолетовой и видимой областях. Полученные результаты могут быть использованы для диагностики дозы облучения в ядерных реакторах, а также для создания новых лазерных материалов на базе облученных кристаллов сапфира.

## Литература

1. Горшков О.Н., Тетельбаум Д.И., Михайлов А.Н. Наноразмерные частицы кремния и германия в оксидных диэлектриках. Формирование, свойства, применение. Учебно-методический материал. – Нижний Новгород: ННГУ. – 2006. – 83 с.
2. Светлов С.П., Чалков В.Ю., Шенгуров В.Г., Дроздов Ю.Н., Красильник З.Ф., Красильникова Л.В., Степихова М.В., Павлов Д.А., Павлова Т.В., Шилиев П.А., Хохлов А.Ф. Структурные и фотолюминесцентные свойства гетероэпитаксиальных слоев кремния на сапфире // Физика твердого тела. – 2004. – Т.46, №1. – С.15-17.
3. Блецкан Д.И., Лукьянчук А.Р., Пекар Я.М. Исследование собственных и примесных точечных дефектов в сапфировых подложках люминесцентными методами // Технология и конструирование в электронной аппаратуре. – 2006. – № 3. – С.59 – 64.
4. Ананченко Д.В., Никифоров С.В., Рамазанова Г.Р., Баталов Р.И., Баязитов Р.М., Новиков Г.А. Люминесценция дефектов  $F$ -типа и их термическая стабильность в сапфире, облученном импульсными ионными пучками // Оптика и спектроскопия. – 2020. – Т.128, № 2. – С.211 – 217.
5. Wan Q., Wang T.H., Zhu M., Lin C.L. Resonant tunneling of Si nanocrystals embedded in  $Al_2O_3$  matrix synthesized by vacuum electron-beam co-evaporation // Appl. Phys. Lett. – 2002. – Vol.81, No.3. – P.538-540.
6. Данчевская М. Н., Ивакин Ю. Д., Багдасаров Х. С., Антонов Е. В., Костомаров Д. В., Панасюк Г. П. Синтетический мелкокристаллический корунд – новое сырьё для выращивания лейкосапфира // Перспективные материалы. – 2009. – №4. – С.28-33.
7. Tetelbaum D.I., Gorshkov O.N., Ershov A.V., Kasatkin A.P., V.A. Kamin, Mikhaylov A.N., Belov A.I., Gaponova D.M., Pavesi L., Ferraioli L., Finstad T.G., Foss S. Influence of the nature of oxide matrix on the photoluminescence spectrum of ionsynthesized silicon nanostructures // Thin Solid Films. – 2006. – Vol.515, No.1-2. – P.333-337.
8. Yerci S., Serincan U., Dogan I., Tokay S., Genisel M., Aydinli A., Turan R. Formation of silicon nanocrystals in sapphire by ion implantation and the origin of visible photoluminescence // J. Appl. Phys. – 2006. – Vol.100. – P.074301.
9. Ong P.P., Zhu Y. Strong photoluminescence with fine structures from sandwich-structured films of silicon nanoparticles embedded in  $Al_2O_3$  matrices // Phys. E. – 2002. – Vol.15. – P.118-123.
10. Evans B.D., Stapelbroek M. Optical properties of the  $F^+$ -center in crystalline  $Al_2O_3$  // Phys. Rev. B. – 1978. – Vol.18, No.12. – P.7089-7098.
11. Горелик В.С., Рахматуллаев И.А. Спектральные и временные характеристики фотолюминесценции кристаллов лейкосапфира при ультрафиолетовом лазерном возбуждении // Неорганические материалы. – 2004. – Т.40, № 6. – С. 716-719.
12. Evans B.D., Pogatshnik G.J., Chen Y. Optical properties of lattice defects in  $\alpha$ - $Al_2O_3$  // Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. B. – 1994. – Vol.91. – P.258-262.
13. Draeger B.G., Summers G.P. Defects in unirradiated  $\alpha$ - $Al_2O_3$  // Phys. Rev. B. – 1979. – Vol.19, No.2. – P.1172-1177.
14. Mikhailik V.B., Kraus H., Wahl D., Mykhaylyk M.S. Luminescence studies of Ti-doped  $Al_2O_3$  using vacuum ultraviolet synchrotron radiation // Appl. Phys. Lett. – 2005. – Vol.86. – P.101909.
15. Jonnard P., Bonnelle C., Blaise G., Remond G., Roques-Carmes C.  $F^+$  and  $F$  centers in  $\alpha$ - $Al_2O_3$  by electron-induced x-ray emission spectroscopy and cathodoluminescence // J. Appl. Phys. – 2000. – Vol.88, No.11. – P.6413-6417.
16. Dubois J.C., Jardin C., Exbrayat P., Lissac M., Treheux D. Influence of gamma-irradiation sterilization on the structural defects of sapphire single crystals ( $\alpha$ - $Al_2O_3$ ) // Bio-Med. Mat. Eng. – 2001. – Vol.11. – P.265-273.
17. Park C.J., Kwon Y.H., Lee Y.H., Kang T.W., Cho H.Y., Kim S., Choi S.-H., Elliman R.G. Origin of luminescence from Si-implanted ( $1\bar{1}02$ )  $Al_2O_3$  // Appl. Phys. Lett. – 2004. – Vol.84, No.14. – P.2667-2669.

---

---

УДК. 311.3:537.6:54.16

**ИЗУЧЕНИЕ ПРИРОДЫ СПИНОВЫХ ВОЛН В АМОРФНЫХ  
ФЕРРОМАГНИТНЫХ СПЛАВАХ**

**О.К.Кувандиков, И.Субханкулов,  
Д.Х.Имамназаров, Ш.А.Хомитов, Г.С.Бакаев**  
*Самаркандский государственный университет*

**Аннотация.** Для получения информации о характере структурных и магнитных превращений в аморфных сплавах исследуется температурная зависимость намагниченности. Намагниченность в области низких температур дает информацию о спиновых волнах, т.е. выполняется закон «трех вторых»  $T^{3/2}$ . Из этих зависимостей определяется константа спин-волновой жесткости  $D$ , который является характерным свойством аморфного ферромагнетика.

**Ключевые слова.** аморфные сплавы, спиновые волны, намагниченность, магнитный момент, температура Кюри, параметр обменного взаимодействия.

**AMORF FERROMAGNETIK QOTISHMALARDA SPIN  
TO'LQINLARINING TABIATINI O'RGANISH**

**Annotatsiya.** Amorf qotishmalardagi strukturaviy va magnit o'zgarishlar tabiati to'g'risida ma'lumot olish uchun magnitlanishning temperaturaga bog'liqligi o'rganiladi. Past temperaturali sohalaridagi magnitlanish kattaligi spin to'lqinlari haqida ma'lumot beradi, ya'ni " ikkidan uch "  $T^{3/2}$  qonuni bajariladi. Ushbu bog'liqliklardan amorf ferromagnetiklarning o'ziga xos xususiyatlaridan biri bo'lgan spin-to'lqin qattiqligining doimiysi  $D$  aniqlanadi.

**Kalit so'zlar.** amorf qotishmalar, spin to'lqinlar, magnitlanish, magnit moment, Kyuri temperaturasi, almashinuv ta'siri parametri.

**STUDYING THE NATURE OF SPIN WAVES IN AMORPHOUS  
FERROMAGNETIC ALLOYS**

**Abstract.** To obtain information about the nature of structural and magnetic transformations in amorphous alloys, the temperature dependence of magnetization is studied. Low-temperature magnetization provides information on spin waves, i.e. the law of "three second"  $T^{3/2}$  is fulfilled. The spin-wave rigidity constant  $D$ , which is a characteristic property of an amorphous ferromagnet, is determined from these dependences.

**Keywords.** amorphous alloys, spin waves, magnetization, magnetic moment, Curie temperature, exchange interaction parameter.

Для получения информации о характере структурных превращений, происходящих в аморфных сплавах, исследовалось температурная зависимость намагниченности насыщения с помощью вибрационного магнитометра [1].

Аморфные сплавы в виде ленты были получены методом быстрой закалки жидкого образца на поверхности быстро вращающего диска, шириной 15 мм, толщиной  $\sim 12$  мкм и длиной 10-15 м [2].

Для исследования стадий кристаллизации и идентификации промежуточных фаз, применим циклический термомагнитный анализ, заключающийся в нагреве сплавов до соответствующих температур с последующим охлаждением. Применение методов термомагнитного анализа в отличие от анализа по изменению электрофизических свойств в зависимости от температуры, позволяет получить

достоверную информацию о температуре Кюри  $T_c$ , температурах различных стадий кристаллизации  $T_k$  и  $T_c$  за кристаллизующихся фаз [3].

Кроме этого, намагниченность в области низких температур содержит информацию о спиновых волнах, уменьшение намагниченности при низких температурах в ферромагнитных аморфных сплавах по сравнению с кристаллическим объясняется термическим возбуждением длинноволновой части спектра спиновых волн [4,5].

Изменение намагниченности с температурой определяется следующим соотношением [4]:

$$I_s(T) = I_s(0) \left[ 1 - BT^{3/2} \right], \quad (1)$$

$$\frac{I_s(0) - I_s(T)}{I_s(0)} = \frac{\Delta I_s(T)}{I_s(0)} = BT^{3/2}, \quad (2)$$

Здесь

$$B = 2,612 \left( \frac{g\mu_B}{I_s(0)} \right) \left( \frac{k_B}{4\pi D} \right)^{3/2}, \quad (3)$$

Где  $g$  – фактор спектроскопического расщепления или фактор Ланде ( $g_s=2,0023$ );  $\mu_B$  – величина магнетона Бора,  $k_B$  – постоянная Больцмана;  $I_s(0)$  – намагниченность насыщения при температуре  $T=0$  К и в нулевом магнитном поле;  $D$  – константа спин-волновой жесткости, который является характерным свойством ферромагнетика, как намагниченность насыщения так и температура Кюри.

Если коллективизированный электрон с волновым вектором  $\vec{k}$  возбуждается в состояние с волновым вектором  $\vec{k} + \vec{q}$ , а его спин изменяет направление на противоположное, то он может образовать с дыркой, возникшей при его возбуждении, пару электрон-дырка с энергией  $\hbar\omega$ , которая для малых значений  $\vec{q}$  следует соотношению  $\hbar\omega = Dq^2$ , где, например, для простой кубической решетки  $D = 2ASa^2$ ,  $S$  – спиновое квантовое число (равное  $1/2$  для электрона и  $5/2$  для иона  $Fe^{3+}$  – основного магнитного иона в большинстве магнитных материалов),  $A$  – обменный интеграл, энергия обменного взаимодействия двух спинов, находящихся на расстоянии  $a$  (постоянная магнитной решетки) друг от друга,  $q$  – волновой вектор.

Величина константы  $D$  можно определить как из данных по дифракции нейтронов, так и по определению температурной зависимости намагниченности насыщения.

Из уравнения (2), строя график зависимости  $\Delta I/I$  от  $T^{3/2}$  можно определить  $B$ , а затем из уравнений (3) и (1) – коэффициент  $D$  и температуру Кюри  $T_c$ .

На рис.1 показано относительное изменение  $\Delta I/I$  в зависимости от  $T^{3/2}$  для аморфных сплавов системы  $Co-Fe-Si-B$  в зависимости от содержания металлоидов, а на рис. 2 – приведены зависимости магнитного момента и температуры Кюри исследованных аморфных сплавов  $Co-Fe-Si-B$  от содержания металлоидов.

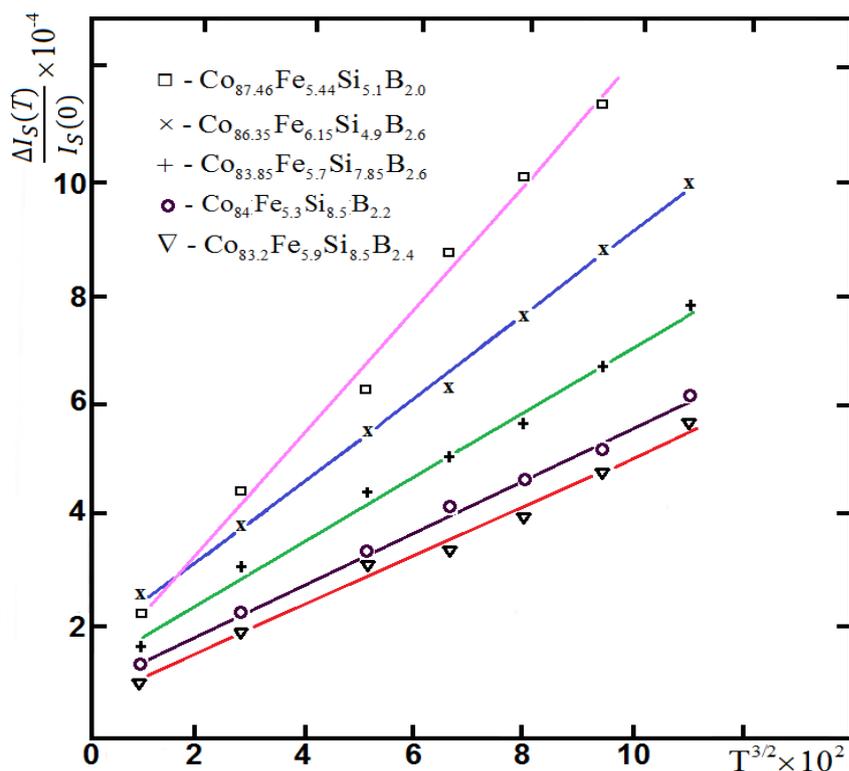


Рис. 1. Зависимость относительной намагниченности насыщения  $\Delta I/I$  от температуры  $T^{3/2}$  для сплавов системы Co-Fe-Si-B.

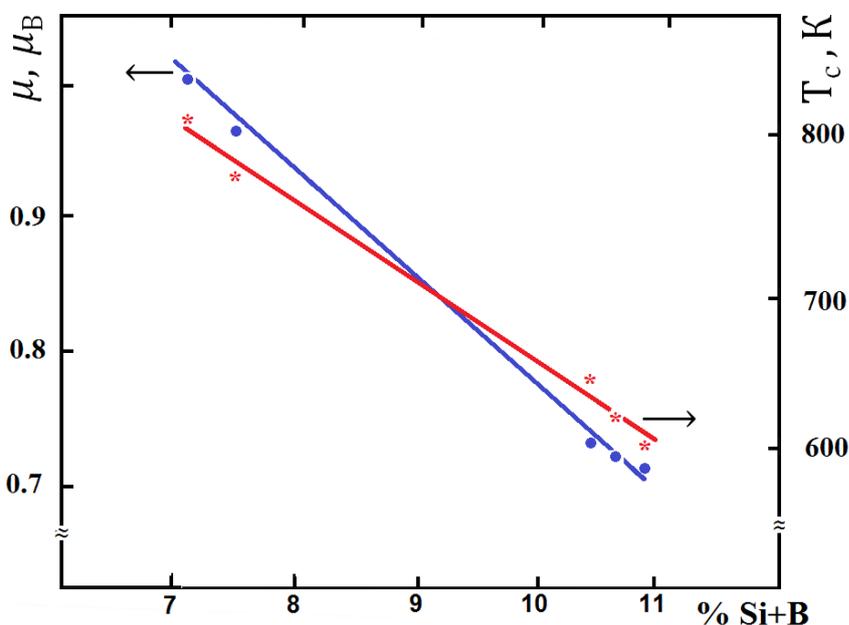


Рис. 2. Зависимость магнитного момента  $\mu$  и температуры Кюри  $T_c$  аморфных сплавов системы Co-Fe-Si-B от концентрации металлоидов.

Рассчитанные значения дисперсионных коэффициентов в единицах температуры  $D/T_c$  от содержание металлоидов приведена в таблице 1.

Значение постоянной обмена  $A$  можно определить в рамках модели молекулярного поля (модель Гейзенберга) и теории спиновых волн.

Согласно модели молекулярного поля постоянная обмена  $A$  между магнитными атомами выражается следующей формулой

$$A = \frac{3k_B T_c}{2zS(S+1)} \quad (4)$$

В модели спиновых волн эффективное значения постоянной обмена между соседними магнитными атомами может быть получено, если предположить, что в случае аморфных сплавов справедливо выражение для дисперсионного коэффициента, найденного для кристаллических сплавов с ГЦК решеткой [6]

$$D = \frac{1}{3} z R_1^2 A_{зфф} S \quad (5)$$

где  $R_1$  – радиус первой координационной сферы, содержащей  $z$  атомов.

Рассчитанные значения некоторых магнитных параметров для сплавов группы железа приведены в таблице 1.

Таблица 1.

Значения магнитных параметров для аморфных сплавов группы железа

Состав сплава	$T_c$ , К	$\chi$ , $10^{-5}$ К $^{-3/2}$	$\chi$ , $\frac{\text{эВ}}{\text{А}^2}$	$A_{зфф}$ , эВ	$A_{зфф}$ , эВ	$\mu_A$	$\mu_B$	$\frac{\text{эВ}}{\text{К}}$
Co <sub>87</sub> .46Fe <sub>5.44</sub> Si <sub>5.1</sub> B <sub>2.0</sub>	.512	10	.424	.422	.0263	.027	1.0 30	.97 .9
Co <sub>86</sub> .35Fe <sub>6.15</sub> Si <sub>4.9</sub> B <sub>2.6</sub>	.450	70	.08	.252	.0222	.036	0.9 75	.62 .6
Co <sub>83</sub> .85Fe <sub>5.7</sub> Si <sub>7.8</sub> 5B <sub>2.6</sub>	.364	50	.03	.294	.0260	.045	0.7 37	.61 .5
Co <sub>84</sub> Fe <sub>5.3</sub> Si <sub>8.5</sub> B <sub>2.2</sub>	.362	20	.05	.291	.0270	.043	0.7 29	.64 .7
Co <sub>83</sub> .2Fe <sub>5.9</sub> Si <sub>8.5</sub> B <sub>2.4</sub>	.361	00	.07	.289	.0277	.042	0.7 22	.66 .8

Как видно из таблицы 1 величина магнитного момента исследованных аморфных сплавов при снижении концентрации металлоидов увеличивается. Температура Кюри  $T_c$  также повышается при уменьшении концентрации металлоидов. Изменение  $T_c$  объясняется зависимостью обменного взаимодействия от расстояния между атомами железа: при уменьшении его ферромагнитное взаимодействие ослабевает. Эти структурные изменения характеризуется высокими значениями координационных чисел в первой координационной сфере, которые выше чем таковы для о.ц.к. структуры. Аморфные структуры также характеризуется большими координационными числами в первой координационной сфере. В этом отношении наиболее важным предположением может быть то, что ферромагнетизм, связанный с атомами железа в плотноупакованных структурах с высокими координационными числами, имеет тенденцию исчезать. Это может быть обусловлено усилением

антиферромагнитного взаимодействия между атомами железа. Сплавы *Co-Fe-Si-B* имеют высокую температуру Кюри. Это отражает характер обменных взаимодействий между магнитными моментами атомов, которые сильнее между атомами разных сортов, чем между атомами одного сорта.

Изменение величины магнитного момента можно объяснить в рамках представлений о переносе электронного заряда от атомов металлоидов (*Si-B*) в *d*-зону переходного металла. Магнитный момент с увеличением содержания металлоидов уменьшается, вследствие того, что магнитные состояния утрачивает свой *d*-характер ввиду их участия в связи с металлоидными атомами (*p-d*-гибридизация).

С целью проверки выводов квантовой теории о зависимости спонтанной намагниченности от температуры для аморфных сплавов на основе переходных металлов и выяснения зависимости параметра *B* в законе «трех вторых», характеризующего обменную энергию, от состава сплава с разными концентрациями металлоидов и от термической обработки, было проведено экспериментальное исследование зависимости намагниченности насыщения указанных сплавов от температуры в области низких температур. В результате исследования было установлено:

1) закон «трех вторых» достаточно хорошо описывает температурную зависимость намагниченности насыщения аморфных сплавов *Co-Fe-Si-B* при всех изученных концентрациях;

2) по полученным экспериментальным данным установлена зависимость среднего магнитного момента, приходящегося на атом сплава, от концентрации металлоида. Получено, что зависимость магнитного момента от концентрации металлоида имеет линейный характер и с уменьшением концентрации металлоида повышается магнитный момент аморфного сплава;

3) по полученным экспериментальным данным определены температура Кюри  $T_c$  и параметры обменного взаимодействия исследованных сплавов. Показано, что аморфные сплавы *Co-Fe-Si-B* имеют высокую температуру Кюри и имеют линейную зависимость магнитного момента от содержания металлоидов.

### Литература

1. Адаменко И.И., Ошкадерова В.П., Полотнюк В.В. Изучение фазовых и структурных превращений в магнито жестких сплавах при высоких температурах и скорости нагрева с помощью вибрационного метода. Препринт ИМФ 75.1, Киев-1975.

2. Чернов В.С., Зарянкин Г.А. и др. Получение и исследование некоторых физико-механических свойств аморфных сплавов. «Электронная техника». Сер. Металлы, 1980. - №8. 3-9 с.

3. Subhonqulov I., Amonov B., Bakaev G., Xomitov Sh. “Yuqori temperaturalarda amorf qotishmalarning magnitlanishi va uni o’lchash usuli”. SamDU ilmiy axborotnomasi. Samarqand. 2017. №1. 177-181.

4. Ахиезер А.И., Барьяхтар В.Т. Спиновые волны. М: «Наука». 1967. - 368 с.

5. Аморфные металлические сплавы. Под редакцией Ф.Е.Люборского. Москва. «Металлургия». 1987. - 330 с.

6. Кувандиков О.К. Магнитные и Кинетические свойства конденсированных сплавов и соединений на основа переходных и редкоземельных металлов. Ташкент. «ФАН». 2009. – 292 с.

**MUALLIFLAR DIQQATIGA!**

Hurmatli mualliflar, maqola muallif tomonidan qog'ozda chop etilgan va elektron shaklida taqdim qilinishi shart. **Maqolada quyidagi bandlar:** UDK, ishning nomi (o'zbek, rus va ingliz tillarida), maqola hammualliflarining ro'yxati (to'liq familiyasi, ismi, otasining ismi – o'zbek, rus va ingliz tillarida), muallif haqida ma'lumotlar: ish joyi, lavozimi, pochta va elektron pochta manzili; maqola annotatsiyasi (300 belgigacha, o'zbek, rus va ingliz tillarida), kalit so'zlar (5-7, o'zbek, rus va ingliz tillarida) bo'lishi lozim.

**MAQOLALARGA QO'YILADIGAN TALABLAR!**

Maqolalarning nashr etilishi uchun shartlar nashr etilishi mo'ljallangan maqolalar dolzarb mavzuga bag'ishlangan, ilmiy yangilikka ega, muammoning qo'yilishi, muallif tomonidan olingan asosiy ilmiy natijalar, xulosalar kabi bandlardan iborat bo'lishi lozim; ilmiy maqolaning mavzusi informativ bo'lib, mumkin qadar qisqa so'zlar bilan ifodalangan bo'lishi kerak va unda umumiy qabul qilingan qisqartirishlardan foydalanish mumkin; "Ilmiy axborotnoma" jurnali mustaqil (ichki) taqrizlashni amalga oshiradi.

**MAQOLALARNI YOZISH VA RASMIYLASHTIRISHDA  
QUYIDAGI QOIDALARGA RIOYA QILISH LOZIM:**

Maqolalarning tarkibiy qismlariga: kirish (qisqacha), tadqiqot maqsadi, tadqiqotning usuli va obyekti, tadqiqot natijalari va ularning muhokamasi, xulosalar yoki xotima, bibliografik ro'yxat. Maqola kompyuterda Microsoft Office Word dasturida yagona fayl ko'rinishida terilgan bo'lishi zarur. Maqolaning hajmi jadvallar, sxemalar, rasmlar va adabiyotlar ro'yxati bilan birgalikda doktorantlar uchun 0,25 b.t. dan kam bo'lmasligi kerak. Sahifaning yuqori va pastki tomonidan, chap va o'ng tomonlaridan - 2,5 sm; orientatsiyasi - kitob shaklida. Shrift - Times New Roman, o'lchami - 12 kegl, qatorlar orasi intervali - 1,0; bo'g'in ko'chirish - avtomatik. Grafiklar va diagrammalar qurishda Microsoft Office Excel dasturidan foydalanish lozim. Matndagi bibliografik havolalar (ssilka) kvadrat qavsda ro'yxatda keltirilgan tartibda qayd qilish lozim. Maqolada foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati keltirilishi lozim. Bibliografik ro'yxat alfavit tartibida - GOST R 7.0.5 2008 talablariga mos tuziladi.

- Ikki oyda bir marta chiqadi.
- "Samarqand davlat universiteti ilmiy axborotnomasi"dan ko'chirib bosish faqat tahririyatning yozma roziligi bilan amalga oshiriladi.
- Mualliflar maqolalardagi fakt va raqamlarning haqqoniyligiga shaxsan mas'ul.

**MAQOLAGA QUYIDAGILAR ILOVA QILINADI:**

- Yo'llanma xati;
- Ekspert xulosasi;
- research.samdu.uz platformasiga maqolalar yuboriladi.

E- mail: axborotnoma@samdu.uz

# SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI ILMIY AXBOROTNOMASI

НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК

SCIENTIFIC REPORTS

Mas'ul kotib  
Texnik muharrir

**X.Sh.Tashpulatov**  
**A. I. Inatov**

**Muharrirlar:**

**I.Sulaymonov** - fil.f.n., dotsent  
**E. U. Arziqulov** - f.-m.f.n., dotsent  
**O. Yusupova** - fil.f.n., dotsent

**Mas'ul muharrirlar:**

**D. M. Aronbayev** - k.f.n., dotsent  
**A. Sh. Yarmuxamedov** - f.-m.f.n.  
**X. S. Haydarov** - f.-m.f.n., dotsent

Muassis: Samarqand davlat universiteti  
Manzil: 140104, Samarqand shahri, Universitet hiyoboni, 15.  
Telefon: (0 366) 239-14-07, Faks: (0 366) 239-13-87  
e-mail: [axborotnoma@samdu.uz](mailto:axborotnoma@samdu.uz)

SamDU «Ilmiy axborotnoma» jurnali tahririyati kompyuterida terildi.  
Bosishga 1.07.2021 yilda ruxsat etildi. Qog'oz o'lchami A-4. Nashriyot hisob tabog'i 10,00.  
Buyurtma raqami 477. Adadi 30 nusxa.

*Manzil:* 140104, Samarqand shahri, Universitet xiyoboni, 15.  
*SamDU bosmaxonasida chop etildi.*