



ISSN 2181-1296

ILMIY AXBOROTNOMA

НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК

SCIENTIFIC JOURNAL

2021-yil, 1-son (125)

ANIQ FANLAR SERIYASI

Matematika, Mexanika, Informatika, Fizika

Samarqand viloyat matbuot boshqarmasida ro'yxatdan o'tish tartibi 09-25.
Jurnal 1999-yildan chop qilina boshlagan va OAK ro'yxatiga kiritilgan.

BOSH MUHARRIR

BOSH MUHARRIR O'RINBOSARLARI:

R. I. XALMURADOV, t.f.d. professor

H.A. XUSHVAQTOV, f.-m.f.n., dotsent

A. M. NASIMOV, t.f.d., professor

TAHRIRIYAT KENGASHI:

M. X. ASHUROV	- O'zFA akademigi
T.M.MO'MINOV	- O'zFA akademigi
SH. A. ALIMOV	- O'zFA akademigi
S. N. LAKAYEV	- O'zFA akademigi
M.M.MIRSAIDOV	- O'zFA akademigi
A. S. SOLEEV	- f.-m.f.d., professor
I. A. IKROMOV	- f.-m.f.d., professor
B. X. XO'JAYAROV	- f.-m.f.d., professor
I. I. JUMANOV	- f.-m.f. .d., professor
X. X. XUDOYNAZAROV	- t.f.d., professor
N. N. NIZAMOV	- f.-m.f.d., professor
L.SABIROV	- f.-m.f. .d., professor
A.G.YAGOLA	- f.-m.f. .d., professor (Moskva davlat universiteti, Rossiya)
MASLINA DARUS	- Malayziya milliy universiteti professori, Malayziya
ALBERTO DEL BIMBO	- Florensiya universiteti professori, Italiya

Obuna indeksi – yakka tartbidagi obunachilar uchun - 5583,
tashkilot, korxonalar uchun - 5584

MUNDARIJA/СОДЕРЖАНИЕ/CONTENTS

МАТЕМАТИКА / МАТЕМАТИКА / MATHEMATICS

<i>Begmatov A.X., Aktamov Kh.S., Sharipova M.</i> The problem of restoring a function by families of spheres in space	4
<i>Safarov A.R.</i> Arnol'dning ayrim tipdagi maxsusliklarining normal shakllari haqida	11
<i>Mirzaev O.Э.</i> О изоспектральном операторе Дирака на конечном отрезке	16
<i>Кабулов А.В., Урунбаев Э., Болтаев Ш.Т.</i> Критерии сведения к задачам расшифровки и поиска максимального верхнего нуля дискретных монотонных функций	21
<i>Махмудов К.О.</i> Задача Коши для системы уравнений Максвелла	29
<i>Турсунов Ф.Р., Шодиев Д.С., Тухтаева Х.Х.</i> Регуляризация решение задача Коши для уравнения Лапласа в неограниченной области	34
<i>Qahhorov A., Husanov J.</i> Yig'indilarni hisoblashda geometrik usuldan foydalanish	39
<i>Халдъжигитов А.А., Каландаров А.А., Джумаёзов У.З.</i> Об одном алгоритме численного решения краевых задач термо-упруго-пластичности	48
<i>Отакулов С., Рахимов Б.Ш.</i> Задача управления ансамблем траекторий дифференциального включения с параметрами при условии подвижности терминального множества	59
<i>Kuliev K., Eshimova M.</i> Diskret Hardi tipidagi operatorning uzluksizligi	65
<i>Muranov Sh. A., Mahmudov B., Asrorov D.</i> On estimates for the transformation Fourier with damped factor	71
<i>Khurramov A.M.</i> The discrete spectrum of two particle Hamiltonian on two-dimensional lattice	75

МЕХАНИКА / МЕХАНИКА / MECHANICS

<i>Khalmuradov R.I., Khudoynazarov Kh. and Omonov Sh.B.</i> Stress-strain state of the rock mass around the vertical mine	83
<i>Abdurazzakov J., Khudoynazarova D.X.</i> Torsional vibrations of a circular elastic rod taking into account physical nonlinearity	89
<i>Xoliqov D.Sh., Abdurazzaqov J.N., Khudoynazarova D.X.</i> Free torsional vibrations of a round elastic cone-shaped rod	94

ИНФОРМАТИКА / ИНФОРМАТИКА / INFORMATICS

<i>Akhatov A.R., Mardonov D.R., Nurmatov M.Q. and Nazarov F.M.</i> Improvement of mathematical models of the rating point system of employment	100
---	-----

ФИЗИКА / ФИЗИКА / PHYSICS

<i>Базарбаев Н.Н., Бахтиёров М., Мавлонов Т., Нурмурадов Л.Т., Тухтаев У.У., Химматов И.Ф.</i> Корреляции между активностями ^7Be в нижних слоях атмосферы и выпадении мокрых осадок 2019 года в Самарканде	108
---	-----

Хайдаров Х.С. Концентрационные и температурные зависимости соотношения Ландау-Плачека в водных растворах γ -пиколина	111
Murodov S.N. Eynshteyn-skalyar-Gauss-Bonnet nazariyalarida “Yumronqoziq ini” yechimlari	115
Сафаров А.Н., Шаронов И.А., Мухамедов А.К., Азимов А.Н., Сафаров А.А., Салимов М.И. Радиационная безопасность строительных материалов в Узбекистане	119
Toshev F., Badalov K., Shoimov M. Determination of the astrophysical S factor of ${}^8\text{B}(p,\gamma){}^9\text{C}$ capture reaction from ${}^8\text{B}(d,n){}^9\text{C}$ reaction	133
Музаффаров А.М., Эшбуриев Р.М., Журакулов А.Р., Холов Д.М., Хошимов Қ.Қ. Определение объёмной активности радона в атмосферном воздухе и в почве Самаркандской и Навоинской областях	139
Qivondikov O.Q., Imamnazarov D.X., Ruziboyeva F.B. Kogerent potensial metodi asosida amorf holatdagi $\text{Cu}_x\text{Ti}_{1-x}$ qotishmalarining termo elektr yurituvchi kuchi (EYuK) ni hisoblash	142
Арзикулов Э.У., Исаев И.Х., Эшбеков А.А., Туйманов Б.Н., Сафаров О.Ж. Ускоренный процесс преобразования волноводных слоев на основе силикатного стекла	147
Азимов У.И. Экситонный механизм двухфононного резонансного комбинационного рассеяния света в квантовой яме	154

Mualliflarga

UDC 517.946

THE PROBLEM OF RESTORING A FUNCTION BY FAMILIES OF SPHERES IN SPACE

Begmatov A.X., Aktamov Kh.S., Sharipova M.

Samarkand State University

akrambegmatov@mail.ru

Abstract. In this chapter, we study the question of reducing the problem of integral geometry for a special class of surfaces to the Cauchy problem for some equation of evolutionary type. Fourier transform methods are also used. Methods are obtained that allow reducing the problem of integral geometry for special families of curves and surfaces to the Cauchy problem for equations of evolutionary type, and classes of such problems are distinguished. Uniqueness theorems are proved for some new classes of operator equations of Voltaire type in three-dimensional space.

Keywords: Integral geometry problem, Fourier transform, uniqueness theorem, weight function, finite function.

Fazoda sferalar oilasi bo'yicha funksiyani tiklash masalasi

Annatsiya. Mazkur maqolada integral geometriya masalasining maxsus sirtlar sinfini ba'zi evolyutsion tipdagi tenglamalar uchun Koshi masalasiga keltirish usuli izlangan. Buning uchun Fur'e almashtirishi metodi qo'llanilgan. Maxsus chiziqlar va sirtlar oilasi bo'yicha integral geometriya masalasini evolyutsion tipdagi tenglamalarga qo'yiladigan Koshi masalasiga keltirishga yordam beradigan metod olingan va shu turdagi masalalar sinfi keltirilgan. Volterra tipidagi operator tenglamalarining ba'zi yangi sinflari uchun yagonalik teoremasi isbotlangan.

Kalit so'zlar: Integral geometriya masalasi, Fur'e almashtirishlari, yagonalik teoremasi, vazn funksiya, finit funksiya.

Задача восстановления функции по семействам сфер в пространстве

Аннотация. В настоящей работе исследуются вопрос сведения задачи интегральной геометрии для специального класса поверхностей к задаче Коши для некоторого уравнения эволюционного типа. Используются также метода преобразования Фурье. Получены методы, позволяющие свести задачу интегральной геометрии для специальных семейств кривых и поверхностей к задаче Коши для уравнений эволюционного типа, и выделены классы таких задач. Доказаны теоремы единственности для некоторых новых классов операторных уравнений типа Вольтера в трехмерном пространстве.

Ключевые слова: Задача интегральной геометрии, преобразование Фурье, теорема единственности, весовая функция, финитная функция.

1. Introduction

The mathematical study of problems arising in such practically important and intensively developing areas as the interpretation of geophysical and aerospace observations, seismic exploration, medical tomography, etc., often leads to problems of integral geometry. So, for example, the linearized problem of seismic data interpretation and the linearized inverse kinematic problem are equivalent to the corresponding problems of integral geometry. Therefore, the problems of integral geometry are one of the urgent problems of the theory of differential equations and mathematical physics.

Let us give the definition of the problem of integral geometry [1].

Let $x \in R^n$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $S(y)$ - a family of manifolds in $x \in R^n$, depending on m , $\dim S = p$ the dimension parameter y . Let $u(x)$ be a function defined in some $D \subset R^n$, $\rho(x, y)$ - domain as a function of variables measure x, y , $\omega(y)$ - on a manifold $S(y)$.

Consider the function

$$\int_{S(y)} \rho(x, y) u(x) d\omega = f(y). \quad (1)$$

Integral geometry is a branch of mathematics that studies various relationships between the elements included in (1).

We will assume that in (1) $S(y)$, $\rho(x, y)$, $f(y)$ are given and consider (1) as a linear operator equation with respect to the function $u(x)$.

Integral geometry problems of Voltaire type are those problems that can be reduced to the study of Voltaire operator equations in the sense of the definition given by M.M. Lavrentev [1]. We also give definitions of weak and strong ill-posedness of an integral geometry problem. The problem of solving Eq. (1) is called weakly ill-posed if for the given problem and its solution it is possible to choose a pair of function spaces in which a finite number of derivatives are involved in determining the norm such that the inversion operator for this pair of spaces is continuous. If such a pair of spaces does not exist, then the problem is strongly ill-posed [1].

The first results on the uniqueness and stability of integral geometry problems in the case when the manifolds over which the integration is carried out have the form of paraboloids and are invariant under the group of all motions parallel to the $(n-1)$ -dimensional hyperplane were obtained by V.G. Romanov [2,3].

In the work of M. M. Lavrentev [6], a very fruitful idea of reducing a wide class of problems of integral geometry to the study of an equation of evolutionary type for some auxiliary function was proposed. In particular, this made it possible to prove the uniqueness theorem for the solution of the original problem. Note that the problem of determining a function from its spherical mean by reducing it to a certain differential equation was studied in the monograph [5]. Mention should also be made of the work [4], in which other classes of Volterra problems in integral geometry were studied.

New classes of problems in integral geometry were developed in the works of A. Kh. Begmatov [7-9]. In his works, problems of integral geometry of Volterra type were studied on the plane and in space.

In [10-13], new classes of problems of integral geometry were studied and new approaches were introduced to the study of problems of recovering a function from weight functions with a singularity.

In this chapter, we study the question of reducing the problem of integral geometry for a special class of surfaces to the Cauchy problem for some equation of evolutionary type.

The work uses the methods of the theory of partial differential equations. The reduction to the Cauchy problem and the proof of uniqueness theorems are based on the study of boundary value problems for auxiliary functions. Fourier transform methods are also used. Methods are obtained that allow reducing the problem of integral geometry for special families of curves and surfaces to the Cauchy problem for equations of evolutionary type, and classes of such problems are distinguished. Uniqueness theorems are proved for some new classes of operator equations of Voltaire type in three-dimensional space. Explicit expressions are obtained for weight functions of a special form for operator equations from these classes.

2. Statement of the problem and formulation of the main results

Formulation of the problem. Consider the problem of integral geometry for a family of surfaces in half-space $z \geq 0$. The surface over which the integration is carried out is a sphere

$$z^2 - \zeta^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2.$$

We denote $L_D = \{(x, y, z) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, 0 \leq z \leq D\}$.

The function $u(\cdot)$ is assumed to be finite at x, y , that is $u(x, y, z) = 0$, for, $(x, y) \notin D$, where D is a bounded area on the plane $z = 0$.

Problem 1. In half-space L_D , restore a function of three variables $u(x, y, z)$ if the integrals of it over the surfaces of the family $\{Y(x, y, z)\}$ are exist:

$$f(x, y, z) = \int_{Y(x, y, z)} q(z, \zeta) u(\xi, \eta, \zeta) d\omega, \quad (2)$$

where an arbitrary surface of the family is represented by the expression

$$Y(x, y, z) = \{(\xi, \eta, \zeta) : z^2 - \zeta^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2, 0 \leq \zeta \leq z \leq D\}$$

Let us investigate the uniqueness of solution (2) by reducing it to the Voltaire integral equation of the first and then the second type.

Proposition 1. Let the function $f(x, y, z)$ exist for all x, y, z in the half-space L_D , the weight function $q(z, \zeta) = \frac{1}{\sqrt{z^2 - \zeta^2}}$.

Then the solution to equation (2) is unique in the class of twice continuously differentiable finite functions supported in half-spaces L_D .

Proof. Let us write equation (2) in the following form:

$$\int_0^z \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\rho} u(x + \rho \cos \varphi, y + \rho \sin \varphi, \zeta) d\varphi d\zeta = f(x, y, z), \tag{3}$$

where

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{z^2 - \zeta^2}}.$$

We apply to both sides of Eq. (4) the Fourier transform in the variable x:

$$\begin{aligned} \hat{f}(\lambda, y, z) &= \int_0^z \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} \frac{1}{\rho} u(x + \rho \cos \varphi, y + \rho \sin \varphi, \zeta) dx \right) d\varphi d\zeta = \\ &= \int_0^z \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\rho} e^{-i\lambda \rho \cos \varphi} \hat{u}(\lambda, y + \rho \sin \varphi, \zeta) d\varphi d\zeta. \end{aligned} \tag{4}$$

We apply to both sides of equation (4) the Fourier transform in the variable y:

$$\begin{aligned} \hat{\hat{f}}(\lambda, \mu, z) &= \int_0^z \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\rho} e^{-i\lambda \rho \cos \varphi} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\mu y} \hat{u}(\lambda, y + \rho \sin \varphi, \zeta) dy \right) d\varphi d\zeta = \\ &= \int_0^z \hat{\hat{u}}(\lambda, \mu, \zeta) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{z^2 - \zeta^2}} e^{-i\sqrt{z^2 - \zeta^2}(\lambda \cos \varphi + \mu \sin \varphi)} d\varphi d\zeta. \end{aligned}$$

We have obtained the Voltaire integral equation of the first type for the function $\hat{\hat{u}}(\lambda, \mu, \zeta)$

$$\int_0^z \hat{\hat{u}}(\lambda, \mu, \zeta) \frac{I(\lambda, \mu, z, \zeta)}{\sqrt{z - \zeta}} d\zeta = \hat{\hat{f}}(\lambda, \mu, z) \tag{5}$$

where

$$I(\lambda, \mu, z, \zeta) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{z + \zeta}} e^{-i\sqrt{z^2 - \zeta^2}(\lambda \cos \varphi + \mu \sin \varphi)} d\varphi \tag{6}$$

Let us prove equation (6).

$$\lambda \cos \varphi + \mu \sin \varphi = \gamma \sin(\varphi + k), \quad \gamma = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}, \quad k \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{\pi}{2}\right].$$

Thus, equation (6) takes the form

$$\begin{aligned} I(\lambda, \mu, z, \zeta) &= \frac{1}{\sqrt{z + \zeta}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\gamma \sqrt{z^2 - \zeta^2} \sin(\varphi + k)} d\varphi = \\ &= \frac{1}{\sqrt{z + \zeta}} (I_1(z, \zeta, \lambda, \mu) + I_2(z, \zeta, \lambda, \mu)). \\ I_1(z, \zeta, \lambda, \mu) &= \int_{-\gamma \sin k}^{\gamma \sin k} e^{-i(\sqrt{z^2 - \zeta^2})v} \frac{dv}{\gamma \sqrt{1 - \frac{v^2}{\gamma^2}}} \end{aligned} \tag{7}$$

We calculate the integral (7)

$$\left| I_1(z, \zeta, \lambda, \mu) \right| = \left| \int_{-\gamma \sin k}^{\gamma \sin k} e^{-i(\sqrt{z^2 - \zeta^2})v} \frac{dv}{\gamma \sqrt{1 - \frac{v^2}{\gamma^2}}} \right| \leq$$

$$\leq 2 \int_0^{\gamma \sin k} \frac{dv}{\gamma \sqrt{1 - \frac{v^2}{\gamma^2}}} = \frac{2}{\gamma} (\arcsin(\sin k) - \arcsin 0) = \frac{2k}{\gamma}.$$

Thus,

$$|I_1(z, \zeta, \lambda, \mu)| \leq \frac{2k}{\gamma}.$$

Also for $I_2(z, \zeta, \lambda, \mu)$, if we do the same as above, we get the expression

$$|I_2(z, \zeta, \lambda, \mu)| \leq \frac{2k}{\gamma}.$$

Thus,

$$|I(z, \zeta, \lambda, \mu)| \leq \frac{1}{\sqrt{z + \zeta}} (|I_1(z, \zeta, \lambda, \mu)| + |I_2(z, \zeta, \lambda, \mu)|) \leq \frac{4k}{\gamma \sqrt{z + \zeta}}$$

or

$$I(z, \zeta, \lambda, \mu) = \frac{4k}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2} \sqrt{z + \zeta}}. \quad (8)$$

Equation (5) has an integrable singularity on the diagonal $z = \zeta$. As can be seen from formula (8), the function $I(\lambda, \mu, z, \zeta)$ is continuous in the region $0 < \zeta \leq z < D$ and

$$I(\lambda, \mu, z, z) = \frac{4k}{\sqrt{2z} \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} \neq 0.$$

Using expression (5) for the function $I(\lambda, \mu, z, \zeta)$, it is easy to show that the first-order partial derivative with respect to the variable z of this function does not have a weak singularity on the diagonal $z = \zeta$:

$$I_z'(\lambda, \mu, z, \zeta) = -\frac{2k dz}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2} \sqrt{(z + \zeta)^3}}.$$

We can reduce equation (5) to the Volterra equation of the second type, using the Abel method [14]. To do this, we multiply equality (5) by $\frac{1}{\sqrt{t-z}}$ and integrate over z in the range from zero to t . Changing the order of integration in the resulting iterated integral, we find

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{\hat{f}(\lambda, \mu, z)}{\sqrt{t-z}} dz &= \int_0^t \frac{dz}{\sqrt{t-z}} \int_0^z \hat{u}(\lambda, \mu, \zeta) I(\lambda, \mu, z, \zeta) \frac{d\zeta}{\sqrt{z-\zeta}} = \\ &= \int_0^t \hat{u}(\lambda, \mu, \zeta) \left[\int_{\zeta}^t \frac{I(\lambda, \mu, z, \zeta)}{\sqrt{t-z} \sqrt{z-\zeta}} dz \right] d\zeta. \end{aligned} \quad (9)$$

The function under the integral in square brackets here

$$T(t, \zeta, \lambda, \mu) = \int_{\zeta}^t \frac{I(\lambda, \mu, z, \zeta)}{\sqrt{t-z} \sqrt{z-\zeta}} dz$$

has a finite nonzero value at $t = \zeta$. To verify this, let's change the variable

$$z = t \cos^2 \varphi + \zeta \sin^2 \varphi.$$

Then the function $T(t, \zeta, \lambda, \mu)$ will take the following form:

$$T(t, \zeta, \lambda, \mu) = \int_{\zeta}^t \frac{4k}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2} \sqrt{z + \zeta} \sqrt{t-z} \sqrt{z-\zeta}} dz =$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4kd\varphi}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2} \sqrt{t \cos^2 \varphi + (1 + \sin^2 \varphi)\zeta}}$$

or

$$T(t, \zeta, \lambda, \mu) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} I(\lambda, \mu, t \cos^2 \varphi + \zeta \sin^2 \varphi, \zeta) d\varphi, \tag{10}$$

where

$$I(\lambda, \mu, t \cos^2 \varphi + \zeta \sin^2 \varphi, \zeta) = \frac{4k}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2} \sqrt{t \cos^2 \varphi + (1 + \sin^2 \varphi)\zeta}}$$

From here, assuming $\zeta = t$, we find

$$\begin{aligned} I(\lambda, \mu, t, t) &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4k}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2} \sqrt{t \cos^2 t + (1 + \sin^2 \varphi)t}} d\varphi = \\ &= 2 \frac{4k}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{2t}} = 2 \frac{4k}{\sqrt{2t} \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4k\pi}{\sqrt{2t} \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} \neq 0. \end{aligned}$$

Using formula (10), it is also easy to verify that $T(t, \zeta, \lambda, \mu)$ has a continuous derivative with respect t to the variable everywhere except for the diagonal $\zeta = t$. On the diagonal $T_t(t, \zeta, \lambda, \mu)$ has an integrable singularity of the form $\frac{1}{\sqrt{t-z}}$. Differentiating equality (9) and dividing by $T(t, t, \lambda, \mu)$, we obtain for each fixed λ and μ integral Voltaire equation of the second kind:

$$\hat{u}(\lambda, \mu, t) + \int_0^t \hat{u}(\lambda, \mu, t) \frac{T_t(\lambda, t, t)}{T(\lambda, t, t)} d\zeta = \frac{1}{T(\lambda, t, t)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{\hat{f}(\lambda, \mu, z)}{\sqrt{t-z}} dz$$

with a kernel, an integrable singularity on the diagonal. As follows from the general theory, the solution of such equations is unique [14].

3. The problem of integral geometry for a family of second-order surfaces

The corresponding equation is:

$$\int_0^z \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\rho} u(x + \rho \cos \varphi, y + \rho \sin \varphi, \zeta) d\varphi d\zeta = f(x, y, z).$$

We put

$$F(x, y, z, t) = \int_0^z \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\rho} u(x + \rho\tau \cos \varphi, y + \rho\tau \sin \varphi, \zeta) d\varphi d\zeta,$$

where $\tau = \sqrt{1-t}$.

Lemma 1. Let the function $u(\cdot)$ be compactly supported with support in D and the $F(x, y, z, t)$ function has the form

$$F(x, y, z, t) = \int_0^z \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\rho} u(x + \rho\tau \cos \varphi, y + \rho\tau \sin \varphi, \zeta) d\varphi d\zeta, \tag{11}$$

Then the following relation is true:

$$F_{zt} = -\frac{z}{2} (F_{xx} + F_{yy}).$$

Proof. Due to the periodicity of the function $u(\cdot)$ with respect to the variable φ , it can be seen that

$$\int_{-\pi}^{\pi} (u_{xx} \sin^2 \varphi - 2u_{xy} \sin \varphi \cos \varphi + u_{yy} \cos^2 \varphi) d\varphi = 0.$$

We find F_t and F_{zt} .

$$\begin{aligned} F_t &= -\frac{1}{2\sqrt{1-t}} \int_0^z \int_{-\pi}^{\pi} (u_x \cos \varphi + u_y \sin \varphi) d\varphi d\zeta, \\ F_{zt} &= -\frac{1}{2\sqrt{1-t}} \int_0^z \int_{-\pi}^{\pi} (u_{xx} \cos^2 \varphi + 2u_{xy} \sin \varphi \cos \varphi + u_{yy} \sin^2 \varphi) \sqrt{1-t} \rho_z d\varphi d\zeta - \\ &\quad -\frac{1}{2\sqrt{1-t}} \int_{-\pi}^{\pi} (u_x(x, y, z) \cos \varphi + u_y(x, y, z) \sin \varphi) d\varphi = \\ &= -\frac{z}{2} \int_0^z \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\rho} (u_{xx} \cos^2 \varphi + 2u_{xy} \sin \varphi \cos \varphi + u_{yy} \sin^2 \varphi) d\varphi d\zeta - \\ &\quad -\frac{z}{2} \int_0^z \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\rho} (u_{xx} \sin^2 \varphi - 2u_{xy} \sin \varphi \cos \varphi + u_{yy} \cos^2 \varphi) d\varphi d\zeta = \\ &= -\frac{z}{2} \int_0^z \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\rho} (u_{xx} + u_{yy}) d\varphi d\zeta. \end{aligned}$$

Considering that

$$F_{xx} + F_{yy} = \int_0^z \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\rho} (u_{xx} + u_{yy}) d\varphi d\zeta$$

we get the required relation for the spheres:

$$F_{zt} = -z(F_{xx} + F_{yy}).$$

The lemma is proved.

Let us introduce the following notation:

$$L(F) = \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial t} + z \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right).$$

$F(\cdot)$ satisfies the equation

$$L(F) = 0 \tag{12}$$

and, by virtue of the finiteness $u(\cdot)$ in x and y , for fixed t and z finiteness in the variables x and y . Hence, we can assume that $F(\cdot)$ satisfies the homogeneous Dirichlet conditions on the boundaries of some bounded domain belonging to the plane OXY . Without loss of generality, we can consider this area as a rectangle Π :

$$\begin{aligned} -l_1 &\leq x \leq l_1, \\ -l_2 &\leq y \leq l_2, \end{aligned}$$

where $l_1 > 0$, $l_2 > 0$.

From here, as well as from equations (3) and (11), the boundary conditions for $F(\cdot)$:

$$\left. \begin{aligned} F(-l_1, y, z, t) &= F(l_1, y, z, t) = 0 \\ F(x, -l_2, z, t) &= F(x, l_2, z, t) = 0 \end{aligned} \right\} \tag{13}$$

Note also that, due to the smoothness and finiteness of the function $u(\cdot)$, the function $F(\cdot)$ can be set equal to zero outside the rectangle Π , and in this case it will be twice continuously differentiable with respect to the variables x, y .

Lemma 2. The solution to the boundary value problem (12) - (13) is unique.

Proof.

Consider the equation:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z \partial t} + \frac{z}{2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) = 0.$$

We also apply the Fourier transform in the variables x and y to this equation.

We get

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\lambda x + \mu y)} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial z \partial t} + \frac{z}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{z}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) dx dy = \\ = \frac{\partial^2}{\partial z \partial t} \hat{F}(\lambda, \mu) + \frac{z}{2} (\lambda^2 + \mu^2) \hat{F}(\lambda, \mu). \end{aligned}$$

So we arrived at the following equation:

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial t} \hat{F}(\lambda, \mu, z, t) + \frac{z}{2} (\lambda^2 + \mu^2) \hat{F}(\lambda, \mu, z, t) = 0.$$

Boundary conditions (13) take the form

$$\begin{aligned} \hat{F}(\lambda, \mu, z, 0) &= \hat{f}(\lambda, \mu, z), \\ \hat{F}(\lambda, \mu, 0, t) &= 0. \end{aligned}$$

Thus, we arrive at the classical Goursat problem, the solution of which is unique. As you know, the function itself is uniquely determined by its Fourier form. This implies the assertion of Lemma 2.

Theorem 1. The solution to equation (3) is unique.

Proof. As follows from Lemma 2, a function $f(x, y, z)$ is uniquely determined by a function $F(x, y, z, 1)$. From equation (11), setting $t = 0$, we find

$$F(x, y, z, 1) = 2\pi \int_0^z \frac{u(x, y, \zeta)}{\rho} d\zeta.$$

In turn, from this Abel integral equation, the function $F(x, y, z, 1)$ is uniquely determined by the function $u(x, y, z)$.

References

1. Lavrentiev M.M. and Savel'ev L.Y., Operator Theory and ill-posed problems. Izdatel'stvo Instituta matematiki, Novosibirsk. (in Russian).
2. Romanov V.G. "Reconstructing a function by means of integrals along a family of curves", *Soviet Math. Dokl.*, 8:5 (1967), 923-925.
3. Romanov V.G. Some inverse problems for hyperbolic equations. - Novosibirsk: Nauka, 1972. -164 p. (in Russian).
4. Buchheim A.L. On some problems of integral geometry, *Sibirskiy matem. zhurn.* 13 (1), 34-42 (1972) (in Russian).
5. Yon F. Plane waves and spherical means as applied to partial differential equations. - M.: Izd-vo inostr. lit., 1958.- 158 p. (in Russian).
6. Lavrentiev M.M. Inverse problems and special operator equations of the first kind // Mezhdunar. mat. kongress v v Nitsse, 1970. - M.: Nauka, 1972. - S. 130-136. (in Russian).
7. Begmatov Akram H. "Two classes of weakly ill-posed problems of integral geometry on the plane", *Siberian Math. J.*, 36:2 (1995), 213-218
8. Begmatov Akram H. "The integral geometry problem for a family of cones in the n-dimensional space", *Siberian Math. J.*, 37:3 (1996), 430-435
9. Begmatov Akram. H. "Volterra problems of integral geometry in the plane for curves with singularities", *Sibirsk. Mat. Zh.*, 38:4 (1997), 723-737
10. Begmatov Akram X. and Ismoilov A.S. The problem of integral geometry in a strip with weight function, *Nauchnyy vestnik SamarkandGU*, 117 (5), 12--17 (2019). (in Russian).
11. Begmatov Akram Kh., Ismoilov A.S. Restoring the function set by integrals for the family of parabolas on the plane // *Bulletin of National University of Uzbekistan: Mathematics and Natural Sciences*, Vol. 3, issue 2. 2020, pp. 246-254.
12. Ismoilov A.S. Uniqueness and existence of a solution to the problem of integral geometry in a strip // *Byulleten' Instituta Matematiki*, 2020, no. 2, p. 58-68. (in Russian).
13. Begmatov A.X., Ochilov Z.X., Xusanov A.Z. Uniqueness and stability problem of integral geometry with indignation. *Scientific Journal of Samarkand University*. Vol. 3, 2020, pp. 21-25.
14. Tricomi F. Integral equations / F. Triкоми. - M.: Izdatel'stvo inostrannoy literatury, 1960. - 301 p. (in Russian).

UDC 517.518.5

ARNOL'DNING AYRIM TIPDAGI MAXSUSLIKLARINING NORMAL SHAKLLARI HAQIDA

A. R. Safarov

Samarqand davlat universiteti

safarov-akbar@mail.ru

Annotatsiya. Mazkur ishda Arnol'dning ayrim sodda D_k , A_k , E_6 , E_7 , E_8 , T_{10} tipdagi maxsusliklarining normal shakllariga keltirish masalasi qaralgan. Bundan tashqari D_∞ tipdagi maxsuslikning ta'rifi berilgan bo'lib, uni normal shaklga keltirish masalasi ko'rsatilgan.

Kalit so'zlar. Maxsuslik, diffeomorfik almashtirish, Nyuton ko'pyoqligi, tekis funksiya.

О нормальных формах некоторых типов особенностей Арнольда

Аннотация. В данной работе рассматривается проблема приведения некоторых простых особенностей типа Арнольда D_k , A_k , E_6 , E_7 , E_8 , T_{10} к нормальным формам. Кроме того дано определение особенности типа D_∞ и проблема его нормализации.

Ключевые слова. Особенность, диффеоморфическое преобразование, полином Ньютона, плоская функция.

Normal forms of some types of Arnold singularities

Abstract. In this paper, we consider the problem of reducing some simple Arnold-type singularities D_k , A_k , E_6 , E_7 , E_8 , T_{10} to normal forms. In addition, we'll give the definition of a singularity of type D_∞ and the problem of its normalization.

Keywords. Singularity, diffeomorphic mapping, Newton polynomial, flat function.

Maxsusliklar nazariyasi - bu matematikaning differensial tenglamalar (dinamik tizimlar) bifurkatsiyalar nazariyasi va silliq akslantirishning maxsusliklarini o'z ichiga olgan bo'limi bo'lib, bu turg'unlik va bifurkatsiyalar nazariyasini yanada rivojlantiradigan bu zamonaviy matematikaning bo'limidir. Maxsusliklar nazariyasi [2] tushunchasi 1960 yilning oxiri 1970 yilning boshlarida fransuz olimi Rene Tom va britaniyalik olim Kristofer Ziman tomonidan kiritilgan. Maxsusliklar nazariyasi tushunchasi geometriyada va fizik optika, elementar zarralar nazariyasida, gidrodinamikada, kemalarning barqarorligini hisoblashda, geologiya, biologiya, sotsiologiya, iqtisod, tilshunoslikda, shuningdek, tibbiyotda yurak urishi va psixikani o'rganishda, miya faoliyatini modellashtirishda va boshqa sohalarda ishlatiladi.

Bizga ikki o'zgaruvchili $f(x_1, x_2)$ funksiya berilgan bo'lsin. Umumiylikka ziyon keltirmasdan $f(0,0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0) = 0$ shartlar bajariladi deb faraz qilaylik. f funksiya cheksiz marta differensiullanuvchi bo'lgani uchun, uning nol nuqtadagi Teylor qatori aniqlangan, ya'ni:

$$f(x_1, x_2) \approx \sum_{k_1+k_2=2}^{\infty} a_{k_1 k_2} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \quad (1)$$

Umuman aytganda (1) qator noldan farqli nuqtalarda yaqinlashuvchi emas hamda bu qatorni quyidagi shaklda yozish mumkin:

$$\sum_{k_1+k_2=2}^{\infty} a_{k_1 k_2} x_1^{k_1} x_2^{k_2} = \sum_{k=2}^{\infty} P_k(x_1, x_2),$$

bu yerda $P_k(x_1, x_2)$ k -darajali bir jinsli ko'phad.

Dastlab $P_2(x_1, x_2) \neq 0$ bo'lgan holni qaraymiz.

1-hol. $P_2(x_1, x_2) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$ va $D = b^2 - 4ac \neq 0$ bo'lsin. Bu holda kritik nuqta xosmas kritik nuqta deyiladi. Mors lemmasiga [1] ko'ra bu funksiya nol nuqtadagi diffeomorfik almashtirish orqali $x_1^2 + x_2^2$, $-x_1^2 - x_2^2$ yoki $x_1^2 - x_2^2$ shakllarga keltiriladi.

2-hol. $P_2(x_1, x_2) \neq 0$ va $D = b^2 - 4ac = 0$ bo'lsin. Bu holda $P_2(x_1, x_2) \neq 0$ chiziqli almashtirish orqali x_1^2 yoki $-x_1^2$ shakllardan biriga keltiriladi. Aniqlik uchun biz $P_2(x_1, x_2) = x_1^2$ deylik.

U holda $f(x_1, x_2)$ quyidagi shaklda yoziladi

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + \varphi(x_1, x_2), \quad (2)$$

bu yerda $\varphi(0,0) = 0$, $\frac{\partial^{|\alpha|} \varphi(0,0)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}} = 0$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 \leq 2$. Ushbu (2) ko'rinishdan quyidagi tenglamani qaraymiz:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 + \frac{\partial \varphi(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 0.$$

Oshkormas funksiya haqidagi teoreмага ko'ra, bu tenglama silliq $x_1 = \psi(x_2)$ yechimga ega bo'lib, (2) tenglikda $x_1 = y_1 + \psi(y_2)$, $x_2 = y_2$ almashtirish olamiz. U holda

$$f(y_1 + \psi(y_2), y_2) = f_1(y_1, y_2)$$

funksiyaga ega bo'lamiz. Bu yerda $f_1(y_1, y_2)$ funksiya quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

$$f_1(0,0) = 0, \quad \frac{\partial f_1(0, y_2)}{\partial y_1} = \frac{\partial f(\psi(y_2), y_2)}{\partial x_1} \equiv 0, \quad \frac{\partial^2 f_1(0,0)}{\partial y_1^2} \neq 0.$$

U holda

$$f_1(y_1, y_2) - f_1(0, y_2) = y_1^2 a(y_1, y_2)$$

shaklda yozish mumkin bunda $a(0,0) \neq 0$. Endi $a(0,0) > 0$ bo'lgani uchun $z_1 = y_1(a(y_1, y_2))^{1/2}$, $z_2 = y_2$ almashtirish olsak f funksiya z koordinatalarda quyidagi shaklda yoziladi:

$$f(x(z)) = z_1^2 + f(\psi(z_2), z_2).$$

$f(\psi(z_2), z_2)$ funksiya tekis, ya'ni, bu funksiya va uning noldagi qiymati va hosilalarining qiymatlari nolga teng bo'lsa, u holda f funksiya uchun $\eta(z_2) = f(\psi(z_2), z_2)$ deb,

$$\tilde{f}(x(z)) = z_1^2 + \eta(z_2)$$

ko'rinishda tasvirlaymiz. Agar $\eta(z_2)$ funksiya n -tartibli ($n \geq 2$) nolga ega bo'lsa, u holda

$$\eta(z_2) = z_2^n \eta_0(z_2), \quad \eta_0(0) \neq 0$$

tengliklar o'rinni. U holda $z_1 = u_1$, $z_2(\eta_0(z_2))^{1/n} = u_2$ almashtirish olsak, f funksiya $f(x(u)) = u_1^2 \pm u_2^n$ shaklga keltiriladi. Bu funksiyaning maxsusligi A_{n-1} shakldagi maxsuslik deyiladi.

Endi $P_2(x_1, x_2) \equiv 0$ va $P_3(x_1, x_2) \neq 0$ bo'lgan hollarni qarab chiqamiz.

Quyidagi teoremani isbotlaylik.

Teorema 1. Faraz qilaylik, $f(x_1, x_2)$ funksiya quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

$$1) \frac{\partial^{|\alpha|} f(0,0)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}} = 0, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 \leq 2.$$

$$2) h(f) = 2.$$

$$3) f_3(x_1, x_2) = 0 \text{ tenglamani ildizlari kamida ikkita har xil chiziqdan tuzilgan bo'lsin.}$$

U holda f funksiya diffeomorfik akslantirish bilan $f(x(u)) = u_1 u_2^2 + g(u_1, u_2)$ shaklga keltiriladi, bu yerda $g(u_1, u_2)$ tekis funksiya.

Xususan, f analitik funksiya bo'lsa, u analitik diffeomorfizm orqali $f(x(u)) = u_1 u_2^2$ shaklga keltiriladi.

1-teoremaning isboti. Teoremani isbotlashdan oldin quyidagi ma'lum lemmani keltiramiz va isbot qilamiz.

Lemma 1. Agar $P_3(x_1, x_2) \neq 0$ 3-darajali bir jinsli ko'phad bo'lsa, u chiziqli almashtirish orqali quyidagi shakllardan biriga keltiriladi

- 1) $u_1^3 \pm u_1 u_2^2$;
- 2) $u_1 u_2^2$;
- 3) u_1^3 .

1-Lemmaning isboti. Faraz qilaylik,

$$P_3(x_1, 0) \equiv 0 \quad (3)$$

bo'lsin. U holda

$$P_3(x_1, x_2) = x_2(ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2).$$

Agar $P_3(x_1, 0) \neq 0$ va $P_3(0, x_2) \neq 0$ bo'lsa, u holda burish orqali biz P_3 ni (3) shaklga keltirishimiz mumkin. Shuning uchun, biz P_3 ko'phad (3) shaklga ega deb faraz qilishimiz mumkin. Endi $ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$ kvadrat uchhad uchun bir necha holni qaraymiz.

1-hol. $D = b^2 - 4ac > 0$ va $a \neq 0$ bo'lsin. U holda bu kvadrat uchhad quyidagi shaklda yoziladi $ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 = a(x_1 - \lambda_1 x_2)(x_1 - \lambda_2 x_2)$.

Shunday qilib,

$$P_3(x_1, x_2) = x_2 \left(a \left(x_1 + \frac{b}{a} x_2 \right)^2 - \left(\frac{b^2}{a} - c \right) x_2^2 \right).$$

$a > 0$ bo'lsin hamda $\sqrt{a} \left(x_1 + \frac{b}{a} x_2 \right) = y_1$, $x_2 = y_2$ almashtirish olsak, u holda

$$\tilde{P}_3(y_1, y_2) = y_2 \left(y_1^2 - \left(y_2 \sqrt{\frac{b^2}{a} - c} \right)^2 \right).$$

$\tilde{P}_3(y_1, y_2)$ ko'phadda $y_2 = \alpha z_2$, $y_1 = \beta z_1$ almashirish olsak, $\tilde{P}_3 = \alpha z_2 \left(\beta^2 z_1^2 - \left(\frac{b^2}{a} - c \right) \alpha^2 z_2^2 \right)$ shaklga keltiramiz. Quyidagi

$$\begin{cases} \alpha\beta^2 = 1 \\ 1 = \left(\frac{b^2}{a} - c \right) \alpha^3 \end{cases},$$

tenglamalar sistemasini qaraymiz. Bundan

$$\alpha^3 \left(\frac{b^2}{a} - c \right) = 1, \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{b^2}{a} - c}}, \quad \beta = \sqrt[6]{\frac{b^2}{a} - c}$$

tengliklarni topamiz. U holda P ko'phad $z_2(z_1^2 - z_2^2)$ shaklga keladi. Bu 1) shakldagi ildizlari haqiqiy bo'lgan holga mos keladi. Xuddi shunday, $b^2 - ac < 0$ bo'lgan holda kvadrat uchhaddan to'la kvadrat ajratib P_3 ni $z_2(z_1^2 + z_2^2)$ shaklga keltiramiz.

2-hol. $D = b^2 - ac = 0$ bo'lsin. Agar $a = 0$ bo'lsa, u holda $b = 0$ va P_3 ko'phad u_2^3 shakliga keltiriladi.

Endi $a \neq 0$ deb faraz qilsak, u holda P_3 quyidagi shaklga keladi $P_3 = x_2 a \left(x_1 + \frac{b}{a} x_2 \right)^2$. Bunda

$ax_2 = u_1$, $x_1 + \frac{b}{a} x_2 = u_2$ almashtirish olib, $\tilde{P}_3(u) = u_1 u_2^2$ shaklga keltiramiz. **Lemma 1 isbot bo'ldi.**

Ta'rif. [3] R^k da biror koordinatalar sistemasini tayinlab, bu sistemada f funksiyaning noldagi Teylor qatorini \tilde{f} bilan belgilaymiz. t_0 orqali $x_1 = \dots = x_k = t$, $t \in R$ to'g'ri chiziqning $\Gamma_+(f)$ Nyuton

ko'pyoqligining chegarasi bilan kesishish parametrini belgilaymiz. Bu sonni Nyuton ko'pyoqligidan koordinatalar boshigacha bo'lgan *masofa* deb nomlaymiz va uni h bilan belgilaymiz.

Agar P_3 ko'phad $u_1^3 \pm u_1 u_2^2$ shaklga kelsa, u holda V.I.Arnold [1] teoremasiga ko'ra f funksiya $f \sim u_1^3 \pm u_1 u_2^2$ shaklga keltiriladi. Bu maxsuslik D_4^\pm shaklidagi (tipidagi) maxsuslik deyiladi. Bu holda $h < 2$.

Eslatma. Agar P_3 ko'phad u_2^3 shaklga keltirilib $h < 2$ bo'lsa, u holda V.I.Arnold [1] teoremasiga ko'ra f funksiya $u_2^3 \pm u_1^4$ (E_6), $u_2^3 + u_2 u_1^3$ (E_7), $u_2^3 + u_1^5$ (E_8) shakllardan biriga keltiriladi.

Agar $h = 2$ bo'lsa, u holda Nyuton ko'pyoqligining bosh yog'iga (qirrasiga) mos keluvchi ko'phad

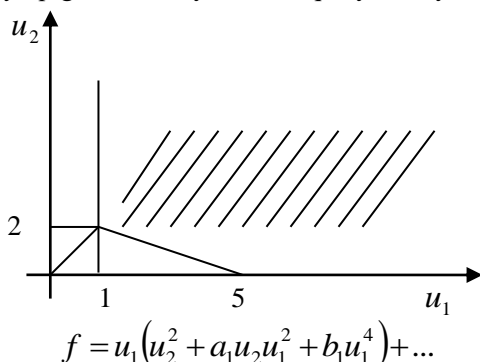
$$P = x_1^2 x_2^2 \text{ yoki } u_2^3 + p u_2 u_1^4 + q u_1^6 \tag{4}$$

shaklga kelib $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \neq 0$ shart bajariladi. Bu holda V.I.Arnold [1] teoremasiga ko'ra f funksiya diffeomorfik almashtirish orqali (4) shaklga keladi. Bu maxsuslik T_{10} tipdagi maxsuslik deb ataladi.

Endi $P_3 = u_1 u_2^2$ va $h = 2$ bo'lgan holni qarab chiqamiz.

Eslatma. Agar $P_3 = u_1 u_2^2$ bo'lib $h < 2$ bo'lsa, u holda f funksiya diffeomorfik almashtirish orqali $u_1 u_2^2 \pm u_1^{k-1}$ ($k \geq 4$) shaklga keltiriladi. Bu maxsuslik D_k^\pm tipdagi maxsuslik deb ataladi.

Endi bir $P_3 = u_1 u_2^2$ va $h = 2$ bo'lgan holni ko'rib chiqamiz. Bunday funksiyalarni normal shaklga keltirishda Nyuton ko'pyoqligidan [3] foydalanish qulaydir. Nyuton ko'pyoqlini yasaymiz:



Nyuton ko'pyoqligining [3] $t_1 = t_2$ oktant bissektrisasi bilan kesishadigan eng kichik yog'iga (qirrasiga) bosh yoq (qirra) deyiladi.

Agar $h(f) = 2$ bo'lsa, u holda $u_2^2 + a_1 u_2 u_1^2 + b_1 u_1^4$ ko'phad uchun $a_1^2 - 4b_1 = 0$ bo'ladi. Aks holda biz $u_2 + \frac{a_1}{2} u_1^2 = y_2$, $u_1 = y_1$ almashtirish olsak f funksiyaning (y_1, y_2) koordinatalar sistemasidagi bosh yog'i $y_1(y_2^2 + c y_1^4)$ shaklga keladi. U holda V.I.Arnold [1] teoremasiga ko'ra f funksiya diffeomorfik almashtirishlar orqali

$$f \sim z_1(z_2^2 \pm z_1^4) = z_1 z_2^2 \pm z_1^5$$

shaklga keladi. Bunday maxsuslikka D_6 tipdagi maxsuslik deyiladi. Nyuton ko'pyoqligigacha bo'lgan

masofa balandlikka teng bo'lib, u $\frac{1}{h} = \frac{3}{5}$ ga teng bo'ladi.

Umumiy holda agar f funksiya

$$z_1 z_2^2 + z_1^{k-1}$$

D_k tipdagi maxsuslik bo'lib, u maxsuslik uchun $\frac{1}{h} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2(k-1)}$ tenglik bajariladi, ya'ni $h < 2$ bo'ladi. Formal ravishda $k = \infty$ desak, D_∞ maxsuslik uchun $h = 2$ bo'ladi. Endi biz bu mulohazaning teskarisini ko'rsatamiz. Ya'ni $h = 2$ bo'lib, $P_3 = u_1 u_2^2$ bo'lsa, u holda f funksiya ma'lum normal shaklga kelishini ko'rsatamiz.

Shunday qilib, ixtiyoriy k uchun f funksiyaning Nyuton ko'pyoqligi [3] bosh (qismiga) yog'iga mos keluvchi ko'phad

$$P = u_1(u_2^2 + au_2u_1^k + bu_1^{2k})$$

shaklga kelib, a va b o'zgarmas koeffitsiyentlar uchun $a^2 - 4b = 0$ shart bajariladi. Xuddi shunga o'xshash, Nyuton ko'pyoqligining bosh yog'iga mos keluvchi ko'phad $P = u_1 u_2^2 + cu_1^k$, $k \geq 4$, ($c \neq 0$) shaklda ham bo'lishi mumkin emas. Chunki bu holda yuqorida ta'kidlaganimiz kabi $\frac{1}{h} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2(k-1)} > \frac{1}{2}$ tengsizlik bajarilar edi.

Shunday qilib, biz cheksiz jarayonga ega bo'lamiz. Shunga mos a_2, a_3, \dots sonlar ketma-ketligini hosil qilamiz. Har gal bosh yoqqa mos keluvchi ko'phad $-\frac{a_k}{2}$ ildizga ega bo'ladi.

Klassik Borel teoremasiga ko'ra C^∞ da shunday ψ funksiya topiladiki, u uchun nol nuqtadagi Makloren qatori quyidagicha bo'ladi:

$$\psi(x_1) \sim \sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k. \tag{5}$$

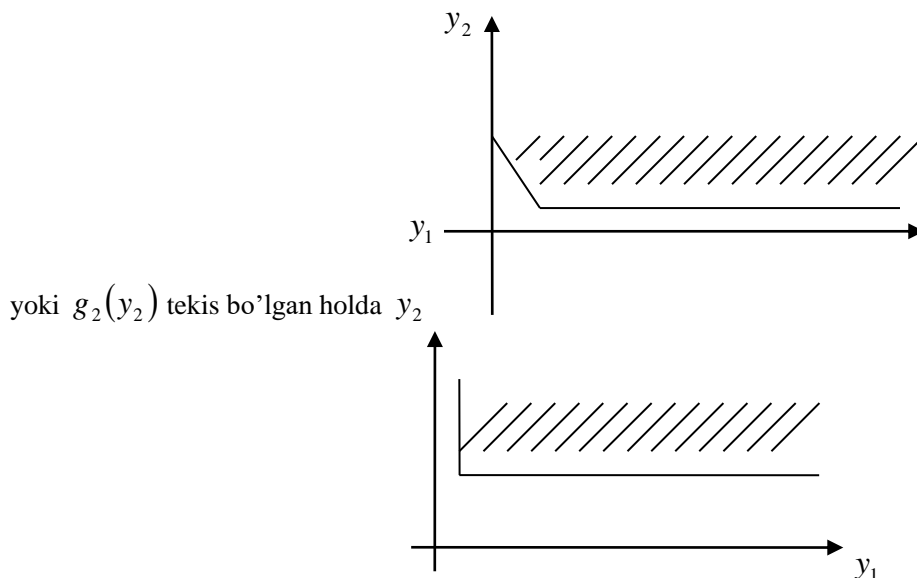
Umuman aytganda, agar $\{a_k\}$ ketma-ketlik uchun, (5) qator noldan farqli biror nuqtada ham yaqinlashuvchi bo'lmasligi mumkin.

$$u_2 + \frac{\psi(u_1)}{2} = y_2, \quad u_1 = y_1$$

almashtirish olamiz. Ravshanki, f funksiya yangi (y_1, y_2) koordinatalarda

$$f = y_1 y_2^2 a(y_1, y_2) + g_1(y_1, y_2) + y_2^4 g_2(y_2)$$

shaklga keladi. Chunki, uning Nyuton ko'pyoqligi



shaklga keladi. Bu yerda $g_1(y_1, y_2)$ tekis funksiya.

Endi f funksiyani

$$f = y_2^2(y_1 a(y_1, y_2) + y_2^2 g_2(y_2)) + g_1(y_1, y_2)$$

shaklda yozib $z_2 = y_2$, $z_1 = y_1 a(y_1, y_2) + y_2^2 g_2(y_2)$ diffeomorfik almashtirish olsak, f funksiyani $f = z_1 z_2^2 + g_1(z_1, z_2)$ shaklga keltiramiz. **Teorema 1 to'liq isbot bo'ldi.**

Adabiyotlar

1. Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-заде С.М. “Особенности дифференцируемых отображений” М.Наука 1982, ч.1.
2. Т.Постон, И.Стюарт “Теория катастроф и ее приложения” М.Мир, 1980.
3. Варченко А.Н., Многогранник Ньютона и оценки осциллирующих интегралов.// Функци. анал. и его прил. 1976, т. 10, вып. 5, стр. 13-38.

УДК 517.957

О ИЗОСПЕКТРАЛЬНОМ ОПЕРАТОРЕ ДИРАКА НА КОНЕЧНОМ ОТРЕЗКЕ

О.Э.Мирзаев

Самаркандский государственный университет
olim-mirzaev@mail.ru

Аннотация. В настоящей работе предлагается алгоритм построения семейства краевых задач для системы уравнений Дирака на конечном отрезке.

Ключевые слова: собственные значения, нормирующие константы, обратные задачи, интегральные уравнения Фредгольма второго рода.

Chekli kesmadagi Dirak izospektral operatorlari haqida

Аннотация. Ushbu maqolada spektrlari bir xil bo'lgan har xil Dirak differensial tenglamalar sistemasiga qo'yilgan chekli oraliqdagi chegaraviy masalalari oilasini qurish algoritmi taklif qilingan.

Калит so'zlar: xos qiymat, normallovchi o'zgarimaslar, teskari masala, ikkinchi tur Fredgolm integral tenglamasi.

On the isospectral Dirac operator on the finite segment

Abstract. In this paper, we propose an algorithm for constructing a family of boundary value problems for the system of Dirac equations on the finite segment.

Keywords: eigenvalues, normalization constants, inverse problems, Fredholm integral equations of the second kind.

1. Введение

Определение 1.1. Краевые задачи для системы уравнений Дирака

$$L^0 y \equiv B y' = \lambda y, \quad (0 < x < \pi), \quad y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}, \quad (1)$$

$$y_1(0) = 0, \quad y_1(\pi) = 0 \quad (2)$$

и

$$L(p(x), q(x)) y \equiv B y' + Q(x) y = \lambda y, \quad y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$$y_1(0) = 0, \quad y_1(\pi) = 0 \quad (4)$$

называются изоспектральными, если у них имеются одинаковые собственные значения, т.е. $\sigma(L(p(x), q(x))) = \sigma(L^0) = \{n, n \in \mathbb{Z}\}$.

Здесь

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix},$$

а $p(x), q(x) \in C[0, \pi]$ - действительная непрерывная функция на отрезке $[0, \pi]$.

Настоящая работа посвящена обратной спектральной задаче об описании всех краевых задач системы дифференциальных уравнений Дирака на конечном отрезке с одним и тем же

спектром. Такие краевые задачи называются изоспектральными и были изучены в работах [1]-[5]. М.Г.Гасымов, Т.Т.Джабиев [6] показали, что оператор Дирака на конечном отрезке определяется однозначно по его собственным значениям и последовательности нормирующих констант, а также ими найдены необходимые и достаточные условия восстановления краевых задач. М.Г.Гасымовом и Б.М.Левитаном. [7] были найдены необходимые и достаточные условия восстановления оператора Дирака на полуоси по их спектральным функциям. При построении изоспектральных оператора Дирака на конечном отрезке с заданным спектром $\sigma(L(p(x), q(x))) = \{\lambda_n, n \in Z\}$ нами использован метод работы Гасымова-Левитана см.[7]. Этот метод основан на восстановлении коэффициента оператора Дирака по спектральным данным с помощью интегрального уравнения Фредгольма второго рода с параметром.

Следует отметить, что изоспектральные операторы Штурма-Лиувилля на конечном отрезке изучались в работах [8]-[16]. Теория обратных спектральных задач для оператора Штурма-Лиувилля и их приложения более подробно изложена в работах [17]-[24].

Основным результатом настоящей работы является алгоритм, восстановления семейства операторов Дирака $L = L(p(x), q(x))$ на конечном отрезке, спектры которых удовлетворяют условиям: $\sigma(L) = \{\lambda_n = n, n \in Z\}$.

2. Некоторые сведения об обратной задаче для оператора Дирака на конечном отрезке

Обозначим через $\varphi(x, \lambda) = (\varphi_1(x, \lambda), \varphi_2(x, \lambda))^T$ решение уравнения (3), удовлетворяющее начальным условиям:

$$\varphi_1(0, \lambda) = 0, \quad \varphi_2(0, \lambda) = -1. \quad (5)$$

Хорошо известно [19], что решение $\varphi(x, \lambda)$ задачи (3), (5) существует, единственно и для каждого фиксированного $x \in [0, \pi]$ является целой вектор-функцией по λ . Кроме того, имеет место интегральное представление

$$\varphi(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \sin \lambda x \\ -\cos \lambda x \end{pmatrix} + \int_0^x K(x, t) \begin{pmatrix} \sin \lambda t \\ -\cos \lambda t \end{pmatrix} dt, \quad (6)$$

при этом матрица-функция $K(x, t) = \|K_{ij}(x, t)\|_{i,j=1,2}$ является решением задачи

$$BK'_x(x, t) + K'_t(x, t)B = -Q(x)K(x, t), \quad (7)$$

$$BK(x, x) - K(x, x)B = -Q(x) \quad (8)$$

$$K_{11}(x, 0) = K_{21}(x, 0) = 0. \quad (9)$$

Очевидно, что вектор-функция $\varphi(x, \lambda) = (\varphi_1(x, \lambda), \varphi_2(x, \lambda))^T$ при любом λ удовлетворяет граничному условию $\varphi_1(0, \lambda) = 0$. Поэтому собственные значения $\lambda_n, n \in Z$ задачи (3), (4) суть корни уравнения

$$\Delta(\lambda) \equiv \varphi_1(\pi, \lambda) = 0. \quad (10)$$

Тогда $\varphi(x, \lambda_n) = (\varphi_1(x, \lambda_n), \varphi_2(x, \lambda_n))^T, n \in Z$ является собственной вектор-функцией задачи (3), (4). Положим

$$a_n = \int_0^\pi [\varphi_1^2(x, \lambda_n) + \varphi_2^2(x, \lambda_n)] dx, \quad n \in Z. \quad (11)$$

Числа $a_n, n \in Z$ называются нормировочными числами краевой задачи (3), (4). Набор чисел $\{\lambda_n, a_n\}_{n=-\infty}^\infty$ будем называть в дальнейшем спектральными данными задачи (3), (4).

Теорема 2.1 ([6]). Если $p(x)$ и $q(x)$ имеют производные k -порядка из $L^2[0, \pi]$, то для спектральных данных $\{\lambda_n, a_n\}_{n=-\infty}^\infty$ задачи (3)-(4) справедливы равенства

$$\lambda_n = n + \frac{\alpha_1}{n} + \dots + \frac{\alpha_{k-1}}{n^{k-1}} + \frac{\alpha_{k,n}}{n^k}, \quad (12)$$

$$a_n = \pi + \frac{c_1}{n} + \dots + \frac{c_{k-1}}{n^{k-1}} + \frac{c_{k,n}}{n^k}. \quad (13)$$

где ряды

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\alpha_{k,n}|^2 < \infty, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_{k,n}|^2 < \infty$$

сходятся.

Следует отметить, что собственные вектор-функции $\varphi(x, \lambda_n) = (\varphi_1(x, \lambda_n), \varphi_2(x, \lambda_n))^T$, $n \in Z$ задачи (3), (4), соответствующие различным собственным значениям ортогональны в гильбертовом пространстве квадратично суммируемых двух компонентных вектор-функции $L^2_2(0, \pi)$ и для произвольных вектор-функции $f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T \in L^2_2[0, \pi]$ имеет место

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(x, \lambda_n) \left\{ \frac{1}{a_n} \int_0^{\pi} \varphi^T(t, \lambda_n) f(t) dt \right\}.$$

Отсюда получим символическое равенство:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{a_n} \varphi(x, \lambda_n) \varphi^T(t, \lambda_n) = I \delta(x-t), \tag{14}$$

где I - единичная матрица, $\delta(x)$ - дельта функция Дирака. В частности, при $p(x) \equiv 0, q(x) \equiv 0$, имеем

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \begin{pmatrix} \sin nx \\ -\cos nx \end{pmatrix} (\sin nt, -\cos nt) = I \delta(x-t). \tag{15}$$

Теорема 2.2 ([6]). Коэффициенты $p(x)$ и $q(x)$ краевой задачи (3), (4) определяется однозначно по спектральным данным $\{\lambda_n, a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$.

Лемма 2.1. Имеет место тождество

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{a_n} \varphi(x, \lambda_n) (\sin \lambda_n t, -\cos \lambda_n t) = 0, \quad 0 < t < x < \pi. \tag{16}$$

Теорема 2.3 ([6]). Ядро $K(x, t) = \|K_{ij}(x, t)\|_{i,j=1,2}$ оператора преобразования (6), удовлетворяет линейному интегральному уравнению

$$K(x, t) + F(x, t) + \int_0^x K(x, s) F(s, t) ds = 0, \quad (0 < t \leq x < \pi), \tag{17}$$

где

$$F(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{a_n} \begin{pmatrix} \sin \lambda_n x \\ -\cos \lambda_n x \end{pmatrix} (\sin \lambda_n t, -\cos \lambda_n t) - \frac{1}{\pi} \begin{pmatrix} \sin nx \\ -\cos nx \end{pmatrix} (\sin nt, -\cos nt) \right\}. \tag{18}$$

Теорема 2.4 ([6]). Для того чтобы последовательность вещественных чисел $\{\lambda_n, a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, $a_n > 0, n \in Z$ были спектральными данными некоторой краевой задачи вида (3)-(4) с матричной функцией вида

$$Q(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix},$$

где $p(x)$ и $q(x)$ имеют производные k -го порядка из $L^2(0, \pi)$, необходимо и достаточно, чтобы для $\lambda_n, n \in Z$ и $a_n, n \in Z$ выполнялись асимптотические формулы (12) и (13).

Итак, пусть $\{\lambda_n, a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, $a_n > 0, n \in Z$ удовлетворяют условиям (12) и (13). Построим матрица-функции $F(x, t)$ по формуле (18) и рассмотрим интегральных уравнений (17) относительно $K(x, t) = \|K_{ij}(x, t)\|_{i,j=1,2}$. Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема 2.5 ([6]). При каждом фиксированном $x \in (0, \pi)$ интегральное уравнение (17) имеет единственное решение $K(x, t) = \|K_{ij}(x, t)\|_{i,j=1,2}$.

Теперь, решая интегральные уравнение (17), находим матрица-функции $K(x, t) = \|K_{ij}(x, t)\|_{i,j=1,2}$. Далее определим вектор-функцию $\varphi(x, \lambda) = (\varphi_1(x, \lambda), \varphi_2(x, \lambda))^T$ по формуле

(6). Тогда нетрудно показать, что вектор-функция $\varphi(x, \lambda) = (\varphi_1(x, \lambda), \varphi_2(x, \lambda))^T$ удовлетворяет уравнению

$$B\varphi' + Q(x)\varphi = \lambda\varphi, \quad Q(x) = K(x, x)B - BK(x, x)$$

и начальным условиям $\varphi_1(0, \lambda) = 0, \varphi_2(0, \lambda) = -1$.

3. Алгоритм восстановления изоспектральных краевых задач

Основной результат настоящей работы содержится в следующей теореме.

Теорема 3.1. Пусть последовательность вещественных чисел $\{\lambda_n, a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}, a_n > 0, n \in Z$ является спектральным данным краевой задачи (3), (4). Тогда последовательность вещественных чисел $\{\lambda_n, a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}, a_n > 0, n \in Z$ удовлетворяющий условиям

$$\lambda_n = n, n \in Z, \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\pi} + \frac{\gamma_n}{n^2 + 1}, \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_n}{n^2 + 1} < \infty, \gamma_n > 0, n \in Z, \tag{19}$$

тоже является спектральным данным. Кроме того существует единственная краевая задача $L(p(x), q(x)) \equiv L(\dots, \gamma_{-n}, \dots, \gamma_{-1}, \gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n, \dots)$ вида (3), (4) с коэффициентами

$$p(x) = p(x, \dots, \gamma_{-n}, \dots, \gamma_{-1}, \gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n, \dots), \quad q(x) = q(x, \dots, \gamma_{-n}, \dots, \gamma_{-1}, \gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n, \dots) \tag{20}$$

собственные значения которых равны $n, n \in Z$, т.е.

$$\sigma(L(\dots, \gamma_{-n}, \dots, \gamma_{-1}, \gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n, \dots)) = \{n, n \in Z\}. \tag{21}$$

Доказательство. Легко заметить, что последовательность $\{\lambda_n, a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}, a_n > 0, n \in Z$ определенная формулами (19) удовлетворяет условиям теоремы 2.4. Поэтому существует единственная краевая задача вида (3), (4) с коэффициентами (20), и спектром (21).

Теперь находим коэффициенты (20). Для этого определим матрица-функции $F(x, t)$ по формулам (18) и (19)

$$F(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\gamma_n}{n^2 + 1} \begin{pmatrix} \sin nx \\ -\cos nx \end{pmatrix} (\sin nt, -\cos nt) \right\}. \tag{22}$$

Подставляя (22) в интегральное уравнение (17) получим

$$K(x, t) = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_n}{n^2 + 1} \varphi(x, n) (\sin nt, -\cos nt), \tag{23}$$

где

$$\varphi(x, n) = \begin{pmatrix} \sin nx \\ -\cos nx \end{pmatrix} + \int_0^x K(x, s) \begin{pmatrix} \sin ns \\ -\cos ns \end{pmatrix} ds. \tag{24}$$

Известно ([6], [19]), что вектор-функция $\varphi(x, \lambda)$ определенная по формуле (6) удовлетворяет дифференциальному уравнению вида (3) с коэффициентами (20), и начальным условиям $\varphi_1(0, \lambda) = 0, \varphi_2(0, \lambda) = -1$, где коэффициенты определяются по формулами

$$p(x) = p(x, \dots, \gamma_{-n}, \dots, \gamma_{-1}, \gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n, \dots) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_n}{n^2 + 1} [\varphi_2(x, n) \sin nt - \varphi_1(x, n) \cos nt], \tag{25}$$

$$q(x) = q(x, \dots, \gamma_{-n}, \dots, \gamma_{-1}, \gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n, \dots) = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_n}{n^2 + 1} [\varphi_1(x, n) \sin nt + \varphi_2(x, n) \cos nt].$$

Далее подставляя выражение (23) в формулу (24), имеем

$$\varphi(x, n) = \begin{pmatrix} \sin nx \\ -\cos nx \end{pmatrix} - \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_p}{p^2 + 1} \varphi(x, p) \int_0^x (\sin ps, -\cos ps) \begin{pmatrix} \sin ns \\ -\cos ns \end{pmatrix} ds. \tag{26}$$

Отсюда, получим собственную вектор-функции

$$\varphi(x, n) = \begin{pmatrix} \frac{\sin nx}{1 + \frac{\pi\gamma_n}{n^2 + 1}} \\ -\frac{\cos nx}{1 + \frac{\pi\gamma_n}{n^2 + 1}} \end{pmatrix}, \quad n \in Z,$$

соответствующую собственным значениям $\lambda_n = n, n \in \mathbb{Z}$, т.к.

$$\int_0^{\pi} (\sin ps, -\cos ps) \begin{pmatrix} \sin ns \\ -\cos ns \end{pmatrix} ds = \begin{cases} \pi, & p = n, \\ 0, & p \neq n. \end{cases}$$

Легко проверяются выполнения граничных условий (4), т.е. $\varphi_1(0, \lambda_n) = 0$, $\varphi_1(\pi, \lambda_n) = 0$, $\lambda_n = n, n \in \mathbb{Z}$.

Таким образом, в статье построено семейство операторов Дирака $L(\dots, \gamma_{-n}, \dots, \gamma_{-1}, \gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n, \dots)$ на конечном отрезке, собственные значения которых совпадают с заданными числами $\lambda_n = n, n \in \mathbb{Z}$.

Литература

1. Т.Н.Арутюнян. «Изоспектральные операторы Дирака»// Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, 29, №2, 1994, с.4-14.
2. Albeverio S, Hryniv, Mykytyuk Ya. “Inverse spectral problems for Dirac operators with summable potentials”//Russian Journal of Math Physics, 12(2005), 406-423.
3. Etibar S. Panakhov, Tuba Gulsen. “Isospectrality problem for Dirac system”// National academy of sciences of Azerbaijan, v.40, Special issue, 2014, p.386-392.
4. Yu.A.Ashrafyan, T.N.Harutyunyan. “Dirac operator with linear potential and its perturbations”// Mathematical Inverse Problems, Vol.3, No.1 (2016), 12-25.
5. Y.Ashrafyan, T.Harutyunyan. “Isospectral Dirac operators”// Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations 2017, №4, 1-9.
6. Гасымов М.Г., Джабиев Т.Т. Определение системы дифференциальных уравнений Дирака по двум спектрам // Труды летней школы по спектральной теории операторов и представлению теории групп – Баку: Элм, 1975, с. 46–71.
7. Гасымов М.Г., Левитан Б.М. «Обратная задача для системы Дирака» // ДАН СССР, -1966. – т.167, №5. –с.967-970.
8. Poschel J., Trubowitz E. Inverse spectral theory. // Academic Press, New York, 1987.
9. Jodeit M., Levitan B.M. The isospectrality problem for the classical Sturm-Liouville equation. // Advances in differential equations. 1997, v.2, № 2, p. 297-318.
10. M.Jodeit, B.M.Levitan. “The izospectrality problem fo some vector boundary problems”// Russian journal of mathematical physics, vol.6, No.4, 1999, pp.375-393.
11. Ashrafyan Y.A., Harutyunyan T.N. Inverse Sturm-Liouville problems with fixed boundary conditions. // Electronic Journal of differential equations, (2015), v. 2015, №27, p.1-8.
12. Мирзаев О.Э., Хасанов А.Б. О семействах изоспектральных краевых задач Штурма-Лиувилля. Уфимский математический журнал. Том 12. №2(2020). с. 28-34.
13. О.Э. Мирзаев, А.Б. Хасанов. Изоспектральные операторы Штурма-Лиувилля на конечном отрезке. ДАН РУз. 2020, № 3, 3-9.
14. Мирзаев О.Э., Муродов Ф.М. Изоспектральные операторы Штурма-Лиувилля на конечном отрезке. Научный журнал Самаркандского университета, 2020, № 3(121), 50-55.
15. Мирзаев О.Э. Изоспектральные операторы Штурма-Лиувилля на конечном отрезке. Научный журнал Самаркандского университета, 2020, № 5(123), 60-64.
16. Амбарцумян В.А. Über eine Frage Eigenwerttheorie. Zeitschr, für Physik, 53,1929, pp.690-695.
17. Алимов Ш.А. О работах А.Н.Тихонова по обратным задачи для уравнения Штурма-Лиувилля. УМН, 6(192), 1976, 84-88.
18. Гельфанд И.М., Левитан Б.М. Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции. //Изв. АН СССР, сер. матем. 1951, т. 15, №4, с. 309-360.
19. Левитан Б.М., Саргсян И.С. Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака. М.: Наука, 1988.
20. В.А.Марченко. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. Киев «Наукова Думка» 1977.
21. Савчук А.М., Шкаликов А.А. О свойствах отображений, связанных с обратными задачами Штурма-Лиувилля. // Тр. МИАИ, 2002, Т. 260., с. 227-247.
22. Юрко В.А. Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: Физматлит, 2007, 284 с.
23. А.В.Хасанов. Shturm-Liuvill chegaraviy masalalari nazariyasiga kirish. I. “Fan”. Toshkent, 2011.
24. А.В.Хасанов. Oddiy differensial tenglamalar nazariyasiga kirish. “Turon-iqbol”. Toshkent, 2019.

УДК: 519.8

КРИТЕРИИ СВЕДЕНИЯ К ЗАДАЧАМ РАСШИФРОВКИ И ПОИСКА МАКСИМАЛЬНОГО ВЕРХНЕГО НУЛЯ ДИСКРЕТНЫХ МОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ

А.В. Кабулов¹, Э.Урунбаев², Ш.Т.Болтаев¹

¹Национальный университет Узбекистана

²Самаркандский государственный университет

Аннотация. В статье исследованы некоторые классы дискретных экстремальных задач. Для построения алгоритмов решения отдельных классов дискретных экстремальных задач на отыскание точного оптимума использованы процедуры расшифровки и нахождения максимального верхнего нуля дискретных монотонных функций. Доказаны теоремы о сведении исследованных классов дискретных экстремальных задач к задаче расшифровки и поиска максимального верхнего нуля дискретных монотонных функций.

Ключевые слова: Задача расшифровки, максимальный верхний нуль, монотонная функция, тест, тестер, частичная функция, покрытие, дизъюнкция, функция алгебры логики, функция k -значной логики.

Diskret monoton funksiyalarning maksimum yuqori nolini qidirish va qurish muammolarini kamaytirish mezonlari

Annatsiya. Maqolada diskret ekstremal muammolarning ayrim sinflari o'rganilgan. Aniq optimumni topish uchun alohida ekstremal muammolarning alohida sinflarini yechish algoritmlarini tuzishda dekretlash va diskret monoton funksiyalarning maksimal yuqori nolini topish protseduralaridan foydalaniladi. Diskret ekstremal muammolarning o'rganilayotgan sinflarini qurish va maksimal yuqori diskret monoton funksiyalarni topish masalalari haqidagi teoremlar isbotlangan.

Kalit so'zlar: qurish muammosi, maksimal yuqori nol, monoton funksiya, test, sinovchi, qisman funksiya, qopqoq, dizunktsiya, mantiqiy algebra funksiyasi, k qiymatli mantiqiy funksiya.

Criteria for reduction to the problems of decoding and searching the maximum upper zero of discrete monotonic functions

Abstract. Some classes of discrete extremal problems are investigated in the article. To construct algorithms for solving individual classes of discrete extremal problems for finding the exact optimum, the procedures for decoding and finding the maximum upper zero of discrete monotone functions are used. Theorems on the construction of the studied classes of discrete extremal problems and finding the maximum upper discrete monotone functions are proved.

Keywords: Decryption problem, maximum upper zero, monotone function, test, tester, partial function, cover, disjunction, logic algebra function, k -valued logic function.

Введение.

Известно, что для построения алгоритмов решения отдельных классов дискретных экстремальных задач на отыскание точного оптимума используются процедуры расшифровки и нахождения максимального верхнего нуля дискретных монотонных функций (м.в.н. д.м.ф) и даются методы решения задач, использующих процедуры расшифровки и поиска м.в.н. дискретных монотонных функций. В статье исследуются методы решения задач расшифровки и поиска м.в.н. д.м.ф. многозначных функций. Рассматривается класс задач, которые могут быть сведены к расшифровке монотонной функции, заданной на конечной структуре, или поиску м.в.н. д.м.ф. Доказываются теоремы и даются критерии сведения к задачам расшифровки и поиска максимального верхнего нуля дискретных монотонных функций.

§1. Постановка задачи. Пусть $E_\rho = \{0, 1, \dots, \rho - 1\}$ и $T_1^*, T_2^*, \dots, T_\omega^*$ - прямоугольные таблицы с элементами из E_ρ , содержащие по n столбцов $m_1, m_2, \dots, m_\omega$ строк:

$$T_{nm}^0 = \bigcup_{i=1}^{\omega} T_i^* \sum_{i=1}^{\omega} m_i = m.$$

Строки назовем элементами, столбцы - признаками.

Заданием ω таблиц определяем некоторое множество элементов и разбиением их на ω классов: $K_1, K_2, \dots, K_\omega$. Таким образом, элемент a_{ij}^l , l -й таблицы есть значение j -го признака на

l -м объекте из l -го класса K_l . Предполагают, что каждый эталон содержится только в одном классе. Пусть S_1, S_2, \dots, S_m - эталон и x_1, x_2, \dots, x_m признаки. Тогда $x_j(S_i) = \alpha_{ij}$ - значение на S_i .

Известно, что множество $M = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_r}\}$ называется тестером, веди для любой пары эталонов S_i, S_j принадлежащих разным классам, существует признак $x_i \in M$ такой, что $x_i(S_i) \neq x_i(S_j)$. Очевидно, что в случае, когда $m_1 = m_2 = \dots = m_\omega = 1$ определения теста и тестеров таблиц совпадают. Тестер называется тупиковым, если после удаления из него любого признака он перестает быть тестером. Тестер называется минимальным, если он содержит минимальное число признаков среди всех тестеров таблиц.

Положим, что $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ произвольная частичная функция k -значной логики $m = \{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ система не всюду определенных булевых функций $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), i = \overline{1, m}$.

Известно [1-4] что совокупность переменных $M = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}\}$ называется существенной для $F(\tilde{x})(m)$, если найдется не всюду определенная функция $\varphi = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}\}$ k -значной логики $m' = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ (система булевых функций $\varphi = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}\}, i = \overline{1, m}$) такая, что $F = \varphi, (\varphi_i = f_i, i = \overline{1, m})$.

Существенная совокупность M для $F(m)$ называется тупиковой, если после удаления из нее любой переменной она перестает быть существенной для $F(m)$. Тупиковая M для $F(m)$ называется минимальной, если содержит минимальное число переменных среди всех совокупностей переменных, существенных для $F(m)$.

Пусть T_{nm} - бинарная таблица, содержащая n столбцов и m строк и ρ_i - вес i -й строки $\rho_i > 0, i = \overline{1, m}$. Будем считать, что строки i_1, i_2, \dots, i_k образуют покрытие столбцов T_{nm} , если для любого j -го столбца T_{nm} существует хотя бы одна строка $i \in \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ такая, что элемент α_{ij} в таблице T_{nm} является единичным. Покрытие $M = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ таблицы T_{nm} называется тупиковым, если после удаления из него строки R оно перестает быть покрытием T_{nm} . Покрытие M таблицы T_{nm} называется минимальным, если $\sum_{j=1}^k \rho_{i_j}$ - минимальное число среди всех сумм весов покрытий T_{nm} .

Пусть задан алфавит булевых переменных $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Рассмотрим множество Ω всех э.к. от k переменных ($0 \leq k \leq n, n \geq 1$). Обозначим через интервал (под куб) в кубе E_n^k , соответствующий э.к. $N_{\mathcal{A}}$.

Произвольной э.к. $\mathcal{A} = 1$ в Ω (интервалу $N_{\mathcal{A}}$) поставим в соответствие набор $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ такой, что

$$\alpha_i = \begin{cases} \sigma_1, & \text{если } i \in \{i_1, i_2, \dots, i_k\} \\ 2 - & \text{в противном случае} \end{cases}$$

причем э.к. $\mathcal{A} = 1$ соответствует набор $(2, 2, \dots, 2)$.

Рассмотрим структуру S^n , где $S = \{0, 1, 2\}, 0 < 1, 0 < 2$. Произведем кодировку элементов множества $S: 0 \rightarrow 2, 1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 0$. Имеем $2 < 1, 2 < 0$. Этот порядок индуцирует частичный порядок в множестве S^n :

$$\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq \tilde{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \text{ при } \tilde{\alpha}_i \leq \tilde{\beta}_i, i = \overline{1, n}.$$

Легко заметить, что наборам уровня U_j структуры S^n соответствуют э.к. ранга j множеству

Ω , и цепи $\{\tilde{\alpha}^{i_1}, \tilde{\alpha}^{i_2}, \dots, \tilde{\alpha}^{i_k}\}$ в совокупность э.к. $\mathfrak{M}_{ij}, j = \overline{1, k}$ таких, что $N_{\mathfrak{M}_{i_1}} \subset N_{\mathfrak{M}_{i_2}} \subset \dots \subset N_{\mathfrak{M}_{i_k}}$.

Пусть $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ - функции алгебры логики и $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ - частичная булева функция, заданная с помощью множеств $M_1, M_2, M_1 \cap M_2 \neq \emptyset$.

Введем функции $g(y_1, y_2, \dots, y_n), \tilde{g}(y_1, y_2, \dots, y_n), y \in \{0, 1, 2\}$, определенные на наборах $\tilde{\alpha}$ множества S^n . Пусть $\tilde{\alpha}$ соответствует э.к. \mathfrak{A} и Ω :

$$g(\tilde{\alpha}) = \begin{cases} 0, & \text{если } \mathfrak{M} - \text{недопустимая э.к. для } f \\ 1, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

$$g(\tilde{\alpha}) = \begin{cases} 1, & \text{если } N_{\mathfrak{A}} \cap M_1 \neq \emptyset, N_{\mathfrak{A}} \cap M_2 \neq \emptyset. \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Нетрудно доказать, что $g(y_1, y_2, \dots, y_n), (\tilde{g}(y_1, y_2, \dots, y_n))$ - монотонная функция, т.е. для любых наборов $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ в S^n таких, что $\tilde{\alpha} \leq \tilde{\beta}$ справедливо: $g(\tilde{\alpha}) \leq g(\tilde{\beta}), (\tilde{g}(\tilde{\alpha}) \leq \tilde{g}(\tilde{\beta}))$, нижние единицы $g(\tilde{\alpha}), (\tilde{g}(\tilde{\beta}))$ соответствуют максимальным интервалам N в $N_f, (E_n^2 \setminus M_2, N \cap M_2, N \cap M_1 \neq \emptyset)$. Причем множество всех нижних единиц $g(\tilde{y}), (\tilde{g}(\tilde{y}))$ определяет совокупность всех максимальных интервалов N в $N_f, (E_n^2 \setminus M_2, N \cap M_1 \neq \emptyset)$.

Рассмотрим дискретную задачу $Z_s \in \{Z_s\}, (Z'_s \in \{Z'_s\})$ поиска всех экстремумов (глобального экстремума) функционала F объекта $S \in \{S\}$. Очевидно, что множество $\{Z_s\}, (\{Z'_s\})$ взаимно-однозначно соответствует совокупности $\{S\}$. Например, если S есть частично определенная функция k -значной логики $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ то $Z_F \in \{Z_F\}, (Z'_F \in \{Z'_F\})$ формируется как задача поиска всех совокупностей (минимальной совокупности) переменных, существенных для $F(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \{F_n\}$, где $\{F_n\}$ - множество всех частично-определенных функций k -значной логики, зависящих от n -переменных.

Пусть объекту S соответствует монотонная функция $\varphi(y_1, y_2, \dots, y_n) \in M$, заданная на конечной структуре \tilde{M} . Причем верхние нули функции φ_s взаимно-однозначно соответствуют экстремумам функционала F объекта S .

Будем считать, что задача Z_s соответствует задаче расшифровки φ_s и Z'_s - поиска м.в.н. φ_s . Будем говорить о полном ведении множества $\{Z_s\}$ задаче расшифровки, если для любой функции f из M_n существует M_n из $\{Z_s\}$ такая, что $\varphi_s = f$. Обозначим через $\{f_{\tilde{\alpha}}\}$ совокупность (класс) монотонных функций из M_n , у которых $\tilde{\alpha} \in M$ есть максимальный верхний нуль.

Будем считать, что задача Z'_s соответствует классу $\{f_{\tilde{\alpha}}\}$, если $\varphi_s = \{f_{\tilde{\alpha}}\}$. В случае, когда для любого набора $\tilde{\alpha} \in M_n$ существует Z'_s такая, что $\varphi_s = \{f_{\tilde{\alpha}}\}$, то будем говорить о полном сведении совокупности $\{Z'_s\}$ поиску м.в.н. функций в M_n . В противном случае сведение считается неполным.

§2. Критерии сведения к задачам расшифровки и поиска максимального верхнего нуля дискретных монотонных функций.

В этом параграфе доказываются критерии сведения к задачам расшифровки и поиска максимального верхнего нуля дискретных монотонных функций задач об оптимальном покрытии столбцов бинарной таблицы строками, поиска минимальных тестов, тестеров таблиц, оптимального продолжения частично определенных логических функций и т. д.

Пусть $\varphi(n)$ функция Шеннона [5] для φ_s для решения задачи расшифровки монотонных функций в классе σ . Имеет место теорема [1].

Теорема 1. Минимальное $\varphi(n)$ число обращений к оператору A_f , достаточное для восстановления таблицы значений функций $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в классе σ , удовлетворяет следующей верхней оценке:

$$\varphi(n) \leq \frac{2}{(2\sqrt[3]{2}-1)^{3/2}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{3^n}{\sqrt{n}} (1 + \varepsilon(n)), \text{ где } \varepsilon(n) \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Теорема 2. Если существует полное сведение совокупности $\{Z_s\}$ к задаче расшифровки в M_n , то сведение совокупности $\{Z'_s\}$ к поиску м.в.н. функций в M_n является полным.

Доказательство. Очевидно, что полное сведение совокупности $\{Z_s\}$ к задаче расшифровки означает, что для любой функции из M_n существует Z_s из $\{Z_s\}$, для которой $\varphi_s = f$.

Поэтому для любого набора $\tilde{\alpha} \in M_n$ существует такая Z'_s , что $\varphi_s = \{f_{\tilde{\alpha}}\}$. Следовательно, можно утверждать полное сведение $\{Z'_s\}$ к поиску м.в.н. функций в M_n . Теорема доказана.

Пусть $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ - булева функция, $\{Z_f\}$ - класс задач Z построения сокращенных д.н.ф. для всех булевых функций $f(x)$.

Рассмотрим монотонную функцию $g(y_1, y_2, \dots, y_n)$ в S^n , соответствующую $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Теорема 3. Сведение класса $\{Z\}$ к задаче расшифровки является неполным.

Доказательство. Оно следует из того, что для монотонной функции $\psi(y_1, y_2, \dots, y_n)$ в S^n такой что

$$\psi(\tilde{\alpha}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \tilde{\alpha} \in \bigcup_{i=j}^n U_i, i < j < n \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

не существует Z_f из $\{Z_f\}$, что $\psi \equiv \varphi_f$.

Аналогично доказывается, что сведение класса $\{Z_f\}$ задач Z_f построения сокращенных д.н.ф. частичных функций F , k -значной логики к задаче расшифровки является неполным.

Пусть $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ - произвольная не всюду определенная функция k -значной логики, Z'_f - задача поиска минимальной совокупности переменных, существенных для F и φ_F - монотонная булева функция, соответствующая F . Допустим, что $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}$ - нулевые координаты набора $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in E_n^2$.

Положим

$$\varphi_T = \begin{cases} 0, & \text{если } \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}\} \text{-тест таблицы} \\ 1 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Теорема 4. Для функции Шеннона $M(n)$ поиска м.в.н. в классе $\{\varphi_F\}_n$ всех монотонных булевых функций φ_F , соответствующих $F \in \{F\}_n$ справедливо $\mu(n) = C_n^{\lfloor n/2 \rfloor + 1}$.

Доказательство. Из утверждения теоремы 2 и [6] следует, что для любого $f \in \tilde{M}$ найдется такая $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$, что $\varphi_F = f$.

Нетрудно заметить, что утверждение теоремы 4 справедливо и по отношению к задаче поиска минимального тестера k -значных таблиц.

Пусть $T_{mn} = \|\alpha_{ij}\|_{\min}$ - бинарная таблица из m строк и n столбцов. Задача Z'_T в $\{Z'_T\}$, соответствующая $\{T\}$, состоит в поиске минимального теста таблицы. Положим φ_T - монотонная булева функция, соответствующая T .

Допустим, что $(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k})$ нулевые координаты набора $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in E_n^2$.

Пусть

$$\varphi_T = \begin{cases} 0, & \text{если } \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}\} \text{-тест таблицы } T. \\ 1 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Теорема 5. Сведение $\{Z'_T\}$ к поиску м.в.н. функций в M_n является неполным.

Доказательство. Известно [7], что если $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$ - тест таблицы T , то $t \geq \lceil \log_2 m \rceil + 1$.

Поэтому, если для набора $\tilde{\alpha}$ в E_n^2 норма $|\tilde{\alpha}| > n - \lceil \log_2 m \rceil - 1$ то не найдется $\{Z'_T\} \in \{Z'_T\}$ такой, что, $\varphi_T \in \{f_{\tilde{\alpha}}\}$. Следовательно, сведение $\{Z'_T\}$ к поиску м.в.н. функций в M является неполным.

Теорема доказана.

Пусть задача Z'_T состоит в поиске минимального покрытия столбцов матрицы $E = \|\alpha_{ij}\|_{\min}$

строками и φ_T - монотонная булева функция такая, что

$$\varphi_T(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) = \begin{cases} 0, & \text{если } \{i_1, i_2, \dots, i_k\} \text{-е строки образует покрытие столбцов } T \\ 1 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

где $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}$ - нулевые координаты произвольного набора $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i) \in E_n^2$.

Теорема 6. Сведение $\{Z'_T\}$ к поиску м.в.н. функций в M_n является полным.

Доказательство. Пусть $\tilde{\alpha}$ - произвольный набор E_m^2 и i_1, i_2, \dots, i_k - нулевые координаты $\tilde{\alpha}$.

Построим бинарную таблицу $T_{\tilde{\alpha}}$. Положим $n = m$. Строки U_1, U_2, \dots, U_m таблицы выбираем таким образом, что

$$U_{i_1} = (1 \dots 0 \dots 00 \dots 0)$$

$$U_{i_2} = (0 \dots 1 \dots 00 \dots 0)$$

.....

$$U_{i_k} = (0 \dots 0 \dots 01 \dots 0)$$

Причем остальные строки $T_{\tilde{\alpha}}$ попарно различные и первые координаты принимают значение ноль.

Легко заметить, что набор $\tilde{\alpha}$ является м.в.н. функции $\varphi_{T_{\tilde{\alpha}}}$ и $\varphi_{T_{\tilde{\alpha}}} \in M_m$. Таким образом, для любого $\tilde{\alpha} \in E_m^2$ существует таблица $T_{\tilde{\alpha}}$ такая, что $\varphi_{T_{\tilde{\alpha}}} \in \{f_{\tilde{\alpha}}\}$.

Теорема доказана.

Пусть $\mathfrak{M} = \{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ - система функций $f_i = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, i = \overline{1, m}$, алгебры логики. Задача Z'_m состоит в поиске минимальной совокупности переменных, существенных для \mathfrak{M} и φ_m - монотонная булева функция, соответствующая \mathfrak{M} . Допустим, $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}$ - нулевые координаты набора $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) \in E_n^2$.

Положим

$$\varphi_m(\tilde{\alpha}) = \begin{cases} 0, & \text{если } \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}\} \text{-существенная для } \mathfrak{M} \\ 1 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Теорема 7. Сведение Z'_m к поиску м.в.н. функций в M_n является полным.

Доказательство. Пусть $\tilde{\alpha}_1$ - произвольный набор E_n^2 i_1, i_2, \dots, i_k нулевые координаты $\tilde{\alpha}_1$ и $\tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_m$ - попарно различные наборы интервала $N_{\tilde{\alpha}_1}$ в E_n^2 , натянутого на наборы $\tilde{\alpha}_1$. Построим систему $\mathfrak{M} = \{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ функций $f_i = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, i = \overline{1, m}$, таких что на всех наборах $\tilde{\beta} \in E_n^2$, содержащих $(k-1)$ нулей, $f_i(\tilde{\beta}) = 0, f_i(\tilde{\alpha}) = 1, i = \overline{1, m}$.

На остальных наборах E_n^2 функции системы \mathfrak{M} не определяются. Нетрудно заметить, что

$\{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}\}$ - минимальная совокупность, существенная для \mathfrak{M} , и набор $\tilde{\alpha}_1$ - м.в.н. функции φ_m , поэтому $\varphi_m \in \{f_{\tilde{\alpha}_1}\}$ в M_n .

Теорема доказана.

Пусть $f_c = \mathfrak{A}_1 \vee \mathfrak{A}_2 \vee \dots \vee \mathfrak{A}_m$ - сокращенная д.н.ф. булевой функции $f = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Задача Z'_f состоит в построении кратчайшей д.н.ф. $f = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Положим φ_f - монотонная функция M_n соответствующая $f = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ и $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}$ координаты $(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}) \in E_n^2$:

$$\varphi_1 = \begin{cases} 0, & \text{если } \left(f \rightarrow \bigvee_{j=1}^k \mathfrak{A}_j \right) = 1 \\ 1 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Теорема 8. Сведения $\{Z'_f\}$ к поиску м.в.н. функций в M_n является неполным.

Доказательство. Известно [8], что для максимального значения $I_k(n)$ - длины кратчайшей д.н.ф. булевых функций $f = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ - имеет место равенство $I_k(n) = 2^{n-1}$. Поэтому, если для любого набора $\tilde{\alpha}_1$ и E_n^2 норма $|z| < 2^{n-1}$ то не существует задачи Z'_f такой, что $\varphi_f \in \{f_z\}$.

Следовательно, сведение $\{Z'_f\}$ к поиску м.в.н. функции в M_n является неполным. Теорема доказана.

Пусть \mathfrak{M} - система из \mathfrak{M} неравенств. Задача Z'_m состоит в поиске максимальной совместной подсистемы системы \mathfrak{M} . Положим φ_m - монотонная функция алгебры логики, соответствующая $m, \varphi_m \in M_n$. Допустим, что i_1, i_2, \dots, i_k единичные координаты набора $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) \in E_n^2$.

$$\varphi_m(\tilde{\alpha}) = \begin{cases} 0, & \text{если } i_1, i_2, \dots, i_k \text{ неравенства } m \text{ совместные} \\ 1 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Теорема 9. Сведение Z'_m к поиску м.в.н. функций в M_n является полным.

Доказательство. Пусть система $\mathfrak{M}_q, (1 \leq q \leq m)$ имеет вид $x_i \geq 0, i = \overline{1, q}, x_1 + x_2 + \dots + x_q = -C_j, j = \overline{1, m-q+1}$, где $\dot{N}_1, \dot{N}_2, \dots, \dot{N}_{m-q+1}$ - действительные положительные числа, причем при $q = m, m_m = \{x_i \geq 0, i = \overline{1, m}\}$.

Нетрудно заметить, что если для набора $\tilde{\alpha} \in E_m^2$ норма $|\tilde{\alpha}| \in q$, то для задачи Z'_{m_q} поиска максимальной совместной подсистемы m_q имеет место вхождение $\varphi_m \in \{f_{\tilde{\alpha}}\}$. Так как $q = \overline{1, m}$, то для наборов $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_m \in E_n^2, |\tilde{\alpha}| = i$ можно построить системы $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \dots, \mathfrak{M}_m$, для которых $\varphi_m \in \{f_{\tilde{\alpha}}\} \in M_n, i = \overline{1, m}$. Теорема доказана.

Таким образом, из утверждений доказанных теорем следует сведение решений перечисленных дискретных экстремальных задач к решению задач расшифровки или поиска м.в.н. монотонных функций M_n .

§3. Понятие теста и связь с системой булевых уравнений

Пусть задана таблица (табл.1) элементов, состоящих из m строк (объектов) и n столбцов (признаков), причем $\alpha_{ij} \in \{0, 1, \dots, k-1\}, k \geq 1, j = \overline{1, n}, i = \overline{1, m}$.

Таблица 1.

S/X	x_1	x_2	x_n
S_1	γ_1^1	γ_1^2	γ_1^n

S_2	γ_2^1	γ_2^2	γ_2^n
..			
S_m	γ_m^1	γ_m^2	γ_m^n

Для описания и построения тестов удобно пользоваться аппаратом алгебры логики.

Пусть $T = \{i_1, i_2, \dots, i_t\}$ - некоторый тест. Рассмотрим S_i, S_j из табл.1. Так как T - тест, то существует признак $x_{ij} \in T, (1 \leq j \leq t)$ такой, что $\alpha_{ii} \neq \alpha_{ji}, \alpha_{ii} \neq \alpha_{ji}$. Этот признак, следовательно, входит в множество T_{ij} – совокупность всех признаков, на которых объекты S_i и S_j различаются.

Таким образом, T - результат выбора признаков всех множеств T_{ij} , где $i, j = \overline{1, m}, (i \neq j)$. Следует отметить, что принцип выбора, используемый при образовании T , усложняет построение теста.

Приступим к описанию построения тестов. Для этого используем аппарат решения систем логических уравнений. В самом деле, пусть $T_{ij} = \{x_1^{ij}, x_2^{ij}, \dots, x_{k_{ij}}^{ij}\}$. Запишем множество T_{ij} в виде уравнения

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1, \text{ где } g(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^{ij} \vee x_2^{ij} \vee \dots \vee x_{k_{ij}}^{ij}. \quad (1)$$

Ясно, что решения $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ уравнения (1), у которого $(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}), k < t$ - единичные координаты, будут означать, что признаки $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$ принадлежат множеству T_{ij} , т.е. различает объекты S_i, S_j .

Построим систему логических уравнений (2):

$$\begin{array}{cccccccc}
 x_1^{16} & \vee & x_2^{12} & \vee & \dots & \dots & \vee & x_{k_{12}}^{12} & = & 1 \\
 x_1^{12} & \vee & x_2^{18} & \vee & \dots & \dots & \vee & x_{k_{13}}^{13} & = & 1 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 x_1^{1m} & \vee & x_2^{1m} & \vee & \dots & \dots & \vee & x_{k_{m}}^{im} & = & 1 \\
 x_1^{28} & \vee & x_2^{28} & \vee & \dots & \dots & \vee & x_{k_{23}}^{23} & = & 1 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 x_1^{1m} & \vee & x_2^{2m} & \vee & \dots & \dots & \vee & x_{k_{2m}}^{2m} & = & 1 \\
 x_1^{(m-1)m} & \vee & x_2^{(m-1)m} & \vee & \dots & \dots & \vee & x_{k_{(m-1)m}}^{(m-1)m} & = & 1
 \end{array} \quad (2)$$

де $x_i^{ij} \in T_{ij}$.

Будем полагать что x_i^{ij} - переменные алгебры логики. Тогда система уравнений (2) является системой логических уравнений.

Нетрудно заметить, что система (2) совместна, поэтому для ее решения используем

$$\bigwedge_{i \neq j} (x_1^{ij} \vee x_2^{ij} \vee \dots \vee x_{k_{ij}}^{ij}) = 1, \quad i, j = \overline{1, m}. \quad (3)$$

Полагая $x_i^{ij} \wedge x_i^{ij} = x_i^{ij}, x_i^{ij} \vee Ax_i^{ij} = x_i^{ij}$ приведем выражение (3) к виду

$$\bigvee_{j=1}^q (x_{i_1} \vee x_{i_2} \vee \dots \vee x_{i_{k_j}}) = 1 \quad (4)$$

причем сумма не будет содержать лишних слагаемых.

Легко заметить, что каждое слагаемое $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_j}$ уравнения (4) на двоичном наборе

$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, у которого $(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_{k_j}})$ единичные координаты, принимает значение единицы, поэтому такой набор $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ является решением уравнения (4) и системы (2).

Теорема 10. Пусть $K = x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{k_j}}$ - слагаемое высказывание уравнения (1.10). Тогда множество признаков образует тупиковый тест (табл.1.1), причем число слагаемых высказывания в (4) равно числу всех тупиковых тестов. Справедливость теоремы следует из того факта, что слагаемое содержит элементы из каждой скобки $(x_1^{ij} \vee x_2^{ij} \vee \dots \vee x_{i_{k_j}}^{ij})$ (3).

Замечание 1. Вопрос о нахождении тестов сводится к построению множества, которое с каждым множеством в выражении (3) имеет, по крайней мере, один общий элемент.

Замечание 2. Слагаемое высказывание в уравнении (4), содержащее минимальное число элементов, соответствует минимальному тесту табл. 1.

§1.4. Тестеры и системы булевых уравнений

Пусть $E_\rho = \{0, 1, \dots, \rho - 1\}$, $T_1^*, T_2^*, \dots, T_\omega^*$ - прямоугольные таблицы с элементами из E_ρ . Пусть $T = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_t}\}$ - некоторый тестер. Рассмотрим $S_i = k_i$. Так как T - тестер, то существует признак $x_i \in T$ такой, что $\alpha_{i_i} = \alpha_{j_i}$. Обозначим через множество всех признаков, на которых объекты S_i и S_j из классов k_ρ и k_l соответственно различаются. Очевидно, что T есть результат выбора признаков из всех множеств $T_{ij}^{l\rho}$, где $i = \overline{1, m_\rho}$.

Для формирования тестеров используем аппарат решения систем логических уравнений. Будем полагать, что x_1, x_2, \dots, x_n являются булевыми переменными.

Пусть $T_{ij}^{l\rho} = \{x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_q}\}$, $(q \leq t)$. Кая и в случае тестов, запишем множество $T_{ij}^{l\rho}$ в виде логического уравнения где

$$g_{ijl\rho}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1, \quad g_{ijl\rho}(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_{j_1} \vee x_{j_2} \vee \dots \vee x_{j_q}.$$

Пусть L - система логических уравнений $g_{ijl\rho}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1$ где

$$i = \overline{1, m_l}, \quad j = \overline{1, m_\rho}, \quad l, \rho = \overline{1, \omega}, \quad i \neq j, \quad \rho \neq 1.$$

Аналогично тестам система L приводится к виду

$$\bigvee_{i=1}^q \tilde{g}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1 \tag{5}$$

Пусть уравнение (5) представляется в виде

$$\bigvee_{i=1}^q (x_{i_1} \vee x_{i_2} \vee \dots \vee x_{i_{k_j}}) = 1, \tag{6}$$

где $x_{ij} \in (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Тогда имеет место следующая.

Теорема 11. Совокупности $L_j = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{k_j}}\}$, $j = \overline{1, q}$ образуют тупиковые тестеры эталонной таблицы, причем их число равно числу слагаемых $i = \overline{1, p}$ в уравнении (6).

Заключение

Исследованы решения некоторых классов дискретных экстремальных задач. Доказаны теоремы о сведениях исследованных классов дискретных экстремальных задач таких, как об оптимальном покрытии столбцов бинарной таблицы строками, поиска минимальных тестов, тестеров таблиц, оптимального продолжения частично определенных логических функций и т. д. к задаче расшифровки и поиска максимального верхнего дискретных монотонных функций.

Литература

1. Журавлёв Ю.И. Об отделимости подмножеств вершин n-мерного единичного куба./ Труды МИ АН СССР, 1958, т.51.
2. Е.В.Дюкова, Ю.И.Журавлев, “Задача монотонной дуализации и ее обобщения: асимптотические оценки числа решений”, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **58**:12 (2018), 2153–2168

3. Е.В.Дюкова, Ю.И.Журавлёв, П.А.Прокофьев, “Логические корректоры в задаче классификации по прецедентам”, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **57**:11 (2017), 1906–1927
4. Н.Н.Бондаренко, Ю.И.Журавлев, “Алгоритм выбора конъюнкций для логических методов распознавания”, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **52**:4 (2012), 746–749
5. Kabulov A.V. and Normatov I.N. About problems of decoding and searching for the maximum upper zero of discrete monotone functions// – Journal of Physics Conference Series 1260(10):102006·August 2019 DOI: 10.1088/1742-6596/1260/10/102006 pp. – 1–7 (№ 6, Scopus, IF = 0.7).
6. Катериночкина Н.Н. Поиск максимального верхнего нуля монотонной функции алгебры логики. ДАН СССР, № 3, 1975, с. 224.
7. Н.А.Соловьев.Тесты.-Новосибирск. Наука. 1978. С.187.
8. В.В.Гагольев.Некоторые оценки дизъюнктивных нормальных форм функций алгебры логики. В сб. Проблемы кибернетики.М.Наука. 1967.вып.19.с.75-94

УДК: 517.9

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

К.О.Махмудов

Самаркандский государственный университет

Аннотация. В работе рассматривается задача Коши для обобщенной системы уравнений Максвелла. Построена формула Карлемана для восстановления решения по ее значениям на S .

Ключевые слова: Задача Коши, комплекс де Рама, формула Стрэттона-Чу, формула Грина, оператор Ходжа.

Maksvell tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasi

Annotasiya. Ushbu ishda umumlashtirilgan Maksvell tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasi qaralgan. Soha chegarasining bir qismi S da berilgan funksiyalarga ko'ra Karleman formulasi olingan.

Kalit so'zlar: Koshi masalasi, de Rham kompleksi, Stratton-Chu formulasi, Grin formulasi, Xodja operatori.

The Cauchy problem for the system of Maxwell equations

Abstract. In the paper considers the Cauchy problem for the generalized Maxwell equations. Carleman's formulas are obtained for recovering a solution from its values on S .

Keywords: Cauchy problem, de Rham complex, Stratton-Chu formula, Green formulas, Hodge operator.

Введение.

Хорошо известно, что задача Коши для эллиптических уравнений и систем является некорректной во всех стандартных функциональных пространствах. Тем не менее, она естественно возникает в приложениях: в гидродинамике (как задача Коши для голоморфных функций), в геофизике (как задача Коши для оператора Лапласа), в теории упругости (как задача Коши для системы Ламе), в электродинамике (как задача Коши для системы Максвелла) и т.д. Этим задачам посвящено громадное количество работ таких известных математиков, как Ж. Адамар, Т. Карлеман, Г.М. Голузин, В.И. Крылов, М.М. Лаврентьев, В. Иванов, Л.А. Айзенберга, А.Кытманов, Ш. Ярмухамедов, Н.Н.Тарханов, А.А. Шлапунова и других. Одна из первых формул, восстанавливающих голоморфную функцию в области одного специального вида по ее значениям на части границы, была предложена Карлеманом, а формулы подобного рода стали называться формулами Карлемана. Все эти и многие другие формулы, а также их приложения представлены в монографии Л.А.Айзенберга [1]. В конце XX столетия удалось понять, что задача Коши для эллиптических систем линейных уравнений эквивалентна другой некорректной задаче: об "аналитическом продолжении" с меньшего открытого множества на большее. Для переопределенных эллиптических систем этот подход, основанный на методе интегральных представлений, и разработанный при участии Л.А.Айзенберга, А.Кытманова, Н.Н.Тарханова, А.А.Шлапунова, И.В.Шестакова, Д.П.Федченко и других, также оказался вполне продуктивным теоретически и практически: были построены простые формулы для точных и приближенных решений задачи. В работе [4], не только получены условия разрешимости задачи Коши, но и

построена формула Карлемана для системы уравнений максвелловского типа в R^n . Данная работа посвящена задачам Коши для системы уравнений Максвелла. Здесь мы описали системы уравнений Максвелла в терминах комплекса де Рама в R^3 т.е. система уравнений Максвелла представлена на языке дифференциальных форм, [4],[6]. Здесь приводится конструкция матрицы левого фундаментального решения системы уравнений электродинамики специального вида. Полученная здесь обобщенная формула Стрэттона-Чу является основным рабочим инструментом настоящей работы. Также указываем разумное условие разрешимости и формулу Карлемана для ее решения.

1. Система уравнений Максвелла

Для простоты ограничимся гармоническими электромагнитными волнами. Тогда электрические и магнитные поля с электрической проницаемостью ϵ , магнитной проницаемостью μ проводимостью σ и частотой ω имеют асимптотический вид

$$E(t, x) = (\epsilon + i\sigma / \omega)^{-1/2} e^{-i\omega t} E(x),$$

$$H(t, x) = \mu^{-1/2} e^{-i\omega t} H(x).$$

Из системы уравнений Максвелла с произвольной зависимостью от времени

$$-\epsilon(d/dt)E + rotH = \sigma E,$$

$$\mu(d/dt)H + rotE = 0,$$

имеем, что зависящие от пространственных координат части полей E и H удовлетворяют системе уравнений Максвелла в гармоническом режиме

$$ikE + rotH = 0,$$

$$-ikH + rotE = 0,$$

(1)

где волновое число k задается выражением $k^2 = (\epsilon + i\sigma / \omega)\mu\omega^2$. Выберем знак величины k так, чтобы выполнялось условие $Im k \geq 0$, [8].

Выражение системы уравнений Максвелла (1) в терминах дифференциальных форм приводит к дальнейшему обозначению и концептуальному упрощению. Введем комплекс де Рама в R^3

$$0 \longrightarrow \Omega^0(R^3) \xrightarrow{d^0} \Omega^1(R^3) \xrightarrow{d^1} \Omega^2(R^3) \xrightarrow{d^2} \Omega^3(R^3) \longrightarrow 0.$$

Здесь $\Omega^0(R^3)$ - пространство гладких функций на R^3 , $\Omega^1(R^3)$ - пространство 1-форм, то есть $\Omega^i(R^3)$ -пространство i -форм. Тогда можем выбрать E как дифференциальную форму u степени 1, H - как дифференциальную форму f степени 2. Более явно, мы отождествляем вектор $E = (E_1, E_2, E_3)$ с 1-формой $u = E_1 dx^1 + E_2 dx^2 + E_3 dx^3$ и вектор $H = (H_1, H_2, H_3)$ с 2-формой $f = H_1 \star dx^1 + H_2 \star dx^2 + H_3 \star dx^3$ где \star оператор Ходжа. Тогда $rotE$ в точности соответствует du и $rotH$ с $d^* f$, где $d^* = \star d \star$ формально сопряженный оператор для d .

С помощью операторов $d : \Omega^i \rightarrow \Omega^{i+1}$ и $d^* : \Omega^i \rightarrow \Omega^{i-1}$

строится хорошо известный оператор или, иначе, лапласиан де Рама $\Delta = d^* d + d d^*$, который является формально самосопряженным неотрицательным эллиптическим дифференциальным оператором второго порядка $\Delta : \Omega^i(X) \rightarrow \Omega^i(X)$. Оператор d^* сопряжен с оператором внешнего дифференцирования относительно скалярного произведения

$$\langle du, f \rangle = \langle u, d^* f \rangle, \text{ где } u \in \Omega^i(X) \text{ и } f \in \Omega^{i+1}(X)$$

Оператор Δ коммутирует с двумя исходными операторами $d\Delta = \Delta d$ и $d^*\Delta = \Delta d^*$, и оператором Ходжа $\star \Delta = \Delta \star$, который является известным изоморфизмом векторных пространств, $\star : \Omega^i(X) \rightarrow \Omega^{i-1}(X)$.

т.е.

$$\star dx^i = (-1)^{i-1} dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge \hat{d}^i x \wedge dx^{i+1} \wedge \dots \wedge dx^n$$

Для 1-формы:

$$\begin{aligned} du &= d(E_1 dx^1 + E_2 dx^2 + E_3 dx^3) = \left(\frac{\partial E_1}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial E_1}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial E_1}{\partial x^3} dx^3 \right) dx^1 + \\ &+ \left(\frac{\partial E_2}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial E_2}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial E_2}{\partial x^3} dx^3 \right) dx^2 + \left(\frac{\partial E_3}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial E_3}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial E_3}{\partial x^3} dx^3 \right) dx^3 \\ &= \left(\frac{\partial E_3}{\partial x^2} - \frac{\partial E_2}{\partial x^3} \right) dx^2 \wedge dx^3 + \left(\frac{\partial E_1}{\partial x^3} - \frac{\partial E_3}{\partial x^1} \right) dx^3 \wedge dx^1 + \left(\frac{\partial E_2}{\partial x^1} - \frac{\partial E_1}{\partial x^2} \right) dx^1 \wedge dx^2. \end{aligned}$$

Для 2-формы:

$$\begin{aligned} d^* f &= \star d \star f = \star d(H_1 dx^1 + H_2 dx^2 + H_3 dx^3) = \\ &= \left(\frac{\partial H_3}{\partial x^2} - \frac{\partial H_2}{\partial x^3} \right) dx^1 + \left(\frac{\partial H_1}{\partial x^3} - \frac{\partial H_3}{\partial x^1} \right) dx^2 + \left(\frac{\partial H_2}{\partial x^1} - \frac{\partial H_1}{\partial x^2} \right) dx^3. \end{aligned}$$

Таким образом, система уравнений Максвелла (1) может быть записана в виде

$$\begin{aligned} iku + d^* f &= 0, \\ -ikf + du &= 0, \end{aligned} \tag{2}$$

которая имеет смысл не только для дифференциальных форм u и f степени 1 и 2 в R^3 , а также для дифференциальных форм u и f степени i и $i+1$ соответственно в R^n , где $-1 \leq i \leq n$.

Определение 1. Пусть $-1 \leq i \leq 3$. Оператор Максвелла для комплекса де Рама в R^3 на шаге i зададим как

$$M^i = \begin{pmatrix} ik & d^{i*} \\ d^i & -ik \end{pmatrix}.$$

С другой стороны, применяя d^* к обеим сторонам из $iku + d^* f = 0$, заключаем, что $d^{i-1*} u = 0$, если $k \neq 0$. Аналогично, из $-ikf + du = 0$, следует, что $d^{i+1} f = 0$ если $k \neq 0$.

Характерным и важным примером системы эллиптической по Дуглису-Ниренбергу и не эллиптической по Петровскому, является система уравнений Максвелла (2) в области $X \subset R^3$.

Пример

В случае комплекса де Рама в R^3 на шаге $i=2$ система уравнений Максвелла (2) имеет вид

$$-iku + \text{grad} f = 0, \tag{3}$$

$$-ikf + \text{div} u = 0,$$

Для системы (3) выберем наборы s и t , например, виде

$$s = (-1, -1, -1, 0) \text{ и } t = (1, 1, 1, 2).$$

Соответствующая главная часть оператора M^2 имеет вид

$$\tilde{M}_{s,t}^2(D) = \begin{pmatrix} -ik & 0 & 0 & \partial_1 \\ 0 & -ik & 0 & \partial_2 \\ 0 & 0 & -ik & \partial_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Выписываем характеристический многочлен $\tilde{M}_{s,t}^2(D(\xi))$

а ее определитель

$$\det \tilde{M}_{s,t}^2(D(\xi)) = k^2(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2) \neq 0 \quad \forall k \neq 0, \xi \in R^3 \setminus \{0\}.$$

Приходим к выводу о том, что система (2) на шаге $i=2$ является эллиптической по Дуглису-Ниренбергу.

2. Формула Стрэттона – Чу

Для изучения задачи Коши нужно некоторое интегральное представление. Обычно оно строится с помощью подходящего фундаментального решения и формулы Грина. Чтобы эту сложность обойти, можно, например, подобрать оператор

$$C = \begin{pmatrix} ik + (1/ik)dd^* & d^* \\ d & -ik - (1/ik)d^*d \end{pmatrix} \tag{4}$$

так чтобы была бы справедливо

Лемма 1. Как определено выше, C удовлетворяет

$$CM = MC = \begin{pmatrix} \Delta - k^2 & 0 \\ 0 & \Delta - k^2 \end{pmatrix}.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} CM &= \begin{pmatrix} -k^2 + dd^* + d^*d & ikd^* + (1/ik)dd^*d^* - ikd^* \\ ikd - ikd - (1/ik)d^*dd & dd^* - k^2 + d^*d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \Delta - k^2 & 0 \\ 0 & \Delta - k^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Пусть X компактное многообразие с краем гладко вложена в большую C^∞ многообразие X' , и последовательность де Рама определена на всей $X' \subset R^3$.

Лемма 2. Псевдодифференциальный оператор

$$\Phi = \begin{pmatrix} G(ik + (1/ik)dd^*) & Gd^* \\ Gd & G(-ik - (1/ik)d^*d) \end{pmatrix}$$

есть левое фундаментальное решение оператора Максвелла M на X' .

Доказательство. Из леммы 1 сразу следует, что

$$\Phi = \begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix} \circ C$$

является левым фундаментальным решением M . Остается заменить явное выражение (4) для C .

Теорема 1. Для каждой $u \in H^1(X, F^i)$ и $f \in H^1(X, F^{i+1})$, удовлетворяющих $M^i(u, f) = 0$ внутри X , следует, что

$$\int_{\partial X} \Phi(x, y) \begin{pmatrix} in(f) \\ -\nu \wedge t(u) \end{pmatrix} ds = \begin{cases} \begin{pmatrix} u(x) \\ f(x) \end{pmatrix}, & \text{если } x \in X \setminus \partial X, \\ 0, & \text{если } x \in X' \setminus X. \end{cases}$$

Здесь, $\nu(y)$ является внешним единичным вектором нормали к границе в точке $y \in \partial X$, ds поверхностная мера на X .

Доказательство. Эта формула является частным случаем общей формулы Грина [7], где

$$\sigma(M) = \begin{pmatrix} 0 & \sigma(d^*) \\ \sigma(d) & 0 \end{pmatrix}.$$

Для классических уравнений Максвелла формула теоремы 1 известна как формула Страттона – Чу, см.[8]. В этом случае он проявляет более утонченную структуру, поскольку фундаментальное решение Φ можно записать явно.

Следствие 1. Пусть (u, f) является электромагнитной волной в X , электрическая компонента u и магнитная компонента f , которой является непрерывными вплоть до границы. Тогда

$$\begin{pmatrix} (1/ik)d^*d & -d^* \\ -d & -(1/ik)dd^* \end{pmatrix} \int_{\partial X} e(x-y) \begin{pmatrix} in(f) \\ -\nu \wedge t(u) \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} u(x) \\ f(x) \end{pmatrix} \tag{5}$$

для всех $x \in X \setminus \partial X$, и левая часть исчезает далее от X .

Доказательство. Из (4) легко вывести, что

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{ik}(\Delta - k^2 - d^*d) & d^* \\ d & -\frac{1}{ik}(\Delta - k^2 - dd^*) \end{pmatrix}$$

так что

$$\Phi(x, y) = - \begin{pmatrix} -\frac{1}{ik}d^*de(x-y) & d^*e(x-y) \\ de(x-y) & \frac{1}{ik}dd^*e(x-y) \end{pmatrix}$$

в $R^3 \setminus \{y\}$ для $(\Delta + k^2)e(x-y) = 0$ вдали от начала координат.

Для завершения доказательства достаточно использовать теорему 1 и заметить, что

$$\sigma(\Delta)(v) = |v|^2 E_{k_3} = E_{k_3} \text{ в нашем частном случае.}$$

Легко можно проверить что,

$$M \begin{pmatrix} \frac{1}{ik}d^*d & -d^* \\ -d & -\frac{1}{ik}dd^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{ik}d^*(\Delta - k^2) \\ \frac{1}{ik}d(\Delta - k^2) & 0 \end{pmatrix},$$

следовательно, левая часть (5) удовлетворяет уравнениям Максвелла в $R^3 \setminus \partial X$ для всех интегрируемых функций $t(u)$ и $n(f)$ на граница. Таким образом, мы приходим к тому, что обычно называют интегралом типа Коши, связанным с уравнениями Максвелла, [7].

3. Формула Карлемана для части шара

Как уже упоминалось в 1-ом пункте, классическая система уравнения Максвелла (1) имеет вид:

$$\begin{aligned} ikE + d^*H &= 0, \\ -ikH + dE &= 0, \end{aligned}$$

где E и H функций в замкнутой области $X \subset R^3$ с значениями в R^3 . Если E вводится в указанных пределах 1-формой и H 2-формой и как внешний производный d так и формально сопряженное d^* могут быть отождествлены с оператором rot в векторных полях в R^3 .

В работе [2] Н.Н Тархановым и А.А Шлапуновым провидено исследование достаточно общих эллиптических систем и даны критерии разрешимости соответствующих задач Коши, а также формулы для их решения в терминах базисов с двойной ортогональностью. Мы применим этот метод к решению задачи Коши для однородной системы уравнений Максвелла в частном случае, когда X является частью шара $B = B(0, R)$ с центром (в начале) в нуле и радиусом, $R > 0$ прежде чем развивать теорию в общем случае. Пусть S является гладкой замкнутой гиперповерхностью, в B , которая не проходит через точку $x = 0$ и разбивает B на две области. Обозначим через X точку, которая не содержит начало. Его граница состоит из точки S и части сферы ∂B в R^3 . Мы считаем, что задача о нахождении электрического поля E и магнитного поля H в X с заданными тангенциальной компонентой E_0 в E и нормальной компонентой H_0 в H на S .

Применяя следствие 1 к системы классическим уравнениям Максвелла получаем формулу Стрэттона-Чу, [4].

Теорема 2. Пусть (E, H) является электромагнитной волной в X , электрическая компонента E и магнитная компонента H , которой является непрерывными вплоть до границы. Тогда

$$\begin{pmatrix} (1/ik)d^*d & -d^* \\ -d & -(1/ik)dd^* \end{pmatrix} \int_{\partial X} \frac{-1 \exp(ik|x-y|)}{4\pi|x-y|} \begin{pmatrix} in(H) \\ -v \wedge t(E) \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} E(x) \\ H(x) \end{pmatrix}$$

для всех $x \in X \setminus \partial X$, и левая часть исчезает далее от X .

Таким образом, получим так называемую функцию Карлемана для решений задачи Коши. А именно

$$K_N(x, y) = \begin{pmatrix} (1/ik)d * d & -d * \\ -d & -(1/ik)dd * \end{pmatrix} \left(-\frac{1}{4\pi} \frac{\exp(ik|x-y|)}{|x-y|} - \sum_{\nu=0}^N \sum_{j=1}^{J(\nu)} c_\nu^j(y, k) b_\nu^j(x, k) \right),$$

дифференциальный оператор с правой стороны, действующий по переменной x .

Теорема 3. Пусть (E, H) электромагнитных волн в X непрерывных вплоть до \bar{S} . Тогда

$$\begin{pmatrix} E(x) \\ H(x) \end{pmatrix} = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_S K_N(x, y) \begin{pmatrix} in(H) \\ -\nu \wedge t(E) \end{pmatrix} ds$$

для всех $x \in X \setminus \partial X$.

В [5], [7], [9] разработано несколько подходов к задаче Коши для решений линейных эллиптических уравнений с данными на части границы. Они дают не только явные формулы типа Карлемана для решений, но и условия для данных Коши, которые необходимы и достаточны для решения задачи Коши. Результаты довольно поразительно показывают, что задача Коши для эллиптических уравнений переопределена. Это разрешимо для тонкого набора данных Коши, и поэтому любая ошибка в данных Коши приводит к неразрешимости. По этой причине вариационный подход к задаче Коши для эллиптических уравнений представляет практический интерес. Это работает также в случае нелинейных эллиптических уравнений, см. [3]. В более общем плане проблема состоит во введении разумных классов приближенных решений. В этом смысле любая формула Карлемана, такая как формула теоремы 3, дает приближенные решения задачи Коши с данными на граничном отрезке для уравнения Максвелла.

Литературы

1. Aizenberg L.A., Carleman's Formulas in Complex Analysis. Theory and Applications, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1993.
2. Shlapunov A.A., Tarkhanov N.N. Bases with double orthogonality in the Cauchy problem for systems with injective symbols, // Proc.London Math.Soc.-1995.-V.71. no.1, 1-52.
3. I. Ly, N. Tarkhanov, A variational approach to the Cauchy problem for nonlinear elliptic equations, J. Inverse Ill-Posed Probl. 17 (6) (2009) 595–610.
4. Makhmudov, K., Makhmudov, O., and Tarkhanov, N., Equations of Maxwell type, J. Math. Anal. Appl. 378 (2011), Issue 1, 64-75.
5. O. Makhmudov, I. Niyozov, N. Tarkhanov, "The Cauchy problem of couple-stress elasticity", Complex Analysis and Dynamical Systems III, Contemp. Math., 455, Amer. Math.Soc., Providence, RI, 2008, 297–310
6. Makhmudov, K. Carleman formula for the Maxwell equation in a cap type domain, Jour. of Siberian Federal Uni.Math-s and Physics 12 (3) (2019) 317-322
7. Tarkhanov, N., The Cauchy Problem for Solutions of Elliptic Equations, Akademie Verlag, Berlin, 1995.
8. Colton, D., and Kress, R., Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory, Springer-Verlag, Heidelberg, 1998.
9. Yarmukhamedov, Sh., The Carleman function and the Cauchy problem for the Laplace equation, Siberian Math. J. 45 (2004), no.3, 580-595.

УДК 517.946

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Турсунов Ф.Р., Шодиев Д.С., Тухтаева Х.Х.
Самаркандский государственный университет
farhod.tursunov.76@mail.ru

Аннотация. В статье изучается задача продолжения решения задачи Коши для уравнения Лапласа в области G по ее известным значениям на гладкой части S границы ∂G . Рассматриваемая задача относится к задачам математической физики, в которых отсутствует непрерывная зависимость решений от начальных данных. Предполагается, что решение задачи существует и непрерывно дифференцируемо в замкнутой области с точно заданными данными Коши. Для этого случая устанавливается явная формула продолжения решения.

Ключевые слова: Задача Коши, некорректные задачи, функция Карлемана, регуляризованные решения, регуляризация, формулы продолжения.

Laplas tenglamasi uchun chegaralanmagan sohada Koshi masalasi yechimining regularizatsiyasi

Annotatsiya. Maqolada G soha chegarasi ∂G ning bir qismi S silliq chiziqda berilgan qiymatlariga ko'ra, Laplas tenglamasi uchun Koshi masalasi yechimini davom ettirishi qaraladi. Qaralayotgan masala, matematik fizikaning yechim boshlang'ich shartlarga uzluksiz ravishda bog'liq bo'lmagan masalalari qatoriga kiradi. Masalada yechim mavjud va biror yopiq sohada uzluksiz differensiallanuvchi, hamda Koshi shartlari aniq berilgan deb faraz qilinadi. Bu hol uchun oshkor ko'rinishda yechimni iregulyarizatsiyasi quriladi.

Kalit so'zlar. Koshi masalasi, nokorrekt masalalar, Karleman funksiyasi, regularizatsiyalashgan yechim, regularizatsiya, davom ettirish formulalari.

Regularization solution the Cauchy problem for the Laplace equation in an unlimited region

Abstract. The article studies the problem of continuation of the solution of the Cauchy problem for the Laplace equation in a domain G by its known values on the smooth part S of the boundary ∂G . The considered problem belongs to the problems of mathematical physics, in which there is no continuous dependence of solutions on the initial data. It is assumed that the solution to the problem exists and is continuously differentiable in a closed domain with exactly given Cauchy data. For this case, an explicit formula for the continuation of the solution is established.

Keywords: Cauchy problem, ill-posed problems, Carleman function, regularized solutions, regularization, continuation formulas.

Пусть $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in R^2$ точки двумерного Евклидова пространства и G - неограниченная область в R^2 лежащая внутри полосы $0 < y_2 < h$, $h = \frac{\pi}{\rho}$, $\rho > 0$ граница, которой состоит из прямой $T: y_2 = 0$ и некоторой кривой $S: y_2 = F(y_1)$ удовлетворяющей условиям $0 < F(y_1) < h$, $|F'(y_1)| < M < \infty$. Положим $\bar{G} = G \cup \partial G$, $\partial G = S \cup T$.

Предположим, что для некоторого $b_0 > 0$ выполняется условия:

$$\int_{\partial G} \exp\{-b_0 c h \rho_1 |y'|\} dS < \infty, \quad 0 < \rho_1 < \rho.$$

В области G рассмотрим уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y_2^2} = 0. \quad (1)$$

Обозначим

$$K_\rho(G) = \{U(y) \in C^2(G) \cap C^1(\bar{G}) : U(y) + \text{grad}U(y) \leq \exp[\rho(\exp \rho |y'|)], |y'| \rightarrow \infty, y \in G\}.$$

Постановка задачи. Требуется найти гармоническую функцию $U(y) \in K_\rho(G)$, у которого известны значения на части S границы ∂G , т.е

$$U(y)|_S = f(y), \quad \frac{\partial U(y)}{\partial n} \Big|_S = g(y). \quad (2)$$

Здесь $f(y) \in C^1(S)$ и $g(y) \in C(S)$ - заданные функции и $\partial / \partial n$ - оператор дифференцирования по внешней нормали к ∂G .

Рассматриваемая задача (1) - (2) относится к некорректным задачам математической физики, т.к. отсутствует непрерывная зависимость решения от начальных данных.

В работе [3] А. Н. Тихонов указал практическую важность неустойчивых задач и показал, что если сузить класс возможных решений до компакта, то из существования и единственности следует устойчивость решения, т.е. задача становится устойчивой.

В [1] Т. Carleman установил формулу, дающую решение уравнений Коши-Римана в области специального вида. Развивая его идею, Г. М. Голузин и В. И. Крылов [2] вывели формулу для определения значений аналитических функций по данным, известным лишь на участке границы, уже для произвольных областей. Формула типа Карлемана, в которой используется

фундаментальное решение дифференциального уравнения со специальными свойствами (функция Карлемана), была получена М.М.Лаврентьевым [5,6]. В этих работах дано определение функции Карлемана для случая, когда данные Коши заданы приближенно, а также приведена схема регуляризации задачи Коши для уравнения Лапласа. Применяя этот метод, Ш. Я. Ярмухамедов [7,8,9] построил функции Карлемана для широкого класса эллиптических операторов, заданных в пространственных областях специального вида, когда часть границы области, является гиперповерхностью, либо конической поверхностью.

В работе [8] рассматривается на части границы области по данным Коши задача приближенного восстановления гармонической функции и найдено регуляризованное решение.

Отметим, что при решении прикладных задач необходимо находить не только приближенные решения, но и производные приближенных решений. В работе [4] по данным Коши на гладкой части границы ограниченной области восстановлена не только сама гармоническая функция, но и ее производные, и получена оценка устойчивости производной приближенного решения. Эти результаты могут быть применены к задачам теории упругости при нахождении приближенного значения перемещения, деформации и напряжения.

Для рассматриваемой области функцию Карлемана впервые построил Ш. Ярмухамедов [9] в своей докторской диссертации следующим образом:

$$\Phi_{\sigma}(x, y) = \frac{\varphi(x, y)}{2\pi K(x_2)}, \tag{3}$$

где

$$\varphi(x, y) = \int_0^{\infty} \text{Im} \frac{K(w)}{w-x_2} \frac{udu}{\sqrt{u^2+\alpha^2}}, \quad K(w) = \frac{e^{\sigma w}}{w-x_2+2h}, \quad K(x_2) = \frac{1}{2h} e^{\sigma x_2}, \tag{4}$$

$$w = i\sqrt{u^2+\alpha^2} + y_2, \quad \alpha = |y'-x'|, \quad x' = (x_1, 0), \quad y' = (y_1, 0), \quad 0 < x_2 < h.$$

В формуле (4) мы выбираем

$$K(w) = \frac{e^{\sigma w^2}}{w-x_2+3h}, \quad K(x_2) = \frac{1}{3h} e^{\sigma x_2^2}$$

и отделяя мнимую часть с учетом (3) получим:

$$\begin{aligned} \Phi_{\sigma}(x, y) = & -\frac{3h}{2\pi} e^{-\sigma(\alpha^2+x_2^2-y_2^2)} \left[\int_0^{\infty} \frac{2(y_2-x_2)e^{-\sigma u^2} \cos 2\sigma y_2 \sqrt{u^2+\alpha^2}}{(u^2+r^2)(u^2+\alpha^2+(y_2-x_2+3h)^2)} udu + \right. \\ & + \int_0^{\infty} \frac{3he^{-\sigma u^2} \cos 2\sigma y_2 \sqrt{u^2+\alpha^2}}{(u^2+r^2)(u^2+\alpha^2+(y_2-x_2+3h)^2)} udu + \\ & + \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{u^2+\alpha^2} e^{-\sigma u^2} \sin 2\sigma y_2 \sqrt{u^2+\alpha^2}}{(u^2+r^2)(u^2+\alpha^2+(y_2-x_2+3h)^2)} udu - \\ & \left. - \int_0^{\infty} \frac{(y_2-x_2+3h)(y_2-x_2)e^{-\sigma u^2} \sin 2\sigma y_2 \sqrt{u^2+\alpha^2}}{(u^2+r^2)(u^2+\alpha^2+(y_2-x_2+3h)^2)} \frac{udu}{\sqrt{u^2+\alpha^2}} \right]. \end{aligned} \tag{5}$$

Если $U(y) \in K_{\rho}(G)$ удовлетворяет условию роста

$$|U(y)| + \left| \frac{\partial U(y)}{\partial n} \right| \leq M \exp \left[a \cos \left(y_2 - \frac{h}{2} \right) \exp \rho_1 |y'| \right], \quad a \geq 0, \quad y \in \partial G, \quad M = const \tag{6}$$

то справедлива интегральная формула Грина [9]

$$U(x) = \int_{\partial G} \left[\frac{\partial U}{\partial n} \Phi_{\sigma}(x, y) - U(y) \frac{\partial \Phi_{\sigma}(x, y)}{\partial n} \right] dS_y. \tag{7}$$

Предположим, что $U(y) \in K_{\rho}(G)$ ограничена вместо с нормальной производной на части ∂G , т.е:

$$|U(y)| + \left| \frac{\partial U(y)}{\partial n} \right| \leq M, \quad y \in T. \tag{8}$$

В этих предположениях в формулу (6) положим $a = 0$.

Обозначим

$$U_\sigma(x) = \int_S \left[\frac{\partial U}{\partial n} \Phi_\sigma(x, y) - U(y) \frac{\partial \Phi_\sigma(x, y)}{\partial n} \right] dS_y. \quad (9)$$

Теорема 1. Пусть функция $U(y) \in K_\rho(G)$ на части S границы ∂G удовлетворяет условию (2) и на части T границы ∂G выполнено неравенство (8). Тогда для любых $x \in G$ и $\sigma > 0$ справедлива оценка

$$|U(x) - U_\sigma(x)| \leq \psi_2(\sigma, x_2) M e^{-\sigma x_2^2}, \quad (10)$$

где M - положительное число и

$$\psi_2(\sigma, x_2) = \frac{3h\sqrt{\pi}}{8\sqrt{\sigma}x_2} + \frac{3h\sqrt{\pi}}{8\sqrt{\sigma}(3h-x_2)} + \frac{3h\sqrt{\pi}}{4\sqrt{\sigma}x_2(3h-x_2)} + \frac{3h\sqrt{\pi}(x_2+3h)}{\sqrt{\sigma}x_2(3h-x_2)^2} + \frac{h\sqrt{\pi}(6x_2\sigma+3)}{4\sqrt{\sigma}x_2}.$$

Доказательство. Обозначим через $J_\sigma(x)$ разность

$$J_\sigma(x) = U(x) - U_\sigma(x) = \int_T \left[\frac{\partial U}{\partial n} \Phi_\sigma(x, y) - U(y) \frac{\partial \Phi_\sigma(x, y)}{\partial n} \right] dS_y. \quad (11)$$

Оценивая (11) с учетом неравенство (8) получим

$$|I_\sigma(x)| = \left| \int_T \left[\frac{\partial U}{\partial n} \Phi_\sigma(x, y) - U(y) \frac{\partial \Phi_\sigma(x, y)}{\partial n} \right] dS_y \right| \leq M T_\sigma(x),$$

$$T_\sigma(x) = \int_T \left[|\Phi_\sigma(x, y)| + \left| \frac{\partial \Phi_\sigma(x, y)}{\partial n} \right| \right] dS_y.$$

Оценка (10) следует из неравенства

$$T_\sigma(x) \leq \psi_2(\sigma, x_2) e^{-\sigma x_2^2}, \quad \sigma > 0. \quad (12)$$

Докажем неравенство (12).

Сначала оценим $\Phi_\sigma(x, y)$. Пологая $y_2 = 0$ в (5) оценим, и введя полярные координаты получим:

$$\begin{aligned} \int_T |\Phi_\sigma(x, y)| dS_y &\leq \int_R \left\{ \frac{3he^{-\sigma x_2^2}}{2\pi} \left[\int_0^\infty \frac{u |3h-x_2| e^{-\sigma u^2}}{(u^2 + \alpha^2 + x_2^2)(u^2 + \alpha^2 + (3h-x_2)^2)} du \right] e^{-\sigma(y_1-x_1)^2} + \right. \\ &+ \left. \frac{3he^{-\sigma x_2^2}}{2\pi} \left[\int_0^\infty \frac{u |x_2| e^{-\sigma u^2}}{(u^2 + \alpha^2 + x_2^2)(u^2 + \alpha^2 + (3h-x_2)^2)} du \right] e^{-\sigma(y_1-x_1)^2} \right\} dy_1 \leq \\ &\leq \frac{3he^{-\sigma x_2^2}}{4\pi} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \left[\frac{e^{-\sigma(u^2+\alpha^2)}}{u^2 + \alpha^2 + x_2^2} + \frac{e^{-\sigma(u^2+\alpha^2)}}{u^2 + \alpha^2 + (3h-x_2)^2} \right] dudy_1 \leq \\ &\leq \frac{3he^{-\sigma x_2^2}}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty \frac{te^{-\sigma t^2}}{t^2 + x_2^2} dt + \frac{3he^{-\sigma x_2^2}}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty \frac{te^{-\sigma t^2}}{t^2 + (3h-x_2)^2} dt \leq \left(\frac{3h\sqrt{\pi}}{8\sqrt{\sigma}x_2} + \frac{3h\sqrt{\pi}}{8\sqrt{\sigma}(3h-x_2)} \right) e^{-\sigma x_2^2}. \end{aligned}$$

При оценки интегралов использовано неравенства

$$\frac{u|3h-x_2|}{u^2 + \alpha^2 + (3h-x_2)^2} < 1, \quad \frac{u|x_2|}{u^2 + \alpha^2 + x_2^2} < 1, \quad \frac{t}{t^2 + x_2^2} < \frac{1}{2x_2}, \quad \frac{t}{t^2 + (3h-x_2)^2} < \frac{1}{2(3h-x_2)}. \quad (13)$$

Теперь оценим $\int_T \left[\frac{\partial \Phi_\sigma(x, y)}{\partial n} \right] dS_y$, где

$$\frac{\partial \Phi_\sigma(x, y)}{\partial n} = \frac{\partial \Phi_\sigma(x, y)}{\partial y_1} \cos \gamma + \frac{\partial \Phi_\sigma(x, y)}{\partial y_2} \sin \gamma. \quad (14)$$

Учитывая, что $\cos \gamma$, $\sin \gamma$ является координатой единичной внешней нормали n в точке y границы ∂G , т.е. $\cos^2 \gamma + \sin^2 \gamma = 1$, оценим $\int_T \left[\left| \frac{\partial \Phi_\sigma(x, y)}{\partial n} \right| \right] dS_y$.

Далее вычислим производную $\frac{\partial \Phi_\sigma(x, y)}{\partial y_2}$, подставляя $y_2 = 0$ и оценивая, имеем:

$$\begin{aligned} \int_T \left| \frac{\partial \Phi_\sigma(x, y)}{\partial y_2} \right|_{y_2=0} dS_y &\leq \frac{3he^{-\sigma x_2^2}}{\pi} \int_R \left\{ \int_0^\infty \frac{ue^{-\sigma u^2}}{(u^2 + \alpha^2 + x_2^2)(u^2 + \alpha^2 + (3h - x_2)^2)} du \right\} e^{-\sigma \alpha^2} + \\ &+ \left[\int_0^\infty \frac{ux_2^2 e^{-\sigma u^2}}{(u^2 + \alpha^2 + x_2^2)^2 (u^2 + \alpha^2 + (3h - x_2)^2)} du \right] e^{-\sigma \alpha^2} + \\ &+ \left[\int_0^\infty \frac{2|3h - x_2| x_2 u e^{-\sigma u^2}}{(u^2 + \alpha^2 + x_2^2)(u^2 + \alpha^2 + (3h - x_2)^2)^2} du \right] e^{-\sigma \alpha^2} \Big\} dy_1 + \\ &+ \frac{9h^2 e^{-\sigma x_2^2}}{\pi} \int_R \left\{ \int_0^\infty \frac{x_2 u e^{-\sigma u^2}}{(u^2 + \alpha^2 + x_2^2)^2 (u^2 + \alpha^2 + (3h - x_2)^2)} du \right\} e^{-\sigma \alpha^2} + \\ &+ \left[\int_0^\infty \frac{|3h - x_2| u e^{-\sigma u^2}}{(u^2 + \alpha^2 + x_2^2)(u^2 + \alpha^2 + (3h - x_2)^2)^2} du \right] e^{-\sigma \alpha^2} \Big\} dy_1 + \\ &+ \frac{3he^{-\sigma x_2^2}}{\pi} \int_R \left\{ \int_0^\infty \frac{\sigma |u^2 + \alpha^2| u e^{-\sigma u^2}}{(u^2 + \alpha^2 + x_2^2)(u^2 + \alpha^2 + (3h - x_2)^2)} du \right\} e^{-\sigma \alpha^2} + \\ &+ \left[\int_0^\infty \frac{|3h - x_2| u e^{-\sigma u^2}}{(u^2 + \alpha^2 + x_2^2)(u^2 + \alpha^2 + (3h - x_2)^2)} du \right] e^{-\sigma \alpha^2} \Big\} dy_1. \end{aligned} \tag{15}$$

При оценке интегралов входящие в (15), используем неравенств (13) и введя полярные координаты получим:

$$\int_T \left| \frac{\partial \Phi_\sigma(x, y)}{\partial y_2} \right| dy_1 \leq \left(\frac{3h\sqrt{\pi}}{4\sqrt{\sigma}x_2(3h - x_2)} + \frac{3h\sqrt{\pi}(x_2 + 3h)}{\sqrt{\sigma}x_2(3h - x_2)^2} + \frac{h\sqrt{\pi}(6x_2\sigma + 3)}{4\sqrt{\sigma}x_2} \right) e^{-\sigma x_2^2}.$$

С учетом полученной оценки имеем:

$$T_\sigma(x) \leq \left(\frac{3h\sqrt{\pi}}{8\sqrt{\sigma}x_2} + \frac{3h\sqrt{\pi}}{8\sqrt{\sigma}(3h - x_2)} + \frac{3h\sqrt{\pi}}{4\sqrt{\sigma}x_2(3h - x_2)} + \frac{3h\sqrt{\pi}(x_2 + 3h)}{\sqrt{\sigma}x_2(3h - x_2)^2} + \frac{h\sqrt{\pi}(6x_2\sigma + 3)}{4\sqrt{\sigma}x_2} \right) e^{-\sigma x_2^2}, \sigma > 0$$

Неравенство (12) доказано и следовательно доказано теорема 1.

Следствие 1. При каждом $x \in G$ справедливо равенство

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} U_\sigma(x) = U(x).$$

Обозначим через \overline{G}_ε множество

$$\overline{G}_\varepsilon = \left\{ (x_1, x_2) \in G, \quad h > x_2 \geq \varepsilon, \quad h = \max_T F(x_1), 0 < \varepsilon < h, \right\}.$$

Легко заметить, что множество $\overline{G}_\varepsilon \subset G$ является компактным.

Следствие 2. Если $x \in \overline{G}_\varepsilon$, то семейство функций $\{U_\sigma(x)\}$

$$U_\sigma(x) \rightrightarrows U(x),$$

сходится равномерно при $\sigma \rightarrow \infty$.

Отметим, что множество $\Pi_\varepsilon = G \setminus \overline{G}_\varepsilon$ служить пограничным слоем данной задачи, как в теории сингулярных возмущений, где нет равномерной сходимости.

Авторы выражают искреннюю благодарность профессору Хасанову Акназару Бекдурдиевичу за постановки задач и обсуждение полученных результатов.

Литература

1. Carleman T. Les Fonctions quasi analytiques, Paris: 1926. 116p,
2. Голузин Г. М., Крылов. В. И. Обобщенная формула Карлемана и ее приложение к аналитическому продолжению функций // Мат. сборник, Т.40, 1933, С.144-149.
3. Тихонов А. Н. Об устойчивости обратных задач. // ДАН СССР, 1943, Т.39, N 5, С.195-198.
4. А.Б. Хасанов, Ф.Р.Турсунов. О задаче Коши для уравнения Лапласа. // Уфимский математический журнал, 2019, Том.11, N 4, С.92-106.
5. Лаврентьев М.М. Озадача Коши для уравнения Лапласа. // Изв. АН СССР Сер. матем. 1956. Том 20, выпуск 6, С. 819-842.
6. Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики. Изд. СО АН СССР Новосибирск, 1962.
7. Ярмухамедов Ш. О гармоническом продолжении дифференцируемых функций, заданных на куске границы. // Сибирский математический журнал, 2002, Том 43, N 1. С.228-239.
8. Ярмухамедов Ш. Представление гармонической функции в виде потенциалов и задача Коши. // Математические заметки, 2008, Том 83, выпуск 5.С.763-778.
9. Ярмухамедов Ш. О задаче Коши для уравнения Лапласа. // Дисс. докт. физ.-матем. наук, ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, (1983).

УДК 519.624

YIG'INDILARNI HISOBLASHDA GEOMETRIK USULDAN FOYDALANISH

A. Qahhorov, J. Husanov

*Islom Karimov nomidagi Toshkent Davlat texnika universiteti,
azizqahhorov@gmail.com*

Annotatsiya. Ushbu maqolada asosi arifmetik progressiyani, darajasi esa istalgan natural sondan iborat bo'lgan sonli qatorlarning yig'indisini topishning bir necha usullari keltirilgan. Oson ko'rinishdagi yig'indilardan boshlab, murakkab ko'rinishdagi yig'indilarni hisoblash formulalari keltirib chiqarishda asosan geometrik usulga ko'proq e'tibor qaratilgan. Olingan natijalar umumiy holda ham keltirilgan.

Kalit so'zlar: Sonli qatorlar, Nuyuton binomi, Binomial koeffitsent, Arifmetik progressiya, qisqa ko'paytirish formulasi, to'g'ri to'rtburchak, kvadrat.

Применение геометрического метода при вычислении сумм

Аннотация. В данной статье представлено несколько способов нахождения суммы числовых рядов, у которого степень произвольное натуральное число, а на основании, которого лежит арифметическая прогрессия. Начиная с простых вид сумм, при выводе формул для вычисления сложных вид сумм больше внимания уделено преимущественно геометрическому методу. Полученные результаты также представлены в общем виде.

Ключевые слова: числовые ряды, бином Ньютона, биномиальный коэффициент, арифметическая прогрессия, формула краткого умножения, прямоугольник, квадрат.

Application of the geometric method to calculate sums

Abstract. This article presents several ways of finding of the sum of numerical series, in which the degree is an arbitrary natural number, and on the basis of which the arithmetic progression lies. Starting with simple types of sum, when deriving formulas for calculating complex types of sum, more attention is paid mainly to the geometric method. The obtained results are also presented in general terms

Keywords: number series, Newton binomial, binomial coefficient, arithmetic progression, formula of short multiplication, rectangle, square.

Ko'plab masalalarni hal etish jarayonida ba'zi murakkab ko'rinishdagi yig'indilarni hisoblashga to'g'ri keladi. Bunday vaqtda ko'pincha tayyor formulalardan foydalanamiz. Lekin bu formulalarni qayerdan kelib chiqqanligiga qiziqmaydigan matematik bo'lmasa kerak. Shu bois bunday yig'indilar asrlar davomida muntazam o'rganilib kelingan va o'zining bir qancha isbotini topgan.

Shu yig'indilardan bir guruhini isbotlarini misollar yordamida ya'ni hususiy holda, hamda umumiy holda ham keltirib o'tamiz.

1-misol. $A_n^1 = \sum_{k=0}^{n-1} (a + kd) = a + (a + d) + (a + 2d) + \dots + (a + (n-1)d)$ (1)

ni hisoblang.

Bu yerda A_n^1 birinchi hadi a ga, ayirmasi d ga teng bo'lgan arifmetik progressiyaning n ta hadi yig'indisidan iborat. Shuning uchun

$$A_n^1 = \frac{2a + (n-1)d}{2} n$$

ekanligi ko'pchilikka ma'lum va bu formuladan doimiy foydalanib kelganmiz. Lekin bu formulaning ba'zi isbotlarini hamma joyda ham uchratavermaymiz. Bu misolning yechimini keyinroqga qoldirgan holda misolimizni ozroq qiyinlashtirsak.

2-misol. $A_n^2 = \sum_{k=0}^{n-1} (a + kd)^2 = a^2 + (a + d)^2 + (a + 2d)^2 + \dots + (a + (n-1)d)^2$

ni hisoblang.

Bu yig'indining hadlari 1-misoldagi arifmetik progressiyaning mos hadlarining kvadratlaridan tuzilgan. Endi bu misolning yechimi anchagina murakkab deyishimiz mumkin. Agar

$$A_n^3 = \sum_{k=0}^{n-1} (a + kd)^3 = a^3 + (a + d)^3 + (a + 2d)^3 + \dots + (a + (n-1)d)^3$$

ko'rinishdagi yig'indini hisoblashni maqsad qilsak, bu yanada murakkab tug'diradi.

Biz endi istalgan A_n^m ($m \in N$) larni topish usullarini keltiramiz.

3-misol. $A_n^m = \sum_{k=0}^{n-1} (a + kd)^m = a^m + (a + d)^m + (a + 2d)^m + \dots + (a + (n-1)d)^m$

ni hisoblang.

1-usul: Bu usulda Nuyuton binomi formulasidan foydalaniladi.

$(a + b)^m = \sum_{k=0}^m C_m^k a^{m-k} b^k$, bu yerda $C_m^k = \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{k!}$ binomial koeffitsient. Bu formuladan foydalanib quyidagilarni yozib olamiz.

$$(a + d)^{m+1} - a^{m+1} = C_{m+1}^1 a^m d + C_{m+1}^2 a^{m-1} d^2 + \dots + d^{m+1}$$

$$(a + 2d)^{m+1} - (a + d)^{m+1} = C_{m+1}^1 (a + d)^m d + C_{m+1}^2 (a + d)^{m-1} d^2 + \dots + d^{m+1}$$

.....

$$(a + nd)^{m+1} - (a + (n-1)d)^{m+1} = C_{m+1}^1 (a + (n-1)d)^m d + C_{m+1}^2 (a + (n-1)d)^{m-1} d^2 + \dots + d^{m+1}$$

Hosil bo'lgan ifodalarni chap va o'ng qismlarini qo'shib, quyidagilarni olamiz [2].

$$(a + nd)^{m+1} - a^{m+1} = C_{m+1}^1 A_n^m d + C_{m+1}^2 A_n^{m-1} d^2 + C_{m+1}^3 A_n^{m-2} d^3 \dots + nd^{m+1} \tag{2}$$

Endi (2) formuladan A_n^0 ni hisoblaymiz. Binomial koefitsiyentdan agar $k > m + 1$ bolsa, $C_{m+1}^k = 0$ ekanligi ma'lum. Shuning uchun, $m = 0$ da (2) ifoda $(a + nd)^1 - a^1 = C_1^1 A_n^0 d$ tenglikka kelib qoladi.

Bundan $A_n^0 = n$ ekanligi kelib chiqadi. Agar (2) ifodaning $m = 1$ dagi qiymatini hisoblasak

$$(a + nd)^2 - a^2 = C_2^1 A_n^1 d + C_2^2 A_n^0 d^2$$

$$A_n^1 = \frac{2a + (n-1)d}{2} n$$

ekanligini topamiz. Bu natija birinchi misolimizdagi (1) arifmetik progressiyaning hadlari yig'indisi formulasini isbotlaydi. Shu bilan 1-misol o'z yechimini topdi desak bo'ladi.

2-misolimizni ham shu tariqa yechishimiz mumkin. Buning uchun (2) ifodadagi m ning o'rniga 2 ni qo'yamiz.

$$(a + nd)^3 - a^3 = C_3^1 A_n^2 d + C_3^2 A_n^1 d^2 + C_3^3 A_n^0 d^3$$

$$(a + nd)^3 - a^3 = 3A_n^2 d + 2A_n^1 d^2 + A_n^0 d^3 \tag{3}$$

(3) ifodaga A_n^0 va A_n^1 ning qiymatlarini olib borib qo'yib A_n^2 ning qiymatini topamiz.

$$A_n^2 = n \left(a^2 + a(n-1)d + \frac{d^2}{6}(2n^2 - 3n + 1) \right) \quad (4)$$

Demak, 2-masalaning yechimi (4) ko'rinishda ekan.

Xususiyl holda

$$\sum_{k=1}^n (2k-1)^2 = 1^2 + 3^2 + \dots + (2n-1)^2 = n \frac{4n^2 - 1}{3} \quad (5)$$

$$\sum_{k=1}^n (3k-2)^2 = 1^2 + 4^2 + \dots + (3n-2)^2 = n \frac{6n^2 - 3n - 1}{2}. \quad (6)$$

Endi yig'indilarni hisoblashning 2-usulini keltiramiz.

Buning uchun bizga kerak bo'ladigan ba'zi sodda yig'indilarning formulalarini yozib olamiz.

$$1. \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}. \quad (7)$$

$$2. \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \quad (8)$$

$$3. \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}. \quad (9)$$

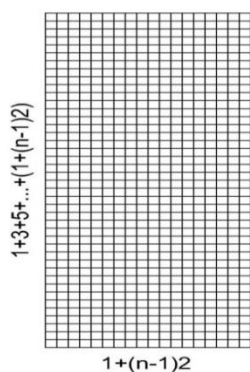
Bu usulni to'g'ri to'rtburchak usuli deyishimiz mumkin. Yani, geometriyaga murojat etib, geometrik shakldan hamda tushunchalardan foydalangan holda algebraik yig'indilarning formulalarini keltirib chiqaramiz. Shunu aytib o'tish joyizki, bu geometrik usuldan X-XI asrlarda buyuk Eron matematigi Al-Karaji ba'zi sodda yig'indilarni hisoblashda foydalanilgan [1]. Bu usul haqida oson tushuncha hosil qilishimiz uchun soddaroq yig'indilarni hisoblashdan boshlaymiz. Buning uchun yuqoridagi (5) yig'indini hisoblaymiz.

4-misol. $S_n^2 = \sum_{k=1}^n (2k-1)^2 = 1^2 + 3^2 + \dots + (1+(n-1)2)^2$ ni hisoblang.

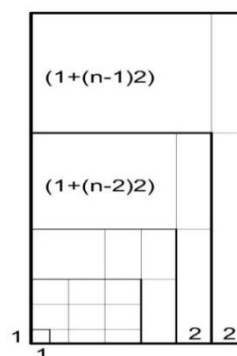
Bu misol birinchi usul bilan o'z isbotini topgan edi. Endi bu usul bilan ham isbotlab natijalarni taqqoslaymiz.

Bu yig'indini hisoblash uchun bo'yi $(1+3+5+\dots+(1+(n-1)2))$ ta satrdan, enida esa boyini tashkil qilgan yig'indini 1 dan boshqa har bir qo'shiluvchisiga 2 tadan ustunni va 1 uchun esa 1 ta ustunni mos qilib olib jami $(1+(n-1)2)$ ta ustundan iborat to'g'ri to'rtburchak olamiz (1-rasm). Satr va ustunlarning kesishishidan to'rtburchakning ichida kvadratchalar hosil bo'ladi. Jami kvadratchalar soni ustun va satrdagi kvadratchalarning ko'paytmasiga teng. Yani,

$$(1+3+5+\dots+(n-1)2) \cdot (1+(n-1)2) = \frac{2+(n-1)2}{2} n(2n-1) = n^2(2n-1). \quad (10)$$



1-rasm



2-rasm

Endi to'rtburchak ichidan $1+(n-1)2$ ta satrni va 2 ta ustunni 2-rasmdagi ko'rinishda ajratib olamiz va ajratib olgan sohamizdagi jami kvadratchalar sonini hisoblaymiz.

$$\begin{aligned} (1+(n-1)2)^2 + 2(1+3+5+\dots+(1+(n-1)2)) &= (1+(n-1)2)^2 + 2 \left(\frac{1+(1+(n-1)2)}{2} (n-1) \right) = \\ &= (1+(n-1)2)^2 + 2(n-1)^2 \end{aligned}$$

Qaralayotgan sohada $(1+(n-1)2)^2 + 2(n-1)^2$ ta kvadratcha bor ekan. Endi to'rtburchakning qolgan qismidan yana shu ko'rinishda $1+(n-2)2$ ta satrni va 2 ta ustunni ajratib olib, undagi kvadratchalar sonini hisoblaymiz.

$$(1+(n-2)2)^2 + 2(1+3+5+\dots+(1+(n-3)2)) = (1+(n-2)2)^2 + 2\left(\frac{1+(1+(n-3)2)}{2}(n-2)\right) = (1+(n-2)2)^2 + 2(n-2)^2$$

Xuddi shu ko'rinishda davom etib, yani to'rtburchagimizning bo'yini tashkil etuvchi yig'indining har bir qo'shiluvchisiga mos alohida sohalarni ajratib olib (2-rasm), undagi kvadratchalar sonlarini ketma ket qilib yozib olamiz.

$$(1+(n-1)2)^2 + 2(n-1)^2, (1+(n-2)2)^2 + 2(n-2)^2, \dots, 3^2, 1^2$$

Bu qiymatlarning barchasini yig'indisi to'g'ri to'rtburchakning ichidagi jami kvadratchalar soniga (10) ga teng.

$$(1^2 + 3^2 + \dots + (1+(n-2)2)^2 + (1+(n-1)2)^2) + 2(1^2 + 2^2 + \dots + (n-2)^2 + (n-1)^2) = n^2(2n-1)$$

Endi (8) dan foydalanib, $S_n^2 + 2 \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} = n^2(2n-1)$ tenglikni olamiz. Bu yerdan S_n^2 ni topamiz.

$$S_n^2 = \frac{3n^2(2n-1)}{3} - \frac{n(n-1)(2n-1)}{3} = \frac{n(4n^2-1)}{3}$$

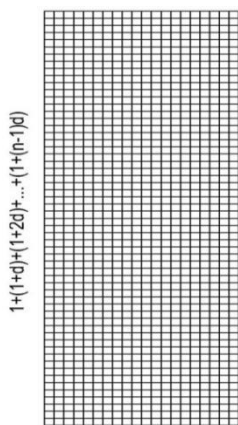
Demak, $S_n^2 = \sum_{k=1}^n (2k-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$ ekan va u (5) natija bilan bir xil.

Endi masalani umumiyLashtirsak.

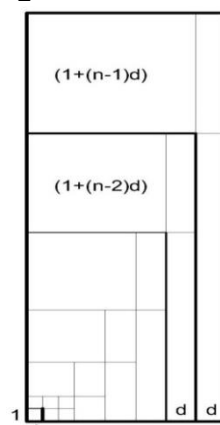
5-misol. $D_n^2 = \sum_{k=1}^n (1+(n-1)d)^2 = 1^2 + (1+d)^2 + \dots + (1+(n-1)d)^2$ yig'indini hisoblang.

Bu misolda ham xuddi yuqoridagi misolga o'xshash to'g'ri to'rtburchak olamiz. To'rtburchakning bo'yi $(1+(1+d)+\dots+(1+(n-1)d))$ ta satrdan eni esa $(1+(n-1)d)$ ta ustundan iborat bo'lsin (3-rasm). Undagi jami kvadratchalar sonini hisoblaymiz.

$$(1+(1+d)+\dots+(1+(n-1)d))(1+(n-1)d) = \frac{2+(n-1)d}{2} n(1+(n-1)d) \tag{11}$$



3-rasm



4-rasm

Endi to'rtburchakning bo'yidan $(1+(n-1)d)$ ta satrni enidan d ta ustunni ajratib olamiz (4-rasm). Bu sohadagi kvadratchalar sonini hisoblaymiz.

$$(1+(n-1)d)^2 + d(1+(1+d)+\dots+(1+(n-2)d)) = (1+(n-1)d)^2 + d\left(\frac{2+(n-2)d}{2}(n-1)\right) = (1+(n-1)d)^2 + d\left(\frac{2-d+(n-1)d}{2}(n-1)\right) = (1+(n-1)d)^2 + \frac{2d-d^2}{2}(n-1) + \frac{d^2}{2}(n-1)^2$$

To'rtburchakning ajratib olgan sohamizdan tashqaridagi qismida ham shu ishni takrorlaymiz. Bu safar $(1+(n-2)d)$ ta satrni va unga mos d ta ustunni olamiz va undagi kvadratchalar sonini ham hisoblaymiz (4-rasm).

$$(1+(n-2)d)^2 + d(1+(1+d)+\dots+(1+(n-3)d)) = (1+(n-2)d)^2 + d\left(\frac{2+(n-3)d}{2}(n-2)\right) =$$

$$= (1+(n-2)d)^2 + d\left(\frac{2-d+(n-2)d}{2}(n-2)\right) = (1+(n-2)d)^2 + \frac{2d-d^2}{2}(n-2) + \frac{d^2}{2}(n-2)^2$$

Shu ko'rinishda oxirigacha davom etib, olingan natijalarni barchasini yozib olamiz.

$$(1+(n-1)d)^2 + \frac{2d-d^2}{2}(n-1) + \frac{d^2}{2}(n-1)^2,$$

$$(1+(n-2)d)^2 + \frac{2d-d^2}{2}(n-2) + \frac{d^2}{2}(n-2)^2$$

.....

$$(1+(n-2)d)^2 + \frac{2d-d^2}{2}1 + \frac{d^2}{2}1^2$$

Hosil bo'lgan qiymatlar ketma ketligining barchasini yig'indisi to'rtburchakning ichidagi jami kvadratchalar soni (11) ga teng.

$$(1^2+(1+d)^2+\dots+(1+(n-1)d)^2) + \frac{2d-d^2}{2}(1+2+\dots+(n-1)) + \frac{d^2}{2}(1^2+2^2+\dots+(n-1)^2) =$$

$$= \frac{2+(n-1)d}{2}n(1+(n-1)d)$$

(7) va (8) yig'indilarning formulalaridan foydalanib, yuqoridagi ifodani quydagicha yozib olamiz.

$$D_n^2 + \frac{2d-d^2}{2} \frac{n(n-1)}{2} + \frac{d^2}{2} \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} = \frac{2+(n-1)d}{2}n(1+(n-1)d)$$

Bu yerdan D_n^2 ni topib olamiz.

$$D_n^2 = n + \frac{dn(n-1)(2dn+6-d)}{6} \tag{12}$$

Demak bu (12) formula yordamida birinchi hadi 1 ga, ayirmasi ixtiyoriy musbat butun d ga teng bo'lgan arifmetik progressiyaning hadlarining kvadratlaridan tuzilgan qator yig'indisini topish mumkin. (6) yig'indini shu formula bo'yicha hisoblab ko'ramiz. Buning uchun $d = 3$ ni (12) ga qo'yamiz.

$$\sum_{k=1}^n (3k-2)^2 = n + \frac{3n(n-1)(2 \cdot 3n+6-3)}{6} = n + \frac{n(n-1)(6n+3)}{2} = n \frac{6n^2-3n-1}{2}$$

Nihoyat (6) natijani yana bir bor isbotladik.

Hozir biz yuqoridagi ikkita misolda birinchi hadi 1^2 bo'lgan yig'indilarni hisobladik. Agar shu birinchi hadni boshqa bir musbat butun sonni kvadrati bilan almashtirsak misol qiyinlashishi bilan bir qatorda yanada umumlashadi. Axir hamma arifmetik progressiyalar ham 1 sonidan boshlanavermaydiku. Shu hisobda quyidagicha misolni ko'ramiz.

6-misol. $A_n^2 = \sum_{k=1}^n (a+(n-1)d)^2 = a^2 + (a+d)^2 + \dots + (a+(n-1)d)^2$ yig'indini hisoblang.

Bu misolda bo'yi $(a+(a+d)+\dots+(a+(n-1)d))$ satrdan, eni esa $(a+(n-1)d)$ ustundan iborat to'g'ri to'rtburchak olamiz. Yani satrlar sonini ifodalovchi yig'indining a qo'shiluvchisidan tashqari boshqa har bir qo'shiluvchisiga d tadan ustun va a uchun esa a ta ustun olgan holda jami ustunlar soni $(a+(n-1)d)$ ta bo'ladi (5-rasm). Dastlab to'g'ri to'rtburchakning ichidagi jami kvadratchalar sonini topib olamiz

$$(a+(a+d)+\dots+(a+(n-1)d))(a+(n-1)d) = \left(\frac{2a+(n-1)d}{2}n\right)(a+(n-1)d) \tag{13}$$

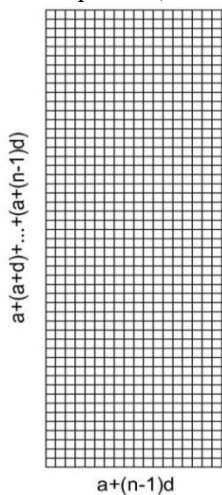
Bu misolda ham yuqoridagi misollar kabi to'rtburchagimizdan sohalar ajratib olib, undagi kvadratchalar sonini hisoblaymiz. Birinchi sohamiz uchun $(a+(n-1)d)$ ta satrni va d ta ustunni tanlab olamiz(6-rasm).

$$(a+(n-1)d)^2 + d(a+(a+d)+\dots+(a+(n-2)d)) = (a+(n-1)d)^2 + d\left(\frac{2a+(n-2)d}{2}(n-1)\right) =$$

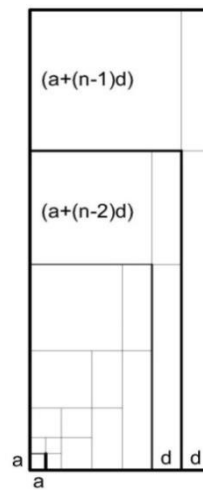
$$= (a+(n-1)d)^2 + d\left(\frac{2a-d+(n-1)d}{2}(n-1)\right) = (a+(n-1)d)^2 + \frac{2ad-d^2}{2}(n-1) + \frac{d^2}{2}(n-1)^2$$

Bu ifoda tanlagan birinchi sohamizdagi kvadratchalar sonini ifoda etadi.

Keyindi qadamda $(a+(n-2)d)$ ta satrni va yana d ta ustunni tanlab ajratib olamiz. Endi undagi kvadratchalar sonini topamiz (6-rasm).



5-rasm



6-rasm

$$(a+(n-2)d)^2 + d(a+(a+d)+\dots+(a+(n-3)d)) = (a+(n-2)d)^2 + d\left(\frac{2a+(n-3)d}{2}(n-2)\right) =$$

$$= (a+(n-2)d)^2 + d\left(\frac{2a-d+(n-2)d}{2}(n-2)\right) = (a+(n-2)d)^2 + \frac{2ad-d^2}{2}(n-2) + \frac{d^2}{2}(n-2)^2$$

Shu zayilda hisoblashlarni davom ettirdigan bo'lsak har safar yuqoridagiga o'xshash natijalarni olaveramiz. Olgan qiymatlarimizni yozib olamiz.

$$(a+(n-1)d)^2 + \frac{2ad-d^2}{2}(n-1) + \frac{d^2}{2}(n-1)^2$$

$$(a+(n-2)d)^2 + \frac{2ad-d^2}{2}(n-2) + \frac{d^2}{2}(n-2)^2$$

.....

$$(a+d)^2 + \frac{2ad-d^2}{2} \cdot 1 + \frac{d^2}{2} \cdot 1^2$$

$$a^2$$

Bu qiymatlarning yig'indisi 5-rasmdagi to'rtburchakning ichidagi jami kvadratchalar soniga (13) ga teng.

$$(a^2+(a+d)^2+\dots+(a+(n-1)d)^2) + \frac{2ad-d^2}{2}(1+2+\dots+(n-1)) + \frac{d^2}{2}(1^2+2^2+\dots+(n-1)^2) =$$

$$= \left(\frac{2a+(n-1)d}{2}n\right)(a+(n-1)d)$$

$$A_n^2 + \frac{2ad-d^2}{2} \frac{n(n-1)}{2} + \frac{d^2}{2} \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} = \left(\frac{2a+(n-1)d}{2}n\right)(a+(n-1)d)$$

Bu yerdan A_n^2 ni topib olamiz.

$$A_n^2 = \frac{d^2}{3}n^3 + \left(ad - \frac{d^2}{2}\right)n^2 + \left(a^2 - ad + \frac{d^2}{6}\right)n \tag{14}$$

Topilgan (14) ifoda (4) ifoda bilan bir xil ma'no anglatadi faqat boshqacha ko'rinishi. (14) formula (5), (6) kabi yig'indilarning istalgan qism yig'indisini ham topish imkonini beradi. Shu bilan arifmetik

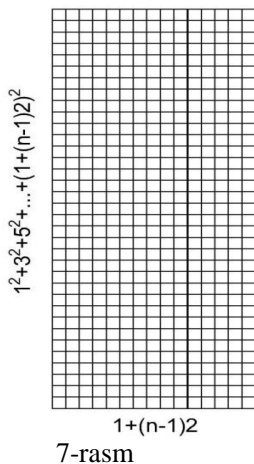
progressiyani tashkil etuvchi sonlarning kvadratlari yig'indisini topish masalasiga yakun yasasak ham bo'ladi.

Endi arifmetik progressiya hadlarining kublaridan tuzilgan yig'indilarni topish masalasi bilan shug'illanemiz.

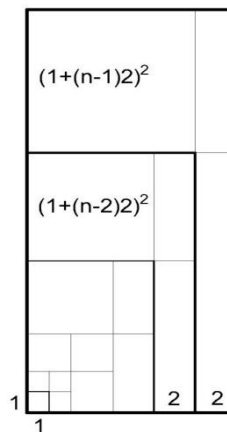
7-misol. $\sum_{k=1}^n (2k-1)^3 = 1^3 + 3^3 + \dots + (1+(n-1)2)^3$ yig'indini hisoblang.

Bu misol uchun bo'yi $(1^2 + 3^2 + \dots + (1+(n-1)2)^2)$ ta satrdan, eni esa $(1+(n-1)2)$ ustundan iborat to'g'ri to'rtburchak olamiz(7-rasm). Satrlar va ustunlarning kesishishidan hosil bo'lgan jami kvadratchalar sonini (12) dan foydalangan holda topamiz.

$$(1^2 + 3^2 + \dots + (1+(n-1)2)^2)(1+(n-1)2) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}(1+(n-1)2) \tag{15}$$



7-rasm



8-rasm

Endi to'rtburchakning bo'yidan $(1+(n-1)2)^2$ ta satrni va enidan 2 ta ustunni 8-rasmdagidek qilib ajratib olamiz. Ajratib olgan sohamizdagi kvadratchalar sonini $(1+(n-1)2)^3 + 2(1^2 + 3^2 + \dots + (1+(n-2)2)^2)$ ga teng. (5) formuladan foydalansak bu ifodamiz

$$(1+(n-1)2)^3 + 2(n-1) \frac{4(n-1)^2 - 1}{3} = (1+(n-1)2)^3 + \frac{8}{3}(n-1)^3 - \frac{2}{3}(n-1)$$

ko'rinishga keladi. Demak bu sohada $(1+(n-1)2)^3 + \frac{8}{3}(n-1)^3 - \frac{2}{3}(n-1)$ ta kvadratcha mavjud.

To'rtburchakning qolgan qismining bo'yidan $(1+(n-2)2)^2$ satrni, enidan 2 ta ustunni tanlab olib (8-rasm), undagi kvadratchalar sonini xuddi yuqoridagi kabi hisoblasak, $(1+(n-2)2)^3 + \frac{8}{3}(n-2)^3 - \frac{2}{3}(n-2)$ ga teng ekanligi kelib chiqadi. Shu ko'rinishda davom etib barcha sohalardagi kvadratchalar sonini ketma ket yozib olamiz.

$$\begin{aligned} & (1+(n-1)2)^3 + \frac{8}{3}(n-1)^3 - \frac{2}{3}(n-1) \\ & (1+(n-2)2)^3 + \frac{8}{3}(n-2)^3 - \frac{2}{3}(n-2) \\ & \dots\dots\dots \\ & 3^3 + \frac{8}{3}1^3 - \frac{2}{3}1 \\ & 1^3 \end{aligned}$$

Bu qiymatlarning barchasini yig'indisi bizga 7-rasmdagi jami kvadratchalar sonini (15) ni beradi.

$$(1^3 + 3^3 + \dots + (1+(n-1)2)^3) + \frac{8}{3}(1^3 + 3^3 + \dots + (n-1)^3) - \frac{2}{3}(1+2+\dots+(n-1)) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}(1+(n-1)2)$$

Bu ifodani, (7) va (9) formulalardan foydalanib quydagicha yozib olamiz.

$$\sum_{k=1}^n (2k-1)^3 + \frac{8}{3} \cdot \frac{n^2(n-1)^2}{4} - \frac{2}{3} \cdot \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}(1+(n-1)2)$$

Bu yerdan $\sum_{k=1}^n (2k-1)^3$ ni topib olishimiz mumkin.

Demak, $\sum_{k=1}^n (2k-1)^3 = n^2(2n^2-1)$ ekan.

Endi masalani umumiy holda ko'ramiz.

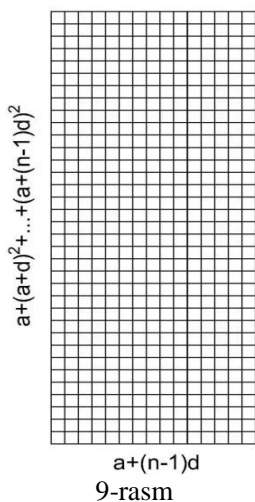
8-misol. $A_n^3 = \sum_{k=1}^n (a+(n-1)d)^3 = a^3 + (a+d)^3 + \dots + (a+(n-1)d)^3$ yig'indini hisoblang.

Yig'indining qiymatini hisoblab beruvchi formulani to'g'ri to'rtburchak usulidan foydalanib keltirib chiqaramiz.

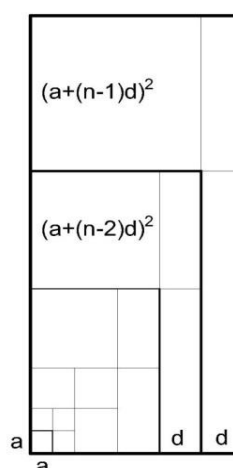
Buning uchun bo'yi $(a^2 + (a+d)^2 + \dots + (a+(n-1)d)^2)$ ta satrdan iborat, eni esa $(a+(n-1)d)$ ta ustundan iborat to'g'ri to'rtburchak olamiz (9-rasm). To'rtburchakning ichida hosil bo'lgan jami kvadratchalarning jami soni $(a^2 + (a+d)^2 + \dots + (a+(n-1)d)^2)(a+(n-1)d)$ ga teng. Yuqoridagi (14) formuladan foydalanib bu ifodani quyidagicha yozib olamiz.

$$\left(\frac{d^2}{3}n^3 + \left(ad - \frac{d^2}{2}\right)n^2 + \left(a^2 - ad + \frac{d^2}{6}\right)n\right)(a+(n-1)d) \tag{16}$$

Endi to'rtburchak bo'yidan $(a+(n-1)d)^2$ ta satrni enidan esa d ta ustunni ajratib olamiz (10-rasm). Ajratib olgan sohamizdagi kvadratchalar sonini hisoblaymiz.



9-rasm



10-rasm

$$(a+(n-1)d)^3 + d(a^2 + (a+d)^2 + \dots + (a+(n-2)d)^2) =$$

$$= (a+(n-1)d)^3 + d\left(\frac{d^2}{3}(n-1)^3 + \left(ad - \frac{d^2}{2}\right)(n-1)^2 + \left(a^2 - ad + \frac{d^2}{6}\right)(n-1)\right) =$$

$$= (a+(n-1)d)^3 + \frac{d^3}{3}(n-1)^3 + \left(ad^2 - \frac{d^3}{2}\right)(n-1)^2 + \left(a^2d - ad^2 + \frac{d^3}{6}\right)(n-1)$$

Demak bu sohada jami kvadratchalar soni

$$(a+(n-1)d)^3 + \frac{d^3}{3}(n-1)^3 + \left(ad^2 - \frac{d^3}{2}\right)(n-1)^2 + \left(a^2d - ad^2 + \frac{d^3}{6}\right)(n-1)$$

ga teng.

To'rtburchakning qolgan qismidan yana yuqoridagiga oxshab bo'yidan $(a+(n-2)d)^2$ ta satrni, enidan d ta ustunni ajratib olamiz va undagi kvadratchalar sonini hisoblasak,

$$(a+(n-2)d)^3 + \frac{d^3}{3}(n-2)^3 + \left(ad^2 - \frac{d^3}{2}\right)(n-2)^2 + \left(a^2d - ad^2 + \frac{d^3}{6}\right)(n-2)$$

ko'rinishdagi natijani olamiz.

Shu jarayonni oxirigacha davom ettirib, yani to'rtburchakning bo'yini ifodalovchi yig'indining a^2 dan boshqa har bir qo'shiluvchisiga d ta ustunni mos qo'yib hosil bo'lgan sohalardagi kvadratchalar sonini hisoblab ketma ket yozib olamiz. Bunda a^2 ga esa a ta ustun mos qo'yiladi (10-rasm).

$$\begin{aligned} & (a+(n-1)d)^3 + \frac{d^3}{3}(n-1)^3 + \left(ad^2 - \frac{d^3}{2}\right)(n-1)^2 + \left(a^2d - ad^2 + \frac{d^3}{6}\right)(n-1) \\ & (a+(n-2)d)^3 + \frac{d^3}{3}(n-2)^3 + \left(ad^2 - \frac{d^3}{2}\right)(n-2)^2 + \left(a^2d - ad^2 + \frac{d^3}{6}\right)(n-2) \\ & \dots\dots\dots \\ & (a+d)^3 + \frac{d^3}{3}1^3 + \left(ad^2 - \frac{d^3}{2}\right)1^2 + \left(a^2d - ad^2 + \frac{d^3}{6}\right)1 \\ & \qquad \qquad \qquad a^3 \end{aligned}$$

Hosil bo'lgan qiymatlar ketma ketligining yig'indisi to'rtburchak ichidagi jami kvadratchalar soniga (16) ga teng.

$$\begin{aligned} & (a^3 + (a+d)^3 + \dots + (a+(n-1)d)^3) + \frac{d^3}{3}(1^3 + 2^3 + \dots + (n-1)^3) + \\ & + \left(ad^2 - \frac{d^3}{2}\right)(1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2) + \left(a^2d - ad^2 + \frac{d^3}{6}\right)(1+2+\dots+(n-1)) = \\ & = \left(\frac{d^2}{3}n^3 + \left(ad - \frac{d^2}{2}\right)n^2 + \left(a^2 - ad + \frac{d^2}{6}\right)n\right)(a+(n-1)d) \end{aligned}$$

Endi (7), (8) va (9) formulalardan foydalanib, yuqoridagi ifodani quyidagicha yozib olamiz.

$$\begin{aligned} A_n^3 + \frac{d^3}{3} \cdot \frac{n^2(n-1)^2}{4} + \left(ad^2 - \frac{d^3}{2}\right) \cdot \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + \left(a^2d - ad^2 + \frac{d^3}{6}\right) \cdot \frac{n(n-1)}{2} = \\ = \left(\frac{d^2}{3}n^3 + \left(ad - \frac{d^2}{2}\right)n^2 + \left(a^2 - ad + \frac{d^2}{6}\right)n\right)(a+(n-1)d) \end{aligned}$$

Algebraik soddalashtirish ishlarini bajarib, A_n^3 ni topib olamiz.

$$A_n^3 = \frac{d^3}{4}n^4 + \left(ad^2 - \frac{d^3}{2}\right)n^3 + \left(\frac{3a^2d}{2} - \frac{3ad^2}{2} + \frac{d^3}{4}\right)n^2 + \left(a^3 - \frac{3a^2d}{2} + \frac{ad^2}{2}\right)n$$

Demak,

$$A_n^3 = \sum_{k=1}^n (a+(n-1)d)^3 = \frac{d^3}{4}n^4 + \left(ad^2 - \frac{d^3}{2}\right)n^3 + \left(\frac{3a^2d}{2} - \frac{3ad^2}{2} + \frac{d^3}{4}\right)n^2 + \left(a^3 - \frac{3a^2d}{2} + \frac{ad^2}{2}\right)n$$

ekanligini topdik.

To'g'ri to'rtburchak usuli yordamida hisoblangan yig'indilardan shuni xulosa qilib aytish mumkinki bu usul yordamida istalgan A_n^m ($m \in \mathbb{N}$) larni topish mumkin. Buning uchun to'g'ri to'rtburchakning bo'yini A_n^{m-1} ta satrdan, enini esa $(a+(n-1)d)$ ta ustundan iborat qilib olish yetarli. (Bu yerda a va d ixtiyoriy musbat butun son) Hisoblash jarayoni esa yuqoridagi misollarniki kabi amalga oshiriladi.

Xulosaga keltirilgan fikrga asoslanib,

$$A_n^1 = \sum_{k=1}^n (a+(k-1)d) = a + (a+d) + \dots + (a+(n-1)d)$$

ni yani,bizga tanish bo'lgan arifmetik progressiyaning hadlari yig'indisini shu usul yordamida $\frac{2a+(n-1)d}{2}n$ ga teng ekanligini chiroyli ko'rinishda isbotlashimiz mumkin.

Adabiyotlar

1. Daan-Dalmediko A., Peiffer J. Ways and labyrinths: essays on the history of mathematics. - M.: Mir, 1986.- 433 p.
 2. Окунев Л. Я. Комбинаторные задачи на шахматной доске. - М.: Л.: ОНТИ, 1935. - 88 с.

3. Маматов М.Ш., Темуров С.Ю., Махмудова Д.М., Куницын А.З. О применении информационно – коммуникационных технологий при развитии самостоятельного творческого мышления молодежи// Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук. Москва. – 2012. – №3. – С. 234 – 241.

4. Michael Evans AMSI, The binomial theorem – A guide for teachers (Years 11–12)// Education Services Australia, 2013, pp.36.

5. Ю. Г. Кудряшов, И. В. Щуров, И. А. Хованская Число сочетаний и бином Ньютона // ВШЭ, 2011-12, «Дискретная математика», С.1-5.

УДК 519.63

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕРМО-УПРУГО-ПЛАСТИЧНОСТИ

А.А.Халджигитов¹, А.А.Каландаров², У.З.Джумаёзов³

¹Национальный университет Узбекистана

²Гулистанский государственный университет

³Самаркандский филиал Ташкентского университета информационных технологий

¹akhald@mail.ru; ²abrorshox@mail.ru; ³djumayozov@bk.ru

Аннотация. В статье рассмотрен эффективный численный метод решения двумерных термо-упруго-пластических краевых задач для изотропных тел. Дискретные уравнения составлены конечно-разностным методом. Суть предложенного метода состоит в разрешении конечно-разностных уравнений относительно центральных узловых точек искомой функции перемещений, отдельно для внутренних и граничных точек и организации итерационного процесса. Исследовано напряженно-деформированное состояние термо-упруго-пластического прямоугольника, находящегося под действием внутреннего теплового поля с заземленными и свободными границами, соответственно.

Ключевые слова: термо-упруго-пластичность, перемещение, напряжения, разностное уравнение, итерационный метод, сходимость.

On one numerical solution algorithm boundary problems of thermo-elastic-plasticity

Abstract. The article discusses an effective numerical method for solving two-dimensional thermo-elastic-plastic boundary value problems for isotropic bodies. Discrete equations are compiled by the finite-difference method. The essence of the proposed method is to resolve finite-difference equations for the central nodal points of the desired displacement function, separately for internal and boundary points and the organization of the iterative process. The stress-strain state of a thermo-elastic-plastic rectangle under the action of an internal thermal field with clamped and free boundaries, respectively, has been investigated.

Keywords: thermo-elastic-plasticity, displacement, stresses, difference equation, iterative method, convergence.

Termo-elastik-plastiklikning chegaraviy masalalarini sonli echish algoritmi haqida

Annotatsiya. Maqolada izotrop jismlar uchun ikki o'lchovli termo-elastik-plastik chegara masalalarini yechishning samarali sonli usuli muhokama qilinadi. Diskret tenglamalar chekli farqlar usuli bilan tuziladi. Tavsiya etilgan usulning mohiyati kerakli siljish funksiyasining markaziy tugun nuqtalari uchun chekli va farqli tenglamalarni, ichki va chegara nuqtalari uchun alohida va takrorlanadigan jarayonni tashkil etishdan iborat. Ichki termal maydon ta'sirida termo-elasto-plastik to'rtburchakning siqilgan va erkin chegaralari mos ravishda qisqargan va erkin chegaralari o'rganilgan.

Kalit so'zlar: termo-elastik-plastiklik, siljish, kuchlanish, ayirmalar tenglamasi, iterativ usul, yaqinlashish.

ВВЕДЕНИЕ

В современном этапе развития науки и техники, исследование напряженно-деформированного состояния конструкций и их элементов, с целью определения их запасов прочности и надежности, с учетом термомеханических упругопластических деформаций является актуальной задачей научно-технических приложений.

Математические модели, описывающие процесс распространения тепла, были впервые рассмотрены в работах Дюамеля–Неймана, в которой предполагалось, что полная деформация

состоит из упругой деформации и теплового расширения. При решении задач термоупругости и термопластичности, обычно, распределения температуры определялись предварительно на основе решения уравнения притока тепла, и при решении краевых задач термоупругости и термопластичности температурные слагаемые рассматриваемыми в сочетании с объемными силами.

В последние годы, научные исследования, посвященные изучению взаимовлияния термических и механических факторов на возникновение термо-упруго-пластических деформаций, интенсивно растут. Учет взаимовлияния термомеханических сил может быть достигнут рассмотрением уравнения притока тепла в сочетании с термодинамическими уравнениями термоупруго-пластических твердых тел. Обычно, эти задачи называются связанными задачи теории упругости и термопластичности. Здесь, под словосочетанием термоупруго-пластичность, подразумевается краевые задачи теории термоупругости и термопластичности.

Основными численными методами решения термоупругопластических задач являются метод конечных элементов, вариационно-разностные методы и конечно-разностные методы. В последнее время широко стали применять метод граничных элементов. У всех этих методов имеются различные сложности при численной реализации. В данной работе предлагается эффективный вариант конечно-разностного метода. Суть метода состоит в разрешении конечно-разностных уравнений термоупруго-пластичности относительно главных узловых переменных разностных уравнений и граничных условий, и решении итерационным методом. Методика обоснована на основе решения классических задач термоупруго-пластичности на основе деформационной теории пластичности при различных краевых условиях.

Во втором параграфе дана постановка несвязанной краевой задачи термопластичности состоящая из уравнения равновесия, определяющего соотношения деформационной теории термопластичности, соотношения Коши с соответствующими термомеханическими краевыми условиями.

Третий параграф посвящен численному решению краевой задачи термоупругости о защемленном, и свободном прямоугольниках с заданным температурным полем внутри области. Составлены конечно-разностные уравнения решаемые итерационным методом. В отличие от защемленного, в случае свободно прямоугольника краевые условия выполняются итерационным способом. Исследовано распределение напряжений внутри защемленного и свободного прямоугольников. Показано, что значение напряжений внутри защемленного прямоугольника намного больше чем свободного под действием теплового поля.

В четвертом параграфе численно решена термоупругая задача о свободном прямоугольнике с внутренним тепловым полем куполообразного вида.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим математическую модель термоупругопластического деформирования, которая состоит из уравнения равновесия

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i = 0, \quad i = 1, 3 \quad (1)$$

определяющего соотношения между деформациями и напряжениями на основе деформационной теории Ильюшина [1-4]

$$\sigma_{ij} = \sigma \delta_{ij} + \frac{\sigma_u}{\varepsilon_u} \varepsilon_{ij} \quad (2)$$

где

$$\sigma = K\theta, \quad K = \lambda + \frac{2}{3}\mu \quad (3)$$

$$\sigma_u = \sigma_u(\varepsilon_u) \quad (4)$$

соотношения Коши

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (5)$$

и соответствующих краевых условий:

$$u_i |_{\Sigma_1} = u_i^0, \quad \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} n_j |_{\Sigma_2} = S_i \quad (6)$$

где σ_{ij} – тензор напряжений, ε_{ij} – тензор деформаций, u_i – перемещения, λ , μ – упругие

постоянные Ламе, T -температура, T_0 -начальная температура, α - коэффициент теплового расширения, e_i , θ - соответственно девиатор и шаровая части тензора деформаций, S_i – поверхностная нагрузка, X_i – объемные силы, σ_u , ε_u – интенсивности тензора напряжений и деформации, δ_{ij} – символ Кронеккера.

Соотношение (4) может быть представлено в следующем виде [3]

$$\sigma_u = \begin{cases} 2\mu\varepsilon_u & \text{при } \varepsilon_u < \varepsilon_u^* \\ 2\mu(1-\varpi(\varepsilon_u))\varepsilon_u & \varepsilon_u \geq \varepsilon_u^* \end{cases} \quad (7)$$

где $\varpi(\varepsilon_u)$ – функция пластичности, ε_u^* - предел упругости.

Зависимость $\sigma_u = \sigma_u(\varepsilon_u)$ называется диаграммой деформирования и определяется из экспериментов на основе растяжения или кручения материала. Представляя диаграмму деформирования $\sigma_u = \sigma_u(\varepsilon_u)$ в виде кусочно-линейной функции

$$\sigma_u = 2\mu\varepsilon_u + 2(\mu - \mu')(\varepsilon_u + \varepsilon_u^*) \quad \text{при } \varepsilon_u \geq \varepsilon_u^* \quad (8)$$

и, подставляя соотношения (3) и (8) в (2), определяющее соотношение деформационной теории можно привести к следующему виду

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} - (3\lambda + 2\mu)\alpha(T - T_0)\delta_{ij} & \text{при } \varepsilon_u < \varepsilon_u^* \\ \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} - (3\lambda + 2\mu)\alpha(T - T_0)\delta_{ij} - 2(\mu - \mu')(1 - \frac{\varepsilon_u}{\varepsilon_u^*})e_{ij} & \text{при } \varepsilon_u \geq \varepsilon_u^* \end{cases} \quad (9)$$

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДВУХМЕРНЫХ ТЕРМОУПРУГИХ ЗАДАЧ

Рассмотрим численные модели первой и второй краевой задачи теории термоупругости для изотропных тел в двухмерном случае.

Численное решение двумерной задачи термоупругости о защемленном прямоугольнике.

Распишем уравнения (1)-(7) для двумерного случая: тогда уравнение равновесия [5-10]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + X_1 &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + X_2 &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

определяющее соотношении Ильюшина:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + 2\mu\varepsilon_{11} - (3\lambda + 2\mu)\alpha(T - T_0)\delta_{ij} \\ \sigma_{22} &= \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + 2\mu\varepsilon_{22} - (3\lambda + 2\mu)\alpha(T - T_0)\delta_{ij} \quad \text{при } \varepsilon_u < \varepsilon_u^* \\ \sigma_{12} &= 2\mu\varepsilon_{12} - (3\lambda + 2\mu)\alpha(T - T_0)\delta_{ij} \end{aligned} \quad (11)$$

соотношение Коши:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \end{aligned} \quad (12)$$

Подставляя (12) в (11) и полученное в (10) будем иметь уравнения равновесия относительно перемещений при $\varepsilon_u < \varepsilon_u^*$

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} - \gamma \frac{\partial T}{\partial x_1} + X_1 &= 0 \\ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} - \gamma \frac{\partial T}{\partial x_2} + X_2 &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

со следующими краевыми условиями:

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2) |_{\Gamma} &= u_1^0 \\ u_2(x_1, x_2) |_{\Gamma} &= u_2^0 \end{aligned} \quad (14)$$

где $\gamma = (3\lambda + 2\mu)\alpha$, Γ – граница рассматриваемой прямоугольной области.

Для численного решения задачи проведём в $0 \leq x \leq l_1$, $0 \leq y \leq l_2$ (l_1 и l_2 размеры рассматриваемой прямоугольной области и приняты следующие обозначения $x = x_1$, $y = x_2$) два семейства параллельных прямых $x = ih_1$ ($i = \overline{0, n}$), $y = jh_2$ ($j = \overline{0, n}$). Далее заменяя производные в уравнениях (13) разностными отношениями получим следующие конечно-разностные уравнения, где приняты следующие обозначения $u = u_1$ и $v = u_2$ (будим считать что объёмные силы отсутствуют)

$$(\lambda + 2\mu) \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_1^2} + (\lambda + \mu) \frac{v_{i+1,j+1} - v_{i-1,j+1} - v_{i+1,j-1} + v_{i-1,j-1}}{4h_1h_2} + \mu \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_2^2} - \gamma \frac{T_{i+1,j} - T_{i-1,j}}{2h_1} = 0$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{v_{i,j+1} - 2v_{i,j} + v_{i,j-1}}{h_2^2} + (\lambda + \mu) \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1} - u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1}}{4h_1h_2} + \mu \frac{v_{i+1,j} - 2v_{i,j} + v_{i-1,j}}{h_1^2} - \gamma \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j-1}}{2h_2} = 0.$$

На основе соотношений (15) и (16) организуем следующий итерационный процесс [5-8]

$$u_{ij}^{(k+1)} = \left[(\lambda + 2\mu) \frac{u_{i+1,j}^{(k)} + u_{i-1,j}^{(k)}}{h_1^2} + (\lambda + \mu) \frac{v_{i+1,j+1}^{(k)} - v_{i-1,j+1}^{(k)} - v_{i+1,j-1}^{(k)} + v_{i-1,j-1}^{(k)}}{4h_1h_2} + \mu \frac{u_{i,j+1}^{(k)} + u_{i,j-1}^{(k)}}{h_2^2} - \gamma \frac{T_{i+1,j} - T_{i-1,j}}{2h_1} \right] / \left[\frac{2(\lambda + 2\mu)}{h_1^2} + \frac{2\mu}{h_2^2} \right]$$

$$v_{ij}^{(k+1)} = \left[(\lambda + 2\mu) \frac{v_{i,j+1}^{(k)} + v_{i,j-1}^{(k)}}{h_2^2} + (\lambda + \mu) \frac{u_{i+1,j+1}^{(k)} - u_{i-1,j+1}^{(k)} - u_{i+1,j-1}^{(k)} + u_{i-1,j-1}^{(k)}}{4h_1h_2} + \mu \frac{v_{i+1,j}^{(k)} + v_{i-1,j}^{(k)}}{h_1^2} - \gamma \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j-1}}{2h_2} \right] / \left[\frac{2(\lambda + 2\mu)}{h_2^2} + \frac{2\mu}{h_1^2} \right].$$

Краевые условия (14) относительно узловых точек имеют вид

$$u_{ij}|_{\Gamma} = 0, \quad v_{ij}|_{\Gamma} = 0.$$

Итерационный процесс продолжается до достижения требуемой точности.

В рассматриваемой модельной задаче температура внутри прямоугольной области задана по следующей формуле

$$T_{ij} = T_0 \sin \frac{\pi x_i}{l_1} \sin \frac{\pi y_j}{l_2},$$

$$x_i = h_1 i, \quad y_j = h_2 j, \quad i = 1, N_1, \quad j = 1, N_2.$$

Исходные данные параметров имеют следующий вид $\lambda = 1.5, \mu = 0.75, \alpha = 0.125, T_0 = 20, l_1 = l_2 = 1, N_1 = N_2 = 10$.

Таблица 1. Значения функции $u(x,y)$ при $\varepsilon = 0.001$

	x=0	x=0.1	x=0.2	x=0.3	x=0.4	x=0.5	x=0.6	x=0.7	x=0.8	x=0.9	x=1
y=0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
y=0.1	0.0000	-0.0955	-0.1231	-0.1060	-0.0602	0.0000	0.0602	0.1060	0.1231	0.0955	0.0000
y=0.2	0.0000	-0.1389	-0.1903	-0.1693	-0.0976	0.0000	0.0976	0.1693	0.1903	0.1389	0.0000
y=0.3	0.0000	-0.1642	-0.2297	-0.2072	-0.1205	0.0000	0.1205	0.2072	0.2297	0.1642	0.0000
y=0.4	0.0000	-0.1785	-0.2514	-0.2281	-0.1331	0.0000	0.1331	0.2281	0.2514	0.1785	0.0000
y=0.5	0.0000	-0.1832	-0.2584	-0.2348	-0.1371	0.0000	0.1371	0.2348	0.2584	0.1832	0.0000
y=0.6	0.0000	-0.1785	-0.2514	-0.2281	-0.1331	0.0000	0.1331	0.2281	0.2514	0.1785	0.0000
y=0.7	0.0000	-0.1642	-0.2297	-0.2072	-0.1205	0.0000	0.1205	0.2072	0.2297	0.1642	0.0000
y=0.8	0.0000	-0.1389	-0.1903	-0.1693	-0.0976	0.0000	0.0976	0.1693	0.1903	0.1389	0.0000
y=0.9	0.0000	-0.0955	-0.1231	-0.1060	-0.0602	0.0000	0.0602	0.1060	0.1231	0.0955	0.0000
y=1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Таблица 2. Значения тензора напряжений σ_{11} при $\varepsilon = 0.0001$

	x=0.1	x=0.2	x=0.3	x=0.4	x=0.5	x=0.6	x=0.7	x=0.8	x=0.9
y=0.1	-4.2016	-4.3092	-4.5295	-4.7032	-4.7668	-4.7032	-4.5295	-4.3092	-4.2016
y=0.2	-5.6580	-5.8654	-6.0650	-6.2184	-6.2754	-6.2184	-6.0650	-5.8654	-5.6580
y=0.3	-6.7234	-7.0831	-7.3608	-7.5459	-7.6116	-7.5459	-7.3608	-7.0831	-6.7234
y=0.4	-7.3835	-7.8598	-8.2128	-8.4361	-8.5132	-8.4361	-8.2128	-7.8598	-7.3835
y=0.5	-7.6080	-8.1268	-8.5089	-8.7481	-8.8301	-8.7481	-8.5089	-8.1268	-7.6080
y=0.6	-7.3835	-7.8598	-8.2128	-8.4361	-8.5132	-8.4361	-8.2128	-7.8598	-7.3835
y=0.7	-6.7234	-7.0831	-7.3608	-7.5459	-7.6116	-7.5459	-7.3608	-7.0831	-6.7234
y=0.8	-5.6580	-5.8654	-6.0650	-6.2184	-6.2754	-6.2184	-6.0650	-5.8654	-5.6580
y=0.9	-4.2016	-4.3092	-4.5295	-4.7032	-4.7668	-4.7032	-4.5295	-4.3092	-4.2016

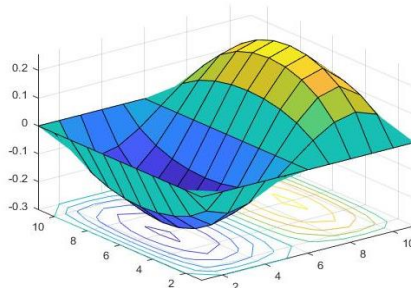


Рис. 1. График распределения функции $u(x,y)$ по оси Ox при $\varepsilon = 0.001$

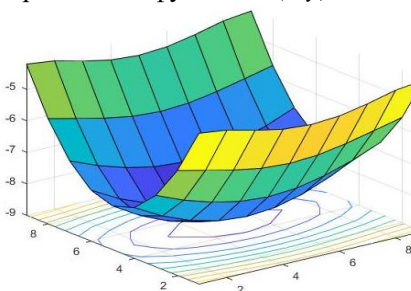


Рис. 2. График распределения тензора напряжений σ_{11} при $\varepsilon = 0.0001$

Численное решение двумерной задачи термоупругости о прямоугольнике со свободными сторонами.

Теперь рассмотрим вторую краевую задачу термоупругости, где граничные условия задаются в напряжениях. Запишем граничные условия в напряжениях относительно перемещений для прямоугольной области

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_{11}|_{\Gamma_1, \Gamma_3} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \gamma(T - T_0) = \pm S_1 \\
 \sigma_{12}|_{\Gamma_1, \Gamma_3} &= \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = \pm S_2
 \end{aligned} \right\} \text{ на } \Gamma_1, \Gamma_3 \quad (21)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_{22}|_{\Gamma_2, \Gamma_4} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \lambda \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \gamma(T - T_0) = \pm S_3 \\
 \sigma_{21}|_{\Gamma_2, \Gamma_4} &= \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = \pm S_4
 \end{aligned} \right\} \text{ на } \Gamma_2, \Gamma_4$$

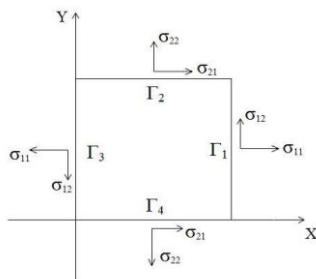


Рис. 3. Рассматриваемая прямоугольная область

Конечно разностный аналог уравнений (21) имеет вид (приняты следующие обозначения $u=u_1$ и $v=u_2$) на границе Γ_1 :

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \frac{u(N_1, j) - u(N_1 - 1, j)}{h_1} + \lambda \frac{v(N_1, j + 1) - v(N_1, j - 1)}{2h_2} - \gamma(T_{N_1, j} - T_0) = S_1 \\ \mu \left(\frac{u(N_1, j + 1) - u(N_1, j - 1)}{2h_2} + \frac{v(N_1, j) - v(N_1 - 1, j)}{h_1} \right) = S_2 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

на границе Γ_3 :

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \frac{u(1, j) - u(0, j)}{h_1} + \lambda \frac{v(0, j + 1) - v(0, j - 1)}{2h_2} - \gamma(T_{0, j} - T_0) = -S_1 \\ \mu \left(\frac{u(0, j + 1) - u(0, j - 1)}{2h_2} + \frac{v(1, j) - v(0, j)}{h_1} \right) = -S_2 \end{aligned} \right\}.$$

Разрешив эти уравнения относительно $u(N_1, j), v(N_1, j)$ и $u(0, j), v(0, j)$ можно построить следующий итерационный процесс

$$\begin{aligned} u^{(k+1)}(N_1, j) &= u^{(k)}(N_1 - 1, j) - \frac{h_1}{\lambda + 2\mu} \left(\lambda \frac{v^{(k)}(N_1, j + 1) - v^{(k)}(N_1, j - 1)}{2h_2} - \gamma(T_{N_1, j} - T_0) - S_1 \right) \\ v^{(k+1)}(N_1, j) &= v(N_1 - 1, j) - h_1 \frac{u^{(k)}(N_1, j + 1) - u^{(k)}(N_1, j - 1)}{2h_2} + \frac{S_2}{\mu} \\ u^{(k+1)}(0, j) &= u^{(k)}(1, j) + \frac{h_1}{\lambda + 2\mu} \left(\lambda \frac{v^{(k)}(0, j + 1) - v^{(k)}(0, j - 1)}{2h_2} - \gamma(T_{N_1, j} - T_0) + S_1 \right) \\ v^{(k+1)}(0, j) &= v(1, j) + h_1 \frac{u^{(k)}(0, j + 1) - u^{(k)}(0, j - 1)}{2h_2} + \frac{S_2}{\mu} \end{aligned} \quad (23)$$

Аналогично могут быть найдены разностные уравнения и организован итерационный процесс для других сторон прямоугольника.

Эти уравнения вместе с уравнениями (17) и (18) составляют разностный аналог двухмерной термоупругой задачи для прямоугольника. Рассмотрим задачу в которой стороны прямоугольника свободны от нагрузок, а внутри задано температурное поле по формуле (20), в этом случаи велечены S_1 и S_2 в уравнениях (23) будут тривиальными. Значения перемещений и напряжений приведены в таблицах 3 и 4 соответственно.

Таблица 3. Значения функции $u(x,y)$ при $\varepsilon = 0.001$

	x=0	x=0.1	x=0.2	x=0.3	x=0.4	x=0.5	x=0.6	x=0.7	x=0.8	x=0.9	x=1
y=0	-0.5145	-0.5145	-0.4759	-0.3659	-0.1992	0.0000	0.1992	0.3659	0.4759	0.5145	0.5145
y=0.1	-0.5054	-0.5151	-0.4654	-0.3527	-0.1900	0.0000	0.1900	0.3527	0.4654	0.5151	0.5054
y=0.2	-0.5133	-0.5504	-0.5027	-0.3808	-0.2047	0.0000	0.2047	0.3808	0.5027	0.5504	0.5133
y=0.3	-0.5265	-0.5957	-0.5524	-0.4202	-0.2260	0.0000	0.2260	0.4202	0.5524	0.5957	0.5265
y=0.4	-0.5397	-0.6312	-0.5913	-0.4513	-0.2430	0.0000	0.2430	0.4513	0.5913	0.6312	0.5397
y=0.5	-0.5449	-0.6445	-0.6058	-0.4629	-0.2494	0.0000	0.2494	0.4629	0.6058	0.6445	0.5449
y=0.6	-0.5397	-0.6312	-0.5913	-0.4513	-0.2430	0.0000	0.2430	0.4513	0.5913	0.6312	0.5397
y=0.7	-0.5265	-0.5957	-0.5524	-0.4202	-0.2260	0.0000	0.2260	0.4202	0.5524	0.5957	0.5265
y=0.8	-0.5133	-0.5504	-0.5027	-0.3808	-0.2047	0.0000	0.2047	0.3808	0.5027	0.5504	0.5133
y=0.9	-0.5054	-0.5151	-0.4654	-0.3527	-0.1900	0.0000	0.1900	0.3527	0.4654	0.5151	0.5054
y=1	-0.5145	-0.5145	-0.4759	-0.3659	-0.1992	0.0000	0.1992	0.3659	0.4759	0.5145	0.5145

Таблица 4. Значения тензора напряжений σ_{ij} при $\varepsilon = 0.0001$

	x=0	x=0.1	x=0.2	x=0.3	x=0.4	x=0.5	x=0.6	x=0.7	x=0.8	x=0.9	x=1
y=0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
y=0.1	0.0000	-0.5311	-0.2096	-0.1864	-0.4956	-0.6080	-0.4956	-0.1864	-0.2096	-0.5311	0.0000
y=0.2	0.0000	-1.3476	-1.3661	-1.3471	-1.3234	-1.3138	-1.3234	-1.3471	-1.3661	-1.3476	0.0000
y=0.3	0.0000	-2.0730	-2.2659	-2.4751	-2.6260	-2.6805	-2.6260	-2.4751	-2.2659	-2.0730	0.0000
y=0.4	0.0000	-2.5367	-2.8303	-3.1652	-3.4129	-3.5030	-3.4129	-3.1652	-2.8303	-2.5367	0.0000
y=0.5	0.0000	-2.6992	-3.0228	-3.3978	-3.6766	-3.7782	-3.6766	-3.3978	-3.0228	-2.6992	0.0000
y=0.6	0.0000	-2.5367	-2.8303	-3.1652	-3.4129	-3.5030	-3.4129	-3.1652	-2.8303	-2.5367	0.0000
y=0.7	0.0000	-2.0730	-2.2659	-2.4751	-2.6260	-2.6805	-2.6260	-2.4751	-2.2659	-2.0730	0.0000
y=0.8	0.0000	-1.3476	-1.3661	-1.3471	-1.3234	-1.3138	-1.3234	-1.3471	-1.3661	-1.3476	0.0000
y=0.9	0.0000	-0.5311	-0.2096	-0.1864	-0.4956	-0.6080	-0.4956	-0.1864	-0.2096	-0.5311	0.0000
y=1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

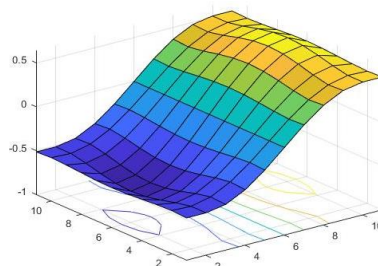


Рис. 4. График распределения функции $u(x,y)$ по оси Ox при $\varepsilon = 0.001$

Численные результаты определены с точностью $\varepsilon = 0.0001$, для достижения которых потребовалось 59 итераций.

Сравнивая полученные численные результаты перемещений и напряжений, можно сделать следующие выводы, значения перемещений в случаи защемленной границы достаточно малы относительно значений перемещений в случаи границы свободной от нагрузок, а значения напряжений достигают своего максимума в случаи защемленной границы.

Численное решение двухмерных термопластических задач

Краевая задача о защемлённом термопластическом прямоугольнике.

Краевая задача термопластичности (1-6) записанная относительно перемещений в двумерном случае при $\varepsilon_u \geq \varepsilon_u^*$ имеет вид

$$\begin{aligned}
 (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \gamma \frac{\partial T}{\partial x} + X_1^* &= 0 \\
 (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \gamma \frac{\partial T}{\partial y} + X_2^* &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{24}$$

со следующими краевыми условиями:

$$\begin{aligned}
 u_1(x, y) |_{\Gamma} &= u_1^0 \\
 u_2(x, y) |_{\Gamma} &= u_2^0
 \end{aligned}
 \tag{25}$$

где

$$\begin{aligned}
 X_1^* &= -2(\mu - \mu')(1 - \frac{\varepsilon_u^*}{\varepsilon_u}) (\frac{2}{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{6} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}) \\
 X_2^* &= -2(\mu - \mu')(1 - \frac{\varepsilon_u^*}{\varepsilon_u}) (\frac{2}{3} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{6} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y})
 \end{aligned}$$

Заменяя производные в уравнениях (24) соответствующими разностными отношениями можно найти следующие конечно-разностные уравнения [1]

$$\begin{aligned}
 (\lambda + 2\mu) \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_1^2} + (\lambda + \mu) \frac{v_{i+1,j+1} - v_{i-1,j+1} - v_{i+1,j-1} + v_{i-1,j-1}}{4h_1h_2} + \\
 + \mu \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_2^2} - \gamma \frac{T_{i+1,j} - T_{i-1,j}}{2h_1} + X_1^* &= 0 \\
 (\lambda + 2\mu) \frac{v_{i,j+1} - 2v_{i,j} + v_{i,j-1}}{h_2^2} + (\lambda + \mu) \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1} - u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1}}{4h_1h_2} + \\
 + \mu \frac{v_{i+1,j} - 2v_{i,j} + v_{i-1,j}}{h_1^2} - \gamma \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j-1}}{2h_2} + X_2^* &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{26}$$

$$X_1^* = -2(\mu - \mu')(1 - \frac{\varepsilon_u^*}{\varepsilon_u}) (\frac{2}{3} \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_1^2} + \frac{1}{2} \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_2^2} + \frac{1}{6} \frac{v_{i+1,j+1} - v_{i-1,j+1} - v_{i+1,j-1} + v_{i-1,j-1}}{4h_1h_2})$$

где

$$X_2^* = -2(\mu - \mu')(1 - \frac{\varepsilon_u^*}{\varepsilon_u}) (\frac{2}{3} \frac{v_{i,j+1} - 2v_{i,j} + v_{i,j-1}}{h_2^2} + \frac{1}{2} \frac{v_{i+1,j} - 2v_{i,j} + v_{i-1,j}}{h_1^2} + \frac{1}{6} \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1} - u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1}}{4h_1h_2})$$

Далее, на основе соотношений (26) организуем следующий итерационный процесс по индексу $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned}
 u_{i,j}^{(k+1)} &= ((\lambda + 2\mu) \frac{u_{i+1,j}^{(k)} + u_{i-1,j}^{(k)}}{h_1^2} + \mu \frac{u_{i,j+1}^{(k)} + u_{i,j-1}^{(k)}}{h_2^2} + (\lambda + \mu) \frac{v_{i+1,j+1}^{(k)} - v_{i-1,j+1}^{(k)} - v_{i+1,j-1}^{(k)} + v_{i-1,j-1}^{(k)}}{4h_1h_2} \\
 &\quad - \gamma \frac{T_{i+1,j} - T_{i-1,j} + X_1^*}{2h_1}) / (\frac{2(\lambda + 2\mu)}{h_1^2} + \frac{2\mu}{h_2^2}) \\
 v_{i,j}^{(k+1)} &= ((\lambda + 2\mu) \frac{v_{i,j+1}^{(k)} + v_{i,j-1}^{(k)}}{h_2^2} + \mu \frac{v_{i+1,j}^{(k)} + v_{i-1,j}^{(k)}}{h_1^2} + (\lambda + \mu) \frac{u_{i+1,j+1}^{(k)} - u_{i-1,j+1}^{(k)} - u_{i+1,j-1}^{(k)} + u_{i-1,j-1}^{(k)}}{4h_1h_2} \\
 &\quad - \gamma \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j-1} + X_2^*}{2h_2}) / (\frac{2(\lambda + 2\mu)}{h_2^2} + \frac{2\mu}{h_1^2})
 \end{aligned}
 \tag{27}$$

Краевые условия (25) относительно узловых точек имеют вид

$$u_{ij} \Big|_{\Gamma} = 0, \quad v_{ij} \Big|_{\Gamma} = 0.
 \tag{28}$$

Температура внутри прямоугольника задана по формуле (20)

$$\begin{aligned}
 T_{ij} &= T_0 \sin \frac{\pi x_i}{l_1} \sin \frac{\pi y_j}{l_2}, \\
 x_i &= h_1 i, \quad y_j = h_2 j, \quad i = 1, N_1, \quad j = 1, N_2.
 \end{aligned}$$

Исходные данные параметров имеют следующие значения
 $\lambda = 1.5, \mu = 0.75, \mu' = 0.5, \alpha = 0.125, T_0 = 20, l_1 = l_2 = 1, N_1 = N_2 = 10, \varepsilon_u^* = 0.9$

Таблица 5. Значения функции $u(x,y)$ при $\varepsilon = 0.001$

	x=0	x=0.1	x=0.2	x=0.3	x=0.4	x=0.5	x=0.6	x=0.7	x=0.8	x=0.9	x=1
y=0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
y=0.1	0.0000	-0.0982	-0.1264	-0.1088	-0.0617	0.0000	0.0617	0.1088	0.1264	0.0982	0.0000
y=0.2	0.0000	-0.1414	-0.1925	-0.1710	-0.0986	0.0000	0.0986	0.1710	0.1925	0.1414	0.0000
y=0.3	0.0000	-0.1669	-0.2319	-0.2088	-0.1213	0.0000	0.1213	0.2088	0.2319	0.1669	0.0000
y=0.4	0.0000	-0.1806	-0.2533	-0.2295	-0.1338	0.0000	0.1338	0.2295	0.2533	0.1806	0.0000
y=0.5	0.0000	-0.1848	-0.2601	-0.2361	-0.1378	0.0000	0.1378	0.2361	0.2601	0.1848	0.0000
y=0.6	0.0000	-0.1806	-0.2533	-0.2295	-0.1338	0.0000	0.1338	0.2295	0.2533	0.1806	0.0000
y=0.7	0.0000	-0.1669	-0.2319	-0.2088	-0.1213	0.0000	0.1213	0.2088	0.2319	0.1669	0.0000
y=0.8	0.0000	-0.1414	-0.1925	-0.1710	-0.0986	0.0000	0.0986	0.1710	0.1925	0.1414	0.0000
y=0.9	0.0000	-0.0982	-0.1264	-0.1088	-0.0617	0.0000	0.0617	0.1088	0.1264	0.0982	0.0000
y=1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Таблица 6. Значения тензора напряжений σ_{11} при $\varepsilon = 0.0001$

	x=0.1	x=0.2	x=0.3	x=0.4	x=0.5	x=0.6	x=0.7	x=0.8	x=0.9
y=0.1	-4.2531	-4.3627	-4.5998	-4.7474	-4.7872	-4.7474	-4.5998	-4.3627	-4.2531
y=0.2	-5.6151	-5.8489	-6.0390	-6.1866	-6.2422	-6.1866	-6.0390	-5.8489	-5.6151
y=0.3	-6.6237	-7.0580	-7.3309	-7.5133	-7.5781	-7.5133	-7.3309	-7.0580	-6.6237
y=0.4	-7.2974	-7.8363	-8.1835	-8.4038	-8.4799	-8.4038	-8.1835	-7.8363	-7.2974
y=0.5	-7.5461	-8.1065	-8.4814	-8.7166	-8.7973	-8.7166	-8.4814	-8.1065	-7.5461
y=0.6	-7.2974	-7.8363	-8.1835	-8.4038	-8.4799	-8.4038	-8.1835	-7.8363	-7.2974
y=0.7	-6.6237	-7.0580	-7.3309	-7.5133	-7.5781	-7.5133	-7.3309	-7.0580	-6.6237
y=0.8	-5.6151	-5.8489	-6.0390	-6.1866	-6.2422	-6.1866	-6.0390	-5.8489	-5.6151
y=0.9	-4.2531	-4.3627	-4.5998	-4.7474	-4.7872	-4.7474	-4.5998	-4.3627	-4.2531

Таблица 7. Значения функции $\varepsilon_u(x,y)$ при $\varepsilon = 0.001$

	x=0	x=0.1	x=0.2	x=0.3	x=0.4	x=0.5	x=0.6	x=0.7	x=0.8	x=0.9	x=1
y=0	0.0000	0.8664	1.1636	1.1686	1.0469	0.9741	1.0469	1.1686	1.1636	0.8664	0.0000
y=0.1	0.8664	1.0219	1.0431	1.0590	1.0020	0.9653	1.0020	1.0590	1.0431	1.0219	0.8664
y=0.2	1.1636	1.0431	0.7476	0.6634	0.6398	0.6332	0.6398	0.6634	0.7476	1.0431	1.1636
y=0.3	1.1686	1.0590	0.6634	0.4526	0.4166	0.4280	0.4166	0.4526	0.6634	1.0590	1.1686
y=0.4	1.0469	1.0020	0.6398	0.4166	0.3999	0.4172	0.3999	0.4166	0.6398	1.0020	1.0469
y=0.5	0.9741	0.9653	0.6332	0.4280	0.4272	0.4595	0.4272	0.4280	0.6332	0.9653	0.9741

y=0.6	1.0469	1.0020	0.6398	0.4166	0.3999	0.4172	0.3999	0.4166	0.6398	1.0020	1.0469
y=0.7	1.1686	1.0590	0.6634	0.4526	0.4166	0.4280	0.4166	0.4526	0.6634	1.0590	1.1686
y=0.8	1.1636	1.0431	0.7476	0.6634	0.6398	0.6332	0.6398	0.6634	0.7476	1.0431	1.1636
y=0.9	0.8664	1.0219	1.0431	1.0590	1.0020	0.9653	1.0020	1.0590	1.0431	1.0219	0.8664
y=1	0.0000	0.8664	1.1636	1.1686	1.0469	0.9741	1.0469	1.1686	1.1636	0.8664	0.0000

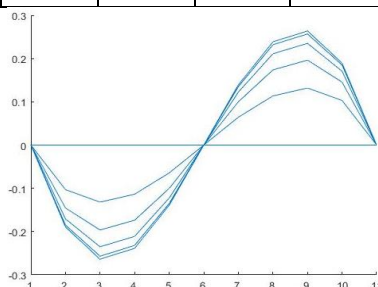


Рис. 5. График распределения функции $u(x,y)$ по оси OX при $\varepsilon = 0.001$

Численное решение термопластической задачи о прямоугольнике со свободными сторонами

Теперь рассмотрим уравнения термопластичности (24) с естественными нулевыми граничными условиями. Запишем естественные граничные условия для прямоугольной области относительно перемещений (рис.3)

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} |_{\Gamma_1\Gamma_3} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v}{\partial y} - \gamma(T_i^j - T_0) - 2(\mu - \mu')(1 - \frac{\varepsilon_u^*}{\varepsilon_u}) (\frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{3} \frac{\partial v}{\partial y}) = \pm S_1 \\
 \sigma_{12} |_{\Gamma_1\Gamma_3} &= \mu (\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}) - (\mu - \mu')(1 - \frac{\varepsilon_u^*}{\varepsilon_u}) (\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}) = \pm S_2 \\
 \sigma_{22} |_{\Gamma_2\Gamma_4} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x} - \gamma(T_i^j - T_0) - 2(\mu - \mu')(1 - \frac{\varepsilon_u^*}{\varepsilon_u}) (\frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{3} \frac{\partial u}{\partial x}) = \pm S_3 \\
 \sigma_{21} |_{\Gamma_2\Gamma_4} &= \mu (\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}) - (\mu - \mu')(1 - \frac{\varepsilon_u^*}{\varepsilon_u}) (\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}) = \pm S_4
 \end{aligned}
 \tag{30}$$

Конечно разностный аналог уравнений (30) имеет вид (приняты следующие обозначения $u = u_1$, $v = u_2$)

на границе Γ_1 :

$$\begin{aligned}
 &(\lambda + 2\mu) \frac{u(N_1, j) - u(N_1 - 1, j)}{h_1} + \lambda \frac{v(N_1, j + 1) - v(N_1, j - 1)}{2h_2} - \gamma(T(N_1, j) - T_0) \\
 &- 2(\mu - \mu')(1 - \frac{\varepsilon_u^*}{\varepsilon_u}) (\frac{2}{3} \frac{u(N_1, j) - u(N_1 - 1, j)}{h_1} - \frac{1}{3} \frac{v(N_1, j + 1) - v(N_1, j - 1)}{2h_2}) = S_1 \\
 &\mu (\frac{u(N_1, j + 1) - u(N_1, j - 1)}{2h_2} + \frac{v(N_1 - 1, j) - v(N_1, j)}{h_1}) \\
 &- (\mu - \mu')(1 - \frac{\varepsilon_u^*}{\varepsilon_u}) (\frac{u(N_1, j + 1) - u(N_1, j - 1)}{2h_2} + \frac{v(N_1 - 1, j) - v(N_1, j)}{h_1}) = S_2
 \end{aligned}
 \tag{31}$$

на границе Γ_3 :

$$\begin{aligned}
 &(\lambda + 2\mu) \frac{u(1, j) - u(0, j)}{h_1} + \lambda \frac{v(0, j + 1) - v(0, j - 1)}{2h_2} - \gamma(T(0, j) - T_0) \\
 &- 2(\mu - \mu')(1 - \frac{\varepsilon_u^*}{\varepsilon_u}) (\frac{2}{3} \frac{u(1, j) - u(0, j)}{h_1} - \frac{1}{3} \frac{v(0, j + 1) - v(0, j - 1)}{2h_2}) = -S_1 \\
 &\mu (\frac{u(0, j + 1) - u(0, j - 1)}{2h_2} + \frac{v(1, j) - v(0, j)}{h_1}) \\
 &- (\mu - \mu')(1 - \frac{\varepsilon_u^*}{\varepsilon_u}) (\frac{u(0, j + 1) - u(0, j - 1)}{2h_2} + \frac{v(1, j) - v(0, j)}{h_1}) = -S_2
 \end{aligned}$$

Разрешив эти уравнения относительно $u(N_1, j)$, $v(N_1, j)$ и $u(0, j)$, $v(0, j)$ можно построить следующий итерационный процесс

$$\begin{aligned}
 u^{(k+1)}(N_1, j) &= u^{(k)}(N_1 - 1, j) + \frac{h}{\lambda + 2\mu} (S_1 + \gamma T(N_1, j) - \lambda \frac{v^{(k)}(N_1, j + 1) - v^{(k)}(N_1, j - 1)}{2h_2}) \\
 &+ 2(\mu - \mu')(1 - \frac{\varepsilon_u^*}{\varepsilon_u}) (\frac{2}{3} \frac{u^{(k)}(N_1, j) - u^{(k)}(N_1 - 1, j)}{h_1} - \frac{1}{3} \frac{v^{(k)}(N_1, j + 1) - v^{(k)}(N_1, j - 1)}{2h_2}) \\
 v^{(k+1)}(N_1, j) &= v^{(k)}(N_1 - 1, j) + h (\frac{S_2 + b[N_1][j]}{\mu} - \frac{u^{(k)}(N_1, j + 1) - u^{(k)}(N_1, j - 1)}{2h_2}) \\
 u^{(k+1)}(0, j) &= u^{(k)}(1, j) + \frac{h}{\lambda + 2\mu} (S_1 - \gamma T(0, j) + \lambda \frac{v^{(k)}(0, j + 1) - v^{(k)}(0, j - 1)}{2h_2}) \\
 &- 2(\mu - \mu')(1 - \frac{\varepsilon_u^*}{\varepsilon_u}) (\frac{2}{3} \frac{u^{(k)}(1, j) - u^{(k)}(0, j)}{h_1} - \frac{1}{3} \frac{v^{(k)}(0, j + 1) - v^{(k)}(0, j - 1)}{2h_2}) \\
 v^{(k+1)}(0, j) &= v^{(k)}(1, j) + h (\frac{S_2 - b[0][j]}{\mu} + \frac{u^{(k)}(0, j + 1) - u^{(k)}(0, j - 1)}{2h_2})
 \end{aligned}
 \tag{32}$$

где

$$\begin{aligned}
 b[N_1][j] &= (\mu - \mu')(1 - \frac{\varepsilon_u^*}{\varepsilon_u}) (\frac{u^{(k)}(N_1, j + 1) - u^{(k)}(N_1, j - 1)}{2h_2} + \frac{v^{(k)}(N_1 - 1, j) - v^{(k)}(N_1, j)}{h_1}) \\
 b[0][j] &= (\mu - \mu')(1 - \frac{\varepsilon_u^*}{\varepsilon_u}) (\frac{u^{(k)}(0, j + 1) - u^{(k)}(0, j - 1)}{2h_2} + \frac{v^{(k)}(1, j) - v^{(k)}(0, j)}{h_1})
 \end{aligned}$$

В нашем случае границы прямоугольника свободны от нагрузок, т.е. $S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = 0$.

Аналогично могут быть найдены разностные уравнения и организован итерационный процесс для других сторон прямоугольника.

Ниже приведём численные результаты перемещений, напряжений и интенсивности тензора деформаций для рассматриваемой задачи.

Таблица 8. Значения функции $u(x, y)$ при $\varepsilon = 0.001$

	x=0	x=0.1	x=0.2	x=0.3	x=0.4	x=0.5	x=0.6	x=0.7	x=0.8	x=0.9	x=1
y=0	-0.5113	-0.5113	-0.4680	-0.3536	-0.1904	0.0000	0.1904	0.3536	0.4680	0.5113	0.5113
y=0.1	-0.5023	-0.5132	-0.4637	-0.3516	-0.1897	0.0000	0.1897	0.3516	0.4637	0.5132	0.5023
y=0.2	-0.5076	-0.5470	-0.5007	-0.3802	-0.2047	0.0000	0.2047	0.3802	0.5007	0.5470	0.5076
y=0.3	-0.5109	-0.5849	-0.5457	-0.4168	-0.2248	0.0000	0.2248	0.4168	0.5457	0.5849	0.5109
y=0.4	-0.5116	-0.6136	-0.5799	-0.4451	-0.2404	0.0000	0.2404	0.4451	0.5799	0.6136	0.5116
y=0.5	-0.5123	-0.6244	-0.5927	-0.4555	-0.2462	0.0000	0.2462	0.4555	0.5927	0.6244	0.5123
y=0.6	-0.5116	-0.6136	-0.5799	-0.4451	-0.2404	0.0000	0.2404	0.4451	0.5799	0.6136	0.5116
y=0.7	-0.5109	-0.5849	-0.5457	-0.4168	-0.2248	0.0000	0.2248	0.4168	0.5457	0.5849	0.5109
y=0.8	-0.5076	-0.5470	-0.5007	-0.3802	-0.2047	0.0000	0.2047	0.3802	0.5007	0.5470	0.5076
y=0.9	-0.5023	-0.5132	-0.4637	-0.3516	-0.1897	0.0000	0.1897	0.3516	0.4637	0.5132	0.5023
y=1	-0.5113	-0.5113	-0.4680	-0.3536	-0.1904	0.0000	0.1904	0.3536	0.4680	0.5113	0.5113

Таблица 9. Значения тензора напряжений σ_{11} при $\varepsilon = 0.0001$

	x=0	x=0.1	x=0.2	x=0.3	x=0.4	x=0.5	x=0.6	x=0.7	x=0.8	x=0.9	x=1
y=0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
y=0.1	0.0000	-0.5638	-0.2500	-0.1004	-0.1487	-0.1565	-0.1487	-0.1004	0.2500	-0.5638	0.0000
y=0.2	0.0000	-1.4104	-1.4304	-1.4321	-1.4177	-1.4092	-1.4177	-1.4321	-1.4304	-1.4104	0.0000
y=0.3	0.0000	-2.2160	-2.3921	-2.5969	-2.7419	-2.7931	-2.7419	-2.5969	-2.3921	-2.2160	0.0000
y=0.4	0.0000	-2.6677	-3.0058	-3.3215	-3.5538	-3.6379	-3.5538	-3.3215	-3.0058	-2.6677	0.0000
y=0.5	0.0000	-2.8057	-3.2134	-3.5659	-3.8271	-3.9220	-3.8271	-3.5659	-3.2134	-2.8057	0.0000
y=0.6	0.0000	-2.6677	-3.0058	-3.3215	-3.5538	-3.6379	-3.5538	-3.3215	-3.0058	-2.6677	0.0000
y=0.7	0.0000	-2.2160	-2.3921	-2.5969	-2.7419	-2.7931	-2.7419	-2.5969	-2.3921	-2.2160	0.0000
y=0.8	0.0000	-1.4104	-1.4304	-1.4321	-1.4177	-1.4092	-1.4177	-1.4321	-1.4304	-1.4104	0.0000
y=0.9	0.0000	-0.5638	-0.2500	-0.1004	-0.1487	-0.1565	-0.1487	-0.1004	0.2500	-0.5638	0.0000
y=1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Таблица 10. Значения функции $\varepsilon_u(x, y)$ при $\varepsilon = 0.001$

	x=0	x=0.1	x=0.2	x=0.3	x=0.4	x=0.5	x=0.6	x=0.7	x=0.8	x=0.9	x=1
y=0	0.0000	0.1633	0.5950	1.0694	1.3995	1.5177	1.3995	1.0694	0.5950	0.1633	0.0000
y=0.1	0.1633	0.2605	0.5528	0.8629	1.0929	1.1759	1.0929	0.8629	0.5528	0.2605	0.1633
y=0.2	0.5950	0.5528	0.6427	0.7161	0.7574	0.7707	0.7574	0.7161	0.6427	0.5528	0.5950

y=0.3	1.0694	0.8629	0.7161	0.7043	0.7098	0.7117	0.7098	0.7043	0.7161	0.8629	1.0694
y=0.4	1.3995	1.0929	0.7574	0.7098	0.7570	0.7828	0.7570	0.7098	0.7574	1.0929	1.3995
y=0.5	1.5177	1.1759	0.7707	0.7117	0.7828	0.8206	0.7828	0.7117	0.7707	1.1759	1.5177
y=0.6	1.3995	1.0929	0.7574	0.7098	0.7570	0.7828	0.7570	0.7098	0.7574	1.0929	1.3995
y=0.7	1.0694	0.8629	0.7161	0.7043	0.7098	0.7117	0.7098	0.7043	0.7161	0.8629	1.0694
y=0.8	0.5950	0.5528	0.6427	0.7161	0.7574	0.7707	0.7574	0.7161	0.6427	0.5528	0.5950
y=0.9	0.1633	0.2605	0.5528	0.8629	1.0929	1.1759	1.0929	0.8629	0.5528	0.2605	0.1633
y=1	0.0000	0.1633	0.5950	1.0694	1.3995	1.5177	1.3995	1.0694	0.5950	0.1633	0.0000

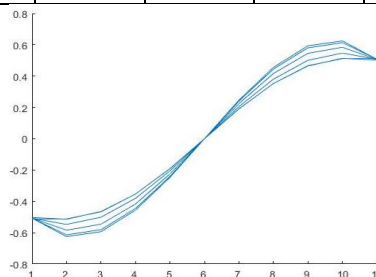


Рис. 6. График распределения функции $u(x,y)$ по оси OX при $\varepsilon = 0.001$

В рассматриваемой модельной задаче граничные условия и температурное поле задано симметрично, и полученные численные результаты также симметричны, что обеспечивает достоверность результатов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе рассмотрен эффективный итерационный метод основанный на конечно-разностные уравнения в сочетании с дискретными аналогами кинематических и естественных граничных условий, разрешенных относительно искомым узловых величин. Данный численный метод обоснован на основе решения ряд задач о термо-упруго-пластическом прямоугольнике с заземленными и свободными сторонами находящегося в температурном поле.

Сформулированы несвязанные краевые задачи термоупругости и термопластичности для прямоугольнике в случае плоской деформации. Разработаны численные модели рассматриваемых задач. Разработаны численные алгоритмы и соответствующее программное обеспечение для решения двумерных термоупругопластических краевых задач. Исследовано влияние температурного поля на распределение напряжений и перемещений, а также на возникновение пластических зон в прямоугольнике.

Литература

1. Победря Б. Е. Численные методы в теории упругости и пластичности. -М.: МГУ, 1996. - 343с.
2. Khaldjigitov A.A., Yusupov Y.S., Khudazarov R.S. and Sadullaeva D.A. On the thermoplasticity constitutive relations for isotropic and transversely isotropic materials. International Journal of Mechanical and Production Engineering Research and Development (IJMPERD), 2019, Vol.9, Issue 4, pp. 467-478.
3. Халджигитов А.А., Каландаров А.А., Юсупов Ю.С. Связанные задачи термоупругости и термопластичности. – Ташкент: «Fan va texnologiya», 2019. – 204 с.
4. Халджигитов А.А., Худазаров Р.С., Сагдуллаева Д.А. Теории пластичности и термопластичности анизотропных тел. Ташкент - «Fan va texnologiya», 2015
5. Khaldjigitov A.A., Qalandarov A., Nik M.A.Asri Long., Eshquvatov Z. Numerical solution of 1D and 2D thermoelastic coupled problems. International journal of modern physics. Vol. 9, pp. 503-510, (2012).
6. Адамбаев У.Э., Каландаров А.А., Каландаров А. Численное решение связанной задачи термоупругости для анизотропных тел // Вестник НУУз, – Ташкент, 2017.- №2/1. -С. 48-53.
7. A.A.Khaldjigitov, U.Z.Djumayozov, A.A.Alisherov. A simple iterative method for finite difference equations of applied problems // International Conference on Recent Advances in Applied Mathematics 2020 4-6 February 2020 \ Kuala Lumpur, MALAYSIA.
8. A.A.Khaldjigitov, U.Z.Djumayozov, Ibdulloev Sh.R. Effective finite-difference method for elastoplastic boundary value problems // Uzbekistan-Malaysia international online conference on "Computational Models and Technologies"
9. Khaldjigitov A.A., Babadjanov M.R., Kalandarov A.A., Khudazarov R.S. Coupled dynamic thermoelasticity problem for transversely isotropic parallelepiped. IJETER. Vol. 8, N. 7, 2020, pp. 3958-3964. DOI: 10.30534/ijeter/2020/166872020
10. Qalandarov A.A., Khaldjigitov A.A. Mathematical and numerical modeling of the coupled dynamic thermoelastic problem for isotropic bodies. TWMS Journal of Pure and Applied Mathematics. Vol. 11, N. 1, 2020, pp. 119-126.

УДК 517.97:519.9

**ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ АНСАМБЛЕМ ТРАЕКТОРИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО
ВКЛЮЧЕНИЯ С ПАРАМЕТРАМИ ПРИ УСЛОВИИ ПОДВИЖНОСТИ ТЕРМИНАЛЬНОГО
МНОЖЕСТВА**

Отакулов С., Рахимов Б.Ш.

Джизакский политехнический институт

otakulov52@mail.ru , boyhuroz@bk.ru

Аннотация. В работе рассматривается один класс моделей динамических систем – управляемое дифференциальное включение с параметром. Для этой математической модели изучена задача управления ансамбля траекторий на подвижное терминальное множество. Получены необходимые и достаточные условия управляемости ансамбля траекторий в условии неточности параметра системы.

Ключевые слова: дифференциальное включение, система управления, параметр, ансамбль траекторий, терминальное множество, условия управляемости.

**Parametrlardan bog‘liq differentsial mansublik trayektoriyalari ansamblini terminal to‘plam
qo‘zg‘aluvchanligi shartida boshqarish masalasi**

Annotatsiya. Ishda dinamik tizimlar modellarining bir sinfi – parametrli boshqariluvchan differentsial mansublik qaralgan. Shu matematik model uchun dinamik tizim trayektoriyalari ansamblini qo‘zg‘aluvchan terminal to‘plamga boshqarish masalasi o‘rganilgan. Tizim parametrining noaniqligi sharoitida trayektoriyalar ansambli boshqariluvchanligining zaruriy va yetarli shartlari olingan.

Kalit so‘zlar: differentsial mansublik, boshqarish tizimi, parameter, trayektoriyalar ansambli, terminal to‘plam, boshqariluvchanlik shartlari.

**The control problem of ensemble of trajectories of differential inclusion with parameter under
condition mobility of terminal set**

Abstract: In this paper we consider one class of models of dynamical system – the controlled differential inclusion with parameter. For the mathematical model of dynamical systems the control problem of ensemble of trajectories to mobile terminal set is researched. The necessary and sufficient conditions of controllability of ensemble of trajectories under condition of indeterminacy of parameter are obtained.

Keywords: differential inclusion, control system, parameter, ensemble of trajectories, terminal set, conditions of controllability.

1. Введение.

В настоящее время актуальны вопросы создания систем автоматизированного проектирования в технике, представляют большой интерес проблемы эффективного управления сложными технологическими и экономическими процессами [1,2,3]. Прикладные задачи управления, возникающие в различных областях, приводят к специальным математическим моделям, в которых учитываются характерные особенности каждого процесса управления. Здесь есть один важный аспект, которого следует учесть в исследованиях моделей систем управления – степень информированности относительно внутренних и внешних параметров. С точки зрения построения моделей, приближенным реальным ситуациям, предпочтение имеют те модели, которые учитывают такие важные факторы, как неполнота информации о внешних параметрах и неточности исходных априорных данных о начальном состоянии системы. Задачи управления в условиях ограниченности информации различного типа составляют важный класс информационных моделей систем управления [4–7].

Модель для динамических систем управления с сосредоточенными параметрами в общем виде можно представить в виде

$$\dot{x} = f(t, x, u, v), t \geq t_0, x(t_0) = x^0, u \in U, \quad (1)$$

где $x = x(t)$ – n -вектор состояния, $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $u = u(t)$ – m -вектор управления с множеством значений U , $w = w(t)$ – параметр внешних воздействий. Известные методы исследования модели вида (1) разработаны с учетом информации относительно параметров возмущения и начального

состояния системы. Когда известны функции распределения вероятностей параметра $w = w(t)$ и начальных данных, система (1) изучается методами теории стохастического управления [8].

В прикладных задачах управления более распространенной является ситуация, когда имеющаяся информация об априорных данных о начальном состоянии системы и параметрах внешних воздействий ограничивается заданием лишь допустимого множества их значений. Исследование математической модели (1), соответствующей такой ситуации, составляет суть проблем управления и наблюдения в условиях неопределенности [4,5]. Для моделей систем управления в условиях неопределенности большой интерес представляют свойства ансамбля траекторий, методы оценки множества достижимости и прогноза фазового состояния системы и другие [4,6,7]. Следует отметить, что изучение этих проблем во многом способствовали возникновению и развитию многозначного и негладкого анализа [9,10,11].

Используя результаты теории дифференциальных включений и многозначного анализа [10–13] можно показать, что при довольно общих предположениях, система управления (1) с неопределенными параметрами $w = w(t) \in W$ и начальными данными $x^0 \in D$ эквивалентна дифференциальному включению вида

$$\dot{x} \in f(t, x, u, W) \equiv \{f(t, x, u, w) : w \in W\}, t \geq t_0, x(t_0) \in D, u \in U.$$

Это показывает, что модели систем управления в условиях неопределенности тесно связаны дифференциальными включениями с управляющим параметром (управляемые дифференциальные включения) [7,13,14,15]

$$\dot{x} \in F(t, x, u), t \geq t_0, x(t_0) \in D, u \in U.$$

Для дифференциальных включений фундаментальными являются топологические свойства множества траекторий, интегральных воронок и их сечений (ансамбля траекторий) [10 – 12]. Они играют важную роль в задачах оптимизации для управляемых дифференциальных включений. В результате исследований класса управляемых дифференциальных включений, в частности, выявлены условия компактности, выпуклости множества абсолютно непрерывных решений, а также их зависимость от параметра управления и начального состояния. Изучены необходимые и достаточные условия оптимальности в задачах быстрогодействия и минимаксного управления ансамблем траекторий [7, 13,15,18].

Проблема управляемости, суть которой состоит о возможности перевода системы из заданного начального состояния на желаемое терминальное (конечное) состояние, важна для каждой модели динамической системы управления. Задача управления ансамблем траекторий дифференциальных включений имеет свою специфическую особенность. Можно рассмотреть задачу о полном или частичном погружении концов всевозможных траекторий системы на заданное терминальное множество. Имеет теоретическое и практическое значение также и задача о поглощении ансамблем траекторий ограниченного множества терминальных состояний. Это все определяет значение и актуальность проблемы управляемости ансамбля траекторий для дифференциальных включений. Особенность этой проблемы для дифференциальных включений связана с неоднозначным (многозначным) характером траекторий динамической системы. Учитывая это, можно сказать, что исследования по проблеме управляемости ансамбля траекторий дифференциальных включений получают развитие в различных направлениях и во многом зависят от структуры таких систем.

Некоторые постановки задач управляемости для дифференциальных включений, понимаемые как управляемость ансамбля траекторий относительно заданных начальных и терминальных состояний, рассмотрены в работах [13,14,17,18]. Для таких систем изучены условия управляемости и некоторые свойства множества точек управляемости относительно терминального множества. Отдельные результаты по вопросу управления ансамбля траекторий для дифференциальных включений с запаздыванием получены в работе [19]. В [20] для таких систем рассмотрена задача оптимального управления ансамбля траекторий по быстродействию.

В данной работе рассмотрим один класс управляемых дифференциальных включений, зависящих от дополнительного параметра, которого можно принимать в качестве параметра допустимости неточностей в процессе синтеза системы управления или как параметр, определяющий семейству динамической системы без единственности. Исследована задача управления ансамбля траекторий на подвижное (зависящий от времени) терминальное множество состояний. Получены необходимые и достаточные условия управляемости, которые выражены в предположениях относительно правой части рассмотренной системы.

2. Постановка задачи. Методы исследования.

Рассмотрим объект управления, динамика которого описывается дифференциальным включением

$$\dot{x} \in A(t)x + B(t, u, q), t \geq t_0, u \in V, \quad (1)$$

где $A(t)$ – $n \times n$ - матрица, $B(t, u, q)$ – многозначное отображение, значения которого являются компактными подмножествами пространства R^n , $u \in V \subset R^m$ – управляющий параметр, $q \in R^v$ – дополнительный параметр системы. Относительно роли параметра q возможны некоторые допущения. Здесь отмечаем некоторые из таких возможных ситуаций.

Одна из них определяется предположением о том, что параметр q принимает значение в самом начале процесса управления ($t = t_0$) и сохраняет свое значение в дальнейшем в определенное время. Однако информация об этом ограничивается тем, что известно только множество возможных значений: $q \in Q \subset R^v$. В такой ситуации дифференциальное включение (1) можно рассмотреть как математическую модель системы управления в условиях неточности параметра q , от которого зависит, в некотором смысле, структура динамической системы.

Другое предположение относительно роли параметра q относится на случай, когда соотношение (1) рассматривается как модель динамической системы, в синтезе которой участвует семейство управляемых дифференциальных включений, определяемое множеством значений $q \in Q$. Следует также отметить, что к моделям вида (1) с дополнительным параметром приводят также задачи управления, когда множество возможных значений параметра внешних воздействий имеет свой параметр неточности.

Допустимыми управлениями для системы (1) будем считать ограниченные и измеримые функции $u = u(t)$, $t \geq t_0$, со значениями из компакта $V \subset R^m$.

Пусть: $U_V(T)$ – множество всех допустимых управлений $u = u(t)$, $t \in T = [t_0, t_1]$; $H_T(x^0, u, q)$ – множество всех абсолютно непрерывных траекторий $x = x(t)$ системы (1), соответствующих управлению $u = u(\cdot) \in U_V(T)$, параметру $q \in Q$ и начальному условию $x(t_0) = x^0$; $X_T(\tau, x^0, u, q)$ – множество точек пространства фазовых состояний R^n , достижимых допустимыми траекториями $x(\cdot) \in H_T(x^0, u, q)$ в момент $\tau \in T$.

При фиксированном моменте времени $\tau \in T$ множество $X_T(\tau, x^0, u, q)$ есть сечение интегральной воронки дифференциального включения (1), соответствующего управлению $u = u(\cdot) \in U_V(T)$ и параметру $q \in Q$. Многозначное отображение $t \rightarrow X_T(t, x^0, u, q)$, $t \in T$, представляют собой ансамбль траекторий дифференциального включения [13,17,18].

Предполагая выполненными, отмеченные выше, допущения относительно параметра $q \in Q$, рассмотрим задачу об управлении ансамбля траекторий дифференциального включения (1) из начального состояния x^0 на заданное переменное множество конечных (терминальных) состояний $M(t)$, $t \geq t_0$, считая, естественно, что $x^0 \notin M(t_0) \neq \emptyset$. Эта задача заключается в переводе системы (1) из заданного начального состояния x^0 на переменное терминальное множество с помощью некоторого допустимого управления $u = u(\cdot) \in U_V(T)$, обеспечивающего это одновременно для всех $q \in Q$. Точнее говоря, требуется выяснить условия, при выполнении которых существует допустимое управление $u(\cdot) \in U_V(T)$, такое, что имеет место соотношение

$$X_T(t_1, x^0, u, q) \cap M(t_1) \neq \emptyset \quad \forall q \in Q \quad (2)$$

при всех значениях параметра $q \in Q$.

Определение. Если существует момент времени $t_1 > t_0$ и допустимое управление $u(\cdot) \in U_V(T)$, $T = [t_0, t_1]$, такое, что соотношение (2) имеет место одновременно для всех $q \in Q$, то будем говорить, что ансамбль траекторий системы (1) является управляемым из начального

состояния $x^0 \notin M(t_0)$ на терминальное множество $M(t), t \geq t_0$ или кратко, система (1) $[(x^0, M)]_Q$ – управляемая.

Заметим, что в случае, когда множество Q одноэлементное, понятия $[(x^0, M)]_Q$ – управляемости системы (1) совпадает с аналогичным понятием управляемости, рассмотренный в [17].

На правую часть дифференциального включения (1) и на терминальное множество будем налагать условия, сформулированные в виде следующих предположений:

1) элементы матрицы $A(t), t \geq t_0$, измеримы и $\|A(t)\| \leq a(t), t \geq t_0$, где $a(\cdot) \in L_1(T)$, т.е. функция $a(t)$ суммируема на каждом конечном отрезке $T = [t_0, t_1] \subset [t_0, +\infty)$;

2) многозначное отображение $(t, v, q) \rightarrow B(t, v, q)$ измеримо по $t \in [t_0, t_1]$ при всех $t_1 > t_0$, и непрерывно по (v, q) почти для всех $t \in [t_0, +\infty)$, причем $\|B(t, v, q)\| = \sup_{\beta \in B(t, v, q)} \leq g_{vQ}(t), t \in [t_0, +\infty), v \in V, q \in Q$, где $g_{vQ}(\cdot) \in L_1(T)$ при каждом $T = [t_0, t_1] \subset [t_0, +\infty)$.

3) множества $M(t), t \geq t_0$, выпуклы и замкнуты.

Из приведенного выше определения ясно, что система (1) $[(x^0, M)]_Q$ – управляема тогда и только тогда, когда существует управление $\tilde{u} = \tilde{u}(\cdot) \in U_V(T), T = [t_0, t_1]$, такое, что

$$0 \in \bigcap_{q \in Q} [X_T(t_1, x^0, \tilde{u}, q) - M(t_1)].$$

Следовательно, $[(x^0, M)]_Q$ – управляемость системы (1) равносильна соотношению

$$0 \in \bigcup_{u \in U_V(T)} \bigcap_{q \in Q} [X_T(t_1, x^0, u, q) - M(t_1)]. \tag{3}$$

Рассмотрим следующие множества:

$$X_T(t, \xi, U_V(T), q) = \bigcup_{u \in U_V(T)} X_T(t, \xi, u, q) \cdot B(t, V, q) = \bigcup_{v \in V} B(t, v, q), t \in T = [t_0, t_1], \xi \in R^n.$$

В силу результатов работы [13] $X_T(t, \xi, U_V(T), q)$ – выпуклый компакт из R^n и справедливо представление

$$X_T(t, \xi, U_V(T), q) = \Phi(t, t_0)\xi + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau, V, q)d\tau, \tag{4}$$

где $\Phi(t, \tau)$ – фундаментальная матрица решений уравнения $\dot{x} = A(t)x, t \geq t_0$, т.е.

$$\frac{\partial \Phi(t, \tau)}{\partial t} = A(t, q)\Phi(t, \tau), t \geq t_0, \Phi(\tau, \tau) = E, \tau \geq t_0, E – единичная матрица.$$

Используем в дальнейшем понятие опорной функции множества и ее свойства [12]: $C(D, \psi) = \sup\{(\psi, d) : d \in D\}$, где $D \subset R^n, \psi \in R^n$.

Из представления (4) и свойств интеграла многозначного отображения ясно, что в условиях на правую часть дифференциального включения (1) множество $X_T(t_1, x^0, U_V(T), q) \forall q \in Q$ выпукло, замкнуто и ограничено. Его опорная функция вычисляется по формуле:

$$C(X_T(t_1, x^0, U_V(T), q)) = (\Phi(t_1, t_0)x^0, \psi) + \int_{t_0}^{t_1} C(\Phi(t_1, t)B(t, V, q), \psi)dt. \tag{5}$$

В дальнейшем для получения необходимых и достаточных условий управляемости дифференциального включения (1) будем использовать формулу (5) и свойства многозначных отображений.

3. Полученные результаты.

Из определения множества $X_T(t, \xi, U_V(T), q)$ и свойств операций объединения и пересечения множеств легко следует следующие соотношения:

$$\begin{aligned} & \bigcup_{u \in U_V(T)} \bigcap_{q \in Q} [X_T(t_1, x^0, u, q) - M(t_1)] \subset \bigcap_{q \in Q} \bigcup_{u \in U_V(T)} [X_T(t_1, x^0, u, q) - M(t_1)] = \\ & = \bigcap_{q \in Q} [\bigcup_{u \in U_V(T)} X_T(t_1, x^0, u, q) - M(t_1)] = \bigcap_{q \in Q} [X_T(t_1, x^0, U_V(T), q) - M(t_1)]. \end{aligned} \quad (6)$$

Как уже отметили, $[(x^0, M)]_Q$ – управляемость системы (1) равносильна соотношению (3).

Следовательно, согласно (6) для $[(x^0, M)]_Q$ – управляемой системы (1) получим

$$0 \in \bigcap_{q \in Q} [X_T(t_1, x^0, U_V(T), q) - M(t_1)].$$

Множество $X_T(t_1, x^0, U_V(T), q) - M(t_1)$ при всех $q \in Q$ выпукло и замкнуто, и поэтому в терминах опорных функций последнее равносильно соотношению

$$C(X_T(t_1, x^0, U_V(T), q) - M(t_1), \psi) \geq 0 \forall \psi \in R^n, q \in Q. \quad (7)$$

Следовательно, из соотношений (5), (7) получим

$$\inf_{\|\psi\|=1} [(\Phi(t_1, t_0)x^0, \psi) + \inf_{q \in Q} \int_{t_0}^{t_1} C(\Phi(t_1, t)B(t, V, q), \psi) dt + C(M(t_1), -\psi)] \geq 0, \quad (8)$$

Итак, мы получили следующее необходимое условие управляемости.

Теорема 1. Для $[(x^0, M)]_Q$ – управляемости системы (1) необходимо существование момента времени $t_1 > t_0$ такого, что имеет место соотношение (8).

Исследование свойства управляемости продолжим для одного частного случая. Пусть в (1) $B(t, u, q) = B_1(t, u) + B_2(t, q)$, т.е. рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{x} \in A(t)x + B_1(t, u) + B_2(t, q), \quad t \geq t_0, u \in V, q \in Q. \quad (9)$$

Здесь $B_1(t, u)$ – однозначное отображение, измеримое по $t \geq t_0$ и непрерывное по $u \in V$, причем $\|B_1(t, v)\| \leq g_{1V}(t), t \in [t_0, +\infty), v \in V, g_{1V}(\cdot) \in L_1(T)$ при каждом $T = [t_0, t_1] \subset [t_0, +\infty)$;

$B_2(t, q)$ – многозначное отображение, измеримое по $t \geq t_0$ и непрерывное по $q \in Q$, причем $\|B_2(t, q)\| \leq g_{2Q}(t), q \in Q, g_{2Q}(\cdot) \in L_1(T)$ при каждом $T = [t_0, t_1] \subset [t_0, +\infty)$.

Наряду с (9) рассмотрим управляемое дифференциальное включение

$$\dot{x} \in A(t)x + B_1(t, u) + \bigcap_{q \in Q} B_2(t, q), \quad t \geq t_0, u \in V, \quad (10)$$

которое в отличие от (9), не содержит параметр $q \in Q$. Обозначим через $\widehat{X}_T^\bullet(t_1, x^0, U_V(T))$ множество точек фазового пространства состояний R^n , достижимых всевозможными допустимыми траекториями $u = u(\cdot) \in U_V(T)$ системы (10), соответствующих начальному условию $x(t_0) = x^0$.

Лемма 1. Множество $\widehat{X}_T^\bullet(t_1, x^0, U_V(T))$ является выпуклым компактом из R^n и имеет следующее представление

$$\widehat{X}_T^\bullet(t_1, x^0, U_V(T)) = \Phi(t_1, t_0)x^0 + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, t)B_1(t, V)dt + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, t)\widehat{B}_{2Q}(t)dt, \quad (11)$$

где $\widehat{B}_{2Q}(t) = \bigcap_{q \in Q} B_2(t, q)$.

Используя представление (11) и свойства многозначных отображений, можно показать, что справедливо утверждение:

Лемма 2. Пусть при некотором моменте времени $t_1 > t_0$ имеет место соотношение

$$\widehat{X}_T^\bullet(t_1, x^0, U_V(T)) \cap M(t_1) \neq \emptyset. \quad (12)$$

Тогда

$$\bigcup_{u \in U_V(T)} \bigcap_{q \in Q} X_T(t_1, x^0, u, q) \cap M(t_1) \neq \emptyset. \tag{13}$$

Теорема 2. Для $[(x^0, M)]_Q$ – управляемости системы (10) достаточно выполнение условия

$$\inf_{\|\psi\|=1} [(\Phi(t_1, t_0)x^0, \psi) + \int_{t_0}^{t_1} C(\Phi(t_1, t)B_1(t, V), \psi)dt + \int_{t_0}^{t_1} C\Phi(t_1, t)\widehat{B}_{2Q}(t, \psi)dt - C(M(t_1), -\psi)] \geq 0 \tag{14}$$

при некотором моменте времени $t_1 > t_0$. Если $\bigcap_{q \in Q} B_2(t, q) = B_2(t, q^*)$ при некотором $q^* \in Q$, то условие (14) является и необходимым условием $[(x^0, M)]_Q$ – управляемости системы (10).

Доказательство. В силу выпуклости множеств $\widehat{X}_T^*(t_1, x^0, U_V(T))$ и $M(t_1)$ соотношение (12) запишется с помощью их опорных функций так:

$$C(\widehat{X}_T^*(t_1, x^0, U_V(T)) - M(t_1), \psi) \geq 0 \forall \psi \in R^n, q \in Q.$$

Последнее соотношение с учетом формулы (11) принимает вид (14). Тогда в силу леммы 1 имеет место (13). А соотношение (13) означает, что существует управление $\bar{u} = \bar{u}(\cdot) \in U_V(T)$ такое, что $0 \in \bigcap_{q \in Q} [X_T(t_1, x^0, \bar{u}, q) - M(t_1)]$, т.е. система (10) $[(x^0, M)]_Q$ – управляемая. Итак, достаточность

условия (14) для $[(x^0, M)]_Q$ – управляемости системы (10) доказана.

Теперь, пусть $\bigcap_{q \in Q} B_2(t, q) = B_2(t, q^*)$, $q^* \in Q$. Тогда если система (10) $[(x^0, M)]_Q$ –

управляемая, то

$$0 \in \bigcap_{q \in Q} [X_T(t_1, x^0, \bar{u}, q) - M(t_1)] \subseteq X_T(t_1, x^0, \bar{u}, q^*) - M(t_1) \subseteq X_T(t_1, x^0, U_V(T), q^*) - M(t_1).$$

Теперь в полученной цепочке включений учтем, что из $\bigcap_{q \in Q} B_2(t, q) = B_2(t, q^*)$ следует

$X_T(t_1, x^0, U_V(T), q^*) = \widehat{X}_T^*(t_1, x^0, U_V(T))$. Следовательно, $0 \in \widehat{X}_T^*(t_1, x^0, U_V(T)) - M(t_1)$. А это равносильно (12). Как выше выяснили соотношение (12) запишется в эквивалентном виде (14). Таким образом, необходимость условия (14) $[(x^0, M)]_Q$ – управляемости системы (10) также доказана.

4. Заключение.

В теореме 1 дано общее необходимое условие $[(x^0, M)]_Q$ – управляемости ансамбля траекторий системы (1). В теореме 2 для частного случая системы (1) вида (10) приведены необходимые и достаточные условия управляемости. Использованный метод исследования можно развить также для получения достаточных условий управляемости для более общих видов правой части системы (1). Можно показать, что из управляемости ансамбля траекторий дифференциального включения

$$\dot{x} \in A(t)x + \bigcap_{q \in Q} B(t, u, q), t \geq t_0, u \in V$$

на терминальное множество $M(t), t \geq t_0$, следует $[(x^0, M)]_Q$ – управляемость системы (1).

Литература

1. Асеев С.М.. Оптимизация динамики управляемой системы при наличии факторов риска. Труды ИММ УрО РАН. 2017, Т.23, № 1. –с.27–42.
2. Асеев С.М., Кряжковский А.В. Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста. Труды МИАН. 2007. Т. 257. –с. 3–271.
3. Лагоша Б.А. Оптимальное управление в экономике. МГУЭС. –М.: 2004. – 133 с.
4. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. – М.: Наука, 1977. – 392 с.

5. Кейн В.Н. Оптимизация систем управления по минимаксному критерию. – М.: Наука, 1985. – 248 с.
6. Сатимов Н.Ю. К методам решения игровых задач управления пучками траекторий. Доклады АН СССР, – 1990. Т. 314, №1. –с. 132-134.
7. Плотников А.В. Задача управления пучками траекторий. Сибирский математический журнал. -1992. -33, № 2. –с. 196-199.
8. Острем К.Ю. Введение в стохастическую теорию управления. М.: Мир,1973. -324 с.
9. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. – М.: Наука,1988. - 280 с.
- 10.Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. –М.: Ком Книга, 2005. –216 с.
- 11.Половинкин Е.С. Многозначный анализ и дифференциальные включения. –М.: Физматлит, 2015. –253 с.
- 12.Благодатских В.И., Филиппов А.Ф. Дифференциальные включения и оптимальное управление. Труды математического института АН СССР. – 1985. –169. – с. 194-252.
- 13.Отакулов С. Задачи управления ансамблем траекторий дифференциальных включений. Монография. Riga, Lambert Academic Publishing, 2019. –144 с.
- 14.Отакулов С. Об условиях управляемости дифференциальных включений. Изв. РАН. Техн. кибернет. –1992. -№ 2. -с. 57–62.
- 15.Plotnikov A.V., Komleva T.A. Piecewise constant controlled linear fuzzy differential inclusions. Universal Journal of Applied Mathematics. 2013, 1(2).– pp. 39-43.
- 16.Otakulov S., Rahimov B. Sh., Haydarov T.T. The nonsmooth optimal control problem for ensemble of trajectories of dynamic system under conditions of indeterminacy. Middle European Scientific Bulletin, vol. 5, October 2020. pp. 38-42.
- 17.Отакулов С., Собирова Г.Д. О некоторых свойствах множества M-управляемости дифференциальных включений. Узб.матем.журн.-2001, №1.-с. 35–41.
- 18.Otakulov S., Rahimov B. Sh. About the property of controllability an ensemble of trajectories of differential inclusion. International Engineering Journal for Research & Development. Vol.5, issue 4, 2020. pp.366-374. DOI:10.17605/OSF.IO/AXW36
- 19.Otakulov S., Kholiyarova F.Kh. About conditions of controllability of ensemble trajectories of differential inclusion with delay. International Journal of Statistics and Applied Mathematics.vol.5(3), 2020.-pp.59–65.
- 20.Otakulov S., Kholiyarova F.Kh. Time optimal control problem of ensemble trajectories of differential inclusion with delays. Journal of Advanced Research in dynamical and Control Systems, vol.12, issue 6, 2020. pp. 1043-1050. DOI: 10/5373/ JARDCS/V1216/S20201129

УДК 517.518.5

DISKRET HARDI TIPIDAGI OPERATORNING UZLUKSIZLIGI

K. Kuliev¹, M. Eshimova²

¹*Samarqand davlat universiteti*

²*Samarqand davlat arxitektura-qurilish instituti*
komilkuliev@gmail.com, eshimova_math@mail.ru

Annotatsiya. Ushbu ishda diskret Hardi tipidagi operator uzluksizlik bo'lishi uchun yetarli va zaruriy shartlar keltirilgan.

Kalit so'zlar: Diskret Hardi operatori, operator uzluksizligi, vaznli diskret fazolar.

Непрерывность дискретного оператора типа Харди

Аннотация. В данной работе приведены достаточные и необходимые условия непрерывности дискретного оператора типа Харди.

Ключевые слова: Дискретный оператор Харди, непрерывность оператора, весовые дискретные пространства.

Continuity of discrete Hardy type operator

Abstract. It is presented necessary and sufficient condition for continuity of Hardy type operator.

Keywords: discrete Hardy operator, continuity of operators, weighted discrete spaces.

1-§. Kirish

Faraz qilaylik, $v_n \geq 0, n=1, 2, \dots$ va $p \geq 1$ bo'lsin. $l^p(v_n)$ orqali $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p v_n$ qator yig'indisi chekli bo'ladigan barcha $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketliklar fazosini belgilaymiz, ya'ni

$$l^p(v_n) = \left\{ x = \{x_n\} : \|x\|_{l^p(v_n)} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p v_n \right)^{1/p} < \infty \right\}.$$

Xuddi shunday $l^q(u_n)$ fazo ham kiritiladi. Endi quyidagi Hardi tipidagi operatorni qaraylik:

$$H : l^p(v_n) \rightarrow l^q(u_n), \quad (Hx)_n := \sum_{k=1}^n s_{n,k} x_k, \quad (1.1)$$

bunda $\{s_{n,k}\}$ ga H operatorning yadrosi deyiladi.

Biz quyida shu operatorning uzluksizligi masalasi bilan shug'ullanamiz, ya'ni berilgan fazolar uchun (1.1) operatorning uzluksizligini ta'minlovchi shartlar topamiz.

Ma'lumki, normallangan fazolarda chiziqli operatorning uzluksizligi uning chegaralanganligi bilan ekvivalentdir. Shuning uchun berilgan operatorning uzluksizligi o'rniga ushbu

$$\|Hx\|_{l^q(u_n)} \leq C \|x\|_{l^p(v_n)}, \quad (1.2)$$

ya'ni,

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^n s_{n,k} x_k \right|^q u_n \right)^{1/q} \leq C \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p v_n \right)^{1/p} \quad (1.3)$$

tengsizlikning bajarilishini o'rganamiz, bunda C o'zgarmas son x ga bog'liq emas. (1.3) tengsizlikka diskret Hardi tipidagi tengsizlik deyiladi va uni nomanfiy $\{s_{n,k}\}$ va $\{x_n\}$ ketma-ketlik uchun qarashimiz yetarli, [2] ga qarang. Shuning uchun biz quyida (1.3) o'rniga

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n s_{n,k} x_k \right)^q u_n \right)^{1/q} \leq C \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n^p v_n \right)^{1/p} \quad (1.4)$$

tengsizlik bilan ishlaymiz.

Endi (1.4) tengsizlikka oid ba'zi ma'lum natijalarni keltiraylik: agar (1.4) tengsizlikda $s_{n,k} = 1/n$, $u_n = v_n = 1$ va $q = p$ deb olsak u holda quyidagi klassik Hardi tengsizligi hosil bo'ladi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right)^q \leq C \sum_{n=1}^{\infty} x_n^p.$$

Bu tengsizlik G.Hardy tomonidan 1920 yilda $p = 2$ holat uchun o'rganilgan, so'ngra tengsizlik istalgan $p > 1$ uchun umumlashtirilgan, ma'lumot uchun [2] ga qarang.

Agar (1.4) tengsizlikda yadro 1 ga teng bo'lsa, u holda quyidagi diskret Hardi tengsizligi hosil bo'ladi:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^q u_n \right)^{1/q} \leq C \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n^p v_n \right)^{1/p}. \quad (1.5)$$

Bu tengsizlik o'rinli bo'lishi uchun " $1 < p \leq q < \infty$ holda" ushbu shartning bajarilishi yetarli va zarurdir:

$$A := \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{k=n}^{\infty} u_k \right)^{1/q} \left(\sum_{k=1}^n v_k^{1-p'} \right)^{1/p'} < \infty \quad (1.6)$$

bunda $p' = \frac{p}{p-1}$. Bu natija Andersen-Heinig [1] tomonidan olingan.

Agar $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ va $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ musbat hadli ketma-ketliklar bo‘lib, (1.4) tengsizlik yadrosi $s_{n,k} = a_n b_k$ orqali berilgan bo‘lsa u holda (1.4) ushbu ko‘rinishni oladi

$$\left(\sum_{n=1}^\infty \left(\sum_{k=1}^n a_n b_k x_k \right)^q u_n \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\sum_{n=1}^\infty x_n^p v_n \right)^{\frac{1}{p}} .$$

Bu tengsizlikda $y_k = b_k x_k$ belgilash olsak natijada

$$\left(\sum_{n=1}^\infty \left(\sum_{k=1}^n y_k \right)^q \tilde{u}_n \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\sum_{n=1}^\infty y_n^p \tilde{v}_n \right)^{\frac{1}{p}}$$

ga ega bo‘lamiz, bunda $\tilde{u}_n = u_n a_n^q$ va $\tilde{v}_n = b_n^{-p} v_n$. Bu esa yuqoridagi o‘rganilgan (1.5) holatga keladi, ya’ni, diskret Hardi tengsizligining ixtiyoriy musbat $\{y_n\}$ da bajarilish shartini $1 < p \leq q < \infty$ holda (1.6) orqali berish mumkin:

$$\begin{aligned} \sup_{n \in N} \left(\sum_{k=n}^\infty \tilde{u}_k \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^n \tilde{v}_k^{1-p'} \right)^{\frac{1}{p'}} &= \\ = \sup_{n \in N} \left(\sum_{k=n}^\infty a_k^q u_k \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^n b_k^{p'} v_k^{1-p'} \right)^{\frac{1}{p'}} &< \infty . \end{aligned}$$

Umuman olganda diskret Hardi operatori va Hardi tipidagi operatorlarning chegaralanganligi shu vaqtgacha juda yaxshi o‘rganilgan. Bunda oid natijalarni Hardi tengsizligiga doir kitoblardan topish mumkin, masalan [2], [4] va hokozolar. Shunday bo‘lsada agar gap operatorning uzluksizligi uchun yetarli va zaruriy shartlar topishda bo‘lsa, afsuski, bunday o‘rganilgan operatorlar sinfi unchalik katta emas.

Ushbu ishda Hardi tipidagi operatorning yadrosi quyidagi ko‘rinishda

$$s_{n,k} = \sum_{i=1}^m a_{i,n} b_{i,k} \tag{1.7}$$

bo‘lgan hol qaralgan. Ishning ikkinchi paragrafida asosiy natijalar keltirilgan. Operator uzluksiz bo‘lishi uchun zaruriy shart faqat $p = 2$, $1 < q < \infty$ holda olingan va bu shartni olishda (1.7) yadroning koeffitsientlariga elliptiklik shartlari qo‘yilgan.

2-§. Operatorning uzluksizligi

Faraz qilaylik, (1.1) operatorning yadrosi (1.7) ko‘rinishda bo‘lsin. Quyidagicha belgilash kiritamiz:

$$A_{M,i}(n) := \left(\sum_{k=n}^\infty u_k a_{i,k}^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{l=1}^n v_l^{1-p'} b_{i,l}^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}}, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

hamda, operatorning uzluksizligini taminlovchi ushbu natijani keltiramiz:

Teorema 2.1. *Yadrosi (1.7) ko‘rinishda berilgan (1.1) Hardi tipidagi operatorning uzluksiz bo‘lishi uchun*

$$\sup_{n \in N} A_{M,i}(n) < \infty, \quad i = 1, 2, \dots, m \tag{2.1}$$

shartlarning bajarilishi yetarlidir.

Isbot. Agar (2.1) shart o‘rinli bo‘lsa, u holda Andersen-Heinig [1] teoremasiga ko‘ra quyidagi Hardi tengsizligi

$$\left(\sum_{n=1}^\infty \left(\sum_{k=1}^n y_k \right)^q u_n a_{i,n}^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq C_{1,i} \left(\sum_{n=1}^\infty y_n^p v_n b_{i,n}^{-p} \right)^{\frac{1}{p}}$$

barcha musbat $\{y_n\}$ ketma-ketliklar uchun o‘rinli bo‘ladi.

Bu tengsizlikda $y_n = x_n b_{in}$ deb belgilash olsak ushbu tengsizlikni

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n a_{i,n} b_{i,k} x_k \right)^q u_n \right)^{\frac{1}{q}} \leq C_{1,i} \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n^p v_n \right)^{\frac{1}{p}}$$

hosil qilamiz. Endi (1.4) tengsizlikning chap qismiga Minkovskiy va so'ngra yuqoridagi tengsizlikni qo'llasak:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n s_{n,k} x_k \right)^q u_n \right)^{\frac{1}{q}} &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^m a_{i,n} b_{i,k} \right) x_k \right)^q u_n \right)^{\frac{1}{q}} = \\ &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^m \left(\sum_{k=1}^n a_{i,n} b_{i,k} x_k \right) \right)^q u_n \right)^{\frac{1}{q}} \leq \sum_{i=1}^m \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n a_{i,n} b_{i,k} x_k \right)^q u_n \right)^{\frac{1}{q}} \leq \\ &\leq C \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n^p v_n \right)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

bunda $C = \sum_{i=1}^m C_{1,i}$. Teorema isbot bo'ldi.

Teorema 2.2. Faraz qilaylik, $p = 2$ va $1 < q < \infty$ bo'lsin. U holda yadrosi (1.7) ko'rinishda berilgan (1.1) Hardi tipidagi operatorning uzluksiz bo'lishi uchun

$$\sup_{r \in \mathbb{N}} A_2(r) < \infty, \tag{2.2}$$

shartning bajarilishi zarurdir, bunda

$$A_2(r) := \left(\sum_{n=r}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^r s_{n,k}^2 v_k^{-1} \right)^{\frac{q}{2}} u_n \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Isbot. Agar (1.4) tengsizlikda quyidagicha belgilashlar olsak

$$y_k = x_k v_k^{1/p}, \quad A_{i,n} = a_{i,n} u_n^{1/q} \quad \text{va} \quad B_{i,k} = b_{i,k} v_k^{-1/p},$$

u holda uni ushbu ko'rinishda yoza olamiz

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n S_{n,k} y_k \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\sum_{n=1}^{\infty} y_n^p \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{2.3}$$

bunda

$$S_{n,k} = \sum_{i=1}^m A_{i,n} B_{i,k}. \tag{2.4}$$

Endi ixtiyoriy $r \in \mathbb{N}$ uchun $\{B_{i,k}^*\}_{i=1}^m$ ketma-ketlikni ushbu ko'rinishda

$$B_{i,k}^* = \begin{cases} B_{i,k} & , \quad 1 \leq k \leq r, \\ 0 & , \quad k > r \end{cases}$$

aniqlaymiz. $\{B_{i_s,k}^*\}_{s=1}^l$ ($l \leq m$) sistema l^2 (l^2 - kvadrati bilan jamlanuvchi ketma-ketliklar fazosi) da $\{B_{i,k}^*\}_{i=1}^m$ ning ixtiyoriy chiziqli bog'lanmagan qism sistemasi bo'lsin, uni soddalik uchun $\{B_{i,k}^*\}_{i=1}^l$ kabi belgilaylik. Ushbu sistemaga Gramm-Shmidtning ortogonallashtirish jarayonini qo'llab, $\{B_{i,r,k}^*\}_{i=1}^l$ ortogonal sistema hosil qilamiz. $\{B_{i,k}^*\}_{i=1}^m$ ni esa bu sistema orqali ifodalash mumkin:

$$B_{i,k}^* = \sum_{j=1}^l \beta_{i,j,r} B_{j,r,k}^*, \quad i = \overline{1, m}.$$

$k \leq r$ uchun (2.4) yadroni quyidagicha ifodalaymiz:

$$\begin{aligned} S_{n,k} &= \sum_{i=1}^m A_{i,n} B_{i,k} = \sum_{i=1}^m A_{i,n} \sum_{j=1}^l \beta_{i,j,r} B_{j,r,k}^* = \\ &= \sum_{j=1}^l B_{j,r,k}^* \sum_{i=1}^m \beta_{i,j,r} A_{i,n} = \sum_{j=1}^l A_{j,r,n} B_{j,r,k}^*, \end{aligned}$$

bunda $A_{j,r,n} = \sum_{i=1}^m \beta_{i,j,r} A_{i,n}$. Bundan foydalanib l^2 da ortonormal $\{h_{s,r,k}\}_{s=1}^l$, $(h_{s,r,k} = B_{s,r,k}^* \cdot \|B_{s,r}^*\|_l^{-1})$ sistema uchun (2.3) ning chap tomonini ushbu ko‘rinishda baholay olamiz

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n S_{n,k} h_{s,r,k} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \geq \left(\sum_{n=r}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^r S_{n,k} h_{s,r,k} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} = \\ &= \left(\sum_{n=r}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^r \left(\sum_{j=1}^l A_{j,r,n} B_{j,r,k}^* \right) h_{s,r,k} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{n=r}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^r \left(\sum_{j=1}^l A_{j,r,n} B_{j,r,k}^* \right) B_{s,r,k}^* \cdot \|B_{s,r}^*\|_l^{-1} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} = \\ &= \left(\sum_{n=r}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^l A_{j,r,n} \cdot \sum_{k=1}^r B_{j,r,k}^* B_{s,r,k}^* \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \|B_{s,r}^*\|_l^{-1} = \left(\sum_{n=r}^{\infty} A_{s,r,n}^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^r B_{s,r,k}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

(S ni j ga almashtiramiz). Endi $\|h_{j,r}\|_2 = 1$, (2.3) va Minkovskiy tengsizligidan foydalanib ushbu bahoga bo‘lamiz:

$$\begin{aligned} lC &= C \sum_{j=1}^l \|h_{j,r}\|_2 = C \sum_{j=1}^l \left(\sum_{k=1}^{\infty} h_{j,r,k}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \geq \sum_{j=1}^l \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n S_{n,k} h_{j,r,k} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \geq \\ &\geq \sum_{j=1}^l \left(\sum_{n=r}^{\infty} A_{j,r,n}^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^r B_{j,r,k}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sum_{j=1}^l \left(\sum_{n=r}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^r (A_{j,r,n} B_{j,r,k})^2 \right)^{\frac{q}{2}} \right)^{\frac{1}{q}} \geq \\ &\geq \left(\sum_{n=r}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^l \left(\sum_{k=1}^r (A_{j,r,n} B_{j,r,k})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \geq \left(\sum_{n=r}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^r \left(\sum_{j=1}^l A_{j,r,n} B_{j,r,k} \right)^2 \right)^{\frac{q}{2}} \right)^{\frac{1}{q}} = \\ &= \left(\sum_{n=r}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^r \left(\sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^m A_{i,n} \beta_{i,j,r} B_{j,r,k} \right)^2 \right)^{\frac{q}{2}} \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{n=r}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^r \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^l A_{i,n} \beta_{i,j,r} B_{j,r,k} \right)^2 \right)^{\frac{q}{2}} \right)^{\frac{1}{q}} = \\ &= \left(\sum_{n=r}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^r \left(\sum_{i=1}^m A_{i,n} B_{i,k} \right)^2 \right)^{\frac{q}{2}} \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{n=r}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^r s_{n,k}^2 v_k^{-1} \right)^{\frac{q}{2}} \right)^{\frac{1}{q}}, \end{aligned}$$

ya’ni

$$lC \geq \left(\sum_{n=r}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^r s_{n,k}^2 v_k^{-1} \right)^{\frac{q}{2}} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Bunda $r \in N$ ixtiyoriy va (2.3) dagi C konstanta chekli ekanligidan (2.2) o‘rinli bo‘lishi kelib chiqadi.

Ta'rif 2.3. $D_{i,j}$ haqiqiy sonlarning $\{D_{i,j}\}_{i,j=1}^m$ sistemasi (matritsasi) uchun shunday $C_E > 0$ konstanta mavjud bo'lib, ixtiyoriy $\xi = \{\xi_i\}_{i=1}^m \in R^m$ uchun

$$\sum_{i,j=1}^m D_{i,j} \xi_i \xi_j \geq C_E \sum_{i=1}^m D_{i,i} \xi_i^2$$

tengsizlik bajarilsa, u holda $\{D_{i,j}\}_{i,j=1}^m$ sistema elliptiklik shartini qanoatlantiradi deyiladi.

Quyidagicha belgilash olamiz

$$D_{i,k}(r) = \sum_{k=1}^r B_{i,k} B_{j,k} = \sum_{k=1}^r b_{i,k} b_{j,k} v_k^{-1}. \quad (2.5)$$

Ta'rif 2.4. Agar shunday $C_E > 0$ konstanta mavjud bo'lib, ixtiyoriy $r \in N$ uchun $\{D_{i,j}(r)\}_{i,j=1}^m$ sistema elliptiklik shartini qanoatlantirsa, u holda E_2 shart bajariladi deyiladi.

Teorema 2.5. Faraz qilaylik, $p = 2$, $1 < q < \infty$ bo'lsin va (2.5) sistema E_2 shartni qanoatlantirsin. U holda yadrosi (1.7) ko'rinishda berilgan (1.1) Hardi tipidagi operatorning uzluksiz bo'lishi uchun (2.2) shartning bajarilishi zarurdir.

Isbot. Teorema 2.2, E_2 shart va Minkovskiy tengsizligidan foydalanib, quyidagilarni olamiz:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^l \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n S_{n,k} h_{j,r,k} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \geq \left(\sum_{n=r}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^r s_{n,k}^2 v_k^{-1} \right)^{\frac{q}{2}} \right)^{\frac{1}{q}} = \\ & = \left(\sum_{n=r}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^r \sum_{i,j=1}^m a_{i,n} a_{j,n} b_{i,k} b_{j,k} v_k^{-1} \right)^{\frac{q}{2}} u_n \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{n=r}^{\infty} \left(\sum_{i,j=1}^m D_{i,j}(r) A_{i,n} A_{j,n} \right)^{\frac{q}{2}} \right)^{\frac{1}{q}} \geq \\ & \geq \sqrt{C_E} \left(\sum_{n=r}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^m D_{i,i}(r) A_{i,n}^2 \right)^{\frac{q}{2}} \right)^{\frac{1}{q}} = \sqrt{C_E} \left(\sum_{n=r}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^m A_{i,n}^2 \cdot \sum_{k=1}^r B_{i,k}^2 \right)^{\frac{q}{2}} \right)^{\frac{1}{q}} \geq \\ & \geq \sqrt{C_E} \left(\sum_{n=r}^{\infty} \left(A_{i,n}^2 \cdot \sum_{k=1}^r B_{i,k}^2 \right)^{\frac{q}{2}} \right)^{\frac{1}{q}} = \sqrt{C_E} \left(\sum_{n=r}^{\infty} A_{i,n}^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^r B_{i,k}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \\ & = \sqrt{C_E} \left(\sum_{n=r}^{\infty} a_{i,n}^q u_n \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^r b_{i,k}^2 v_k^{-1} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

Bundan (2.1) shart kelib chiqadi. Teorema isbot bo'ldi.

Adabiyotlar

1. K.Andersen, H.Heinig, Weighted norm inequalities for certain integral operators, SIAM J. Math. Anal. 14 (1983), 834-844.
2. A.Kufner, L.-E.Persson, Weighted inequalities of Hardy type. World scientific: New Jersey, London, Singapore, Hong Kong, 2003y.
3. A.Kufner, K.Kuliev, R.Oinarov, Some criteria for boundedness and compactness of the Hardy operator with some special kernels. Journal of Inequalities and Applications 2013, 2013:310.
4. A.Kufner, L.Maligranda, L-E Persson, The Hardy inequality-about its history and some related results. Pilsen 2007 y.

UDK.517.518.5

ON ESTIMATES FOR THE TRANSFORMATION FOURIER WITH DAMPED FACTOR

Sh. A. Muranov, B. Mahmudov, D. Asrorov

Samarkand State University

muranov-2017@mail.ru, math.5141@mail.ru, 96asrorovdiyorjon@mail.ru.

Abstract: In this paper we consider estimates for the Fourier transform measures, concentrated on analytic hypersurfaces containing the of damping factor. The paper presents the solution of the problem S.D.Soggi and I.M. Stein about the optimal decay of the transformation Fourier measures with a damping factor for any analytic surfaces in three-dimensional Euclidean space.

Keywords: oscillatory integrals, Fourier transform, damping factor, maximal operator.

Об оценках преобразования Фурье мер с множителем гашения.

Аннотация: В данной работе рассматриваются оценки преобразования Фурье мер, сосредоточенных на аналитических гиперповерхностях, содержащих множитель гашения. В статье рассматривается задача С.Д.Согги и И.М.Стейна об оптимальном убывании преобразования Фурье мер с множителем гашения для произвольных аналитических поверхностей трехмерного Евклидова пространства.

Ключевые слова: осцилляторные интегралы, преобразование Фурье, множитель гашения, максимальный оператор.

So'ndiruvchi ko'paytuvchili o'lchov Fure almatirish bahosi.

Annotatsiya. Bu ishda gipersirtlarda mujassamlashgan So'ndiruvchi ko'paytuvchiga ega o'lchovning Fure almashtirishi bahosi qaralgan. Shuningdek ishda S.D.Soggi va I.M.Steyinlar tomonidan qo'yilgan o'lchovning Fure almashtirishining optimal bahosini topish masalasini uch o'lchovli Evklid fazosidagi ixtiyoriy analitik sirtlarda tadqiq qilingan.

Kalit so'zlar: tebranuvchan integrallar, Fure almashtirishi, so'ndiruvchi ko'paytuvchi, maksimal operator.

1 Introduction

In connection with the boundedness problem for the maximal operators, associated to hypersurface $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ by S.D. Soggy and I.M. Stein [1] introduced the following damped oscillator integrals

$$\hat{\mu}_q(\xi) := \int_S e^{i(\xi, x)} |K(x)|^q \psi(x) d\sigma(x), \quad (1.1)$$

where $K(x)$ is the Gaussian curvature of the hypersurface at the point $x \in S$ and $\sigma(x)$ is a surface measure, $\psi \in C_0^\infty(S)$ is a smooth non-negative function, (ξ, x) is an inner product of ξ and x . They proved that if $q \geq 2n$, then integral (1.1) decays in order $O(|\xi|^{-\frac{n}{2}})$ (as $|\xi| \rightarrow +\infty$).

Statement of the problem.

Let $S \subset \mathbb{R}^n$ be a smooth hypersurface. Find a minimum value of q such that the following estimate

$$\left| \int_S e^{i(x, \xi)} |K(x)|^q \psi(x) d\sigma(x) \right| \leq A |\xi|^{-\frac{n}{2}}$$

Holds for $\xi \neq 0$.

The analogical problem was proposed by C.D. Sogge and E.M. Stein for a fixed hypersurface in [1]. It was proved in [5] that integral (1.1) decays optimally, if $0 \leq \psi(x) \leq |K(x)|^{\frac{1}{2}}$ and $\psi \in C_0^\infty(S)$, whenever S is a convex finite linear type hypersurface. In one-dimensional case, more precisely, when the curve S is given by a polynomial function the solution of the problem follows from the results of Oberlin [2].

In this paper we represent a solution of the problem of C.D. Sogge and E.M. Stein for analytic surfaces in three-dimensional Euclidean space.

We can suppose that S is given as the graph of $x_3 = \Phi(x_1, x_2)$, defined on a neighborhood of the origin, more precisely:

$$S := \{(x_1, x_2) \in V \subset \mathbb{R}^2: x_3 = \Phi(x_1, x_2), \Phi(x_1, x_2) = x_1 x_2^n\}$$

where $n \geq 2$. If $n = 1$ then integral $\hat{\mu}_q(\xi)$ optimally decays for any q , since $\det \text{Hess} \Phi(x_1, x_2) \neq 0$. So, further assume that $n \geq 2$.

Then, for the function $\det\text{Hess}\Phi(x_1, x_2)$ the following equality holds true

$$\det\text{Hess}\Phi(x_1, x_2) = -n^2 x_2^{2(n-1)}.$$

The integral (1.1) can be written in the form:

$$\hat{\mu}_q(\xi) := n^{2q} \int_{\mathbb{R}^2} e^{i(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 \Phi(x_1, x_2))} |x_2|^{2q(n-1)} a(x_1, x_2) dx_1 dx_2, \quad (1.2)$$

where $a(x_1, x_2) = \frac{\psi(x_1, x_2, \Phi(x_1, x_2))}{\sqrt{(1+|\nabla\Phi(x_1, x_2)|^2)^{4q-1}}}$.

The main result of the work is the following theorem.

Theorem Let $q > \frac{1}{2}$. Then there exist a neighborhood V of the origin the estimate

$$|\hat{\mu}_q(\xi)| \leq \frac{C \|a\|_{C^3}}{|\xi|},$$

holds, for all function $a \in C_0^\infty(V)$ and $\xi \neq 0$, where C is a constant depending on q .

Now, we consider (1.2) for the different parameters (ξ_1, ξ_2, ξ_3) .

If $\max\{|\xi_1|, |\xi_2|\} \geq |\xi_3|$, then, we have the following lemma:

Lemma. Let $\max\{|\xi_1|, |\xi_2|\} \geq |\xi_3|$ and $q > 0$. Then there exists a neighborhood V of the origin such that the following estimate

$$|\hat{\mu}_q(\xi)| \leq \frac{C \|a\|_{C^3}}{|\xi|} \quad (1.3)$$

holds, for all function $a \in C_0^\infty(V)$ and $\xi \neq 0$, where C is a constant depending on q .

Lemma is an analog of lemma 5 from [3].

If $\max\{|\xi_1|, |\xi_2|\} \leq |\xi_3|$, then we can write the integral (1.2) as:

$$\hat{\mu}_q(\xi) := n^{2q} \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\xi_3(s_1 x_1 + s_2 x_2 + x_1 x_2^n)} |x_2|^{2q(n-1)} a(x_1, x_2) dx_1 dx_2, \quad (1.4)$$

where $s_1 = \frac{\xi_1}{\xi_3}$ and $s_2 = \frac{\xi_2}{\xi_3}$.

Proposition. Let $q > \frac{1}{2}$. Then there exist a neighborhood W of the origin and $C > 0$, such that integral (1.4) satisfies the following estimate

$$|\hat{\mu}_q(\xi)| \leq \frac{C \|a\|_{C^2}}{|\xi_3|},$$

for all function $a \in C_0^\infty(W)$, $\xi \neq 0$.

Proof. We use the Fubini theorem for the integral (1.4) and obtain:

$$\hat{\mu}_q(\xi) := n^{2q} \int_{\mathbb{R}} \hat{\mu}_q^0(\xi, x_1) dx_1,$$

where

$$\hat{\mu}_q^0(\xi, x_1) := \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi_3 x_1 (\frac{s_2}{x_1} x_2 + x_2^n)} |x_2|^{2q(n-1)} a(x_1, x_2) dx_2. \quad (1.5)$$

Now integral (1.5) we consider in two cases for the parameters $\xi_3 x_1$:

I. Let $|\xi_3 x_1| < 1$. Note that, $a(x_1, x_2)$ has compact supported and smooth function, we obtain

$$|\hat{\mu}_q(\xi)| \leq \frac{C}{|\xi_3|}. \quad (1.6)$$

II. If $|\xi_3 x_1| > 1$. Then

a) If $2\delta < |\frac{s_2}{x_1}|$, then $(\frac{s_2}{x_1} x_2 + x_2^n)'_{x_2} \neq 0$ any $x_2 \in U_1$, where U_1 is a neighborhood of point $x_2 = 0$. δ is a sufficiently small real positive number. So, we will use lemma Van der Corput and obtained estimates (1.6).

b) If $|\frac{s_2}{x_1}| < \delta$, then $(\frac{s_2}{x_1} x_2 + x_2^n)'_{x_2} = 0$ equation has a non-degenerate critical point $x_2^0(x_1) = (-\frac{s_2}{n x_1})^{\frac{1}{n-1}}$.

Thus, we use function $\omega(x_1) = \omega(\frac{\delta x_1}{s_2}) \in C_0^\infty([-\delta, \delta])$, where $\omega(x_1) = 1$ if $|\frac{x_1}{s_2}| < \frac{1}{2}$ and $\omega(x_1) = 0$ if $|\frac{x_1}{s_2}| \geq 1$. Applying this (1.5) we rewrite in the form

$$\hat{\mu}_q^0(\xi, x_1) := J_1 + J_2,$$

where

$$J_1 = \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi_3 x_1 (\frac{s_2}{x_1} x_2 + x_2^n)} |x_2|^{2q(n-1)} a(x_1, x_2) (1 - \omega(x_1)) dx_2,$$

$$J_2 = \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi_3 x_1 (\frac{s_2}{x_1} x_2 + x_2^n)} |x_2|^{2q(n-1)} a(x_1, x_2) \omega(x_1) dx_2.$$

If $2\delta < |\frac{s_2}{x_1}|$, then $J_1 = 0$. This shows that is sufficient to study the integral J_2 .

Now, we repeat the same procedure as above for J_2 . Agane in the case a), the phase function of the integral J_2 does not have critical point. Then, applying the integration by parts for the integral J_2 and we get

$$J_2 = O(\frac{1}{|\xi_3|}), \quad (|\xi_3| \rightarrow +\infty).$$

If $|\frac{s_2}{x_1}| < \delta$. Then by definition the function ω we will consider the integral J_1 :

$$J_1 = \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi_3 x_1 (\frac{s_2}{x_1} x_2 + x_2^n)} |x_2|^{2q(n-1)} a_1(x_1, x_2) dx_2,$$

where $a_1(x_1, x_2) = a(x_1, x_2)(1 - \omega(x_1))$. Let introduci the follows function

$$\omega_1(x_2) = \begin{cases} 1, & |x_2| < 1, \\ 0, & |x_2| \geq 2 \end{cases}$$

Since, the integral J_1 can be writen a sum two integrals:

$$J_1 = J_1^1 + J_1^2$$

where

$$J_1^1 = \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi_3 x_1 (\frac{s_2}{x_1} x_2 + x_2^n)} |x_2|^{2q(n-1)} a_1(x_1, x_2) (1 - \omega_1(x_2)) dx_2,$$

$$J_1^2 = \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi_3 x_1 (\frac{s_2}{x_1} x_2 + x_2^n)} |x_2|^{2q(n-1)} a_1(x_1, x_2) \omega_1(x_2) dx_2.$$

For J_1^1 we apply the integration by parts and have

$$J_1^1 = O\left(\frac{1}{(1 + |\xi_3 x_1|)}\right), \quad |\xi_3 x_1| \rightarrow +\infty.$$

Now, we chek the second integral J_1^2 . Note that, $F'_{x_2}(x_1, x_2) = \frac{s_2}{x_1} + nx_2^{n-1} = 0$ and the equation has a non-degenerate critical point $x_2^0(x_1) = (-\frac{s_2}{nx_1})^{\frac{1}{n-1}}$, i.e., $F''_{x_2}(x_1, x_2^0(x_1)) \neq 0$.

Since, by the method of stationary phase, we obtain that

$$J_1 = A_1(n) \sqrt{\frac{2\pi}{\xi_3 s_2} \left|\frac{s_2}{x_1}\right|^{2q + \frac{1}{2(n-1)}}} e^{i\xi_3 (\frac{s_2}{x_1})^{\frac{n}{n-1}} x_1 A_2(n)} a_1(x_1, x_2^0(x_1)) + O\left(\frac{1}{|\xi_3|}\right),$$

where $A_1(n) = \frac{(-n)^{\frac{n-2}{2(n-1)} - 2q}}{\sqrt{n(n-1)}}$ and $A_2(n) = (-n)^{-\frac{1}{n-1}} + (-n)^{-\frac{n}{n-1}}$.

Thus, we write the integral $\hat{\mu}_q(\xi)$ as

$$\hat{\mu}_q(\xi) := n^{2q} A_1(n) \sqrt{\frac{2\pi}{\xi_3 s_2} \int_{\mathbb{R}} \left|\frac{s_2}{x_1}\right|^{2q + \frac{1}{2(n-1)}}} e^{i\xi_3 (\frac{s_2}{x_1})^{\frac{n}{n-1}} x_1 A_2(n) + s_1 x_1} a_1(x_1, x_2^0(x_1)) dx_1 + O\left(\frac{1}{|\xi_3|}\right),$$

We divide into two parts set $|\frac{s_2}{x_1}| < \delta$: $|\frac{s_2}{x_1}| < |s_1|^{\frac{n-1}{n}}$ and $|s_1|^{\frac{n-1}{n}} < |\frac{s_2}{x_1}| < \delta$. Consider the integral on each set $|\frac{s_2}{x_1}| < |s_1|^{\frac{n-1}{n}}$ and $|s_1|^{\frac{n-1}{n}} < |\frac{s_2}{x_1}| < \delta$.

Let $|\frac{s_2}{x_1}| < |s_1|^{\frac{n-1}{n}}$. Using a change of variable $x_1 = |\frac{s_2}{s_1^{\frac{n-1}{n}}}|t$ we have

$$\hat{\mu}_q(\xi) := n^{2q} A_1(n) \sqrt{\frac{2\pi s_2 s_1^{\frac{1}{n}}}{\xi_3} s_1^{\frac{n-1}{n}(2q-1)}} \times$$

$$\times \int_{1 < |t|} |t|^{-(2q + \frac{1}{2(n-1)})} e^{i\xi_3 s_2 s_1^{\frac{1}{n}} (t^{-\frac{1}{n-1}} A_2(n) + t)} a_2(t) dt + O\left(\frac{1}{|\xi_3|}\right),$$

where $a_2(t) = a_1(|\frac{s_2}{s_1^{\frac{n-1}{n}}}|t, x_2^0(|\frac{s_2}{s_1^{\frac{n-1}{n}}}|t))$.

Now, we consider the integral $\hat{\mu}_q(\xi)$ in two cases of parameters $\xi_3 s_2 s_1^{\frac{1}{n}}$:

1) If $|\xi_3 s_2 s_1^{\frac{1}{n}}| < 1$. Then we have

$$|\hat{\mu}_q(\xi)| \leq n^{2q} A_1(n) \sqrt{\frac{2\pi |s_2| |s_1|^{\frac{1}{n}}}{|\xi_3|}} s_1^{\frac{n-1}{n}(2q-1)} \int_{1 < |t|} |t|^{-(2q + \frac{1}{2(n-1)})} |a_2(t)| dt,$$

and for $q > \frac{1}{2} - \frac{1}{4(n-1)}$ obtain

$$|\hat{\mu}_q(\xi)| \leq \frac{C}{|\xi_3|}.$$

2) If $|\xi_3 s_2 s_1^{\frac{1}{n}}| > 1$. Then in this case $t^0 \neq 0$ is a critical point of the function $F_1(t) = t^{\frac{1}{n-1}} A_2(n) + \frac{1}{t}$, then $F_{1''}(t^0) \neq 0$. By the method of stationary phase, we therefore obtain that

$$\hat{\mu}_q(\xi) = \frac{A_{11}}{\xi_3} (n) s_1^{\frac{n-1}{n}(2q-1)} |t^0|^{2q + \frac{1}{2(n-1)} - 2} e^{i\xi_3 s_2 s_1^{\frac{1}{n}} F_1(t^0)} a_2(t^0) + O\left(\frac{1}{|\xi_3|}\right),$$

If function $F_1(t)$ does not have critical point, then for the integral $\hat{\mu}_q(\xi)$ we apply integration by part and have

$$|\hat{\mu}_q(\xi)| \leq \frac{C}{(1 + |\xi_3 s_2 s_1^{\frac{1}{n}}|)^{\frac{1}{2}}}, \quad |\xi_3 s_2 s_1^{\frac{1}{n}}| \rightarrow +\infty.$$

Let $s_1^{\frac{n-1}{n}} < \frac{|s_2|}{x_1} < \frac{1}{4}$ and $|s_2| < \frac{|s_2|}{s_1^{\frac{n-1}{n}}}$. Then, we write the integral $\hat{\mu}_q(\xi)$ in the form

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_q(\xi) &:= n^{2q} A_1(n) \sqrt{\frac{2\pi}{\xi_3 s_2}} \left[\int_{-|s_2|}^{-\frac{|s_2|}{s_1^{\frac{n-1}{n}}}} + \int_{\frac{|s_2|}{s_1^{\frac{n-1}{n}}}}^{|s_2|} \right] \left| \frac{s_2}{x_1} \right|^{2q + \frac{1}{2(n-1)}} \times \\ &\times e^{i\xi_3 \left(\frac{s_2^2}{x_1} \right)^{\frac{n}{n-1}} x_1 A_2(n) + s_1 x_1} a_1(x_1, x_2^0(x_1)) dx_1 = J_1^1 + J_1^2, \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} J_1^1 &= A_1^1(n) \sqrt{\frac{1}{\xi_3}} |s_2|^{2q - \frac{n-2}{2(n-1)}} \int_{-|s_2|}^{-\frac{|s_2|}{s_1^{\frac{n-1}{n}}}} |x_1|^{-(2q + \frac{1}{2(n-1)})} \times \\ &\times e^{i\xi_3 \left(\frac{s_2^2}{x_1} \right)^{\frac{n}{n-1}} x_1 A_2(n) + s_1 x_1} a_1(x_1, x_2^0(x_1)) dx_1 \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} J_1^2 &= A_1^1(n) \sqrt{\frac{1}{\xi_3}} |s_2|^{2q - \frac{n-2}{2(n-1)}} \int_{\frac{|s_2|}{s_1^{\frac{n-1}{n}}}}^{|s_2|} |x_1|^{-(2q + \frac{1}{2(n-1)})} \times \\ &\times e^{i\xi_3 \left(\frac{s_2^2}{x_1} \right)^{\frac{n}{n-1}} x_1 A_2(n) + s_1 x_1} a_1(x_1, x_2^0(x_1)) dx_1. \end{aligned}$$

We estimate the integral J_1^2 . Applying a change of variable $x_1 = \frac{|s_2|}{s_1^{\frac{n-1}{n}}} |y|$ (for $|\frac{|s_2|}{s_1^{\frac{n-1}{n}}}| < y < 1$), we have

$$\begin{aligned} J_1^2 &= A_1^1(n) \sqrt{\frac{1}{\xi_3}} |s_2|^{2q - \frac{n-2}{2(n-1)} - \frac{1}{n-1}} \int_{\frac{|s_2|}{s_1^{\frac{n-1}{n}}}}^1 |y|^{-(2q + \frac{1}{2(n-1)})} \times \\ &\times e^{i\xi_3 s_2 s_1^{\frac{1}{n}} (y^{-\frac{1}{n-1}} A_2(n) + y)} a_2(y) dy. \end{aligned}$$

Again, we consider the integral J_1^2 in two cases of the parameters $\xi_3 s_2 s_1^{\frac{1}{n}}$:

1) Let $|\xi_3 s_2 s_1^{\frac{1}{n}}| < 1$. Then we have

$$|J_1^2| \leq |A_1^1(n)| \sqrt{\frac{|s_2|}{\xi_3}} \left(\frac{1}{s_1^{\frac{n-1}{n}}} \right)^{-(2q + \frac{1}{2(n-1)}) + 1} \int_{\frac{|s_2|}{s_1^{\frac{n-1}{n}}}}^1 |y|^{-(2q + \frac{1}{2(n-1)})} |a_2(y)| dy.$$

and let $q \geq \frac{1}{2}$ to obtain

$$|J_1^2| \leq \frac{C}{|\xi_3|}.$$

2) Let $|\xi_3 s_2 s_1^{\frac{1}{n}}| > 1$. Then in this, if $y^0 \neq 0$ is a critical point of the function $F_2(y) = y^{-\frac{1}{n-1}} A_2(n) + y$, then $F_{2''}(y^0) \neq 0$. By the method of stationary phase, we therefore obtain that

$$J_1^2 = \frac{A_1^1}{\xi_3} (n) s_1^{\frac{n-1}{n}(2q-1)} |y^0|^{2q + \frac{1}{2(n-1)}} e^{i\xi_3 s_2 s_1^{\frac{1}{n}} F_2(y^0)} a_2(y^0) + O\left(\frac{1}{|\xi_3|}\right),$$

If the function $F_2(y)$ does not have a critical point, then in the integral J_1^2 by applying the integration by part and we have

$$|J_1^2| \leq \frac{C}{|\xi_3|^N}.$$

In conclusion, for the integral J_1^2 we have the following estimate

$$|J_1^2| \leq \frac{C}{|\xi_3|} \quad (1.7)$$

For the integral J_1^1 , we have an analog estimate (1.7).

Thus, we have

$$|\hat{\mu}_q(\xi)| \leq \frac{C \|a\|_{C^3}}{|\xi_3|}.$$

Wich proves the proposition. By the lemma and the proposition to get the proof of the theorem.

References

1. C. D. Sogge, E. M. Stein Averages of functions over hypersurfaces in \mathbb{R}^n Invent. Math 82543-5561985
2. D. M. Oberlin Oscillatory integrals with polynomial phase MATH.SCAND 69 45-56 1991
3. I. A. Ikromov and Sh. A. Muranov, "Ob otsenkakh ostsillyatornykh integralov s mnozhitelem gasheniya" [On estimates of oscillatory integrals with fading factor], Mat. zametki [Math. Notes], 2018, 104, No. 2, 200–215 (in Russian).
4. Sh.A.Muranov On estimates for oscillatory integrals with damping factor Uzbek Mathematical Journal 4 112-125 2018
5. Arkhipov G.I., Karatsuba A.A. and Chubarikov V.N., *Trigonometric integrals*. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 43(5), 971-1003 1197 (Russian); English translation in Math. USSR-Izv., 15(1980), pp 21-239.
6. I. A. Ikromov, "Dempfirovannye ostsillyatornye integraly i maksimal'nye operatory" [Dampened oscillatory integrals and maximal operators], Mat. zametki [Math. Notes], 2005, 78, No. 6, 833–852 (in Russian).
7. M. V. Fedoryuk, Metod perevala [Saddle-Point Method], Nauka, Moscow, 1977 (in Russian).
8. I. A. Ikromov, D. Müller, M. Kempe Damped oscillatory integrals and boundedness of maximal operators associated to mixed homogeneous hypersurfaces Duke Math.J. 126 no.3, 471-4902005

UDK 517.984

THE DISCRETE SPECTRUM OF TWO PARTICLE HAMILTONIAN ON TWO-DIMENSIONAL LATTICE

A.M. Khurramov

Samarkand state university

xurramov@mail.ru

Abstract. We consider a system of two arbitrary quantum particles on a two-dimensional lattice with special dispersion functions (describing site-to-site particle transport), where the particles interact by a chosen attraction potential. We study how the number of eigenvalues of operator family $h(k)$ depends on the particle interaction energy and the total quasi-momentum $k \in T^2$ (where T^2 is a two-dimensional torus). Subject to the particle inter-action energy, we obtain conditions for existence of multiple eigenvalues below the essential spectrum of operator $h(k)$.

Keywords: two-particle Hamiltonian, eigenvalue, eigenfunction, multiple eigenvalue.

Ikki o'lchamli panjarada ikki zarrachali Gamiltonianing diskret spektri

Annotatsiya. Ikki o'lchamli panjarada tanlangan tortishuvchi potensial yordamida ta'sirlashuvchi, maxsus dispersion (zarrachalarning bir tugundan boshqasiga o'tishini tavsiflovchi) funksiyali ikki kvant zarrachalar sistemasi qaraladi.

$h(k)$ operatorlar oilasi xos qiymatlari sonining zarrachalar o'zaro ta'sirlashuv doimiysidan va sistema to'la kvaziimpulsi $k \in T^2$ dan (T^2 – ikki o'lchamli tor) bog'liqligi o'rganiladi. Sistema kvaziimpulsiga bog'liq ravishda $h(k)$ operatorning muhim spektrdan quyida xos qiymatining mavjud bo'lish shartlari olingan.

Kalit so'zlar: ikki zarrachali Gamilton, o'ziga xos qiymat, o'ziga xos funktsiya, ko'p sonli o'ziga xos qiymat.

Дискретный спектр двухчастичных гамильтонианов на двумерной решетке

Аннотация. Рассматриваем систему двух произвольных квантовых частиц на двумерной решетке со специальными дисперсионными функциями (описывающими перенос частиц от узла к узлу), где частицы взаимодействуют посредством выбранного потенциала притяжения. Изучаем, зависимость количество собственных значений семейства операторов $h(k)$ от энергии взаимодействия частиц и полного квазиимпульса $k \in T^2$ (где T^2 - двумерный тор). В зависимости от энергии взаимодействия частиц получаем условия существования кратных собственных значений ниже существенного спектра оператора $h(k)$.

Калит сўзлар: двухчастичный Гамильтониан, собственное значение, собственная функция, кратное собственное значение.

1. Introduction

In the continuous case the study of spectral properties of the complete Hamiltonian for a two-particle system is reduced to the study of a two-particle Schrodinger operator by means of choosing the energy of the mass center so that two-particle bound states are eigenfunctions for the energy operator with a separated complete momentum (in fact, such operator is independent of total momentum) [1]. Dealing with a lattice, “choosing of the mass center” corresponds to the realization of the Hamiltonian as “fibered operator”, i.e., the “direct integral” of the family of operators $h(k)$ describing the energy of two particles depending on total quasi-momentum $k \in T^d$ (T^d is a d-dimensional torus) [2, 3]. Discrete Hamiltonians were studied in works [4, 5]. In work [4] the emergence of bound states levels was shown for some values of quasi-momentum and these levels were separated from the continuous spectrum by a certain distance. Spectral properties of a two-particle operator depending on the total quasi-momentum were studied in [5].

It was shown in work [3] that in the case when operator $h(0)$ has a virtual level at the left threshold of the essential spectrum, the discrete spectrum of operator $h(k)$ located to the left of the essential spectrum is always non-empty for each $k \in T^d \setminus \{0\}$. Assuming that dispersion laws of particles $\varepsilon_1(\cdot)$ and $\varepsilon_2(\cdot)$ were linearly dependent functions, in work [6] there was shown that the positivity of $h(0)$ implies the positivity of $h(k)$ for each $k \in T^3 \setminus \{0\}$.

In [7] there was studied a system of two particles on a three-dimensional lattice with some dispersion law describing the transport of the particle from a note to a neighboring site inter-acting by an attractive potential only on the closest neighboring sites. The spectral properties of operator family $h(k)$ we studied subject to the particles interaction energy and total quasi-momentum $k \in T^3$ (T^3 is a three-dimensional torus).

In the work we consider a two-particle Schrodinger operator $h(k), k \in T^2$, associated with a system of two particles on the two-dimensional lattice, where the potential is described by some $(4N + 1)$ -dimensional integral operator and the dispersion law is studied depending on N . We study the existence of eigenvalues for operator family $h(k)$ depending on particles interaction energy and total quasi-momentum k .

2. Formulation of main results

Let Z^2 be the two-dimensional integer lattice, $(Z^2)^2 = Z^2 \times Z^2$ be the Cartesian power of Z , and $\ell_2((Z^2)^2)$ be the Hilbert space of square integrable functions defined on Z^2 .

We consider the coordinate representation for the Hamiltonian of the system of two arbitrary particles interacting with a pair short range potential $\hat{v}(\cdot)$ on the one-dimensional lattice acting in space $\ell_2((Z^2)^2)$ by the formula

$$\hat{h} = \hat{h}_0 - \hat{v}$$

where the action of h_0 and \hat{v} is described by the rules:

$$(\hat{h}_0\hat{\psi})(n_1, n_2) = \sum_{s \in Z^2} [\hat{\varepsilon}_1(s)\hat{\psi}(n_1 + s, n_2) + \hat{\varepsilon}_2(s)\hat{\psi}(n_1, n_2 + s)],$$

$$(\hat{v}\hat{\psi})(n_1, n_2) = \hat{v}(n_1 - n_2)\hat{\psi}(n_1, n_2).$$

Here $\hat{\varepsilon}_1(s)$ and $\hat{\varepsilon}_2(s)$ are real-valued even functions describing the transport of a particle from the site to the neighboring site; these functions are defined as

$$\hat{\varepsilon}_i(s) = \begin{cases} \frac{2}{m_i} & as \quad s = 0, \\ -\frac{1}{2m_i} & as \quad s = \pm 2ne_\alpha \quad \alpha = 1,2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

and

$$\hat{v}(s) = \begin{cases} 2\pi\mu_0 & \text{as } s = 0, \\ 2\pi^2\mu_{l\alpha} & \text{as } s = \pm le_\alpha, \alpha = 1,2, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

where $m_i > 0$ is the mass of i -th particle, $n \in \mathbb{N}$, is a natural number $i = 1,2$ $\mu_0, \mu_{l\alpha} > 0$, e_α - are unit vectors.

We note that considered operator h is bounded and self-adjoint in $\ell_2(Z^2)^2$

Let $T = (-\pi, \pi], L_2(T^2)$ be the Hilbert space of square integrable functions defined on T . By means of Fourier transform [3], [6]

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}: L_2(Z^2)^2 &\rightarrow L_2(T^2)^2 \\ (\mathfrak{F}\hat{f})(p) &= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{s \in (Z^2)^2} \hat{f}(s) e^{-i(p,s)} \end{aligned}$$

we obtain the momentum representation h of operator \hat{h} i.e., $h = \mathfrak{F}\hat{h}\mathfrak{F}^{-1}$. Then we expand operator h into the direct operator integral

$$h = \int_{T^2} \oplus h(k) dk,$$

where $h(k), k \in T^2$, is the self-adjoint operator acting in $L_2(T^2)$ by the formula

$$h(k) = h_0(k) - \mathfrak{v}.$$

Here $h_0(k)$ the operator of multiplication by the function

$$\mathcal{E}_k(p) = \frac{1}{m_1} \varepsilon(p) + \frac{1}{m_2} \varepsilon(p - k), \quad \varepsilon(p) = \sum_{s \in Z^2} \hat{\varepsilon}(s) e^{ips} = \sum_{i=1}^2 (1 - \cos 2np_i)$$

and \mathfrak{v} is an integral operator with the kernel

$$v(p - q) = \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{s \in Z^2} \hat{v}(s) e^{-i(p-q)s} = \sum_{l=0}^N \sum_{i=1}^2 \mu_{li} \cos l(p_i - q_i).$$

We note that Weyl theorem on essential spectrum [8] implies that the essential spectrum $\sigma_{ess}(h(k))$ of operator $h(k)$ does not change under compact perturbation \mathfrak{v} and coincides with the spectrum of unperturbed operator $h_0(k)$. At that, $\sigma_{ess}(h(k))$ consists of the range of function $\mathcal{E}_k(\cdot)$ i.e.,

$$\sigma_{ess}(h(k)) = \sigma(h_0(k)) = [m(k), M(k)],$$

where $m(k) = \min_{p \in T^2} \mathcal{E}_k(p)$, $M(k) = \max_{p \in T^2} \mathcal{E}_k(p)$.

Since $\mathfrak{v} > 0$, then

$$\sup(h(k)f, f) \leq \sup(h_0(k)f, f) = M(k)(f, f), \quad f \in L_2(T^2)$$

This is why operator $h(k)$ has no eigenvalues to right of the essential spectrum, i.e.,

$$\sigma(h(k)) \cap (M(k), \infty) = \emptyset.$$

We assume that

$$n = \begin{cases} 2 \cdot LCF\{1,2, \dots, N-1\} & \text{as } N > 1, \\ 1, & \text{as } N = 1. \end{cases}$$

where LCF stands for the lowest common factor. It should be mentioned that if N is a power of a prime number, then number $\frac{n}{2N}$ is fractional. Otherwise number $\frac{n}{2N}$ is natural. —

We introduce

$$\begin{aligned} d(k, z) &= \int_{T^2} \frac{ds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(p) - z}, \quad c_{Ni}(k, z) = \int_{T^2} \frac{\cos^2 Ns_i ds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(p) - z}, \\ s_{Ni}(k, z) &= \int_{T^2} \frac{\sin^2 Ns_i ds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(p) - z}, \end{aligned} \tag{1}$$

$$\mu^0(k) = \frac{1}{s_{Ni}(k; m(k))} \tag{2}$$

$$\tilde{\mathcal{E}}_k(p) = \sum_{i=1}^2 \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} - \sqrt{\frac{1}{m_1^2} + \frac{2}{m_1 m_2} \cos 2nk_i + \frac{1}{m_2^2} \cos 2np_i} \right)$$

Assumption 1. Assume that $m = m_1 = m_2$ and $k \in \Pi$ where

$$\Pi = \left\{ k = (k_1, k_2) \in T^2: k_\alpha \quad k_\alpha = \pm \frac{\pi}{2n} \text{ for at least one } \alpha = 1, 2 \right\}.$$

$$\Pi_1 = \left\{ k = (k_1, k_2) \in T^2: k_1 = \pm \frac{\pi}{2n} \text{ or } k_2 = \pm \frac{\pi}{2n} \right\}$$

$$\Pi_2 = \left\{ k = (k_1, k_2) \in T^2: k_1 = \pm \frac{\pi}{2n} \text{ and } k_2 = \pm \frac{\pi}{2n} \right\}$$

Theorem 1. Suppose that Assumption 1 holds. Then if $\frac{n}{2N}$ is a natural number, then for each $\mu = (\mu_0, \mu^{(1)}, \dots, \mu^{(N)}) \in R_+^{2N+1}$, $\mu^{(l)} = (\mu_{l1}, \mu_{l2})$ operator $h(k)$ has exactly

$$4N + 1$$

eigenvalues (counting multiplicity) to the left of the essential spectrum.

$z_0 = \frac{4}{m} - 4\pi^2\mu_0, z_{l\alpha} = \frac{4}{m} - 2\pi^2\mu_{l\alpha}, l = \overline{1, N}, \alpha = 1, 2$. At that, z_0 is a simple eigenvalue and $z_{l\alpha}$ is a double eigenvalue.

Theorem 1. Suppose that Assumption 1 fails. Then the following statements are true:

1. If $\frac{n}{2N}$ is a natural number, then for each $\mu = (\mu_0, \mu^{(1)}, \dots, \mu^{(N)}) \in R_+^{2N+1}$, $\mu^{(l)} = (\mu_{l1}, \mu_{l2})$ the operator $h(k)$ has exactly $4N + 1$ eigenvalues (counting multiplicity) to the left of the essential spectrum.

2. If $\frac{n}{2N}$ is a fractional number, then for each $\mu = (\mu_0, \mu^{(1)}, \dots, \mu^{(N)}) \in R_+^{2N+1}$, $\mu^{(l)} = (\mu_{l1}, \mu_{l2})$ and $\mu \in M_{\alpha_i}$ operator $h(k)$ has exactly

$$4N - 1 + \sum_{i=1}^2 \alpha_i$$

eigenvalues (counting multiplicity) to the left of the essential spectrum, where

$$M_0 = (0; \mu^0(k)], M_1 = (\mu^0(k); \infty), \alpha_i \in \{0, 1\}.$$

Remark. It should be mentioned that if $1 - \mu^*d(k, z^*) = 0, z < m(k), \mu^* > 0$ (see Lemma 2) and $\mu_l = \mu^*$ for each $l \in \{1, 2, \dots, N - 1\}$ then number $z = z^*$ an eigenvalue of operator $h(k)$ having the multiplicity at least $4N - 4$.

3. EIGENVALUES OF $h(k)$

We introduce an operator $h(k)$ acting in $L_2(T^2)$ by the formula

$$\hat{h}(k) = \hat{h}_0(k) - \hat{v}$$

where $\hat{h}_0(k)$ is the operator of multiplication by the function

$$\tilde{\mathcal{E}}_k(p) = \sum_{i=1}^2 \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} - \sqrt{\frac{1}{m_1^2} + \frac{2}{m_1 m_2} \cos 2nk_i + \frac{1}{m_2^2}} \cos 2np_i \right).$$

Suppose that the unitary operator $U: L_2(T^2) \rightarrow L_2(T^2)$ is defined by the formula

$$(Uf)(p) = f\left(p - \frac{1}{2n}\theta(k)\right),$$

where

$$\theta_i(k_i) = \arccos \frac{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \cos 2nk_i}{\sqrt{\frac{1}{m_1^2} + \frac{2}{m_1 m_2} \cos 2nk_i + \frac{1}{m_2^2}}}$$

Then

$$(U^{-1}f)(p) = f\left(p + \frac{1}{2n}\theta(k)\right), \quad f \in L_2(T^2).$$

Lemma 1. Operator $h(k)$ is unitarily equivalent to operator $\hat{h}(k)$, i. e.,

$$\tilde{h}(k) = U^{-1}h(k)U$$

Proof. Since the representation

$$\mathcal{E}_k(p) = \sum_{i=1}^2 \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} - \sqrt{\frac{1}{m_1^2} + \frac{2}{m_1 m_2} \cos 2nk_i + \frac{1}{m_2^2}} \cos(2np_i - \theta_i(k_i)) \right)$$

holds true, then

$$(h_0(k)Uf)(p) = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} - \sqrt{\frac{1}{m_1^2} + \frac{2}{m_1 m_2} \cos 2nk_i + \frac{1}{m_2^2} \cos(2np_i - \theta_i(k_i))} \right) \times f\left(p - \frac{1}{2n} \theta(k)\right)$$

It is easy to check that

$$(U^{-1}h_0(k)Uf)(p) = \sum_{i=1}^2 \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} - \sqrt{\frac{1}{m_1^2} + \frac{2}{m_1 m_2} \cos 2nk_i + \frac{1}{m_2^2} \cos 2np_i} \right) f(p)$$

i.e.,

$$U^{-1}h_0(k)U = \tilde{h}_0(k)$$

It is clear that

$$(U^{-1}\mathbb{V}Uf)(p) = U^{-1} \left(\int_{T^2} v(s-p) f\left(s - \frac{1}{2n} \theta(k)\right) ds \right) = \int_{T^2} v\left(s - \left(p + \frac{1}{2n} \theta(k)\right)\right) f\left(s - \frac{1}{2n} \theta(k)\right) ds.$$

Making a change as $s - \frac{1}{2n} \theta(k) = t$ we get that

$$(U^{-1}\mathbb{V}Uf)(p) = \int_{T^2} v(t-p) f(t) dt$$

i.e., $U^{-1}\mathbb{V}U = \mathbb{V} \cdot \Delta$

Lemma 2. A number z , $z < m(k)$ is an eigenvalue of operator $\tilde{h}(k)$ if and only if $\Delta(k; z) = 0$

where

$$\Delta(k; z) = (1 - \mu_0 d(k; z)) \prod_{l=1}^N \prod_{\alpha=1}^2 \left(1 - \frac{\mu_{l\alpha}}{2} d(k; z)\right)^2$$

for natural $\frac{n}{2N}$, and

$$\Delta(k; z) = (1 - \mu_0 d(k; z)) \prod_{l=1}^{N-1} \prod_{\alpha=1}^2 \left(1 - \frac{\mu_{l\alpha}}{2} d(k; z)\right)^2 (1 - \mu_{N\alpha} c_{N\alpha}(k; z)) \times (1 - \mu_{N\alpha} s_{N\alpha}(k; z))$$

for fractional $\frac{n}{2N}$. At that, the multiplicity of zero of function $\Delta(k; \cdot)$ coincides with the multiplicity of the eigenvalue of operator $h(k)$.

Proof. Let $z < m(k)$ be an eigenvalue of operator $\tilde{h}(k)$ and f the associated eigenvector, i.e., the equation

$$\tilde{h}(k)f = zf$$

has a non-trivial solution f . Then

$$f = r_0(z)\mathbb{V}f, \tag{3}$$

where $r_0(z)$ is the operator of multiplication by the function $\frac{1}{\tilde{\epsilon}_k(p)-z}$. Introducing

$$\varphi_{l\alpha} = \int_{T^2} \cos ls_{\alpha} f(s) ds \quad \alpha = 1,2 \tag{4}$$

$$\psi_{l\alpha} = \int_{T^2} \sin ls_{\alpha} f(s) ds \quad \alpha = 1,2 \tag{5}$$

we rewrite identity (3) as

$$f(p) = \frac{1}{\tilde{\epsilon}_k(p) - z} \sum_{l=0}^N \sum_{\alpha=1}^2 \mu_{l\alpha} (\varphi_{l\alpha} \cos lp_{\alpha} + \psi_{l\alpha} \sin lp_{\alpha}). \tag{6}$$

Substituting (6) into (4) and (5) and using the evenness of the function $\tilde{\mathcal{E}}_k(\cdot)$ we obtain the system of linear equations

$$\varphi_{l\alpha} = \int_{T^2} \sum_{r=1}^N \sum_{\beta=1}^2 \mu_{r\beta} \frac{\cos ls_\alpha \cos rs_\beta ds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s) - z} \varphi_{r\beta} \quad l = 1, \dots, N, \quad \alpha = 1, 2 \quad (7)$$

$$\psi_{l\alpha} = \int_{T^2} \sum_{r=1}^N \mu_{l\alpha} \frac{\sin ls_\alpha \sin rs_\alpha ds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s) - z} \psi_{r\alpha} \quad l = 1, \dots, N, \quad \alpha = 1, 2 \quad (8)$$

From the definition it follows that the number $\frac{n}{2l}$ is natural for each $l = 1, \dots, N - 1$. It implies that the function $\tilde{\mathcal{E}}_k(\cdot)$ is periodic with the period $\frac{\pi}{2l}$ for each $l = 1, \dots, N - 1$. Let us show that for each $l = 1, \dots, 2N - 1$ the identity

$$\int_{T^2} \frac{\cos ls_\alpha ds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s) - z} = 0, \quad l = 1, \dots, 2N - 1. \quad (9)$$

holds. Indeed, if l – an odd (even) number, we make the change of variable

$s_\alpha = t_\alpha + \pi$ ($s_\alpha = t_\alpha + \frac{\pi}{l}$), $s_\beta = t_\beta$, $s_\gamma = t_\gamma$ in the integral in the left hand side of identity (9) and we have

$$I_l(z) = - \int_{T^2} \frac{\cos lt_\alpha dt}{\tilde{\mathcal{E}}_k(t) - z} = -I_l(z).$$

It yields identity (9). By the primitive identities

$$\begin{aligned} \cos ls_\alpha \cos rs_\alpha &= \frac{1}{2} [\cos(l+r)s_\alpha + \cos(l-r)s_\alpha], \\ \sin ls_\alpha \sin rs_\alpha &= \frac{1}{2} [\cos(l-r)s_\alpha - \cos(l+r)s_\alpha] \end{aligned}$$

and (9) we obtain that

$$\begin{aligned} \int_{T^2} \frac{\cos ls_\alpha \cos rs_\alpha}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s) - z} ds &= 0, \\ \int_{T^2} \frac{\sin ls_\alpha \sin rs_\alpha}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s) - z} ds &= 0 \end{aligned} \quad l \neq r. \quad (10)$$

Using (10), the identities (7) and (8) have the form

$$\begin{aligned} \varphi_{l\alpha} &= \int_{T^2} \mu_{l\alpha} \frac{\cos^2 ls_\alpha ds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s) - z} \varphi_{l\alpha}, \\ \psi_{l\alpha} &= \int_{T^2} \mu_{l\alpha} \frac{\sin^2 ls_\alpha ds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s) - z} \psi_{l\alpha} \end{aligned} \quad l = 1, \dots, N, \quad \alpha = 1, 2$$

The determinant of the system of linear equations w.r.t. unknowns $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_N \quad \psi_1, \dots, \psi_N$ has of the form

$$\Delta(k, z) = \prod_{l=1}^N \prod_{\alpha=1}^2 \left[1 - \mu_{l\alpha} \int_{T^2} \frac{\cos^2 ls_\alpha ds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s) - z} \varphi_{l\alpha} \right] \left[1 - \mu_{l\alpha} \int_{T^2} \frac{\sin^2 ls_\alpha ds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s) - z} \psi_{l\alpha} \right]$$

At that, if $z < m(k)$ is an eigenvalue of operator $\tilde{h}(k)$ then

$$\begin{aligned} \Delta(k, z) &= \\ (1 - \mu_0 d(k; z)) \prod_{l=1}^N \prod_{\alpha=1}^2 \left[1 - \mu_{l\alpha} \int_{T^2} \frac{\cos^2 ls_\alpha ds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s) - z} \varphi_{l\alpha} \right] \left[1 - \mu_{l\alpha} \int_{T^2} \frac{\sin^2 ls_\alpha ds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s) - z} \psi_{l\alpha} \right] &= 0 \end{aligned}$$

It is easy to show that in accordance with (10), for each $l \leq N$ under natural $\frac{n}{2N}$ the identity

$$\int_{T^2} \frac{\cos^2 l s_\alpha ds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s) - z} = \int_{T^2} \frac{\sin^2 l s_\alpha ds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s) - z} = \frac{1}{2} \int_{T^2} \frac{ds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s) - z}$$

holds. Hence, the identity

$$\Delta(k, z) = (1 - \mu_0 d(k; z)) \prod_{l=1}^N \prod_{\alpha=1}^2 \left(1 - \frac{\mu_{l\alpha}}{2} d(k; z)\right)^2 = 0$$

is true.

Conversly, suppose that $\Delta(k, z) = 0$. Then for some $l \in \{0, \dots, N\}$ and $z < m(k)$ at least one of the factors in $\Delta(k, z)$ vanishes, i.e., either

$$1 - \mu_0 \int_{T^2} \frac{ds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s) - z} = 0, \text{ or } \left(1 - \frac{\mu_{l\alpha}}{2} d(k; z)\right)^2 = 0.$$

It is easy to see that the number $z < m(k)$ is an eigenvalue of the operator $\tilde{h}(k)$ and the functions

$$\frac{1}{\tilde{\mathcal{E}}_k(p) - z}, \frac{\cos lp_\alpha}{\tilde{\mathcal{E}}_k(p) - z}, \frac{\sin lp_\alpha}{\tilde{\mathcal{E}}_k(p) - z}$$

are the associated eigenfunctions for any $l \in \{1, \dots, N\}$.

For a fractional $\frac{n}{2N}$ the proof of the lemma analogously is shown.

We observe that the multiplicity of zero of the function $\Delta(k; \cdot)$ coincides with the multiplicity of the eigenvalue of operator $\tilde{h}(k)$. The proof is complete.

Proof of Theorem 1. Suppose that Assumption 1 holds. Then for each $k \in T^2$ the number $\mu^0(k)$ which is defined by formula (2) is finite.

The relations

$$1 - \mu_0 d(k; z) = \begin{cases} \text{monotonically increasing} & z \in (-\infty, m(k)), \\ -\infty, & \text{as } z \rightarrow m(k), \\ 1 & \text{as } z \rightarrow -\infty, \end{cases}$$

$$1 - \frac{\mu_{l\alpha}}{2} d(k; z) = \begin{cases} \text{monotonically increasing} & z \in (-\infty, m(k)), \\ -\infty & \text{as } z \rightarrow m(k), \\ 1 & \text{as } z \rightarrow -\infty, \end{cases}$$

$$1 - \mu_{N\alpha} c_{N\alpha}(k; z) = \begin{cases} \text{monotonically increasing} & z \in (-\infty, m(k)), \\ -\infty & \text{as } z \rightarrow m(k) \\ 1 & \text{as } z \rightarrow -\infty, \end{cases}$$

$$1 - \mu_{N\alpha} s_{N\alpha}(k; z) = \begin{cases} \geq 0 & \text{as } \mu_{N\alpha} \in (0, \mu^0(k)] \text{ for each } z \in (-\infty, m(k)), \\ < 0 & \text{as } \mu_{N\alpha} > \mu^0(k), z = m(k), \\ 1 & \text{as } z \rightarrow -\infty, \end{cases}$$

hold.

We observe that functions $d(k; \cdot), c_{N\alpha}(k; \cdot), s_{N\alpha}(k; \cdot)$ defined by formula (1) are positive and monotonically increasing on $(-\infty, m(k))$. Hence we obtain that

$$\begin{aligned} 1 - \mu_0 d(k; \cdot) & \text{ has the unique zero for each } \mu_0 > 0 \\ 1 - \frac{\mu_{l\alpha}}{2} d(k; \cdot) & \text{ has the unique zero for each } \mu_{l\alpha} > 0 \\ 1 - \mu_{N\alpha} c_{N\alpha}(k; \cdot) & \text{ has the unique zero for each } \mu_{N\alpha} > 0 \\ 1 - \mu_{N\alpha} s_{N\alpha}(k; \cdot) & = \begin{cases} \text{has no zeroes as } \mu_{N\alpha} \in (0, \mu^0(k)], \\ \text{has the unique zero as } (\mu^0(k); \infty), \end{cases} \end{aligned}$$

Applying Lemmas 2 and 1 we complete the proof.

Proof of Theorem 2. Suppose that Assumption 1 fails. Then $\tilde{\mathcal{E}}_k(p) = \frac{4}{m}$ and

$$\begin{aligned} \Delta(k, z) &= \\ (1 - \mu_0 d(k; z)) \prod_{l=1}^N \prod_{\alpha=1}^2 \left[1 - \mu_{l\alpha} \int_{T^2} \frac{\cos^2 l s_\alpha ds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s) - z} \varphi_{l\alpha} \right] \prod_{l=1}^N \prod_{\alpha=1}^2 \left[1 - \mu_{l\alpha} \int_{T^2} \frac{\sin^2 l s_\alpha ds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s) - z} \psi_{l\alpha} \right] &= \\ = \left(1 - \frac{4\pi^2 \mu_0}{\frac{4}{m} - z}\right) \prod_{l=1}^N \prod_{\alpha=1}^2 \left(1 - \frac{\mu_{l\alpha} 2\pi^2}{\frac{4}{m} - z}\right)^2 &= 0. \end{aligned}$$

The zeroes of function $\Delta(k; \cdot)$: $z_0 = \frac{4}{m} - 4\pi^2\mu_0$ is a simple zero, $z_{l\alpha} = \frac{4}{m} - 2\pi^2\mu_{l\alpha}$ $\mu = (\mu_0, \mu^{(1)} \dots, \mu^{(N)}) \in R_+^{2N+1}$, $\mu^{(l)} = (\mu_{l1}, \mu_{l2})$ - is a zero with the multiplicity two, $l \in \{1, \dots, N\}$. In accordance with Lemmas 1 and 2 these numbers are eigenvalues of $h(k)$.

It is easy to check that the associated eigenfunctions can be written as

$$\varphi_0 = \frac{1}{4\pi^2\mu_0}, \quad \varphi_{l\alpha}^+ = \frac{\cos lp}{2\pi^2\mu_{l\alpha}}, \quad \varphi_{l\alpha}^- = \frac{\sin lp}{2\pi^2\mu_{l\alpha}}, \quad l = \overline{1, N} \quad \alpha = 1, 2.$$

The proof is complete.

References

1. L. D. Faddeev. Mathematical questions in the quantum theory of scattering for a system of three particles // Trudy Mat. Inst. Steklov. 69, 3–122 (1963). (in Russian).
2. D.C. Mattis. The few-body problem on lattice // Rev. Mod. Phys. 58:2. 1986. P. 361–379.
3. S. Albeverio, S.N. Lakaev, K.A. Makarov, Z.I. Muminov. The threshold effects for the two-particle Hamiltonians // Commun. Math. Phys. 262:1. 2006. P. 91–115.
4. E.L. Lakshtanov, R.A. Minlos. The spectrum of two-particle bound states of transfer matrices of Gibbs fields (fields on a two-dimensional lattice: adjacent levels) // Funct. Anal. Appl. 39:1, 31–45 (2005).
5. P.A. Faria da Veiga, L. Ioriatti and M. O’Carroll. Energy momentum spectrum of some two-particle lattice Schrödinger Hamiltonians // Physical review E, Vol. 66:1, id 016130 (2002).
6. M.E. Muminov. Positivity of the two-particle Hamiltonian on a lattice // Teor. Mat. Fiz. 153:3, 381–387 (2007). [Theor. Math. Phys. 153:3, 1671–1676 (2007).]
7. M.E. Muminov, A.M. Khurramov Spectral properties of a two-particle Hamiltonian on a lattice // Teor. Mat. Fiz. 177:3, 480–493 (2013). [Theor. Math. Phys. 177:3, 1693–1705 (2013).]
8. M. Reed, B. Simon. . Methods of modern mathematical physics. Analysis of operators. Academic Press, San Diego (1982).

UDC: 539.37

STRESS-STRAIN STATE OF THE ROCK MASS AROUND THE VERTICAL MINE

R.I.Khalmuradov, Kh.Khudonazarov, Sh.B.Omonov

Samarkand State University

kh.khudon@gmail.com

Abstract. The article deals with the problem of the stress-strain state of a rock mass around a vertical working of a circular cross-section. An exact formulation of the three-dimensional problem of the deformation of a half-space weakened by a deep cylindrical cavity is used. The stress-strain state of a half-space, as a three-dimensional body, strictly obeys the basic requirements of the three-dimensional linear theory of elasticity and is described by its corresponding equations and relations in a cylindrical coordinate system. The specific problem of rock mechanics has been solved, i.e. the considered rock mass works only in compression. The deformation process and stress state around vertical shafts of circular cross-section are expressed in terms of stress functions. Calculation formulas are derived for all nonzero components of the strain and stress tensors, taking into account the axisymmetry of the problem under consideration, represented in terms of stress functions.

Keywords: rock mass, vertical working, shaft of vertical mines, stress fields, deformation process, stress function.

Vertikal shaxta atrofidagi tog` jinslari massivining kuchlangan-deformatsiyalangan holati

Annotatsiya. Maqolada doiraviy ko`ndalang kesimli vertikal shaxta atrofidagi tog` jinslari massivining kuchlangan-deformatsiyalangan holati muammosi o`rganilgan. Buning uchun chuqur silindrik bo`shliq bilan kuchsizlantirilgan yarim fazo deformatsiyasi haqidagi masalaning aniq uch o`lchovli qo`yilishidan foydalanamiz. Bunda yarim fazoning kuchlangan-deformatsiyalangan holatini uch o`lchovli jism sifatida, elastiklik chiziqli nazariyasining asosiy talablariga bo`ysinadi va bu nazariyaning tegishli tenglamalari va munosabatlari bilan tavsiflanadi deb hisoblaymiz. Shuning uchun qaralayotgan tog` jinslari massivi faqat siqilishga ishlash sharti bilan qaralayotgan masala tog` jinslari mexanikasining aniq masalasini yechishga ishlaydi. Doiraviy ko`ndalang kesimli vertikal shaxta atrofidagi kuchlangan-deformatsiyalangan holatida ko`chishlar va kuchlanishlar tenzorining barcha komponentalarini kuchlanish funksiyasi orqali ifodalanadi. Hisoblash formulalari, ko`rib chiqilayotgan masalaning o`qqa simetrikligini hisobga olgan holda, ko`chish va kuchlanish tenzorlarining barcha nolga teng bo`lmagan tarkibiy qismlari uchun keltirib chiqarilgan.

Kalit so`zlar: Tog` jinslari massivi, vertikal shaxta, stvol, kuchlanishlar maydoni, deformatsiya, kuchlanish funksiyasi.

Напряженно-деформированное состояние массива пород вокруг вертикальной шахты

Аннотация. В статье рассмотрена задача о напряженно-деформированном состоянии массива горных пород вокруг вертикальной выработки кругового поперечного сечения. Использована точная постановка трехмерной задачи о деформации полупространства, ослабленной глубокой цилиндрической полостью. Считается, что напряженно-деформированное состояние полупространства, как трехмерного тела, строго подчиняется основным соотношениям трехмерной линейной теории упругости и описывается её соответствующими уравнениями и соотношениями в цилиндрической системе координат. Решена конкретная задача механики горных пород, при условии, что рассматриваемый массив горных пород работает только на сжатие. Компоненты деформации и напряженного состояния вокруг стволов вертикальных шахт кругового сечения выражены через функции напряжения. Выведены формулы вычисления для всех отличных от нуля компонент тензоров деформаций и напряжений, с учетом осесимметричности рассматриваемой задачи.

Ключевые слова: массив горных пород, вертикальная шахта, ствол, поле напряжений, деформация, функция напряжений.

1. Introduction. Real rocks, especially in the conditions of their natural occurrence, exhibit elastic [1], plastic [2] and viscous [3] properties. At the same time, according to the data of a number of authors [4,5,6], even strong rocks with ultimate strength in uniaxial compression $\sigma_{\text{сжс}} = 8 \cdot 10^3 \text{ - } 12 \cdot 10^3 \text{ Па}$, show

a significant nonlinearity of the relationship between stresses and deformations even at very low values of the acting stresses [7].

Determination of the parameters of stress fields around workings, taking into account all the features of rock deformation, is a very, very difficult task in mathematical terms [8,9]. In this regard, considering the properties of real rock masses, the main features of their deformation are established and, depending on this, a model of elastic, elastoplastic and viscoelastoplastic medium is used [10, 11]. For rock massifs with high ultimate strength of rocks and high values of elastic characteristics - elastic modulus E and shear deformation coefficient ν (Poisson's ratio) - as a rule, sufficient calculation accuracy is ensured when the rocks are endowed with the properties of an ideally elastic medium [12,13].

On the other hand, the use of an ideal elastic model for determining the parameters of stress and strain fields that form immediately after the formation of workings is also natural for massifs composed of less strong and less elastic rocks, since the rate of stress and strain redistribution, as already indicated, is very high and therefore, the plastic and viscous properties of the massif in the first moments of time practically do not have time to be realized. As a consequence, elastic solutions can be considered as the upper limit possible voltage values in real conditions.

Taking into account the above considerations, let us consider the problem of the stress-strain state (SSS) of a rock mass around a vertical working of a circular cross-section. We will proceed from the exact formulation of the three-dimensional problem of the deformation of a half-space weakened by a deep cylindrical cavity [14,15]. In this case, we will assume that the stress-strain state of a half-space, as a three-dimensional body, strictly obeys the basic requirements of the three-dimensional linear theory of elasticity and is described by its corresponding equations and relations [16-18].

2. Statement of the general problem. Basic equations and relations. To solve the problem, let us refer the space around the working to the cylindrical coordinate system, (r, θ, z) , the origin of which is located on the day time surface of the massif, and the z axis coincides with the excavation axis and is directed downward. We will denote U_r, U_θ, U_z by moving the points of the array in the direction of the axes r, θ, z ; through $\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{\theta\theta}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{rz}, \varepsilon_{r\theta}, \varepsilon_{\theta z}$ - the components of the strain tensor in the coordinate system and through $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}, \sigma_{rz}, \sigma_{r\theta}, \sigma_{\theta z}$ the components of the stress tensor in the same coordinate system.

To determine all components of the stress tensor and the displacement vector in the problem, i.e. to solve the formulated problem, it will be necessary to integrate the three-dimensional equations of elastic equilibrium

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad (i, j = r, \theta, z). \tag{1}$$

Let us choose the statics equations in the Lamé form from the many forms of writing these equations. The use of the indicated equilibrium equations will be much easier if we take into account that the components of the rotation vector - $\omega_r, \omega_\theta, \omega_z$ are related to displacements U_r, U_z, U_θ by the following formulas.

$$\omega_r = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial U_z}{\partial \theta} - \frac{\partial U_\theta}{\partial z} \right), \quad \omega_\theta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_r}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial r} \right), \quad \omega_z = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial(rU_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial U_r}{\partial \theta} \right]. \tag{2}$$

Transforming the equilibrium equations in the Lamé form, taking into account (2), we arrive at the following more convenient form

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} - \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \omega_z}{\partial \theta} - \frac{\partial \omega_\theta}{\partial z} \right) &= 0, \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta} - \frac{2\mu r}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{\partial \omega_r}{\partial z} - \frac{\partial \omega_z}{\partial r} \right) &= 0, \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} - \frac{2\mu}{r(\lambda + 2\mu)} \left(\frac{\partial(r\omega_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial \omega_z}{\partial \theta} \right) &= 0, \end{aligned} \tag{3}$$

where

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \text{-- Lamé coefficients; } E \text{ -- modulus of elasticity (Young).}$$

In this case, volumetric deformation $-\varepsilon$ through displacement U_r, U_θ, U_z is expressed as follows:

$$\varepsilon = \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{U_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial U_z}{\partial z}.$$

3. Solving the problems. Since the problem of deformation of a half-space, weakened by an infinitely deep cylindrical working of circular cross-section, is considered, the three-dimensional problem can be reduced to two-dimensional, as an axisymmetric one. For this, it is assumed that the load acting on the roadway is distributed symmetrically about the $0z$ axis. Then, the displacements of the points of the array are also distributed symmetrically, i.e. they do not depend on the angular coordinate θ .

$$U_r = U_r(r, z); \quad U_\theta = U_\theta(r, z); \quad U_z = U_z(r, z).$$

In this case, the equilibrium equations (3) are greatly simplified and take the form

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial r} + \frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial (rU_\theta)}{\partial r} \right] + \frac{\partial^2 U_\theta}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{\partial (r\omega)}{\partial r} = 0. \quad (4)$$

Wherein

$$\varepsilon = \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{U_r}{r} + \frac{\partial U_z}{\partial z}; \quad \omega = \omega_\theta; \quad \omega_r = \omega_z = 0.$$

In the obtained equations, displacement U_θ is included only in the second equation, and displacement U_r and U_z is included only in the first and third equations. Therefore, it is possible to separate the task of determining the displacement U_θ from the task of determining the displacements U_r and U_z . The first problem corresponds to the torsion of a cylindrical layer having a finite thickness, the second - to the case of the deformed state of the rock mass under consideration, which is called the axisymmetric problem. Thus, we come to the conclusion that in the future, to solve the problem, it is sufficient to integrate the equations (five)

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial r} + \nu^* \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} - \frac{\nu^*}{r} \frac{\partial (r\omega)}{\partial r} = 0, \quad (5)$$

where

$$\nu^* = (1-2\nu)/(1-\nu).$$

The solution to system (5) can be obtained in various ways. For example, it can be reduced to finding some auxiliary functions introduced in a certain way - stress functions, having previously expressed the displacements and all components of the stress tensor in terms of these functions. Such functions, which are a solution to an axisymmetric problem, were introduced by various authors in different ways, proceeding from the direction of the problems under consideration.

The problem we are considering about the deformation of a half-space, weakened by deep mining, is focused on solving a specific problem in rock mechanics. Therefore, it is natural to assume that the rock mass under consideration works only for compression. Proceeding from these considerations, following the procedure of, but with some difference from it, corresponding to the essence of the particular problem under consideration, we introduce the first of the stress functions as follows:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{\mu r}{1-\nu} \omega; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{r(\lambda+2\mu)}{2(1-\nu)} \varepsilon, \quad (6)$$

Where $\varphi(r, z) = \varphi$ - some function of the variables r and z .

Substituting the expressions ε and ω into the second equation (5), we make sure that it is fulfilled identically. Substituting (6) into the first equation (5), we obtain

$$\nabla^2 \varphi = 0, \quad (7)$$

where

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Consequently, the equations of equilibrium in displacements are satisfied if ε and ω in the form

$$\omega = -\frac{1-\nu}{\mu} \frac{\partial \varphi}{r \partial z}; \quad \varepsilon = -\frac{2(1-\nu)}{r(\lambda+2\mu)} \frac{\partial \varphi}{\partial r}$$

And if the function $\varphi = \varphi(r, z)$ is defined as a solution to equation (7)

Using the expressions for volumetric deformation and rotation - (4) and (2) the above expressions and ω through $\varphi(r, z)$ rewrite them in the following form

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rU_r)}{\partial r} + \frac{\partial U_z}{\partial z} = -\frac{2(1-\nu)}{(\lambda+2\mu)} \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad \frac{\partial U_r}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial r} = -\frac{2(1-\nu)}{\mu} \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (8)$$

Now, let's introduce a new helper function $\phi(r, z)$ like this:

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = -\lambda \frac{\partial(rU_r)}{\partial r} + r(\lambda+2\mu) \frac{\partial U_z}{\partial z}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = \mu r \left(\frac{\partial U_r}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial r} \right). \quad (9)$$

Subtracting from the first equation (8) the first equation (9), divided by $\lambda+2\mu$, and dividing μ by the second equation (9) and adding with the second equation (8), we obtain a system of differential equations with respect to the function U_r . Integrating these equations, we make sure that the connection between the radial displacements U_r and by the introduced stress functions φ and ϕ has the form

$$U_r = \frac{1}{2\mu r} [\phi - 2(1-\nu)\varphi] \quad (10)$$

From the course of elasticity theory [13] it is known that displacement U_r in an axisymmetric problem must satisfy the equation

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right)^2 U_r = 0. \quad (11)$$

Substituting in (11) the expression for U_r - (10) and performing differentiation, and with this in mind (7), we obtain a biharmonic differential equation that determines the stress function ϕ - (10).

$$\nabla^4 \phi = 0, \quad (12)$$

where $\nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2 = \left(\nabla^2 \right)^2$ - Biharmonic operator. Hence it follows that the introduced stress function ϕ must be biharmonic.

Substituting in (9) the values of the displacements - (10), U_r through the functions ϕ and φ - (10), r and z for the derivatives with respect to the coordinates r and z of the longitudinal displacement U_z we obtain a system of differential equations with respect to the function U_z . Hence, taking into account the relationship between the elastic constants we get finally

$$\frac{\partial U_z}{\partial r} = \frac{1}{2\mu r} \frac{\partial}{\partial z} [\phi + 2(1-\nu)\varphi], \quad \frac{\partial U_z}{\partial z} = -\frac{1}{2\mu r} \frac{\partial}{\partial r} (\phi - 2\nu\varphi), \quad (10)_1$$

where ν - is Poisson's ratio.

Substituting the values of the derivatives of displacement U_z in the integrability condition for these equations, taking into account Eq. (7), we obtain

$$\nabla^2 \phi = -2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}.$$

The last equation is the condition for the integrability of the above equations with respect to the derivatives $\partial U_z / \partial r$ and $\partial U_z / \partial z$. This condition will be satisfied if the function ϕ is set in the form

$$\phi = \psi + r \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad (13)$$

where $\psi = \psi(r, z)$ - is a function of coordinates r and z , that satisfies the differential equation

$$\nabla^2 \psi = 0 \quad (14)$$

Hence it follows that thus, the stress function ϕ is presented in the form (13). The advantage of presentation (13) lies in a more correct description of the deformation process around the shafts of vertical shafts of circular cross-section.

There is another way to select the stress function ϕ , given in [19]. According to it, the function ϕ , can be represented in the form

$$\phi = \psi + z \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (15)$$

It should be noted that the latter representation ϕ is convenient to use in problems requiring exact fulfillment of conditions only on the edges $z=const$, i.e. upon deformation of bodies such as a layer or a half-space. In those cases when the conditions on cylindrical surfaces play a decisive role, as is the case in the problem under consideration, it is necessary to use formula (13). If it is necessary to fulfill the boundary conditions on mutually orthogonal surfaces $z = const$ and $r = const$, both variants of the general solution of the axisymmetric problem should be used.

In conclusion of the section, we note that the next step in solving the general problem is the representation of all nonzero components of the strain and stress tensors, taking into account the axisymmetry of the problem under consideration. Using the expressions connecting the components of the deformation tensor with displacements in a cylindrical coordinate system (r, θ, z) and under the accepted assumptions regarding displacements, i.e. at we have

$$U_r = U_r(r, z), \quad U_\theta = 0, \quad U_z = U_z(r, z)$$

and

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial U_r}{\partial r}; \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{U_r}{r}; \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial U_z}{\partial z}; \quad \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_r}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial r} \right); \quad \varepsilon_{r\theta} = \varepsilon_{\theta z} = 0.$$

Introducing into these equalities instead of displacements U_r and U_z functions ϕ and φ in accordance with expressions (10) and expressions for the derivatives of displacement U_z along the coordinates r and z , we obtain

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{1}{2\mu} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\phi - 2(1-\nu)\varphi}{r} \right); & \varepsilon_{rz} &= \frac{1}{2\mu r} \frac{\partial \phi}{\partial z}; \\ \varepsilon_{zz} &= -\frac{1}{2\mu r} \frac{\partial}{\partial r} (\phi - 2\nu\varphi); & \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{2\mu r^2} [\phi - 2(1-\nu)\varphi] \end{aligned} \quad (16)$$

To find the stress components, we use Hooke's law for an isotropic body, taking into account the axisymmetry of the problem [20]

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \lambda\varepsilon + 2\mu \varepsilon_{rr}; & \sigma_{\theta\theta} &= \lambda\varepsilon + 2\mu \varepsilon_{\theta\theta}; & \sigma_{r\theta} &= 2\mu \varepsilon_{r\theta} = 0; \\ \sigma_{zz} &= \lambda\varepsilon + 2\mu \varepsilon_{zz}; & \sigma_{rz} &= 2\mu \varepsilon_{rz}. & \sigma_{z\theta} &= 2\mu \varepsilon_{z\theta} = 0; \end{aligned}$$

wherein

$$\varepsilon = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz} = -\frac{2(1-\nu)}{\lambda + 2\mu} \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{1-2\nu}{\mu r} \frac{\partial \phi}{\partial r}. \quad (17)$$

Substituting in the last expressions of Hooke's law the values of deformations according to formulas (16) and the expression for volumetric expansion (17), we obtain

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \phi + \frac{2(1-\nu)}{r^2} \varphi - \frac{2}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} [\phi - 2(1-\nu)\varphi] - \frac{2}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r}; \\ \sigma_{zz} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r}; & \sigma_{rz} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial z}; & \sigma_{\theta\theta} &= \frac{1}{r^2} [\phi - 2(1-\nu)\varphi] - \frac{2\nu}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r}. \end{aligned} \quad (18)$$

Thus, all four components of the stress tensor normal σ_{rr} , σ_{zz} , $\sigma_{\theta\theta}$ and tangential σ_{rz} , as well as nonzero components of the displacement vector – radial U_r and longitudinal U_z are expressed through the introduced stress functions ϕ and φ .

To shorten the entries, you can enter the following designation:

$$\bar{\psi} = \frac{1}{r^2} [\phi - 2\psi - 2(1-\nu)\varphi] \quad (19)$$

Taking into account (19), the first equation (18) is transformed as follows:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} [\phi - 2(1-\nu)\varphi] - \frac{2}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} [\phi - 2(1-\nu)\varphi - 2\psi + 2\phi + 2\psi - 2\phi] - \\ - \frac{2}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} [3\phi - 2\psi - 2(1-\nu)\varphi] + \frac{2}{r^2} \left[\phi - \left(\psi + r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) \right]. \end{aligned}$$

Hence, taking into account (19) and (13), it follows that similarly

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} - \bar{\psi}; \quad \sigma_{\theta\theta} = \psi - \frac{2(1+\nu)}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r}; \quad \sigma_{zz} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r}; \quad \sigma_{rz} = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial z}. \quad (20)$$

Formulas (16) and (20) make it possible to determine the stress-strain state of a half-space with a deep cylindrical cavity of circular cross-section, if solutions of quasi-harmonic equations $\nabla^2 \varphi = 0$, $\nabla^2 \psi = 0$ are found under the corresponding boundary conditions specified on the cylindrical surface of the cavity and simulating the problem of the stress-strain state of a rock mass, around the vertical working of a circular cross-section.

4. Conclusions. Thus, the specific problem of rock mechanics has been solved, i.e. the considered rock mass works only for compression. The deformation process and stress state around vertical shaft shafts with circular cross-section are expressed in terms of stress-state functions around vertical shaft shafts with circular cross-section expressed in terms of stress functions. Formulas are obtained that make it possible to unambiguously determine the stress-strain state of a half-space with a deep cylindrical cavity of circular cross-section if solutions of quasi-harmonic equations $\nabla^2 \varphi = 0$, $\nabla^2 \psi = 0$ are found under the corresponding boundary conditions specified on the cylindrical surface of the cavity and simulating the problem of stress-strain state of a rock mass around a vertical working circular cross section.

References

1. Ломтадзе В.Д. (1990) Физико-механические свойства горных пород. Методы лабораторных исследований [Physical and mechanical properties of rocks. Laboratory research methods]. Leningrad: «Nedra». 328 p.
2. Мосинес В.Н., Пашков А.Д., Латишев В.А. (1975) Разрушение горных пород. [Destruction of rocks]. Moscow: «Nedra» 215 p.
3. Ержанов Ж.С., Тома К., Айталиев С.М. (1984) Геология и сейсмомеханика породного массива [Geology and seismic rock mass mechanics]. Alma-Ata: «Nauka Kazakhstan».
4. Гуз А.Н. (1977) Основы теории устойчивости горных выработок. [Foundations of the theory of stability of mine workings]. Kiyev: «Naukova dumka». 244 p.
5. Ржевский В.В., Новик Г.К., (1967). Основы физики горных пород. [Fundamentals of Rock Physics]. Moscow: «Nedra». 187 p.
6. Teresawa K. (1976) On the elastic equilibrium of semi-infinite solid under given boundary conditions with same applications. *J.Of college of sci.Tokyo.Imp.Univ.*337(7). pp 16-31.
7. Глушко В.Т., Долинина Н.Н., Розовский М.И. (1973) Устойчивость горных выработок [Stability of mine workings]. Kiyev: «Naukova dumka». 193 p.
8. Нестеренко Г.Т., Шаманская А.Т., Егоров П.В. (1970) Приближенный метод оценки напряженного состояния горных пород // В кн. Измерение напряжений в массиве горных пород [An approximate method for assessing the stress state of rocks//In the book. Stress measurement in rock mass]. *Novosibirsk.* pp 46-49
9. Халмурадов Р.И., Худойназаров Х., Омонов Ш.Б., (2020). Обзор методов оценки устойчивости пород и расчета анкерной и набрызгбетонной крепей горных выработок [A review of methods for assessing the stability of rocks and calculating anchor and embankment support of mine workings] // *Научно-технический журнал «Problems of architecture and construction», №1.* pp. 90-95.
10. Худойназаров Х. (2003) Нестационарное взаимодействие цилиндрических оболочек и стержней с деформируемой средой [Unsteady interaction of cylindrical shells and rods with a deformable medium]. Tashkent: «Med. lit. imeni Abu Ali Ibn Sina». 350 p.
11. Худойназаров Х., Нишонов У.А. (2013). Расчет параметров анкер-набрызгбетонной крепи для вертикальных выработок [Calculation of parameters of anchor-sprayed concrete lining for vertical workings]. *Vestnik Samarkand State Universitete.* №5, pp. 34-43.

12. Khalmuradov R.I., Khudoynazarov Kh., Nishonov U.A. (2018) Nonlinear vibrations ribbed circular plate under influence of pulse loading // *Int. Journal of Advanced Research in Science, Engineering and Technology*. 5(3) pp. 5289-5296.
13. Xalmuradov R.I., Xudoynazarov X. (2003) Elastiklik nazariyasi. I-qism Asosiy tushunchalar va munosabatlar [Theory of elasticity Part I Basic concepts and relationships]. Tashkent: "FAN". 159 p.
14. Khalmuradov R.I. and Ismoilov E.A. (2020) Nonlinear vibrations of a circular plate reinforced by ribs. *IOP Conf. Ser.: Earth Environ. Sci.* 614 012071. DOI 10.1088/1755-1315/614/1/012071.
15. Khalmuradov R.I. and Yalgʻashev B.F. 2020 Frequency analysis of longitudinal-radial vibrations of a cylindrical shell. *IOP Conf. Ser.: Earth Environ. Sci.* 614 012087. DOI 10.1088/1755-1315/614/1/012087.
16. Халмуратов Р.И., Худойназаров Х., Худойбердиев З.Б. (2018) Нестационарные колебания трехслойной вязкоупругой пластинки [Nonstationary vibrations of a three-layer viscoelastic plate] // *Bulletin Samarkand State Universitete*. №1, pp. 30-39.
17. Халмуратов Р.И., Нишоннов У.А. (2018) Колебания пластин, подкрепленных ребрами жесткости [Vibrations of plates supported by stiffening ribs] // *Uzbek journal of problems of mechanics* №2
18. Халмуратов Р.И. (2017) Уравнения колебания вязкоупругой пластинки [Vibration equations of a visco-elastic plate] // *Bulletin Samarkand State Universitete* №3. pp. 86-90.
19. Соляник-Красса К.В. (1987) Осесимметричная задача теории упругости [Axisymmetric problem of theory and simplicity]. Moscow: «Stroyizdat». 336 p.
20. Xalmuradov R.I., Xudoynazarov Kh. (2003) Elastiklik nazariyasi. II-qism Asosiy tenglamalar va masalalar [Theory of elasticity Part I Basic concepts and relationships] // Tashkent "FAN", 163 p.
21. Khudoynazarov Kh.Kh., Karimov M.B., Amirkulova F.A. (2002) The stressed-strained state of vertical mine lining walls *The 7th Conference "Shell Structures, Theory and Applications" Gdansk-Jurata (Poland), October 9-11, 2002.-Gdansk University of Technology.. pp.129-130.*

УДК: 539.3

TORSIONAL VIBRATIONS OF A CIRCULAR ELASTIC ROD TAKING INTO ACCOUNT PHYSICAL NONLINEARITY

J.Abdurazzakov¹, D.X.Khudoynazarova²

¹Samarkand State Architectural and Civil Engineering Institute

²Tashkent University of Information Technologies
abdijamshid@gmail.com, diloromrabota@mail.ru

Abstract. In this work, on the basis of the equations of torsional vibrations of a circular rod derived by the author, taking into account physical nonlinearity, the problem of torsional vibrations of a rod is numerically solved. A comparative analysis of the results obtained for nonlinear and linear cases is carried out. To solve the problem, a numerical finite difference method is applied. The approximation of the oscillation equation and boundary conditions leads to a system of algebraic equations, the solution of which is not mathematically difficult. On the basis of the obtained numerical data of the problem, graphs of the dependences of the torsional displacement and stresses on time were constructed. The main conclusions made on the basis of the constructed graphs of displacement and stresses are presented.

Keywords: rod, torsional vibrations, displacement, stresses, physical nonlinearity.

Doiraviy elastik sterjenning fizik nochiziqilik hisobga olingan holda buralma tebranishlari

Annotatsiya. Maqolada doiraviy elastik sterjenning avtorlar tomonidan avvalroq keltirib chiqarilgan fizik nochiziqilik hisobga olingan buralma tebranishlari tenglamasi asosida shunday sterjenning buralma tebranishlari haqidagi masala sonli yechilgan. Nochizikli va chizikli holler uchun taqqoslama tahlil bajarilgan. Masalani yechish uchun chekli ayirmalar sonli usuli qo'llanilgan. Tebranishlar tenglamasi va chegaraviy shartlarning approksimatsiyalari yechilishi matematik nuqtai-nazardan uncha qiyin bo'lmagan algebraik tenglamalar sistemasiga keltirilgan. Masalaning olingan sonli xarakteristikalari asosida buralma ko'chish va kuchlanishlarning vaqtdan bog'lanishlari grafiklari qurilgan. Ko'chish va kuchlanishlarning qurilgan grafiklari asosida chiqarilgan xulosalar keltirilgan.

Kalit so'zlar: sterjen, buralma tebranishlar, ko'chish, kuchlanish, fizik nochiziqilik.

Крутильные колебания круглого упругого стержня с учетом физической нелинейности

Аннотация. В работе на основе выведенных автором уравнений крутильных колебаний круглого стержня с учетом физической нелинейности численно решена задача о крутильных колебаниях стержня. Выполнен сопоставительный анализ результатов, полученных для нелинейных и линейных случаев. Для решения задачи применен численный метод конечных разностей. Аппроксимация уравнения колебаний и граничных условий приводит к системе алгебраических уравнений, решение которой не является сложной в математическом отношении. На основе полученных численных данных задачи построены графики зависимостей крутильного перемещения и напряжений от времени. Приведены основные выводы, сделанные на основе построенных графиков перемещения и напряжений.

Ключевые слова: стержень, крутильные колебания, перемещение, напряжения, физическая нелинейность.

1. Introduction. Structural elements such as rods, plates and shells are widely used in engineering and technical works [1-3]. Torsional waves, along with longitudinal and bending waves, play an important role in vibrational structures [4,5]. Traditional mathematical models used to study torsional vibrations of rods, as well as to study the propagation of torsional waves are based on the technical theory of torsion [6]. In the majority of structural calculations, a linear formulation is mainly used, which greatly simplifies the calculation [7,8]. The use of new progressive materials in modern construction, mechanical engineering and in other fields of science and technology requires modeling the behavior of materials, taking into account more complex properties of materials [9-10]. In many nonlinear problems of the mechanics of deformable solids, geometric nonlinearity is taken into account, that is, the nonlinear relationship between displacements and deformations [11]. In general, a small number of works are devoted to the study of the problems of vibrations of rods and shells taking into account physical nonlinearity [12-14]. At the same time, in [12], problems of the physically nonlinear theory of elasticity are considered, in which Hooke's law is replaced by a nonlinear law, but geometric relations in a linear form are preserved. In scientific work [11, 13], mathematical models of rods are proposed, taking into account the geometric and physical nonlinearities and warping (change in the shape of the cross section) during torsion, on the basis of which the propagation and interaction of intense elastic waves is studied. The construction of the basic relations of the rod theory consists in reducing the three-dimensional problem to the one-dimensional one [15-17]. At the same time, researchers are trying to derive refined differential equations of vibrations, taking into account certain factors of a physical, mechanical or geometric nature. [18,19].

2. Basic relations. In the cylindrical coordinate system (r, θ, z) , consider a homogeneous and isotropic circular viscoelastic rod of radius r_0 . It is believed that the relationship between stresses and strains is given by physically nonlinear relations [1]:

$$\sigma_{r\theta} = \mu\gamma(\psi_0^2)\varepsilon_{r\theta}, \quad \sigma_{z\theta} = \mu\gamma(\psi_0^2)\varepsilon_{z\theta}. \quad (1)$$

where $\varepsilon_{r\theta} = \frac{\partial U_\theta}{\partial r} - \frac{U_\theta}{r}$, $\varepsilon_{z\theta} = \frac{\partial U_\theta}{\partial z}$ - strain tensor components; μ - shear modulus; $\gamma(\psi_0^2) = 1 + \alpha\psi_0^2$

- nonlinear functional; $\psi_0^2 = \frac{2}{3}(\varepsilon_{r\theta}^2 + \varepsilon_{z\theta}^2)$ - shear strain rate; $\alpha < 0$ - coefficient characterizing the physical nonlinearity of the bar [13].

The problems of torsional vibrations of a circular bar are axisymmetric problems with respect to the axis of rotation, and therefore, the components of the stress tensor and the displacement vector do not depend on the angular coordinate θ . Consequently, during torsional vibrations, only stresses $\sigma_{r\theta}(r, z, t)$, $\sigma_{z\theta}(r, z, t)$ and torsional displacement $U_\theta(r, z, t)$ will be nonzero. Based on this equation of motion of a circular rod with its torsional vibrations, it can be written as [5]:

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} = \rho \frac{\partial^2 U_\theta}{\partial t^2}, \quad (2)$$

where ρ - density of a rod material.

It is assumed that the torsional vibrations are caused by the stress $f_{r\theta}(z, t)$ on its surface, i.e. the boundary condition of the problem at $r = r_0$ has the form:

$$\sigma_{r\theta}(z, t) = f_{r\theta}(z, t). \quad (3)$$

Substituting expressions (1) into the equations of motion (2), we obtain a differential equation in partial derivatives with respect to displacements. Taking into account the boundary conditions (3) from equation (2), taking into account the relations (1), after performing some mathematical calculations, we obtain the equations of torsional vibrations of a circular rod taking into account physical nonlinearity

$$\left[\frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 U_\theta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 U_\theta}{\partial z^2} \right] \cdot \left(1 + \frac{1}{3} \alpha r_0^2 \left(\frac{\partial U_\theta}{\partial z} \right)^2 \right) - \frac{4}{3} \alpha U_\theta \left(\frac{\partial U_\theta}{\partial z} \right)^2 = \mu^{-1} f_{r\theta}(z, t), \quad (4)$$

where $b = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ – the speed of propagation of shear waves in the rod material.

Note that equation (4) at $f_{r\theta}(z, t) \neq 0$ and $\alpha = 0$ turns into the equation of work [6], at $f_{r\theta}(z, t) \neq 0$ and $\alpha = 0$ it turns into the classical equation of torsional vibrations of a circular rod. Finally, at $f_{r\theta}(z, t) = 0$, $\alpha \neq 0$ and the absence of the last term, the equation coincides with the equation in [12].

3. Formulation of the problem. Let us investigate a nonlinear wave process in a rod, the surface of which is free from external loads. Therefore, as the main resolving equation, we take equation (4) and setting $f_{r\theta}(z, t) = 0$ in it on the right side, introducing dimensionless variables by the formulas

$$t = t^* \frac{l}{b}; \quad z = z^* l; \quad U_\theta = U,$$

And discarding the "tilde" for the convenience of writing we get the equation

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3} \alpha \frac{r_0^2}{l^2} \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \right) - \frac{4}{3} \alpha U \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 = 0. \quad (5)$$

Consider a l -length circular rod subjected to an external load at one end. We will assume that its second end is fixed. Then the displacements of the points of the rod will satisfy the following boundary and initial conditions:

$$U(0, t) = f(t, t_1) \quad \text{at } z = 0; \quad U(l, t) = 0 \quad \text{at } z = l; \quad (6)$$

$$U(z, 0) = 0 \quad \text{at } t = 0; \quad \frac{\partial U(z, 0)}{\partial t} = 0 \quad \text{at } t = 0, \quad (7)$$

where

$$f(t, t_1) = \begin{cases} A \sin\left(\frac{\pi t}{t_1}\right), & \text{at } t \leq t_1; \\ 0, & \text{at } t > t_1, \end{cases}$$

where t_1 – load time; A – amplitude.

4. Numerical solution and discussion. To solve the problem, we apply the numerical finite difference method in an explicit form in the range of variation of independent variables z and t ($0 \leq z \leq l$, $0 \leq t \leq T$), construct a rectangular grid with constant steps $h = \frac{l}{n}$ and $\tau = \frac{T}{m}$ (T – travel time of a wave along the length of the rod), nodes coordinates are determined by the formulas

$$z = ih, \quad i = 0, 1, \dots, n; \quad t = j\tau, \quad j = 0, 1, \dots, m.$$

Replacing the derivatives of the displacement function in equation (5) with their finite-difference expressions

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \approx \frac{U_i^{j+1} - 2U_i^j + U_i^{j-1}}{\tau^2}; \quad \frac{\partial U}{\partial z} \approx \frac{U_i^j - U_{i-1}^j}{h}; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \approx \frac{U_{i+1}^j - 2U_i^j + U_{i-1}^j}{h^2}.$$

we obtain the following algebraic equation

$$\left(\frac{U_i^{j+1} - 2U_i^j + U_i^{j-1}}{\tau^2} - \frac{U_{i+1}^j - 2U_i^j + U_{i-1}^j}{h^2} \right) \left(1 + \frac{1}{3} \alpha \frac{r_0^2}{l^2} \left(\frac{U_i^j - U_{i-1}^j}{h} \right)^2 \right) + \frac{4}{3} \alpha U_i^j \left(\frac{U_i^j - U_{i-1}^j}{h} \right)^2 = 0.$$

Having solved this equation for U_i^{j+1} , we will have

$$U_i^{j+1} = 2U_i^j - U_i^{j-1} + \frac{\tau^2}{h^2} (U_{i+1}^j - 2U_i^j + U_{i-1}^j) + \frac{4\tau^2 \alpha U_i^j \cdot (U_i^j - U_{i-1}^j)^2}{3h^2 + \alpha \frac{r_0^2}{l^2} (U_i^j - U_{i-1}^j)^2} \quad (8)$$

Similarly, transforming the boundary - (6) and initial - (7) conditions, we obtain

$$\text{at } z = 0, \quad U_0^j = A \sin(\pi \cdot j \cdot \tau); \quad \text{at } z = l, \quad U_{n+1}^j = 0. \quad (9)$$

$$\text{at } t = 0, \quad U_i^0 = 0, \quad \frac{U_i^1 - U_i^0}{h} = 0, \quad (10)$$

Thus, the original problem is reduced to solving system (8) - (10). To solve the problem, a program was compiled in C ++. For the calculations, the following values of the dimensionless parameters were taken: $r_0 = 0,02$; $l = 1$. $T = 1$. The duration of the load is considered equal to $t_1 = 0,35$. The obtained numerical results are shown in Fig. 1.2 in the form of graphs of displacement and stress versus time t in rod sections $z=0,1;0,4;0,7$ for different values of the nonlinearity parameter $\alpha : 0;-0,2;-0,4$.

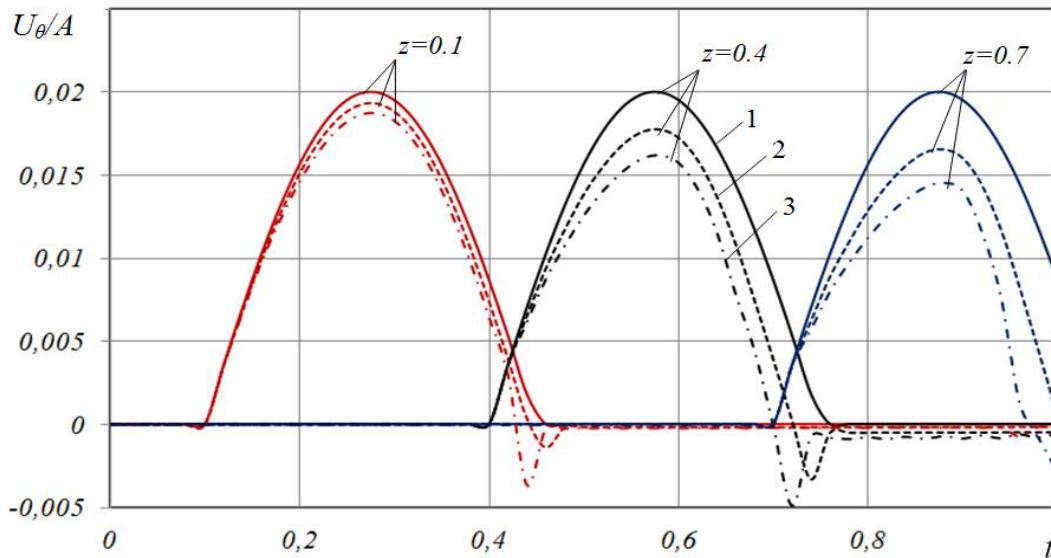


Figure 1. Graphs of dependencies of displacement U_θ over time t in sections of the rod $z=0,1;0,4;0,7$ for different values of the nonlinearity parameter $\alpha : 0;-0,2;-0,4$.

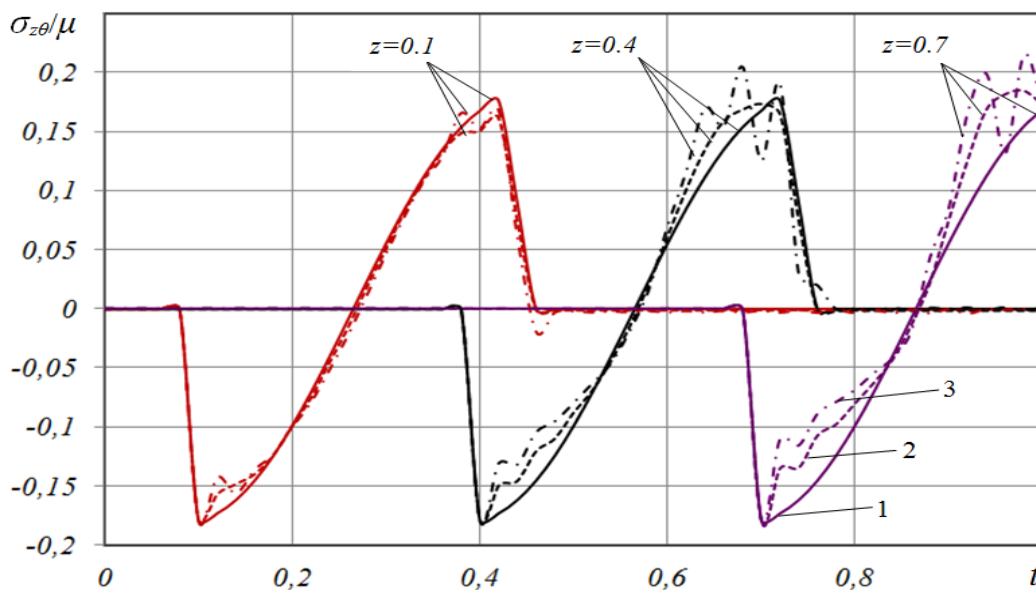


Figure 2. Graphs of stress dependencies σ_{z0} over time t in sections of the rod $z=0,1;0,4;0,7$ for different values of the nonlinearity parameter $\alpha : 0;-0,2;-0,4$.

In this case, the value $\alpha = 0$ corresponds to the case of a linear problem. From the dependences shown in Fig. 1, it follows that the influence of the nonlinearity parameter α : increases with distance from the end α : in the section of the rod $z=0,1$ at $\alpha = -0,4$ and the difference between the maximum values of displacement U_θ in the linear and nonlinear cases is approximately 7%, in sections $z=0,4$ and $z=0,7$ this the indicator is 23.5% and 38%, respectively. For all values of the small nonlinearity parameter, the maximum displacement values U_θ in the nonlinear case are always less than in the linear case. Hence it follows that the linear model gives higher maximum displacement values than the non-linear model. It is also possible to observe an abrupt change in the value of displacement along the non-linear model and at the end of the decay time of the period of displacement disturbances in all sections of the rod.

The graphs of stresses $\sigma_{z\theta}$ versus time t presented in Fig. 2 in the sections of the rod $z=0,1;0,4;0,7$ at different values of the nonlinearity parameter α : 0;-0,2;-0,4 show that the results obtained for the linear and nonlinear models also differ here. It can be seen from the graphs that each section of the rod at the initial moment of the wave's approach to the section undergoes compression for a time equal to half the period of vibration T_0 . At $t = \frac{1}{2}T_0$ in each section, the voltage takes zero value. This phenomenon takes place in both linear and nonlinear models. Having reached the minimum, the stress values begin to increase, and, having reached the maximum, immediately begins to decrease. So at the points of the beginning of the increase and decrease, the linear and nonlinear models give different results. At these points, the linear model gives underestimated results, and a jump-like stress change is observed according to the nonlinear model. From this it follows that at the critical points of reaching the maximum and minimum on the voltage graph $\sigma_{z\theta}$, the nonlinear model gives more correct results.

5. Conclusions. The following conclusions follow from the results obtained:

- the obtained nonlinear equations of torsional vibrations of a circular cylindrical elastic rod more correctly describe the process of propagation of torsional waves in a rod of finite length;
- the proposed numerical methodology for solving the problem of torsional vibrations of a circular rod allows plotting the graphs of the dependences of displacements and stresses in time;
- for all values of the small parameter of nonlinearity, the maximum values of displacement U_θ according to the nonlinear model are always less than according to the linear model, i.e. the linear model gives higher maximum displacement values than the non-linear model of torsional vibrations of a circular rod;
- at the critical points of reaching the maximum and minimum on the voltage graph $\sigma_{z\theta}$, the nonlinear model gives more correct results

References

1. Р.И.Халмуратов. (2017) Уравнения колебания вязкоупругой пластинки // *Научный вестник Самаркандского государственного университета*. №3. 86-90.
2. Р.И.Халмуратов. (2017) Свободные колебания армированной вязкоупругой пластинки // *Узбекский журнал Проблемы механики*. №2-3. 53-57.
3. Худойназаров Х. Нестационарное взаимодействие цилиндрических оболочек и стержней с деформируемой средой. Ташкент, Изд. им. Абу Али ибн Сино, 2003, 326 с.
4. K.Khudoynazarov, V.F.Yalgashev and T.Mavlonov (2021) Mathematical modelling of torsional vibrations of the three-layer cylindrical viscoelastic shell. *IOP Conf. Series: Mater. Sci. Eng.* 1030 012098 DOI: 10.1088/1757-899X/1030/1/012098
5. Худойназаров Х.Х., Буркутбоев Ш.М. (2017) Математическая модель крутильных колебаний цилиндрического слоя с учетом протекающей жидкости и вращения // *Математическое моделирование и численные методы*. № 4. С. 38–56.
6. Худойназаров Х., Абдирашидов А., Буркутбоев Ш. 2016 Моделирование крутильных колебаний вязкоупругого круглого стержня, вращающегося с постоянной угловой скоростью // *Математическое моделирование и численные методы*, 1(9) с.38–51.
7. R.I.Khalmuradov and E.A.Ismoilov (2020) Nonlinear vibrations of a circular plate reinforced by ribs. *IOP Conf. Series: Earth and Environmental Science* 614. 012071 doi:10.1088/1755-1315/614/1/012071.
8. Филиппов И.Г., Кудайназаров К. Уточнение уравнений продольно-радиальных колебаний круговой цилиндрической вязкоупругой оболочки // *Прикладная механика*. 1990, т.26, №2. С.63-71.
9. К. Кудайназаров (1990) Продольный удар по круговой цилиндрической вязкоупругой оболочке // *Изв. АН УзССР. Сер. Техн. науки*. №3. 31-37.
10. Р.И.Халмуратов, Х.Худойназаров, З.Худойбердиев. (2017) Свободные колебания упругой трёхслойной пластинки // *Узбекский журнал Проблемы механики*. №2-3. 46-52.

11. Ерофеев В., Орехова О. Нелинейные крутильные и изгибно-крутильные волны в стержнях. *LAP. LAMBERT Academic Publishing*, 2012. 136 с.
12. Каудерер Г. Нелинейная механика. – М., Иност. литер. 1961. 780.с
13. Ерофеев В.И., Лампси Б.Б. Нелинейная математическая модель упругого стержня, совершающего крутильные колебания, учитывающая деформацию поперечного сечения.// *Вестник научно-технического развития*. №4 (80), 2014. С.12-15.
14. Абдураззаков Ж., Холиков Д., Худойназаров Х. Задачи осесимметричных нелинейных колебаний круговых цилиндрических оболочек и стержней // *Проблемы архитектуры и строительства (научно-технический журнал)*, 2019, № 4. С.134-136
15. Kh.Khudoynazarov and Sh.R.Yaxshiboyev (2020) The Mathematical Model of Transverse Vibrations of the Three-Layer Plate. *IOP Conf. Series: Earth and Environmental Science* 614 012062 doi:10.1088/1755-1315/614/1/012062.
16. Kh.Khudoynazarov and Z.B.Khudoyberdiyev (2020) Unsteady vibrations of a three-layer plate with an asymmetric structure. *IOP Conf. Series: Earth and Environmental Science* 614. 012061 doi:10.1088/1755-1315/614/1/012061.
17. Khudoynazarov K., Khudoyberdiyev Z., Khudoyberdiyeva, S. Symmetrical Vibrations of a Three-Layer, Longitudinally Covered Plate. *Int. J. of Advanced Research in Science, Engineering and Technology*. 5(10). pp. 7117-21.
18. Khudoynazarov Kh.Kh., Khalmuradov R.I., Yalgashev B.F. (2021) Longitudinal-radial vibrations of a elastic cylindrical shell filled with a viscous compressible liquid // *Tomsk state university. Journal of Mathematics and Mechanics*. 69. 139-154.
doi 10.17223/19988621/69/11.
19. R.I.Khalmuradov and B.F.Yalgashev (2020) Frequency analysis of longitudinal-radial vibrations of a cylindrical shell. *IOP Conf. Series: Earth and Environmental Science* 614 012087 doi:10.1088/1755-1315/614/1/012087.

UDK: 539.3

FREE TORSIONAL VIBRATIONS OF A ROUND ELASTIC CONE-SHAPED ROD

D.Sh.Xoliqov¹, J.N.Abdurazzaqov², D.X.Xudoynazarova³

^{1,2}Samarkand State Architectural and Civil Engineering Institute,

³Tashkent University of Information Technologies

dilshodxoliqov2586@mail.ru, abdiyamshid@gmail.com, diloromrabota@mail.ru

Abstract. The article deals with the problem of torsional vibrations of circular elastic conical rods in the system of cylindrical coordinates. It is believed that vibrations of the rod are caused by external dynamic loads applied to its surface. The cross-sectional radius is taken as a linear function of the longitudinal coordinates. On the basis of the equation of motion of the theory of elasticity for torsional vibrations, the equation of torsional vibrations of a conical rod with a circular cross-section is derived using the Fourret and Laplace integral substitutions. On the basis of the obtained equation, the problem of harmonic torsional vibrations of a rod is solved. The frequency equation and the relationship between frequency and number of waves are given. Based on the obtained numerical results, appropriate conclusions were drawn.

Keywords: conical rod, approximate equation, torsional vibrations, move, stress, frequency

Doiraviy elastik konussimon sterjenning erkin buralma tebranishi

Annotatsiya. Maqolada doiraviy elastik konussimon sterjenlarning buralma tebranishlari haqidagi masala silindrik koordinatalar sistemasida qaralgan. Sterjenning tebranishlari uning sirtiga qo'yilgan tashqi dinamik yuklar ta'siri ostida vujudga keladi deb hisoblanadi. Ko'ndalang kesimning radiusi bo'ylama koordinataning chiziqli funksiyasi sifatida qabul qilingan. Buralma tebranishlar uchun elastiklik nazariyasining harakat tenglamasi asosida Fure va Laplas integral almashtirishlarini qo'llab doiraviy ko'ndalang kesimli konussimon sterjenning buralma tebranish tenglamasi keltirib chiqarilgan. Olingan tenglama asosida sterjenning garmonik buralma tebranishlari haqidagi masala yechilgan. Chastota tenglamasi hamda chastota va to'lqin soni orasidagi bog'lanish keltirilgan. Olingan sonli natijalar asosida tegishli xulosalar chiqarilgan.

Kalit so'zlar: konussimon sterjen, taqribiy tenglama, buralma tebranishlar, ko'chish, kuchlanish, chastota.

Свободные крутильные колебания круглого упругого конического стержня

Аннотация. В статье в цилиндрической системе координат рассмотрена задача о крутильных колебаниях кругового конического упругого стержня. Считается, что колебания стержня возбуждаются под воздействием динамической нагрузки, действующей на его поверхности. Радиус поперечного сечения стержня считается линейно зависящим от продольной координаты. Исходя из уравнений для крутильных колебаний упругого тела и применяя интегральные преобразования Фурье и Лапласа выведены уравнения крутильных колебаний кругового конического стержня. На основе полученного уравнения решена задача о гармонических крутильных колебаниях конического стержня. Приведены частотное уравнение и зависимость частоты от волнового числа. На основе полученных числовых результатов сделаны соответствующие выводы.

Ключевые слова: конический стержень, приближенное уравнение, крутильные колебания, перемещение, напряжение, частота.

1. Introduction. At the present level of development of science and technology, the study of non-stationary oscillations of elements of engineering structures is relevant [1-3]. In most cases, such fluctuations are based on classical theories [4-6]. Classical theories generally describe low frequency vibrations well [7-9]. Therefore, in recent years, great importance has been attached to the study of unsteady vibrations of shells, plates and rods on the basis of certain equations [10-13]. In addition to unsteady vibrations of structural elements, it is also important to study their free vibrations based on the given equations. In this regard [14-16], the articles consider the issues of free vibrations of lamellar and conical shells. This article is devoted to the development of equations of torsional vibrations of a conical rod [17.18], determined by the research method, and to the study of harmonic vibrations of a conical rod based on the results obtained.

2. Formulation of the problem. Considering the problem according to (r, θ, z) of torsional vibrations of circular elastic conical rods in a cylindrical coordinate system. Let us choose the radius of the rod as a linear function of the longitudinal coordinate, that is, by the form $r = r_0 + \zeta$ (Figure 1). Here $r_0 = const, \zeta = tg\varphi$

Insofar as we are considering torsional vibrations that are symmetrical about an axis, the problem θ - is not a change in the angle that's why only $U_\theta(r, z, t)$ torsional displacement nonzero and

$$U_\theta = -\frac{\partial \Psi_1}{\partial r} \tag{1}$$

Here Ψ_1 - transverse wave potential [3].

Non-zero stress in torsional vibrations are represented by the potential Ψ_1 -as follows

$$\sigma_{r\theta} = \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right] \Psi_1, \quad \sigma_{z\theta} = -\mu \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial r \partial z} \tag{2}$$

in this case μ - Lamé coefficient.

The torsional vibrations of the rod are in a cylindrical coordinate system described by the following equation:

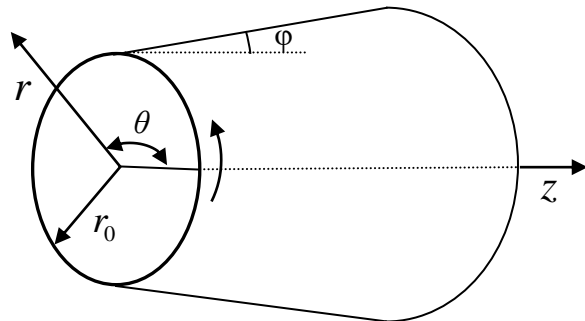
$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial z} + 2 \frac{\sigma_{r\theta}}{r} = \rho \left(\frac{\partial^2 U_\theta}{\partial t^2} \right) \tag{3}$$

Here ρ - is a shell and barrel material density.

It is believed that the torsional vibrations of the rod are caused by an external force $f_{r\theta}(z, t)$ acting on its surface. In this case, the boundary condition on the surface of the cone looks like as following:

$$\sigma_{r\theta} - \zeta \sigma_{z\theta} = \Delta_0 f_{r\theta}(z, t), \quad \Delta_0 = 1 + \zeta^2. \tag{4}$$

Initial conditions are equal to zero, i.e. $t = 0$ when $U_\theta = \frac{\partial U_\theta}{\partial t} = 0$



1-Figure.

3. Derivation of the oscillation equation. Substituting the above expressions (2) into equation (3), we have got the wave equation with respect to Ψ_1

$$\Delta \Psi_1 - \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial t^2} = 0; \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{5}$$

Let us introduce the function - $f_{r\theta}(z,t)$ of external influences on the boundary condition (4), given above, in the following form: [3]

$$f(z,t) = \int_0^\infty \frac{\sin qz}{-\cos qz} \left. \right\} dq \int_{(i)} f_{r\theta}^{(0)}(z,t) e^{pt} dp \tag{6}$$

Accordingly, Ψ_1 potential we will describe as following

$$\Psi_1(r, z, t) = \int_0^\infty \frac{\sin qz}{-\cos qz} \left. \right\} dq \int_{(i)} \Psi_1^{(0)}(r, k, p) e^{pt} dp \tag{7}$$

and we put it in equation (5) and we have got a simple second-order Bessel differential equation.

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \beta^2 \right) \Psi_1^{(0)} = 0$$

here $\beta^2 = q^2 + \rho \frac{p^2}{\mu}$.

The general solution to this equation is bounded by $r = 0$

$$\Psi_1^{(0)}(r) = C_1 I_0(\beta r) \tag{8}$$

Here I_0 - modified Bessel function; $C(k, p)$ - arbitrary variable of integration.

So U_θ - torsional displacement and $\sigma_{r\theta}(r, z, t)$, $\sigma_{z\theta}(r, z, t)$ we also describe stress as (6).

$$U_\theta(r, z, t) = \int_0^\infty \frac{\sin qz}{-\cos qz} \left. \right\} dq \int_{(i)} U_\theta^{(0)}(r, k, p) e^{pt} dp,$$

$$\sigma_{z\theta}(r, z, t) = \int_0^\infty \frac{\sin qz}{-\cos qz} \left. \right\} dq \int_{(i)} \sigma_{z\theta}^{(0)}(r, k, p) e^{pt} dp, \quad \sigma_{r\theta}(r, z, t) = \int_0^\infty \frac{\sin qz}{-\cos qz} \left. \right\} dq \int_{(i)} \sigma_{r\theta}^{(0)}(r, k, p) e^{pt} dp \tag{9}$$

Applying these images (9) and (6) to expressions (1) and (2), we use the general solution (8) for $\Psi_1^{(0)}(r)$ substituted potentials, for variable displacements and stress we have the following expressions

$$U_\theta^{(0)}(r) = -\beta C_1 I_1(\beta r) \quad \sigma_{r\theta}^{(0)} = -\mu \beta^2 C_1 I_2(\beta r) \quad \sigma_{z\theta}^{(0)} = -q \mu \beta C_1 I_1(\beta r) \tag{10}$$

Now we will expand the $I_1(\beta r)$ -Bessel function in expression (10) to a series of degrees in the r-radial coordinate levels, and when $r = 0$ and $n = 0$, we denote the value $U_{\theta,0}^{(0)}$ as In this case it will be as following

$$C_1 = -\frac{2}{\beta^2} U_{\theta,0}^{(0)}(q, p), \tag{11}$$

Using expressions (1) for $U_\theta^{(0)}$, $\sigma_{r\theta}^{(0)}$ va $\sigma_{z\theta}^{(0)}$, we express them in terms of $U_{\theta,0}^{(0)}$

$$U_\theta = 2 \sum_{n=0}^\infty \beta^{2n} \frac{(r/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!} U_{\theta,0}^{(0)}, \tag{12}$$

$$\sigma_{r\theta} = 2\mu \sum_{n=0}^\infty \beta^{2n+2} \frac{(r/2)^{2n+2}}{n!(n+2)!} U_{\theta,0}^{(0)}, \quad \sigma_{z\theta} = 2\mu \sum_{n=0}^\infty \frac{(r/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!} \beta^{2n} U_{\theta,0}^{(0)}. \tag{13}$$

Substituting these formulas (13) into the boundary condition (4), we arrive at the following algebraic equation.

$$2 \sum_{n=0}^\infty \left(\beta^{2n+2} \frac{(r/2)^{2n+2}}{n!(n+2)!} U_{\theta,0}^{(0)} - \zeta \frac{(r/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!} \beta^{2n} U_{\theta,0}^{(0)} \right) = \frac{1 + \zeta^2}{\mu} f_{r\theta}^{(0)}(z,t), \tag{14}$$

Now we introduce $U_{\theta,0}$ function and $\lambda^n(\zeta)$ operators as follows

$$U_{\theta,0} = \int_0^{\infty} \left. \begin{matrix} \sin qz \\ -\cos qz \end{matrix} \right\} dq \int_{(t)} U_{\theta,0}^{(0)} e^{pt} dp, \quad \lambda^n(\zeta) = \int_0^{\infty} \left. \begin{matrix} \sin qz \\ -\cos qz \end{matrix} \right\} dq \int_{(t)} \beta^{2n} \zeta^{(0)} e^{pt} dp. \quad (15)$$

Interacting with the operator on both sides of the last equation (14), taking into account expressions (6) and (15)

$$\int_0^{\infty} \left. \begin{matrix} \sin qz \\ -\cos qz \end{matrix} \right\} dq \int_{(t)} e^{pt} dp$$

we have got following differential equation.

$$2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\lambda^{n+1} \frac{(r/2)^{2n+2}}{n!(n+2)!} U_{\theta,0} - \zeta \frac{(r/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!} \lambda^n U_{\theta,0}^{(0)} \right) = \frac{1+\zeta^2}{\mu} f_{r\theta}^{(0)}(z,t) \quad (16)$$

If, Taking into account that $\beta^2 = q^2 + \rho\mu^{-1}p^2$ is equal, the operators λ^n introduced by formula (15) have the following form with (z,t) variables

$$\lambda^n = \left[\frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right]^n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (17)$$

Taking into account (17) in the obtained equation (16), the cone-shaped rod consists of the general differential equation of torsional vibrations. Since the order of this equation is infinitely large, it cannot be used to solve practical problems. Therefore, we are limited to $n = 0$ in equation (16). In this case

$$\frac{r^2}{4} \left(\frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) U_{\theta,0}^{(0)} - r\zeta \frac{\partial}{\partial z} U_{\theta,0}^{(0)} = \frac{1+\zeta^2}{\mu} f_{r\theta}(z,t). \quad (18)$$

We also get $n = 0$ connection in the formulas for displacement (12) and stresses (13), which determine the stress-strain state of the rod.

$$U_{\theta} = rU_{\theta,0}^{(0)} \quad (19)$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{r^2}{4} \left(\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} U_{\theta,0} - \mu \frac{\partial^2}{\partial z^2} U_{\theta,0} \right), \quad \sigma_{z\theta} = r\mu \frac{\partial}{\partial z} U_{\theta,0} \quad (20)$$

Suppose that no external force acts on the surface of the rod. Then we get $f_{r\theta}(z,t) = 0$ in equation (18) and multiply both sides of the equation by $\frac{4}{r^2}$. As a result, we have got the following uniform second-order differential equation

$$\frac{1}{b^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} U_{\theta,0} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} U_{\theta,0} - \frac{4\zeta}{r} \frac{\partial}{\partial z} U_{\theta,0} = 0, \quad (21)$$

here $\frac{\rho}{\mu} = \frac{1}{b^2}$, ($b = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ - shear wave velocity on the selected rod). Into this equation we introduce dimensionless variables with the following formulas

$$r_0 = \tilde{r}_0 l; \quad t = \tilde{t} \frac{l}{b_0}; \quad z = \tilde{z} l; \quad U_{\theta,0}^{(0)} = U \quad (22)$$

here $\frac{l}{b_0}$, is a length l - shear wave transmission from one end of the rod to the other t - represents the time,

b_0 - longitudinal wave velocity in steel.

In that case, omit the sign "Tilda" above the variables and make Equation (21) as follows

$$\left(\frac{b_0^2}{b^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{4\zeta}{(r_0 + \zeta z)} \frac{\partial}{\partial z} \right) U = 0 \quad (23)$$

The resulting equation (23) is the equation of torsional vibrations of a cone-shaped elastic rod in dimensionless coordinates.

4. Harmonic vibrations of a rod.

Based on the obtained vibrational equation (23), we solve the problem of harmonic vibrations of the rod. Let's look for a solution in the following form.

$$U = B \exp[kz + \omega t] \tag{24}$$

Here k - number of waves, ω - periodic frequency of oscillations.

Substituting this expression (24) into equation (23), we obtain the following frequency equation after some simple simplifications.

$$\frac{b_0^2}{b^2} \omega^2 - k^2 - \frac{4\zeta}{(r_0 + \zeta z)} k = 0 \tag{25}$$

It can be seen that the z coordinate also actively participates in the frequency equation, that is, in different parts of the shell, the ratio between the vibration frequency and the number of waves changes depending on the distance from the origin.

Since the space velocity in equation (25) is $c = \frac{\omega}{k}$, we have the following space velocity equation.

$$\frac{b_0^2}{b^2} c^2 - 1 - \frac{4\zeta}{(r_0 + \zeta z)} \frac{1}{k} = 0 \tag{26}$$

We solve this equation numerically using the Maple 17 software package. Quantitative calculations were carried out for cases when the material of the rod was steel, aluminum and polymer. Moreover, their physical and mechanical characteristics are as follows:

Steel - $E=2,0 \cdot 10^{11}$ Pa; $\nu=0,25$; $\rho=7850$ kg/m³ ;

aluminum - $E=0,7 \cdot 10^{11}$ Pa; $\nu=0,35$; $\rho=2750$ kg/m³ ;

polymer - $E=5,5 \cdot 10^{10}$ Pa; $\nu=0,4$; $\rho=1700$ kg/m³ ;

rod radius: $r_0 = 0.02$ m,

The calculation results are shown in Figures 2-3 in the form of graphs of the dependence of ω - frequency and k - the number of waves. Figure 2 shows the relationship between frequency and number of waves for aluminum, steel, and polymer rod materials. The graphs show that the relationship between the frequency of free vibrations of the rod and the number of waves is directly proportional to all three materials. In this case, at a fixed value of the number of waves, the frequency of the steel rod is greater than the frequency of the aluminum and polymer rods, and the frequency of the aluminum rod is greater than the frequency of the polymer rod. In other words, the greater the material's modulus of elasticity, the greater its frequency value. In fig. 3 shows the relationship between the frequency and the number of waves in the sections $z = 0.2$ and $z = 0.8$ of the aluminum rod. The graphs show that the farther from the origin, the lower the frequency.

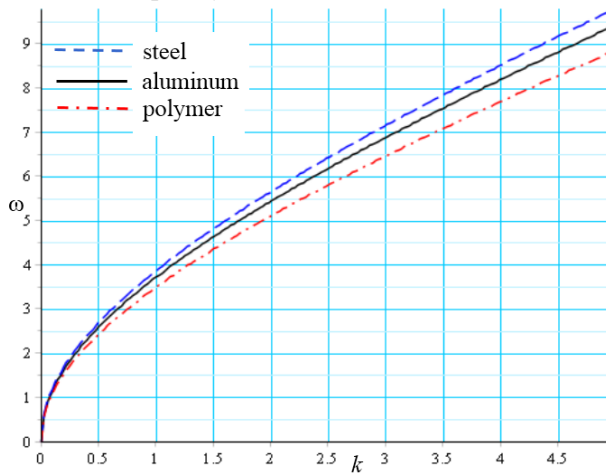


Figure 2. The relationship between frequency and number of waves for aluminum, steel and polymer.

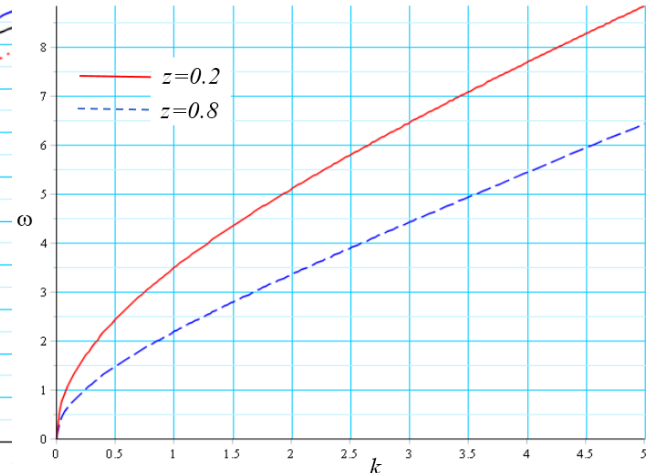


Figure 3. Relationship between frequency and number of waves in sections $z = 0.2$ and $z = 0.8$ of an aluminum rod.

5. Conclusions. The obtained analytical and numerical results allow us to draw the following conclusions.:

- the equation of torsional vibrations of a round conical elastic rod is obtained. The coefficients of this equation are functions of the longitudinal coordinates;

- On the basis of the obtained equation, the problem of free torsional vibrations of a round conical elastic rod is numerically solved;
- The greater the modulus of elasticity of the material at a fixed value of the number of waves, the greater the value of its frequency;
- the frequency values decrease with distance from the section $z = 0$, which is considered to be the coordinate head of the rod.

References

1. KM Liew, T.Y Ng, X.Zhao (2005) Free vibration analysis of conical shells via the element-free kp-Ritz method // *Journal of Sound and Vibration*. 281(3-5). pp.627-645. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2004.01.005>
2. K.Y.Lam, Li Hua (1997) Vibration analysis of a rotating truncated circular conical shell // *International Journal of Solids and Structures*. 34(17). pp.2183-2197, [doi.org/10.1016/S0020-7683\(96\)00100-X](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(96)00100-X).
3. Khudoynazarov Kh.Kh., Khalmuradov R.I., Yalgashev B.F. (2021) Ljngitudinal-radial vibrations of a elastic celindrical shel filled with a viscous compressible liquid // *Tomsk state university. Journal of Mathematics and Mechanics*. 69. 139-154. [doi 10.17223/19988621/69/11](https://doi.org/10.17223/19988621/69/11).
4. Qiyi Dai, Qingjie Cao, Yushu Chen (2018) Frequency analysis of rotating truncated conical shells using the Haar wavelet method // *Applied Mathematical Modelling*. 57. 603-613. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2017.06.025>.
5. Р.И.Халмурадов. (2017) Уравнения колебания вязкоупругой пластинки // *Научный вестник Самаркандского государственного университета*. №3. 86-90.
6. Р.И.Халмурадов. (2017) Свободные колебания армированной вязкоупругой пластинки // *Узбекский журнал Проблемы механики*. №2-3. 53-57.
7. Филиппов И.Г., Кудайназаров К. Уточнение уравнений продольно-радиальных колебаний круговой цилиндрической вязкоупругой оболочки // *Прикладная механика*. 1990, т.26, №2. С.63-71.
8. K.Khudoynazarov, B.F.Yalgashev and T.Mavlonov (2021) Mathematical modelling of torsional vibrations of the three-layer cylindrical viscoelastic shell. *IOP Conf. Series: Mater. Sci. Eng.* 1030 012098 DOI: 10.1088/1757-899X/1030/1/012098
9. Худойназаров Х.Х., Буркутбоев Ш.М. (2017) Математическая модель крутильных колебаний цилиндрического слоя с учетом протекающей жидкости и вращения // *Математическое моделирование и численные методы*. № 4. С. 38–56.
10. R.I.Khalmuradov and B.F.Yalgashev (2020) Frequency analysis of longitudinal-radial vibrations of a cylindrical shell. *IOP Conf. Series: Earth and Environmental Science* 614 012087 [doi:10.1088/1755-1315/614/1/012087](https://doi.org/10.1088/1755-1315/614/1/012087)
11. Kh.Khudoynazarov and Sh.R.Yaxshiboyev (2020) The Mathematical Model of Transverse Vibrations of the Three-Layer Plate. *IOP Conf. Series: Earth and Environmental Science* 614 012062 [doi:10.1088/1755-1315/614/1/012062](https://doi.org/10.1088/1755-1315/614/1/012062).
12. Kh.Khudoynazarov and Z.B.Khudoyberdiyev (2020) Unsteady vibrations of a three-layer plate with an asymmetric structure. *IOP Conf. Series: Earth and Environmental Science* 614. 012061 [doi:10.1088/1755-1315/614/1/012061](https://doi.org/10.1088/1755-1315/614/1/012061).
13. R.I.Khalmuradov and E.A.Ismoilov (2020) Nonlinear vibrations of a circular plate reinforced by ribs. *IOP Conf. Series: Earth and Environmental Science* 614. 012071 [doi:10.1088/1755-1315/614/1/012071](https://doi.org/10.1088/1755-1315/614/1/012071).
14. Р.И.Халмурадов, Х.Худойназаров, З.Худойбердиев. (2017) Свободные колебания упругой трёхслойной пластинки // *Узбекский журнал Проблемы механики*. №2-3. 46-52.
15. Omer Civalek (2006) An efficient method for free vibration analysis of rotating truncated conical shells// *International Journal of Pressure Vessels and Piping*. 83(1). pp. 1-12. <https://doi.org/10.1016/j.ijpvp.2005.10.005>
16. Qinkai H., Fulei C. (2013) Effect of rotation on frequency characteristics of a truncated circular conical shell// *Arch. Appl. Mech.* 83. 1789–1800. <https://doi.org/10.1007/s00419-013-0778-x>.
17. К Кудайназаров (1990) Продольный удар по круговой цилиндрической вязкоупругой оболочке// *Изв. АН УзССР. Сер. Техн. науки*. №3. 31-37.
18. Khudoynazarov K., Khudoyberdiyev Z., Khudoyberdiyeva, S. Symmetrical Vibrations of a Three-Layer, Longitudinally Covered Plate. *Int. J. of Advanced Research in Science, Engineering and Technology*. 5(10). pp. 7117-21.

UDC: 681.3.06

IMPROVEMENT OF MATHEMATICAL MODELS OF THE RATING POINT SYSTEM OF EMPLOYMENT**A.R.Akhatov¹, D.R.Mardonov², M.Q.Nurmamatov² and F.M.Nazarov²**¹*Jizzakh branch of national university of Uzbekistan*²*Samarkand state university**akmalar@rambler.ru, dilmurod20@mail.ru, fayzullo-samsu@mail.ru*

Abstract. The rapid development of information technology and the growing flow of information require the management of processes without the human factor. At the same time, it serves to organize the management of processes without the human factor in the learning process, to create a transparent environment for assessment, and to improve the quality of education. At present, it is important to meet the demand for quality personnel and youth employment in all countries. To solve these problems, it is necessary to determine the ranking of students in higher education institutions and provide employment based on the rating, as well as to develop an automated system for evaluating the ranking of these higher education institutions. Employers should be able to offer jobs to students with high ratings by selecting higher educational institutions in the required specialization, with open access to an automated system of rating and employment relations. In this paper, mathematical models for calculating rating processes for a system of automation of ratings and employment relationships are studied. In the process of calculating the rating, several parameters were adopted, namely the results of educational, scientific-creative, spiritual-educational activities and indicators of non-compliance of the student with the rules of the higher education institution. Mathematical models of calculation of rating points on the results of educational, scientific-creative, spiritual-enlightenment activity of the student are developed. An experimental experiment is conducted based on the developed mathematical models and the state of the models is analyzed.

Keywords: Rating and employment relations, rating system, mathematical modeling, management, learning activities, scientific and creative activities, spiritual and educational activities, automation.

Bandlikni ta'minlashda, reyting ball tiziminining matematik modellarini takomillashtirish

Annotatsiya. Axborot texnologiyalarining keskin rivojlanishi va axborot oqimlarining tobora ortib borishi jarayonlarni inson omilisiz boshqarishni taqozo etmoqda. Shu bilan bir qatorda o'quv jarayonida ham inson omilisiz jarayonlarni boshqarishni tashkillashtirish, baholashning shaffof muhitini yaratish va ta'lim sifatini oshirishga xizmat qiladi. Hozirgi vaqtda barcha davlatlarda sifatli kadrlarga bo'lgan ehtiyojlarni qondirish va yoshlarni bandligini ta'minlash dolzarb bo'lib qolmoqda. Bu muammolarni hal etish uchun oliy ta'lim muassasalaridagi talabalarning reytingini aniqlash va reyting asosida bandlikni ta'minlash hamda bu oliy ta'lim muassasalarining reytingini baholashning avtomatlashtirilgan tizimini ishlab chiqish kerak. Ish beruvchi tashkilotlar ochiq ravishda reyting va bandlik munosabatlarini avtomatlashtirilgan tizimiga kirgan holda, kerakli mutaxassislik bo'yicha oliy ta'lim muassasalarini tanlab, reytingi yuqori talabalarga ish taklif etish imkoniyati mavjud bo'lish kerak. Mazkur tadqiqot ishida reyting va bandlik munosabatlarini avtomatlashtirish tizimi uchun, reyting jarayonlarini hisoblashning matematik modellari tadqiq etilgan. Reytingni hisoblash jarayonlarida bir nechta parametrlar ya'ni o'quv, ilmiy-ijodiy, manaviy-ma'rifiy faoliyatining natijalari va talabaning oliy ta'lim muassasasining qoidalariga rioya etmaslik ko'rsatkichlari qabul qilindi. Talabaning o'quv, ilmiy-ijodiy, manaviy-ma'rifiy faoliyatining natijalari bo'yicha reyting ball ko'rsatkichlarini hisoblashning matematik modellari ishlab chiqilgan. Ishlab chiqilgan matematik modellar asosida eksperiment tajribasi o'tkazilgan va modellarning holati tahlil qilingan.

Kalitli so'zlar. Reyting va bandlik munosabatlari, reyting tizimi, matematik modellashtirish, boshqaruv, o'quv faoliyat, ilmiy-ijodiy faoliyat, ma'naviy-ma'rifiy faoliyat, avtomatlashtirish.

Улучшение математических моделей системы рейтинговых баллов при обеспечении занятости

Аннотация. Быстрое развитие информационных технологий и растущий поток информации требуют управления процессами без человеческого фактора. В то же время он служит для организации управления процессами без учета человеческого фактора в процессе обучения, для создания прозрачной среды для оценивания и повышения качества обучения. В настоящее время во всех странах важно удовлетворить спрос на качественный персонал и занятость молодежи. Для решения этих задач необходимо определить ранжирование студентов в высших учебных заведениях и обеспечить трудоустройство на основе рейтинга, а также разработать автоматизированную систему оценки рейтинга этих высших учебных заведений. Работодатели должны иметь возможность предлагать работу студентам с высокими рейтингами, выбирая высшие учебные заведения по требуемой специализации, с открытым доступом к автоматизированной системе рейтинга и трудовых отношений. В статье исследуются математические модели расчета рейтинговых процессов для системы автоматизации рейтингов и трудовых отношений. В процессе расчета рейтинга были приняты несколько параметров, а именно результаты учебной, научно-творческой, духовно-воспитательной деятельности и показатели несоблюдения студентом правил высшего учебного заведения. Разработаны математические модели расчета рейтинговых баллов по результатам учебной, научно-творческой, духовно-просветительской деятельности студента. На основе разработанных математических моделей проводится экспериментальный эксперимент и анализируется их состояние.

Ключевые слова: рейтинговые и трудовые отношения, рейтинговая система, математическое моделирование, менеджмент, учебная деятельность, научная и творческая деятельность, духовно-просветительская деятельность, автоматизация.

1. Introduction

In today's information age and globalization, non-human control through the automation of processes based on mathematical models serves to ensure the efficiency and transparency of work. Circumstances such as the rapid development of information technology and the rapid growth of information flows, as well as the rapid change of data, encourage mankind to find ways to process this information in a timely manner. At the time when information technology is rapidly entering all spheres of society, the role of information technology in the education system is growing rapidly [1,2]. Creating information systems based on digital technologies and applying them to the learning process reduces the human factor in the assessment system. The development of instructional modules on the basis of the most advanced mathematical models in the automation of control processes, as well as the optimal planning and design, defines new approaches to the solution of control problems.

Ensuring employment is an urgent and long-term task of socio-economic policy and development of the country. The increase in the number of graduates, in turn, creates competition among them for successful employment [2]. Today, the system of employment of young people, ensuring that they have a decent job and the selection of talented and mature specialists by employers is not complete [2,3]. In the process of staffing, employers' rating scores in the training process are a key factor in selecting talented and mature professionals. Determining the ranking of students and determining the ranking of higher educational institutions on the basis of ensuring their employment marks is a new approach in this area [3,4]. The educational process alone is not enough to pay attention to the rating of staff, where his creative activity, achievements and shortcomings clearly determine the potential of staff. Therefore, it is necessary to create an automated system for the relations between rating and employment, and to implement online the process from the moment of admission of students to higher education institutions to graduation and employment. In this case, if the employer is openly included in the automated system and selects higher education institutions in the required specialty, it will be possible to issue a contract to offer work to students with high ratings. At the same time, when a student applies for a job in an influential organization, it is possible to send information about his rating online from the system [4]. Rating indicators of students are formed mainly taking into account the results of educational, scientific, creative, spiritual and educational activities and the student's non-compliance with the rules of higher education. In order to implement these processes, it is necessary to develop sufficiently optimal mathematical models. Because the processes in the given system are carried out by complete mathematical models. The mechanisms and algorithms of the system of automation of rating and employment relations are described in detail in our previous research [2,7]. Mathematical models of calculation of rating indicators are insufficient, taking into

account the results of simultaneous study, scientific-creative, spiritual-educational activities and non-compliance with the rules of higher education.

Therefore, the development of mathematical models that take into account the results of simultaneous educational, scientific, creative, spiritual and educational activities and non-compliance with the rules of higher education is a major issue today. In this work, the development of mathematical models for calculating rating processes is studied.

2. Mathematical modeling of learning process outcomes

The concept of weighted coefficient is used in the calculation of rating scores on the basis of learning outcomes, because not all Courses are considered basic in the calculation of the rating of learning outcomes. The weighted coefficients are high in the majors, medium in the foreign languages, and low in the social sciences. From this, the true rating of the student as a specialist is determined in [5,6].

We determine the rating score for academic Courses by D , and it is determined by the formula (1).

$$D = \sum_{i=1}^n \alpha_i S_i \quad (1)$$

In the given formula (1) α_i is the weighted coefficient of the i^{th} learning activity, S_i is the evaluation factor of the i^{th} learning activity. The S_i rating can be on a 100-point scale or on a 5-point scale. The coefficients of assessment of the type of α_i educational activity satisfy the inequality $\alpha_i \leq 1$, It is recommended that the sum of α_i is equal to 1.

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 \quad (2)$$

The values of the weighted coefficient α_i can also be set voluntarily depending on the activity of the higher education institution [7].

The parameter S_i given in the above formula (1) is a rating indicator of the student by one Course and it is calculated on the basis of the following formula.

$$S_i = \sum_{j=1}^n \left(\frac{b_j + p_j + m_j}{3} - \frac{t_1}{t_2} - z_j \right) \quad (3)$$

The parameters in the developed formula (3) are defined as follows:

b_j – an indicator of theoretical knowledge of the Course;

p_j – an indicator of practical or laboratory knowledge of the Course;

m_j – an indicator of knowledge of independent teaching of the Course;

t_1 – hours of absence on the Course;

t_2 – total hours allocated for the Course;

z_j – The indicator of a student's non-compliance with the rules of internal discipline in the educational process, which is set by the institution of higher education, is usually recommended to set 10% of the total score.

The parameter $\frac{t_1}{t_2}$ in formula (3) may or may not be poured by the higher education institution.

This is because, in some higher educational institutions, the student's attendance status is not important [8].

Thus, the rating of students by one Course is calculated by the formula (1), the parameter S_i in the formula (1) is calculated by the formula (3).

The practical or laboratory knowledge index of a Course provided in the above formula is calculated based on the formula (4) because the student's practical experience is important in practical or laboratory classes.

$$p_i = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (p_{i,j}) + f \quad (4)$$

Practical or laboratory knowledge of the Course can be determined based on m parameters, i.e. in the case of $m = 3$:

$m = 1$ level of practical or laboratory training;

$m = 2$ level of use of technical equipment or tools in practical or laboratory training;

$m = 3$ is assessed based on the degree of formalization of practical or laboratory training. The value of the parameter m can be increased or decreased by the teacher of practical or laboratory classes. The parameter f in the developed formula (4) is determined and added by the teacher to the students who have innovated in the framework of practical or laboratory classes [9].

An experiment was conducted on the developed models as an example of the Faculty of Applied Mathematics and Informatics of Samarkand State University. The research experiment is described in Table 1.

Table 1. Rating score indicators of academic Courses

Course type	α_j	t_1	t_2	z_j	b_j	p_j	m_j	S_j	D
Specialty	0,6	2	30	10	5	4	4	2,0488	3,5261
Foreign language	0,3	4	30	0	4	4	4	1,16	
Social	0,1	4	30	10	4	3	4	0,3173	

The grades were taken on a 5-point scale, and the student's non-compliance with the internal rules of the academic process was set at 10%, and the student's rating score by 3 academic Courses was 3.5261.

The developed mathematical models will be placed in the modules of the system of automation the relations between students' rating and employment. Variable parameters in the content of mathematical models, that is, the parameters set by the teacher, can be placed in the system.

3. Mathematical modeling of the results of scientific-creative and spiritual-enlightenment activities

To determine the level of creativity and initiative of students and to encourage them on their achievements, it is expedient to calculate the rating scores on the results of scientific, creative and spiritual-educational activities. Rating scores on the results of scientific-creative and spiritual-enlightenment activities serve as a key factor in the formation of a healthy competitive environment among students in terms of creativity and initiative and the development of their creative aspects.

We determine the rating scores on the results of scientific and creative activity by the parameter Q and propose a model in the form of the following formula.

$$Q = \sum_{i=1}^n \left(\sum_j^m w_{ij} + \sum_k^l v_{ik} + h_i \right) - \sum_{i=1}^n r_i \quad (5)$$

The rating of the results of scientific and creative activity depends on such parameters as the relevance of the score, the relevance of the scientific research, the discussion of scientific research at conferences, the application of the scientific research (the act of application, patent, certificate) and the negative consequences of scientific research.

The parameters in formula (5) are defined as follows:

w_{ij} – an indicator of scientific research discussed at conferences;

v_{ik} – an indicator of the application of scientific research;

h_i – an indicator of the level of relevance of scientific research;

r_i – an indicator of the negative consequences of scientific development.

In many cases, there are also some negative consequences of scientific and creative research in the fields of chemistry, biology, medicine. Consideration of this parameter in the rating system serves to minimize the negative consequences of research [10].

According to the results of the developed scientific and creative activity, an experiment was conducted on the models of rating scores on the example of the Faculty of Applied Mathematics and Informatics of Samarkand State University. The research experiment is described in Table 2.

Table 2. Rating score indicators on the results of scientific and creative activity

Student ID (Scientific and creative activity)	w_j	j	v_j	k	h_i	r_i	i	Q
1	10	3	20	2	20	5	2	80
2	10	4	20	1	20	5	3	65
3	10	3	20	1	20	5	0	70

The calculation process of the data in Table 2 above, is performed as follows.

$$Q_1 = 10 \times 3 + 20 \times 2 + 20 - 5 \times 2 = 80, \quad Q_2 = 10 \times 4 + 20 \times 1 + 20 - 5 \times 3 = 65$$

Based on the models developed above, the rating is based on the results of the scientific and creative activities of students.

The main tool for online calculation of rating scores on the results of the spiritual and educational activities of students is the indifference of students to the measures set by the state, the development of their political consciousness, and the formation of management capacity. The healthy competition of rating points among students on the results of spiritual and educational activities, of course, contributes to the development of their initiative and political consciousness.

Therefore, it is necessary to develop an optimal mathematical model for the formation of the rating score module on the results of spiritual and educational activities in the structure of the system of automation the relations between rating and employment.

We determine the rating score on the results of spiritual and educational activities by the parameter G and propose a model in the form of the following formula.

$$G = \sum_i (\sum_j^m u_{ij} + y_i + g_i) \quad (6)$$

Rating on the results of spiritual and educational activities depends on such parameters as the score, the political significance of the spiritual and educational activities, the discussion of the spiritual and educational activities among the population and the positive consequences of the spiritual and educational activities (ideas such as combating crime among young people).

The parameters of the developed formula (6) are defined as follows:

u_{ij} – an indicator of the discussion of the spiritual and educational event among the population;

y_i – an indicator of the political significance of the spiritual and educational event;

g_i – an indicator of the positive consequences of the spiritual-educational event.

An experiment was conducted as an example of the Faculty of Applied Mathematics and Informatics of Samarkand State University by the models of rating scores on the results of spiritual and educational activities, developed in the form of the formula (6). The research experiment is described in Table 3.

Table 3. Rating score indicators on the results of spiritual and educational activities

Student ID (Scientific and creative activity)	w_j	j	v_j	k	h_i	r_i	i	Q
1	10	3	20	2	20	5	2	80
2	10	4	20	1	20	5	3	65
3	10	3	20	1	20	5	0	70

The calculation process of the data in Table 3 above is performed as follows.

$$G_1 = 20 \times 3 + 15 + 20 = 95, \quad G_2 = 20 \times 2 + 15 + 20 = 75$$

Based on the developed models, the rating is based on the results of the spiritual and educational activities of students and is placed in the modules of the automated system.

In the current context of globalization, it is important to train young people in the spirit of patriotism, to demonstrate scientific and creative abilities, to develop management potential and political consciousness based on the formation of a ranking of academic achievements. Thus, a student with a high

rating realizes that his or her future is bright and ensures continuous movement throughout the study. The mathematical models developed to carry out these processes serve as a fundamental knowledge base.

Mathematical models for calculating rating scores on the results of scientific-creative and spiritual-educational activities in the system of higher education can be applied to other types, i.e. for students of secondary special vocational colleges and high schools.

4. Mathematical modeling of the calculation of the results of the overall rating activity

It is also possible to describe the rating scores on the results of educational, scientific-creative, and spiritual-enlightenment activities given in the above sections of the research in the form of a single total score. As part of the rating and automation of employment relations, rating scores on the results of educational, scientific-creative, and spiritual-educational activities of each student are formed separately, and their generalized rating scores are also formed.

We offer a model in the form of the following formula (7) to describe the rating scores on the results of educational, scientific-creative and spiritual-educational activities of students in the form of a single total score.

$$R = \frac{1}{3} \left(\sum_{j=1}^m (\beta_1 D_j + \beta_2 Q_j + \beta_3 G_j) \right) - x_i \quad (7)$$

Weight coefficients are used in the process of calculating the rating score on the results of simultaneous educational, scientific-creative, and spiritual-educational activities. In the process of calculating the overall rating, the weight coefficients serve to align the overall 100-point system. In this case, the formula (7) satisfies the condition $\beta_i \leq 1$ and the weight coefficient in (2).

The parameters in formula (7) are defined as follows:

β_i – an indicator of weight coefficients;

D_j – a score of educational activity;

Q_j – a score of scientific and creative activity;

G_j – a score of spiritual-enlightenment activity;

x_i – an indicator of non-compliance with the rules of the higher education institution.

The indicator of non-compliance with the rules of the higher education institution is determined in the case discussed by the Academic Council of the higher education institution and entered into the system by the dean of the faculty. In this work, it is recommended that the parameter x_i can be taken as 10% of the overall rating.

The values of the weighting factor in formula (7) are recommended as follows, which can also be determined by the higher education institution [7, 9].

$$\beta_1 = 0.35, \beta_2 = 0.45, \beta_3 = 0.20$$

An experiment was conducted as an example of the Faculty of Applied Mathematics and Informatics of Samarkand State University on the models of rating scores on the results of spiritual and educational activities, developed in the form of the formula (6). The research experiment is described in Table 4.

Table 4. Overall rating scores

Student ID (General rating)	x_j	D_j	β_1	Q_j	β_2	G_j	β_3	R
1	0	80	0.35	75	0.45	65	0.20	74.75
2	0	75	0.35	75	0.45	60	0.20	72.0
3	5.875	60	0.35	55	0.45	65	0.20	52.875

The calculation process in Table 4 and formula (7) is performed as follows.

$$D_1 = 80. Q_1 = 75. G_1 = 65 \Rightarrow R = 0.35 \cdot 80 + 0.45 \cdot 75 + 0.20 \cdot 65 - 0 = 74.75$$

Based on the developed mathematical models in the structure of automation of relations between rating and employment, the module of calculation of the general rating of the student is created. Using the created module, the rating points on the results of educational, scientific-creative and spiritual-enlightenment activities of students are described in the form of a single total score.

5. The results of the experiment

An experimental experiment was conducted based on mathematical models developed in the above sections of the research work. The experiment was conducted on the example of a special group 3-03 of the Faculty of Applied Mathematics and Informatics of Samarkand State University. Initially, the group of students' grades is described in Table 5.

Table 5 Rating score indicators of student academic disciplines

Id student	Course type	α_j	t_1	t_2	z_j	b_j	p_j	m_j	S_j	D
1	Programming languages	0.6	2	40	0	90	85	80	50.7	77.22
	English	0.3	2	36	10	65	80	75	18.8	
	General psychology	0.1	4	36	0	80	80	75	7.72	
2	Programming languages	0.6	0	40	0	95	85	80	52.0	79.49
	English	0.3	2	36	0	70	80	70	21.83	
	General psychology	0.1	6	36	10	70	70	65	5.66	

If we pay attention to the results of the experiment in Table 5, the student's rating in academic Courses depends on the specialty Courses.

The experimental experience of students on the results of educational, scientific-creative and spiritual-enlightenment activities is described in Table 5.

Table 6. General rating scores of students

Student ID	x_j	D_j	β_1	Q_j	β_2	G_j	β_3	R
1	0	77.22	0.35	75	0.45	70	0.20	74.777
2	0	79.49	0.35	70	0.45	65	0.20	72.3215
3	6.35	66.52	0.35	65	0.45	55	0.20	57.182
4	0	87.22	0.35	32	0.45	25	0.20	49.927
5	0	81.59	0.35	80	0.45	55	0.20	75.5565
6	6.11	60.4	0.35	60	0.45	65	0.20	55.03
7	0	82.22	0.35	0	0.45	65	0.20	41.777
8	0	65.29	0.35	45	0.45	0	0.20	43.1015
9	0	56.52	0.35	0	0.45	0	0.20	19.782

Students' overall scores are also expressed in the form of a picture of the experimental experience, and it is depicted in Figure 1 and Figure 2.

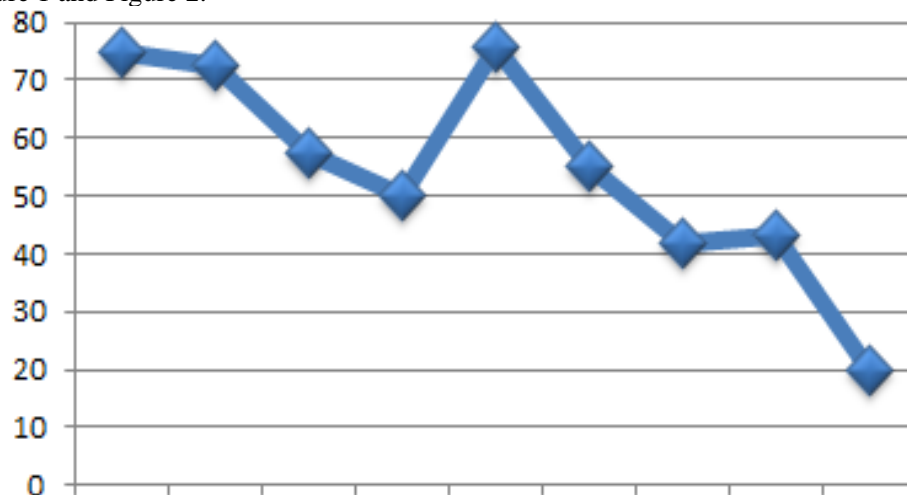


Figure 1. Graph of students' overall rating scores

Experimental experience based on the developed mathematical models shows that the rating indicators of students are mainly governed by weight coefficients. Weight coefficients are determined dependently on the area of the higher educational institution and the overall rating is determined. Experimental experience clearly shows that the working processes of mathematical models are correct.

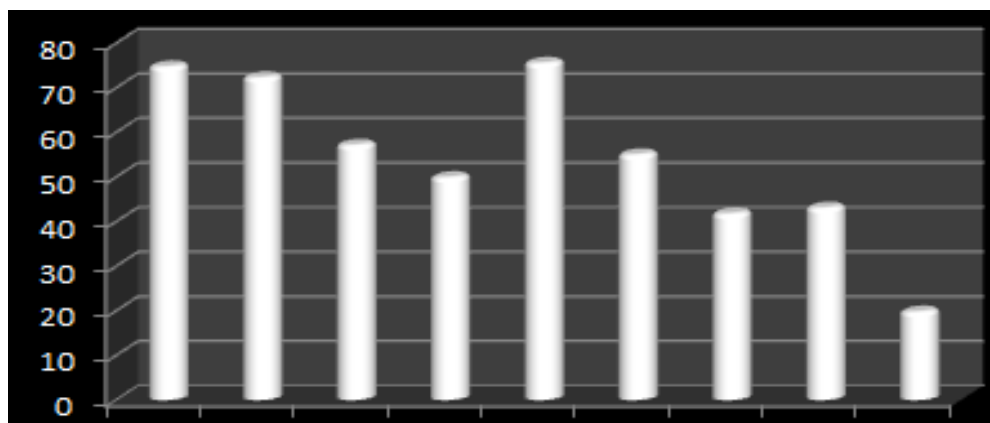


Figure 2. Diagram of students' overall rating scores

6. Conclusion

The research work examined the mathematical modeling of rating processes for the system of automation of rating and employment relations. The following results were achieved:

- Systematic analysis of ratings and employment relations;
- Mathematical models of the rating of educational activity are developed;
- Mathematical models of the rating of scientific and creative activity are developed;
- Mathematical models of the rating of spiritual and educational activities were developed;
- Mathematical models for calculating the rating scores on the results of educational, scientific-creative and spiritual-enlightenment activities in the form of a single total score;
- Experimental experiments were conducted on the developed mathematical models.

Based on the developed mathematical models the rating indicators of students are defined and on these indicators, the rating of a higher educational institutions is formed. The functioning of the system of automation of ratings and employment relations based on mathematical models of rating calculation serves to improve the quality of training and education of quality personnel.

References

1. Kryukovskiy A.S., Sobetov K.O. Matematicheskie metody rascheta osnovnykh vidov reytinga studentov v universal'noy reytingovoy informatsionnoy sisteme. Vestnik Rossiyskogo novogo universiteta. «Upravlenie, vychislitel'naya texnika i informatika», 2010. Vip. 3. – S. 58-64.
2. Axatov A., Mardonov D., Nazarov F. Modelirovaniye otnosheniya protsessov opredeleniya reytingov i zanyatosti na osnove sifrovoykh texnologiy. Vestnik TUIT.Tashkent. № 3(10).2020.
3. Goryunov I.V, Dyakov S.N. Avtomatizirovannaya sistema kontrolya znaniy studentov. Vestnik Ryazanskiy gosudarstvenniy radiotexnicheskii universitet. №3. Ryazan, Rossiya 2017 g.
4. Starichenko Boris Yevgenevich. Ball'no-reytingovaya sistema otsenivaniya uchebnoy deyatel'nosti studentov: voprosi modelirovaniya. Pedagogicheskoe obrazovanie v Rossii. 2017. № 6. – S. 205-216.
5. Danilova O.V. Informatsionnyye texnologii v reytingovoy sisteme kontrolya znaniy studentov. Informatika i obrazovanie. №4. – S. 118 – 120. Rossiya 2010.g.
6. Doroxina T.V. Kryukovskiy A.S., Sobetov K.O. Vidy reytingov i ix opisanie v universal'noy reytingovoy informatsionnoy sisteme (URIS). Informatika: problemi, metodologiya, texnologii: materialy X mezhdunarodnoy nauchno-metodicheskoy konferentsii. – Voronej: VGU, 2010. – Tom3. – S. 145-148.
7. Axatov A., Mardonov D., Nazarov F. Modelirovaniye baz danix sistemi monitoringa reytinga i trudovoykh otnosheniy. Problemi informatiki i yenergetiki, TUIT, Tashkent. № 3(5).2020.
8. I.N.Eliseev Metodologiya otsenki urovnya kompetentsiy studenta. Informatika i obrazovanie. – 2012. – № 4. – S. 80–85.
9. Abdullaev A.M. Modelirovaniye i prognozirovaniye texniko-ekonomicheskix pokazateley. Tashkent: TINX, 1988. -79s.
10. Baymuxamedov M.F. Printsipy postroeniya informatsionnoy sistemy upravleniya vuzom. Materialy respublikanskoy konferentsii «Innovatsionnyye metody i sredstva obucheniya v sfere universitetskogo obrazovaniya». Kostanay, 2004.

УДК: 621.039.573

КОРРЕЛЯЦИИ МЕЖДУ АКТИВНОСТЯМИ ${}^7\text{Be}$ В НИЖНИХ СЛОЯХ АТМОСФЕРЫ И ВЫПАДЕНИИ МОКРЫХ ОСАДКОВ 2019 ГОДА В САМАРКАНДЕН.Н.Базарбаев¹, М.Бахтиёрв¹, Т.Мавлонов², Л.Т.Нурмурадов², У.У.Тухтаев², И.Ф.Химматов²¹Национальный Университет Узбекистана²Самаркандский государственный университет

tu-ulugbek8992@bk.ru

Аннотация. Гамма – спектрометрическим методом исследованы ежемесячные вариации активностей ${}^7\text{Be}$ в пробах конденсата атмосферной влаги на корпусе самолёта. Выявлены их обратная зависимости от количества мокрых осадков.

Ключевые слова: радионуклид, сухие осадки, запылённость воздуха, гамма-спектр, активность.

2019 yilda Samarqand atmosferasining quyi qatlamlarining havo tarkibidagi ${}^7\text{Be}$ aktivligi va ho'l tushuvlarning korrelyatsiyasi

Annotatsiya. Gamma - spektrometrik usul yordamida 2019 yildagi Samarqand shahridagi atmosfera tushuvlari va samolyot tanasidagi atmosfera kondensati tarkibidagi ${}^7\text{Be}$ radionuklidi aktivligi o'rganildi. ${}^7\text{Be}$ aktivligi kondensat miqdoriga teskari bog'liqligi aniqlandi.

Kalit so'zlar: radionuklid, quruq tushuv, havoning changlanishi, gamma-spektr, aktivlig.

Correlations between ${}^7\text{Be}$ activities in the lower layers of the atmosphere and the wet deposition of 2019 in samarkand

Abstract. The gamma-spectrometric method was used to study monthly variations of ${}^7\text{Be}$ activity in samples of atmospheric moisture condensate on the aircraft body and atmospheric precipitation in 2019 in Samarkand. Their dependence on the amount of wet precipitation is inverse for ${}^7\text{Be}$ activities condensate and direct for atmospheric precipitation.

Keywords: radionuclide, dry fallout, dust level, gamma-spectrum, activity.

Введение

Космогенный радионуклид ${}^7\text{Be}$ ($T_{1/2}=54$ дн.) образуется в верхних слоях атмосферы в реакциях расщепления ядер азота, кислорода, аргона и др. атомов воздуха, высокоэнергетическим космическим излучением, а также поступает в атмосферу в составе «Солнечного ветра». В атмосфере ${}^7\text{Be}$ адсорбируется аэрозолями и пылинками. Концентрации ${}^7\text{Be}$ в приземном воздухе зависят от солнечной активности и обменных процессов между слоями атмосферы, широты местности и интенсивности выпадений с мокрыми и сухими осадками. Его вклад в радиоактивность приземного воздуха и атмосферных выпадений являются определяющим. Исследованиям концентрации ${}^7\text{Be}$ в различных средах, в том числе приземном воздухе посвящено несколько сотен исследований, выполненных в различных странах мира, на протяжении нескольких десятилетий (см., например, [1-5]). Эти исследования позволяют получить информацию, необходимую для многих областей естественных наук (радиоэкология, астрофизика, физика атмосферы, биология, почвоведения, гидрология и др.).

В Узбекистане исследования концентрации ${}^7\text{Be}$ в атмосферных выпадениях начаты в 2002 г. – в Самарканде, в 2009 г. – в Ташкенте и в 2015 г. – в Карши [6-10], а в приземном воздухе не исследовались.

В настоящей работе приведены результаты, проведённых в 2019 году в Самарканде первых пионерных исследований месячных вариации концентрации ${}^7\text{Be}$ в конденсатах влаги приземным слоев воздуха, которые сопоставлены с соответствующими значениями мокрых осадков.

Пробы

Пробы воздушных конденсатов атмосферных аэрозолей отбирались, еженедельными протирающими отрезками марли (2 м^2) корпуса самолета Боинг – 737 рейса «Москва – Самарканд», непосредственно после его посадки в аэропорту. Площадь протирки $8\times 2\text{ м}^2$. После просушивания марли упаковывались в однолитровые сосуды Маринелли.

Измерение и обработка γ – спектров

Гамма – спектры проб измерялись на сцинтиляционном спектрометре с кристаллом NaI (Тl), $63\times 63\text{ мм}$ и энергетическим разрешением $\sim 80\%$ на линии 661 кэВ ${}^{137}\text{Cs}$. Детектор с насаженной

пробой помещен в свинцовый защитный домик с толщиной стенок 10 см. Длительности измерений – 6 часов.

Обработка γ – спектров осуществлено, по методике [11] разложением спектра на составляющие:

- фона, аппроксимированного инертной пробой чистая марля,
 - EPH – аппроксимированных нормированных спектрами эталонных источников ^{222}Ra , ^{232}Th и ^{40}K из комплекта OMACHN,
 - и ^7Be . Активности проб, в основном обусловленными космогенным ^7Be
- Содержание EPH в пробах меньше уровня минимально детектируемые активности

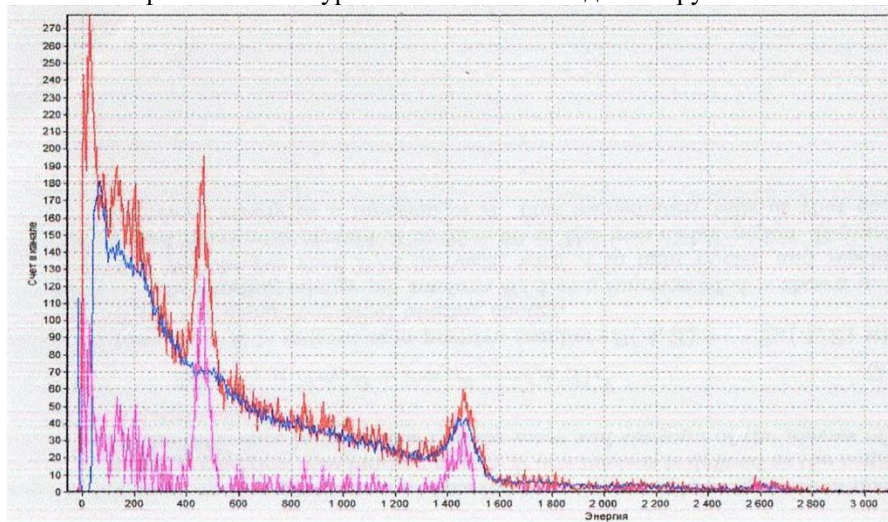


Рис. 1. γ – спектр пробы воздушного конденсата и составляющие фоном –F и космогенного ^7Be

- Значения активностей ^7Be в недельных пробах конденсата аэрозолей, относительное среднемесячного, флуктуируют в пределах $\pm 30\%$.

Экспериментальные результаты

Установленные в исследование значения активностей ^7Be в конденсатах аэрозолей (среднемесячных) приведены в таблице 1. Там же, для сравнения, приведены значения соответствующих месячных мокрых осадков.

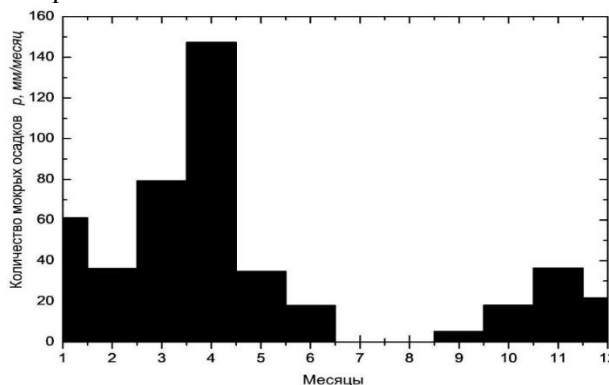
Таблица 1.

Месячные значения количества мокрых осадков – ρ , и активности ^7Be в конденсатных аэрозолях – V и атмосферный выпадениях – A в 2019 году в Самарканде.

Месяцы	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ρ мм/месяц	61,1	36,1	79,2	147,3	34,7	18,0	-	-	5,2	18,1	36,3	21,7
V Бк/мг	280	370	240	90	366	420	750	1120	800	570	330	360

Обсуждение результатов

Сопоставление установленных месячных вариаций активности ^7Be в пробах конденсатов аэрозолей с соответствующими значениями мокрых атмосферных осадков (рис. 2) свидетельствуют, что эти значения находятся, в обратной зависимости.



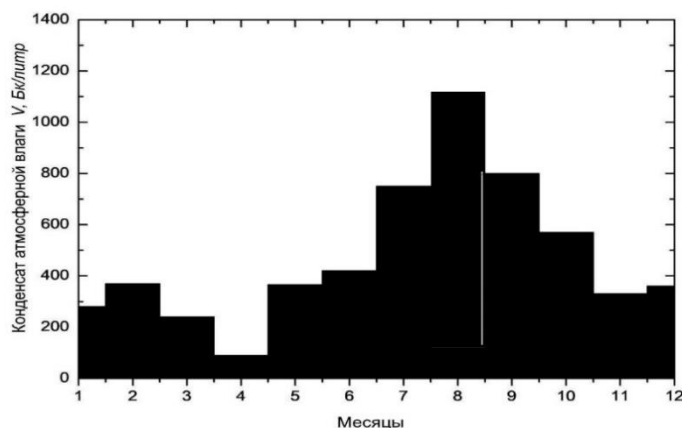


Рис 2. Месячные значения мокрых осадков – p , активностей ${}^7\text{Be}$ в атмосферных выпадениях – A и конденсата атмосферной влаги – V .

Очевидно, что это обусловлена, «промыванием» ${}^7\text{Be}$ в приземном воздухе мокрыми осадками. В связи с чем активности ${}^7\text{Be}$ дождевых сезонах года в воздухе минимальны, а в сухих сезонах максимальны, этот факт многократно отмечали в исследованиях радиоактивности воздуха в различных регионах мира.

Заключение

Проведённое исследование вариации конденсатов атмосферных аэрозолей совершенствованным их методикой, в совокупности с традиционными методами исследований радиоактивности приземных слоёв воздуха и атмосферных осадков, открывает перспективы получения дополнительной информации о физике атмосферы.

Литература

1. Петрова Т. Б., Охрименко С. Е., Власов В. К. и др. Содержание бериллия-7 в атмосферном воздухе// Сборник научных трудов АНРИ. – Москва, 2003, №3, С. 22-29
2. Давыдов М.Г. и др. Радиоактивность приземного слоя воздуха Обзор литературы. - Ростов-на-Дону, Изд-во ЮФУ, 2007. с. 67 <http://Phys.rsu.ru/Web/Students/RadSec/13.pdf>
3. Бураева Е. А., Давыдов М. Г., Зорина Л. В. и др. Содержание ${}^7\text{Be}$ в приземном слое воздуха г. Ростова н/Д// Сборник научных трудов АНРИ. – Москва, 2007, № 1, С. 63-67.
4. D. AL-Azmi, A.M. Sayed, H.A. Yatim. Variations in ${}^7\text{Be}$ concentrations in the atmosphere of Kuwait during the period 1994 to 1998//Appl. Rad. & Isot., 2001, v 55. P. 413-417.
5. G.W. Phillips, G.H. Share, S.E. King e.a. Correlation of Upper-Atmospheric ${}^7\text{Be}$ with solar energetic particle events//Geoph. Res. Let, 2001, v. 28, n 5, P. 939-942
6. Н.Н. Базаров, А. Х. Иноят, Н. Т. Муминов, Д. Ш. Саидова и др Выпадения космогенного ${}^7\text{Be}$ в окрестностях Самарканда в 2002–2009 годах. Атомная энергия, Т. 111, вып. 4, 2011, с. 228–232.
7. А.Н. Азимов, А. К. Мухамедов, А. Н. Сафаров, Н. Н. Базарбаев и др. Атмосферные выпадения ${}^7\text{Be}$ в 2009–2014 г. В Ташкенте и Самарканде. Атомная энергия, Т. 123, вып. 1, 2017, с. 53–55.
8. A.N.Azimov, N.N.Bazarbaev, A.Kh.Inoyatov, I.T.Muminov, A.K.Mukhamedov, H.S.Omonov, D.Sh.Rashidova, A.A.Safarov, I.Kh.Kholbaev, Sh.Kh.Eshkobilov. Atmospheric precipitation of ${}^7\text{Be}$ in 2009-2014 in Tashkent and Samarkand. // Atomic Energy, vol. 123, issue 1 (July), 2017, p. 53-56.
9. Г. Х. Атаходжаев, С. Махмудов, Н. Т. Муминов, А. К. Мухамедов и др Радионуклиды в сухих атмосферных выпадениях 2017 г в Ташкенте, Самарканде и Карши. Научный вестник СамГУ, с 66–68, Самарканд, 2018
10. С.Махмудов, И.Т.Муминов, Т.М.Муминов, А.К.Мухамедов, Б.Х.Ниёзов, Л.Т.Нурмуродов, А.А.Сафаров, А.Т.Худойбердиев, С.К.Юлдошев // Радионуклиды в сухих атмосферных выпадениях 2018 г. В Ташкенте, Самарканде и Карши // Научный вестник СамГУ 2019 г. №1. 75-77.
11. A.N.Azimov, Sh.Kh.Hushmuradov, I.T.Muminov, T.M.Muminov, B.S.Osmanov, A.N.Safarov, A.A.Safarov/ gamma-spectrometric determination of natural radionuclides and ${}^{137}\text{Cs}$ concentrations in environmental samples. The improved scintillation technique/ Radiation Measurements Vol.43(2008),P.66-71.

UDK: 535:21

Концентрационные и температурные зависимости соотношения Ландау-Плачека в водных растворах γ -пиколина**Х.С.Хайдаров***Самаркандский государственный университет**x-xayrillo@samdu.uz*

Аннотация. В статье исследована тонкая структура спектра изотропного рассеяния света в области прямого контакта водных растворов без электролита с конкретной точкой неустойчивого термодинамического равновесия в широком диапазоне температур и концентраций. Раскрыта закономерность изменения частотного распределения интенсивности тонких структурных элементов вокруг определенной точки (соотношение Ландау-Плачека). Определены закономерности изменения изотермической сжимаемости при изменении температуры и концентрации раствора, ее связь с флуктуационными и структурными процессами образования, а также ее влияние на формирование тонкого структурного спектра в конкретной точке исследуемых систем.

Ключевые слова: раствор, неэлектролит, концентрация, термодинамика, рассеяние, спектр, составляющая, структура, изотерма, интенсивность, аномалия, спектроскопия Манделштама-Бриллюэна.

 γ -пикалиннинг сувдаги эритмасида Ландау-Плачек муносабатини концентрация ва температурага боғлиқлиги

Аннотация. Мақолада нозлектролитнинг сувли эритмаларининг температура ва концентрацияларнинг кенг диапазонида барқарор бўлмаган термодинамик мувозанатнинг махсус нуктасига бевосита тугаш соҳасида ёруғликнинг изотропик сочилиш спектрининг нозик структураси тадқиқ этилди. Махсус нукта атрофида нозик структура компоненталари интенсивлигининг частота тақсимотидаги (Ландау-Плачек муносабати) ўзгариш қонуниятлари очиб берилди. Эритманинг температураси ва концентрациясининг ўзгариши билан изотермик сиқилувчанликнинг ўзгариш қонуниятлари, унинг флуктуацион ва структура ҳосил бўлиш жараёнлари билан боғлиқлиги ҳамда ўрганилаётган системаларнинг махсус нуктасида нозик структура спектрининг шаклланишига таъсири аниқланди.

Калит сўзлар: эритма, нозлектролит, концентрация, термодинамика, сочилиш, спектр, таркибий қисм, структура, изотермик, интенсивлик, аномал, Манделштам-Бриллюэн спектроскопияси.

Concentration and temperature dependences of the landau-placzek ratio in aqueous solutions of γ -picoline

Abstract. The fine structure of the spectrum of isotropic light scattering in the region of direct contact of aqueous solutions without electrolyte with a specific point of unstable thermodynamic equilibrium in a wide range of temperatures and concentrations are investigated in the article. The regularity of the change in the frequency distribution of the intensity of thin structural elements around a certain point (Landau-Placzek relation) is revealed. The regularities of the change in isothermal compressibility with a change in the temperature and concentration of the solution, its relationship with fluctuation and structural processes of formation, as well as its influence on the formation of a fine structural spectrum at a particular point of the systems under study are determined.

Keywords: solution, non-electrolyte, concentration, thermodynamics, scattering, spectrum, component, structure, isotherm, intensity, anomaly, Mandelstam-Brillouin spectroscopy.

Введение. Для водных растворов метилпиридинов наблюдались аномальные отклонения многих физических свойств при определенной концентрации и температуре на существующей фазовой диаграмме. При исследовании спектров света, рассеянного в изотропной среде [1, 2], упомянутых выше, были обнаружены свойства водных растворов неэлектролитов, а также изучены интенсивность, скорость рассеяния света и поглощения гиперзвука [3].

Исследование показало, что суммарной интенсивностью рассеянных молекулярных лучей было наличие водных растворов [4, 5] (рассеяние изотропного света, максимальная интенсивность, низкие концентрации неэлектролитов). Многочисленные исследования показали это явление [6, 7].

Максимальный уровень этой интенсивности обычно связан с флуктуацией концентрации [4]. В данной работе с помощью метода спектроскопии Манделъштама-Бриллюэна было исследовано поведение интенсивности света при изменении концентрации и температуры водных растворов γ -пиколина.

Экспериментальная методика. Экспериментальная установка, регистрирующая спектры молекулярного рассеяния света для исследования, собрана на основе двухпроходного интерферометра Фабри-Перо с высоким разрешением [8]. При наблюдении спектра с помощью двухпроходного интерферометра в основном приводится его конструкция и метод юстировки. В конструктивном описании термостата поясняется метод контроля температуры образца во время получения результата, а также порядок очистки и оптической очистки водного раствора.

При определении области рассеяния интерферометра были получены значения от $0,417 \text{ см}^{-1}$ до $0,625 \text{ см}^{-1}$ в зависимости от изменения угла рассеяния света. Контраст интерференционного ландшафта, полученный на двухпроходном интерферометре, составил $5-10^4$, что на два градуса выше, чем у однопроходного интерферометра, а его острота-полоса составляет 35. В качестве источника излучения использовался He-Ne лазер с длиной волны $632,8 \text{ нм}$ и мощностью 15 мВт . Погрешность измерения величины зависимости интенсивностей не превышает 10-15%. При приготовлении раствора использовался химический образец, полученный волюметрическим методом «хч» (химически чистый). Спектры исследовались в диапазоне температур от $\sim 10^\circ\text{C}$ до $\sim 80^\circ\text{C}$ для каждого раствора.

Обсуждение результатов. Связь между интенсивностями тонкой структуры светорассеяния в водных растворах γ -пиколина, соотношение Ландау-Плачека, была исследована экспериментально при различных температурах и концентрациях раствора. Отмечено сильное усиление зависимости Ландау-Плачека в узком диапазоне концентраций раствора. Анализ результатов экспериментальных измерений увеличения интенсивности рассеянного света при этих концентрациях показали, что рассеяние связано с градиентом температуры, обусловленным флуктуациями диэлектрической проницаемости при постоянной плотности.

$\frac{I_c}{2I_{MB}}$ -это (I_c - интенсивность центральной компоненты, I_{MB} - интенсивность компоненты

Манделъштама-Бриллюэна) мы определяем величину как $I_{от}$ для удобства и значения этой величины были изучены при следующих концентрациях водных растворов γ -пиколина : 1; 0,8; 0,6; 0,4; 0,2; 0,1; 0,08; 0,06; 0,05; 0,03; 0,005 мольной доли.

Концентрационная зависимость соотношения интенсивностей составляющих тонкую структуру молекулярного рассеяния света представлена на рисунке 1.

Как видно из рисунка, коэффициент интенсивности для исследуемых растворов достигает максимального значения при концентрации 0,06 мольной доли γ -пиколина. Эта интенсивность была в 100 раз больше, чем значение, рассчитанное теоретически по формуле Ландау-Плачека. При малых концентрациях эта интенсивность будет иметь максимальное значение во всем температурном диапазоне. При этом исследования показывают, что теплоемкость раствора не зависит от изменений температуры и концентрации.

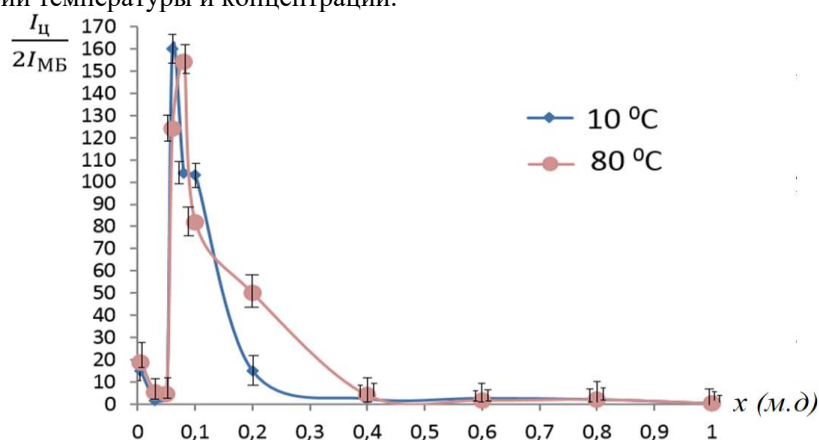


Рисунок 1. График температуры при 10°C и 80°C , показывающий, что интенсивность тонкой структуры релейной линии зависит от концентрации водного раствора γ -пиколина.

Для объяснения такого большого значения отношения интенсивностей, И.Л.Фабелинский рассмотрел отношение тонкой структурной напряженности [ссылка]. Был сделан вывод, что такой

механизм рассеяния должен учитывать изменение температуры $\left(\frac{d\varepsilon}{dT}\right)_\rho$ - флуктуацию диэлектрической проницаемости при постоянной плотности.

Таким образом, чтобы понять столь необычный механизм коэффициента отношения интенсивностей, мы подробно рассмотрим температурное поведение отношения Ландау-Плачека ($I_{от}$) для различных концентраций раствора.

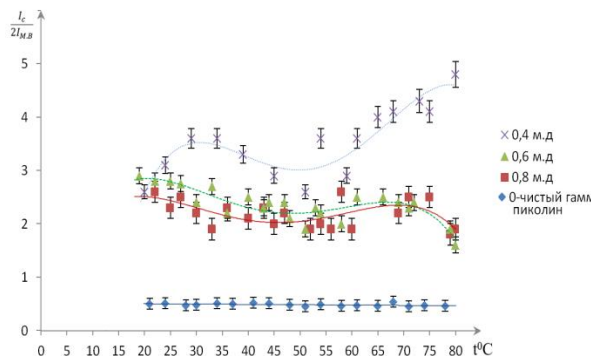


Рис.2. Температурная зависимость величины $\frac{I_c}{2I_{МВ}} = I_{от}$ для чистого раствора γ -пиколина - \blacklozenge ; концентраций 0,8 м.д. - \blacksquare , 0,6 м.д. - \blacktriangle , 0,4 м.д. - \times , γ -пиколина, соответственно.

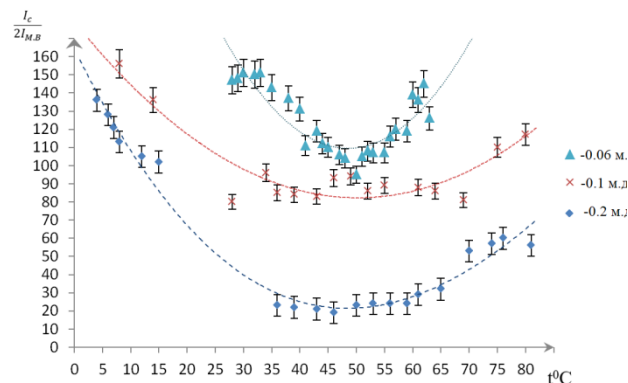


Рис.3. Температурная зависимость значений $\frac{I_c}{2I_{МВ}} = I_{от}$ при концентрациях 0,2 м.д. - \blacklozenge , 0,1 м.д. - \times , 0,06 м.д. - \blacktriangle γ -пиколина.

На рис. 2 показаны значения $I_{от}$ в чистом γ -пиколине, а также 0,8 и 0,6 м.д. в водных растворах γ -пиколина. Показано, что концентрация частиц 0,4 моль зависит от температуры раствора. Из рисунка 2 видно, что значение $I_{от}$ в чистом γ -пиколине не зависит от температуры и соответствует нормальным жидкостям по своему значению. Во всем температурном диапазоне погрешности эксперимента составляли $0,4 \div 0,5\%$. Здесь погрешность расчета площади не превышала 4%. Для концентрированных растворов значения $I_{от}$ немного выше, чем для чистого γ -пиколина, но они почти не зависят от температуры. Для концентрации $x = 0,8$ м.д. небольшое увеличение значений $I_{от}$ связано с колебаниями концентрации во время растворения молекул γ -пиколина в 0,6 м.д. Однако увеличение отношения интенсивностей при этих концентрациях не зависит от температуры.

При концентрации γ -пиколина в водном растворе $x = 0,4$ м.д. наблюдается небольшое увеличение значений зависимости $I_{от}$ - интенсивность в интервале температур $t > 50^\circ\text{C}$, что уже не связано с изменением концентрации.

Известно, что флуктуации концентрации уменьшаются с повышением температуры. Однако наблюдается рост интенсивности в высокотемпературной области из-за наличия нижней критической точки расслоения в водных растворах низкоконцентрированных метилпиридинов. Видно, что, несмотря на очень высокие концентрации γ -пиколина, слабые следы процесса проявляются при низких концентрациях.

На рис. 3 показана температурная зависимость $I_{от}$ при концентрациях 0,1, 0,2 и 0,06 м.д. Как видно из этого рисунка, при концентрациях $x = 0,2$; 0,1 и 0,06 м.д. значение отношения интенсивности уменьшается с температурой в диапазоне от 80°C до 50°C , затем относительная интенсивность повышается в диапазоне от 30°C до 7°C .

На примере температурной зависимости интенсивности при $x = 0,2$ м.д. γ -пиколина отчетливо видны три температурной области с разными зависимостями. В интервале температур от 80°C до 50°C величина отношения интенсивности $I_{от}$ уменьшается почти в 3 раза. В диапазоне температур от 50°C до 30°C это значение остается постоянным и наконец, в третьем диапазоне от 15°C до 4°C наблюдалось почти 7-кратное увеличение значения $I_{от}$. Для концентрации γ -пиколина $x = 0,06$ м.д. точка температурной инверсии наблюдается при $t = 50^\circ\text{C}$. На рисунке 3 показано, что для концентрации γ -пиколина 0,06 м.д. температура высокой критической точки (УКН) γ -пиколина составляет $t \sim 35^\circ\text{C}$, а для нижней критической температуры (ПКН) $t \sim 62^\circ\text{C}$. Таким образом, между ЮКН и ПКН располагается особая точка, положение которой соответствует температуре 50°C .

При повышении и понижении температуры давление в исследуемой кювете изменяется. Однако она приближается к более низкой критической температуре (ПКН) или более высокой критической температуре (ЮКН). Температура нижней критической точки (PKN) и верхней критической точки (UKN) зависит от концентрации. Однако конкретная точка остается независимой от концентрации раствора при температуре $t^0 = 50$.

В целом скорость флуктуации концентрации уменьшается с увеличением температуры идеальных растворов, и в то же время уменьшается интенсивность светорассеяния. В нашем случае рост интенсивности наблюдается при концентрациях $x < 0,4$ м.д. и температуре $t > 50^\circ\text{C}$. Видно, что расслоение метилпиридинов в воде связано с приближением к низкой температуре и величина отношения интенсивности $I_{от}$ увеличивается при $t < 30^\circ\text{C}$, но с понижением температуры увеличение интенсивности в интервале температур $t > 50^\circ\text{C}$ и $t < 30^\circ\text{C}$ увеличивает решение $x = 0,2$, $x = 0,1$ и $0,06$ м.д.

Для растворов с концентрациями $x = 0,2$ и $0,1$ м.д. изменение характеристик градиента температуры происходит после определенного диапазона температур. В этом случае отношение интенсивностей $I_{от}$ увеличивается от 20 (для $0,2$ м.д. γ -пиколина) до 85 ($0,1$ м.д.- γ -пиколина) в этом температурном диапазоне и почти при $x = 0,06$ м.д. Увеличивается на 100 единиц. Изменение градиента температуры для $x = 0,06$ м.д. происходит в точке, соответствующей 50°C . Из рисунка 3, это хорошо видно в этих температурных областях.

Таким образом, для $x = 0,2$ м.д. было замечено, что в определенном температурном диапазоне для концентраций $0,1$ и $0,06$ м.д. γ -пиколина в воде значения ---зависят только от концентрации.

При концентрациях $0,2$, $0,1$ и $0,06$ м.д. в растворах двухстороннее увеличение интенсивности в интервале температур $t > 50^\circ\text{C}$ и $t < 30^\circ\text{C}$ одинаково (однородно).

Для раствора с концентрацией $0,06$ м.д. γ -пиколина $I_{от}$ соответствует температурам 35°C и 62°C при максимальной интенсивности (ВКТ) и (НКТ). Отметим также, что на рис. 3 показаны тенденции его роста при повышении или понижении температуры при концентрациях γ -пиколина $x = 0,2$ и $0,1$ м.д. Следует отметить, что при повышении температуры максимальное соотношение интенсивности $I_{от}$ для этих концентраций будет выше 80°C , но эксперимент будет более сложным, поскольку раствор будет кипеть выше 80°C . Максимум при низких температурах может быть меньше, чем температура нашего исследования. Однако, как видно из рисунка 3, в температурной точке $t > 50^\circ\text{C}$ и $t < 50^\circ\text{C}$ при $x = 0,2$ и $0,1$ м.д. наблюдается тенденция к повышению $I_{от}$. Температурная зависимость $I_{от}$ системы при $0,06$ м.д. были определены два максимума при температурах $t = 35^\circ\text{C}$ и $t = 62^\circ\text{C}$, а особая точка находится в диапазоне температур приблизительно $\approx 48^\circ\text{C} - 50^\circ\text{C}$. Высокотемпературный максимум относительной интенсивности наблюдается при 60°C , а низкотемпературный максимум имеет при 30°C .

На рис. 3 отчетливо виден переход от одной области к другой при температуре 50°C с концентрацией γ -пиколина $0,06$ м.д.

Температура 50°C является пределом, разделяющий два разных процесса и особой точкой для водных растворов γ -пиколина. Ниже и выше этой температуры наблюдается одинаковый рост $I_{от}$. При повышении температуры $t > 50$ концентрированные растворы с $x = 0,2$; $0,1$ и $0,06$ м.д. приближаются к нижней точке слоя γ -пиколина.

С понижением температуры при $t < 50^\circ\text{C}$ стратификация в этих растворах приближается к высокой температуре. В обоих случаях только фазы обогащаются однотипными молекулами. Видно, что причина этой стратификации энергетически различна при низких и высоких температурах, но увеличение интенсивности центральной линии рассеяния Релея одинаково из-за увеличения флуктуаций параметра моды.

Видно, что температура конкретной точки $t = 50^\circ\text{C}$, и мы можем рассматривать этот случай как точку инверсии. Другими словами, приоритетом этого межмолекулярного взаимодействия является температура изменения. Величина температурного расстояния зависит от близости концентрации раствора к «критической».

Заключение

1. Сильный рост соотношения Ландау-Плачека вблизи конкретной точки исследуемых решений не может быть описан в рамках классической теории. Было обнаружено, что флуктуации диэлектрического поглощения при постоянной плотности температуры является дополнительным вкладом в интенсивность центральной компоненты триплета Релея.

2. Используя соотношение Ландау-Плачека, было обнаружено, что температурно-концентрационное поведение изотермической сжимаемости растворов связано с сильным

увеличением скорости температурных флуктуаций при постоянной плотности вблизи определенной точки. Обнаружено, что в узком диапазоне концентраций в области конкретной точки резкое увеличение интенсивности центральной спектральной линии тонкого структурного триплета связано с механизмами структурной перестройки на пространственных масштабах порядка 10 нм в растворе.

Литература

1. Bunkin N.F., Gorelik V.S., Sabirov L.M., Semenov D.I., Khaydarov Kh.S. // Quantum Electronics. Turpion Ltd., London, 2010. V. 40. N 9. P. 817–821.
2. Sabirov L.M., Semenov D.I. // Ukrainian J. Phys. 2015. V. 60 (9). P. 868.
3. Коваленко К.В., Кривохижа С.В., Чайков Л.Л. // Краткие сообщения по физики ФИАН. 2001. № 2, С. 40–44
4. Вукс М.Ф. Рассеяния света в газах, жидкостях и растворах. Л.: Изд. ЛГУ. 1977. С. 320.
5. Эскин В.Е. Рассеяния света растворами полимеров. М.: Наука, 1973.
6. Маломуж Н.П., Слинчак Е.Л. // Журн. Физ. химии. 2007. Т. 81. № 11. С. 1983–1988.
7. Маломуж Н.П., Слинчак О.Л. // Укр. Физ. Ж. 53 (10), 967 (2008).
8. Л. М. Кашаева, Л. М. Сабиров, Я. Т. Туракулов и Утарова Т. М., Кратк. Сообщ. Физ., №5, 41 (1981).
9. Исмаилов Ф.Р., Сабиров Л.М., Семенов Д.И., Утарова Т.М., Х. С. Хайдаров, Узб. J. Phys. 13, 294 (2011).

UDK: 530.12:523

EYNSHTEYN-SKALYAR-GAUSS-BONNET NAZARIYALARIDA “YUMRONQOZIQ INI” YECHIMLARI

S. N.Murodov

Samarqand davlat universiteti
mursardor@mail.ru

Annotatsiya. Eynshteyn-skalyar-Gauss-Bonnet nazariyalarida yumronqoziq ini yechimlarini koʻrib chiqamiz. Gauss-Bonnet bogʻlanish doimiysini oʻzgartirib, ushbu nazariyalarda yumronqoziq inlarining mavjud boʻlish sohasini aniqlaymiz. Bunda bir boʻgʻizli yumronqoziq inlari va ekvatorga ega boʻlgan ikki boʻgʻizli yumronqoziq inlari hosil boʻlishini, hamda ularning fizik xususiyatlarini oʻrganib chiqamiz.

Kalit soʻzlar: Eynshteyn tenglamalari, Gauss-Bonnet hadi, effektiv energiya-kuchlanish tenzori, qora tuynuklar, yumronqoziq inlari.

Решения кротовых нор в теориях Эйнштейна-скаляра-Гаусса-Бонне

Аннотация. Мы рассматриваем решения кротовых нор в теориях Эйнштейна-скаляра-Гаусса-Бонне. Изменяя константу связи Гаусса-Бонне, мы определяем диапазон существования кротовых нор в этих теориях. Возникают кротовые норы с одним горлом и кротовые норы с экватором и двойным горлом. Мы исследуем физические свойства этих червоточин.

Ключевые слова: уравнения Эйнштейна, член Гаусса-Бонне, эффективный тензор энергии напряженности, черные дыры, кротовые норы.

Wormhole solutions in Einstein-scalar-Gauss-Bonnet theories

Abstract. We consider wormhole solutions in Einstein-scalar-Gauss-Bonnet theories. By changing the Gauss-Bonnet coupling constant, we determine the range of existence of the wormholes in these theories. We investigate to arise wormholes with a single throat and wormholes with an equator and a double throat including the physical properties of these wormholes.

Keywords: The Einstein equations, Gauss-Bonnet term, effective stress-energy tensor, black holes, wormholes.

Kirish

Umumiy nisbiylik nazariyasida (UNN) oʻtkazadigan Lorens “yumronqoziq inlari” (*inglizcha: “wormholes”*) materiyaning qandaydir ekzotik shakliga ega boʻlishi kerak, chunki bunday yumronqoziq inlarining mavjudligi energetik holatlarni buzilishiga olib keladi [1]. Biroq, ayrim alternativ gravitatsiya nazariyalaridan foydalanib ushbu xususiyatni chetlab oʻtish mumkin. Bu nazariyalarda gravitatsiyon

ta'sirlashuvning o'zi tufayli energetik holatlar buziladi. Alternativ gravitasiya nazariyalarida hech qanday ekzotik materiallardan foydalanmay energetik holatlarni buzilishiga olib keluvchi effektiv energiya-kuchlanish tenzorini hosil qilish mumkin [2].

O'tkazuvchi Lorens yumronqoziq inlarini hosil qiladigan alternativ gravitasiya nazariyalar turlarining eng keng tarqalgani, bu Eynshteyn skalyar-Gauss-Bonnet (EsGB) nazariyalaridir [3]. Ushbu nazariyalar yuqori egrilik hadlarini o'z ichiga oladi. Bunday hadlar sifatida "tor nazariyalari" da (*inglizcha: "string theories"*) hosil bo'ladigan invariant ko'rinishidagi Gauss-Bonnet (GB) hadini misol qila olamiz. Tor nazariyalari dilaton maydonini o'z ichiga oladi va dilaton maydon bilan GB hadini eksponensial bog'lanishni ko'rsatadi. To'rt o'lchamli fazoda GB hadini harakat tenglamalariga kiritish uchun uni skalyar maydon bilan birlashtirish kerak. Buning uchun bizga umumiy bog'lanish funksiyalari kerak bo'ladi. So'nggi yillarda, ko'plab umumiy bog'lanish funksiyalari ushbu nazariyalarida keng qo'llanilmoqda [4].

O'tkazuvchi yumronqoziq inlari dilatonik EsGB nazariyalarida topilgan. Ushbu yumronqoziq inlari bitta bo'g'izga ega bo'lib, ikkita asimtotik tekislik sohasini bog'laydi. Yumronqoziq inlarining mavjud bo'lish sohasi chegaralari dilatonik EsGB qora tuynuklar to'plamidan, egrilik singularliklariga ega bo'lgan yechimlar to'plamidan va koordinata singularliklariga ega bo'lgan yechimlar to'plamidan iborat ekanligi ko'rsatilgan [5]. Bu yumronqoziq inlari o'z markazida ikki tomonlama bo'g'iz bilan o'ralgan ekvatorga ega bo'ladi.

EsGB nazariyalarida hosil bo'lgan qora tuynuklar yechimlari ushbu nazariyalarda yumronqoziq ini yechimlarining mavjud bo'lishi to'g'risidagi savollarning tug'ilishiga olib keldi. Massasiz skalyar maydonga ega bo'lgan EsGB yumronqoziq inlarini birinchi marta o'rganishining o'zidayoq yangi tushunchalar taqdim etildi [6]. Ushbu ishda, xususan, ko'p sonli bog'lanish funksiyalari yumronqoziq ini yechimlariga ega ekanligi ko'rsatilgan. Hamda, yumronqoziq ini yechimlarining mavjud bo'lish sohasi kvadratik bog'lanish funksiyasi uchun ko'rsatilgan.

Ushbu ishda biz barqaror fundamental EsGB qora tuynuklarni hosil qila oladigan bog'lanish funksiyasi orqali EsGB yumronqoziq inlarini tadqiq qilamiz. Ushbu yumronqoziq inlarining mavjud bo'lish sohasini aniqlaymiz va ularning fizik xususiyatlarini o'rganamiz.

Tasir integrali va harakat tenglamalari

Eynshteyn-skalyar-Gauss-Bonnet nazariyalarida effektiv tasir integralini quyidagicha yozamiz:

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left[R - \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - U(\phi) + F(\phi) R_{GB}^2 \right]. \quad (1)$$

Bu yerda, R skalyar egrilik. ϕ esa $F(\phi)$ bog'lanish funksiyasiga va $U(\phi)$ potensialiga ega skalyar maydon va

$$R_{GB}^2 = R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} - 4R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + R^2 \quad (2)$$

kvadratik Gauss-Bonnet hadi.

Eynshteyn tenglamalari va skalyar maydon tenglamalari, tasir integralini metrika va skalyar maydon bo'yicha variatsiyalashdan hosil bo'ladi,

$$G_\mu^{\nu} = T_\mu^{\nu}, \quad (3)$$

$$\nabla^\mu \nabla_\mu \phi + \dot{F}(\phi) R_{GB}^2 - \dot{U}(\phi) = 0. \quad (4)$$

Yuqoridagi (3) va (4) tenglamalarda effektiv energiya-kuchlanish tenzori quyidagi ifoda bilan aniqlanadi:

$$T_{\mu\nu} = -\frac{1}{4} g_{\mu\nu} (\partial_\rho \phi \partial^\rho \phi + 2U(\phi)) + \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} (g_{\rho\mu} g_{\lambda\nu} + g_{\lambda\mu} g_{\rho\nu}) \eta^{\kappa\lambda\alpha\beta} \tilde{R}_{\alpha\beta}^{\rho\gamma} \nabla_\gamma \partial_\kappa F(\phi). \quad (5)$$

Bu yerda $\tilde{R}_{\alpha\beta}^{\rho\gamma} = \eta^{\rho\gamma\sigma\tau} R_{\sigma\tau\alpha\beta}$ va $\eta^{\rho\gamma\sigma\tau} = \epsilon^{\rho\gamma\sigma\tau} / \sqrt{-g}$ kattaliklarni kiritdik va (4) tenglamadagi nuqta ϕ skalyar maydon bo'yicha hosilani bildiradi.

Barqaror sferik simmetrik yumronqoziq ini yechimlariga erishish uchun biz quyidagi chiziqli element shaklidan foydalanamiz,

$$ds^2 = -e^{f_0} dt^2 + e^{f_1} \left[d\eta^2 + h^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right]. \quad (6)$$

Bunda $h^2 = \eta^2 + \eta_0^2$ yordamchi funksiya bo'lib, η_0 esa masshtabli parametrlar. η radial koordinatalardan bog'liq ikkita f_0 , f_1 metrik, hamda ϕ skalyar maydon funksiyalari.

Skalyar maydon tenglamasidagi va Eynshteyn tenglamalaridagi metrika va skalyar maydon uchun yuqoridagi (6) yondoshuvdan foydalansak to'rtta bog'langan, chiziqli bo'lmagan, oddiy differensial tenglamalarga (ODT) kelamiz. Bu ODTda turli xil $F(\phi)$ bog'lanish funksiyalari tanlangan va skalyar

potensialning nol qiyamatlari olingan. To'rtta ODT lardan uchtasi ikkinchi tartibli va bittasi birinchi tartibli. Ammo tenglamalardan faqat uchtasi mustaqil. Raqamli tahlilimizda birinchi va ikkita ikkinchi tartibli ODTlarni yechamiz. Masshtabli almashtirishlarga ko'ra maydon tenglamalari invariant bo'ladi,

$$\eta \rightarrow \aleph \eta, \quad \eta_0 \rightarrow \aleph \eta_0, \quad F \rightarrow \aleph^2 F, \quad U \rightarrow \aleph^{-2} U, \quad \aleph > 0. \quad (7)$$

Bu esa η_0 parametrini kiritishga imkon beradi.

Bo'g'izlar, ekvatorlar va chegaraviy shartlar

Monoton yassi yumronqoziq ini yechimlarini olish uchun, biz ODTlarning tegishli chegaraviy shartlarni belgilashimiz kerak.

Yumronqoziq ini yechimlari sferik radiusning bir yoki bir nechta cheklangan ekstrimumlariga ega bo'ladi,

$$R_C = e^{f_1/2} h. \quad (8)$$

Eng oddiy holatda, ular minimal qiymatga ega bo'lib, bu esa bitta bo'g'izga mos keladi. Ammo ular ikkita minimal bilan o'ralgan lokal maksimumga ham ega bo'lishi mumkin. Lokal maksimum shundan keyin ularning ekvatoriga to'g'ri keladi, ikkita minimal esa ularning ekvatorini o'rab turgan ikkita bo'g'izni anglatadi.

Ichki chegaraviy shartlarini olish uchun $\eta = 0$ da sferik radiusning ekstremumi mavjud bo'lishi kerak. Bu quyidagini hosil qiladi,

$$\left. \frac{dR_C}{d\eta} \right|_{\eta=0} = 0 \Leftrightarrow \left. f_1' \right|_{\eta=0} = 0. \quad (9)$$

Shunday qilib, biz $\left. f_1' \right|_{\eta=0} = 0$ shartni markazdagi chegaraviy shartlarimizdan biri sifatida tanlaymiz.

Bundan tashqari, biz markazda quyidagi uchta shartdan birini tanlaymiz,

$$f_0|_{\eta=0} = f_{0c}, \quad f_1|_{\eta=0} = f_{1c}, \quad \phi|_{\eta=0} = \phi_c. \quad (10)$$

Aseptomatik yassi yechimlarni olish uchun cheksizlikdagi chegaraviy shartlardan foydalanamiz,

$$f_0|_{\eta=\infty} = 0, \quad f_1|_{\eta=\infty} = 0, \quad \phi|_{\eta=\infty} = 0. \quad (11)$$

Cheksizlikdagi funksiyalarning kengayishi M massani quyidagicha tanlashimiz mumkinligini ko'rsatadi,

$$f_1 = \frac{2M}{\eta} + O\left(\frac{1}{\eta^2}\right). \quad (12)$$

Yechimlar simmetrik bo'lganligi sababli, massa fazo-vaqtning ikkala asimptotik tekis qismlarida bir xil qiymatga ega. Massa hadiga ega bo'lgan yumronqoziq ini yechimlari tufayli yo'qolgan skalyar zaryad skalyar maydonning eksponensial so'nishiga bog'liq bo'ladi.

Energetik shartlar

Yumronqoziq inlari yechimlarida nol energetik holat (NEH)

$$T_{\mu\nu} n^\mu n^\nu \geq 0 \quad (13)$$

buzilgan bo'lishi kerak. Bu yerda n^μ qandaydir nol vektor ($n^\mu n_\mu = 0$).

$$n^\mu = (1, \sqrt{-g_{tt}/g_{\eta\eta}}, 0, 0) \quad (14)$$

va shu tariqa $n_\mu = (g_{tt}, \sqrt{-g_{tt} g_{\eta\eta}}, 0, 0)$ ni aniqlagan holda NEH sferik nosimmetrik fazoda

$$T_{\mu\nu} n^\mu n^\nu = T_t^t n^t n_t + T_\eta^\eta n^\eta n_\eta = -g_{tt} (-T_t^t + T_\eta^\eta) \quad (15)$$

shaklni oladi. Shunday qilib, NEH,

$$-T_t^t + T_\eta^\eta \geq 0. \quad (16)$$

Shu bilan bir qatorda,

$$n^\mu = (1, 0, \sqrt{-g_{tt}/g_{\theta\theta}}, 0). \quad (17)$$

dan aniqlash mumkinki, NEH,

$$-T_t^t + T_\theta^\theta \geq 0. \quad (18)$$

ga teng. Yumronqoziq ini yechimlari uchun ushbu shartlar buzilishi kerak [7,8].

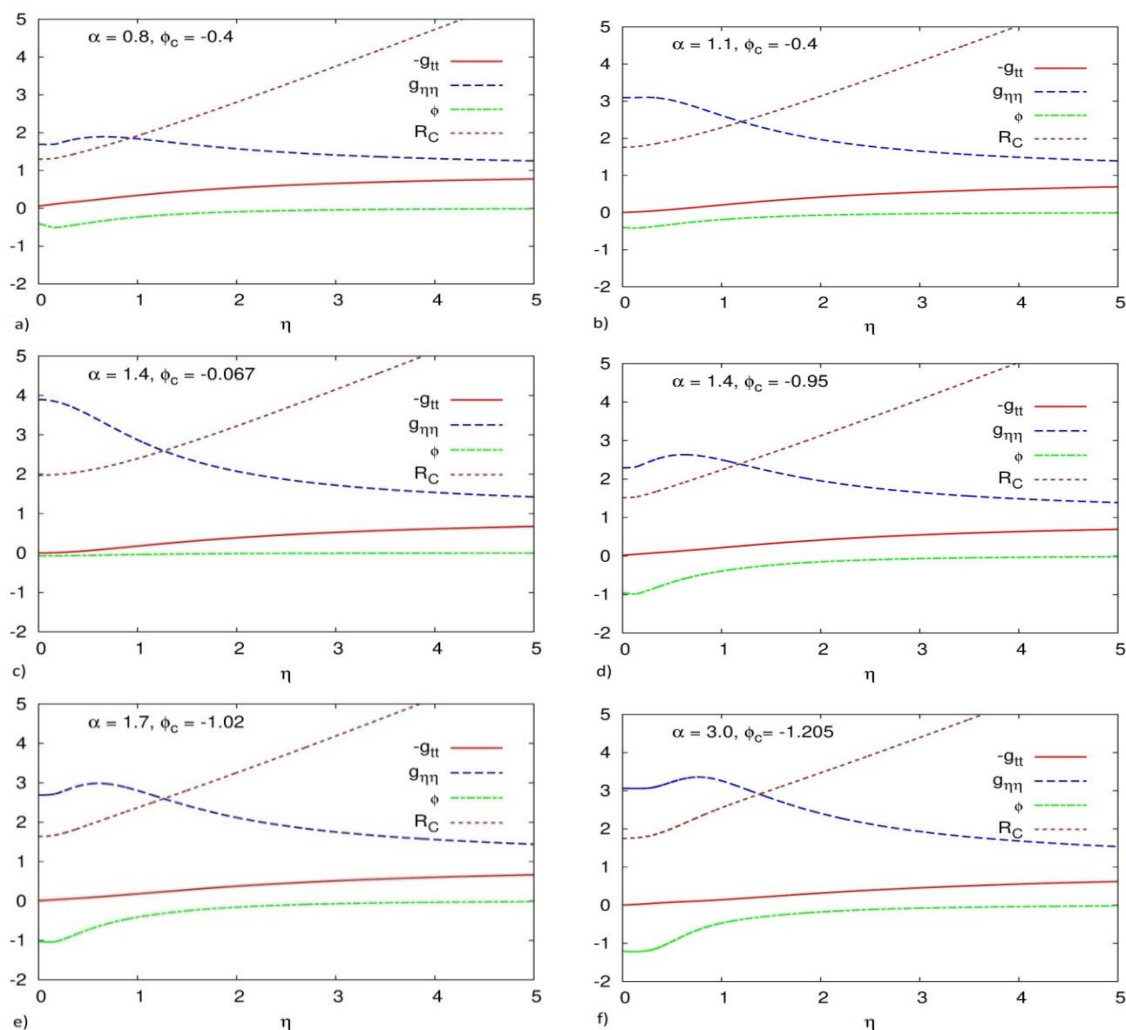
Natijalar

Biz natijalar olishda “Mathematica for Windows” va “Fortran” kompyuter dasturlaridan foydalandik. Quyida $F(\phi)$ bog'lanish funksiyasi va $U(\phi)$ potentsial bilan olingan natijalarimizni taqdim etamiz,

$$F(\phi) = \frac{\alpha}{2\beta} (1 - e^{-\beta\phi^2}), \quad U(\phi) = \lambda (c_2\phi^2 + c_4\phi^4 + c_6\phi^6). \quad (19)$$

Biz o'zgarishni $\beta=1.5$ deb olamiz, broq α erkin parametr sifatida qaraladi. To'liq potentsialdan foydalanib $\lambda=0.06$, $c_2=1.1$, $c_4=-2$ va $c_6=1$ larni keltirib chiqaramiz, massa hadi bo'lgan holatda $\lambda=0.06$, $c_2=1.1$ lar saqlanadi, ammo $c_4=c_6=0$ hosil bo'ladi. Bundan tashqari, $\eta_0=1$ bo'ladi.

O'zaro ta'sir potentsialiga ega bo'lgan ymronqoziq ini yechimlar to'plamining chiziqli funksiyalarini ko'rb chiqamiz. Bunda(1-rasm) $-g_{tt}$ va $g_{\eta\eta}$ metrik componentalarni, ϕ skalyar maydonni va R_C sferik radiusni η radial koordinataga bog'liqligi ko'rsatilgan. Ikkita erkin parametrlar, ya'ni α bog'lanish doimiysi va markazdagi ϕ_c skalyar maydon qiymati uchun biz quyidagilarni tanladik: (a) α ning minimal qiymatiga yaqin qiymati uchun $(\alpha, \phi_c) = (0.8, -0.4)$; (b) α ning katta qiymati uchun $(1.1, -0.4)$; (c) qora tuynuk chegarasiga yaqin ϕ_c ning qiymati uchun $(1.4, -0.067)$; (d) ϕ_c ning kichik qiymati uchun $(1.4, -0.95)$; (e) ϕ_c ning boshqa kichik qiymati uchun $(1.1, -1.02)$; (f) α ning maksimal qiymatiga yaqin qiymati uchun $(3.0, -1.205)$.



1-rasm. (α, ϕ_c) parametrlarga ega yumronqoziq ini yechimlari uchun, $-g_{tt}$ va $g_{\eta\eta}$ metrik komponentalarni, ϕ skalyar maydonni va R_c sferik radiusni η radial koordinataga bog'liqligi:

$$(a) (\alpha, \phi_c) = (0.8, -0.4), (b) (\alpha, \phi_c) = (1.1, -0.4), (c) (\alpha, \phi_c) = (1.4, -0.067), \\ (d) (\alpha, \phi_c) = (1.4, -0.95), (e) (\alpha, \phi_c) = (1.2, -1.02), (f) (\alpha, \phi_c) = (3.0, -1.205)$$

Metrik funksiya $-g_{tt}$ har doim monoton ravishda markazdagi kichik qiymatdan o'zining asimptotik qiymatigacha ko'tariladi. Odatda, metrik funksiya $g_{\eta\eta}$ monoton emas, biroq o'zining asimptotik qiymatiga yaqinlashishidan oldin, markazdagi minimumdan o'zining maksimal qiymatiga oshadi. Ammo qora tuynuk chegarasiga yaqinlashganda, u markazdagi o'zining maksimumi bilan monoton bo'ladi va $g_{\eta\eta}(0) = 4$ bo'lganda qora tuynuk qiymatiga yaqinlashadi (1(c)-rasm). Qora tuynuk chegarasiga yaqinlashganda skalyar maydon juda kichik bo'ladi. Ammo hech qachon katta absolut qiymatlarni qabul qilmaydi. Qora tuynuk chegarasi yaqinlashganda, R_c sferik radiusning qiymati $R_c(0) = 2$ ga yaqinlashadi (1(c)-rasm). Bir bo'g'izga ega yumronqoziq ini yechimlarida R_c monoton ravishda oshgan paytda, markazda ekvator va ikkita bo'g'izga ega yumronqoziq ini yechimlari uchun maksimum hosil bo'ladi.

Xulosa

EsGB nazariyalari qora tuynuklardan tashqari yumronqoziq ini yechimlariga ham olib kelar ekan. Bunda ularning effektiv energiya-kuchlanish tensori gravitatsion soha orqali energetik shartlarni buzadi. Biz α GB bog'lanish doimiysini va ϕ_c markazdagi skalyar maydon qiymatlarini o'zgartirib, bir bo'g'izga va ekvator bilan chegaralangan ikki bo'g'izga ega yumronqoziq ini yechimlarining mavjud bo'lish sohasini aniqladik.

Adabiyotlar

1. M.S. Morris and K.S. Thorne. Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity. *Am. J. Phys.* 56, 395 (1988).
2. P. Kanti, B. Kleihaus, and J. Kunz. Wormholes in Dilatonic Einstein-Gauss-Bonnet Theory. *Phys. Rev. Lett.* 107, 271101 (2011).
3. P. Kanti, B. Kleihaus, and J. Kunz. Stable Lorentzian wormholes in dilatonic Einstein-Gauss-Bonnet theory. *Phys. Rev. D* 85, 044007 (2012).
4. B. Kleihaus, J. Kunz, and P. Kanti. Properties of ultracompact particlelike solutions in Einstein-scalar-Gauss-Bonnet theories. *Phys. Rev. D* 102, 024070 (2020).
5. G. Antoniou, A. Bakopoulos, P. Kanti, B. Kleihaus, and J. Kunz. Novel Einstein-scalar-Gauss-Bonnet wormholes without exotic matter. *Phys. Rev. D* 101, 024033 (2020).
6. R. Ibadov, B. Kleihaus, J. Kunz, S. Murodov. Wormholes in Einstein-scalar-Gauss-Bonnet theories with a scalar self-interaction potential. *Phys. Rev. D* 102, 064010 (2020).
7. O. Hauser, R. Ibadov, B. Kleihaus, J. Kunz. Hairy wormholes and Bartnik-McKinnon solutions. *Phys. Rev. D* 89, 064010 (2014).
8. R. Ibadov, S. Murodov. Eynshteyn tenglamalarining sferik simmetrik va statik yumronqoziq inlariga olib keluvchi yechimlari. *Science and Education*, ISSN 2181-0842 1 (2), 33-38 (2020).

УДК: 539.163:691

РАДИАЦИОННАЯ БЕЗОПАСНОСТЬ СТРОИТЕЛЬНЫХ МАТЕРИАЛОВ В УЗБЕКИСТАНЕ

Сафаров А.Н.¹, Шаронов И.А.¹, Мухамедов А.К.¹, Азимов А.Н.¹, Сафаров А.А.¹, Салимов М.И.²

¹ Самаркандский государственный университет,

² Институт Ядерной Физики АН Узбекистана

Аннотация. Сделаны измерения радиоактивности дозообразующих радионуклидов радия Ra-226, тория Th-232 и калия K-40 в пробах разных строительных материалов. Определены удельные эффективные активности проб строительных материалов. Оценены вклады дозообразующих радионуклидов в удельные эффективные активности.

Ключевые слова: радионуклиды, радиационная безопасность, анализ радиологический, строительные материалы.

Radiation safety of building materials in Uzbekistan

Abstract. We measured the radioactivity of dose-forming radionuclides Ra-226, Th-232, K-40 in different building materials samples. Specific effective activities of samples of building materials were determined. Contributions of dose-forming radionuclides to specific effective activity were estimated.

Keywords: radionuclides, radiation safety, radiological analysis, building materials.

Ўзбекистондаги қурилиш материалларининг радиацион хавфсизлиги

Annotatsiya. Турли хил қурилиш материаллардаги доза ҳосил қилувчи радий-226, торий-232 ва калий-40 радионуклидлар активликлари улчанди. Қурилиш материалларнинг солиштирма эффектив активлиги аниқланди ва доза ҳосил қилувчи радионуклидларнинг солиштирма эффектив активлигидаги ҳиссаси баҳоланди.

Kalit so'zlar: radionuklidlar, radiatsion xavfsizlik, radiologik tahlil, qurilish materiallari.

Вопросам экологии, в частности радиационной экологии, при строительстве жилых зданий начали уделять внимание с переходом на качественную оценку строительной продукции. Очевидно, что на качество жилища оказывает влияние в первую очередь выбор строительного материала, из которого изготовлены конструкции и отделано помещение. Должны быть использованы такие строительные материалы, которые в большей степени благоприятны для человека. Важно выбрать эффективные материалы не только с экономической и эстетической, но и с экологической точек зрения. Для этого необходима экологическая оценка и классификация строительных материалов согласно требованиям по защите окружающей среды. Экологическая безопасность строительных материалов и изделий, связанная с отсутствием негативных факторов, влияющих на здоровье человека, характеризуется не только химической, биологической и пожарной безопасностью, но и радиационной безопасностью.

Для строительства в основном используются материалы и изделия минерального происхождения, сырьем для которых чаще всего являются горные породы. Их количество в общем объеме потребления материалов при строительстве зданий и сооружений может достигать 60-80%. Все горные породы обладают в той или иной степени естественной радиоактивностью, так как они вошли в состав земной коры еще с момента её образования. При этом радиоактивность строительных материалов, определяемая содержанием в них естественных радионуклидов, зависит от места расположения горных пород, глубины их залегания, вида, наличия вблизи урановых руд или радоновых источников. Дозообразующими радионуклидами в строительных материалах являются естественные радионуклиды (ЕРН) радия Ra-226, тория Th-232 и калия K-40. Их содержание регламентируется в соответствующих ныне действующих нормативных документах показателем удельной эффективной активности $A_{эфф}$, определяемым с учетом биологического воздействия указанных ЕРН на организм человека.

Говоря об актуальности радиационного анализа строительных материалов и изделий следует отметить, что до конца 50-х годов XX века этой проблеме не уделялось особого внимания. В частности, регламентация допустимых уровней облучения распространялась только на техногенные источники ионизирующих излучений, например [1]. Ограничения на содержание естественных радионуклидов в строительных материалах были введены в 80-х годах XX века по рекомендации международной комиссии по радиологической защите (МКРЗ) – в СССР в 1987 году таким документом стали основные санитарные правила работы с источниками ионизирующих излучений ОСП-72/87 [2]. Согласно этому документу, нормативы распространялись только на строительные материалы для вновь строящихся зданий "...1.4. Удельная активность естественных радионуклидов в строительных материалах, используемых во всех вновь строящихся жилых и общественных зданиях, не должна превышать для ^{226}Ra - 1×10^{-8} Ки/кг, для ^{232}Th - 7×10^{-9} Ки/кг и для ^{40}K - $1,3 \times 10^{-7}$ Ки/кг...". При этом для смеси указанных радионуклидов с удельной активностью C (в Ки/кг) должно было выполняться условие

$$\frac{C_{\text{Ra}}}{10^{-8}} + \frac{C_{\text{Th}}}{7 \times 10^{-9}} + \frac{C_{\text{K}}}{1,3 \times 10^{-7}} \leq 1. \quad (1)$$

Указанные нормы не применялись к цельным горным породам и удельная активность естественных радионуклидов не являлась основанием для ограничения разработки с целью изготовления из них строительных материалов (цемента и т.п.) и отдельных видов строительных конструкций. По аналогии с современным расчетом удельной эффективной активности $A_{эфф}$

(формула приведена ниже) взвешивающие коэффициенты для тория и калия составляли бы соответственно 1,43 и 0,077.

В настоящее время для оценки радиационной безопасности строительных материалов используется значение удельной эффективной активности $A_{эфф}$, понятие которой появилось в нормах радиационной безопасности НРБ-96 [3]. Удельная эффективная активность $A_{эфф}$ вычисляется через измеренные тем или иным способом удельные активности радионуклидов Ra-226 (A_{Ra}), Th-232 (A_{Th}) и K-40 (A_K) по формуле

$$A_{эфф} = A_{Ra} + 1,30A_{Th} + 0,09A_K, \quad (2)$$

где 1,30 и 0,09 - взвешивающие коэффициенты для тория-232 и калия-40 по отношению к радио-226 [4-6]. Заметим, что в НРБ-96 [3] и межгосударственном ГОСТ 30108-94 [7] значения этих коэффициентов были даны другие: для тория - 1,31 и калия - 0,085.

Взвешивающие коэффициенты, введенные в формулу для $A_{эфф}$, для радия, тория и калия связаны с разной радиационной опасностью данных радионуклидов. Они учитывают эффективность излучения радионуклидов в индуцировании биологических эффектов. Низкий коэффициент для калия (0,09) обусловлен отсутствием у него дочерних дозообразующих радионуклидов, а также с попаданием значительного количества калия в строительные материалы из-за его высокого кларкового числа. Так, для примера, кларковые числа рассматриваемых радионуклидов оценены для калия как 25000 г/т, для тория - 13 г/т [8], для радия - $\sim 10^{-6}$ г/т [9]. Повышенный коэффициент для тория (1,30) по сравнению с радием связан с тем, в ряду Th-232 больше гамма-излучателей с высокой энергией, чем в ряду Ra-226, а при одинаковой активности внешних гамма-излучателей доза будет тем выше, чем больше энергия гамма-излучения. К тому же проникающая способность высокоэнергетичных гамма-квантов значительно выше, чем у низкоэнергетичных, что существенно в случае, например, толстых стен строений, асфальта и т.д.

Отметим кстати, что в упомянутом документе НРБ-96 уже появилось разделение стройматериалов на три класса: I класс (до 370 Бк/кг) - для новых зданий, II класс (до 740 Бк/кг) - для дорог в населенных пунктах и III класс (до 2800 Бк/кг) - для дорог вне населенных пунктов. При этом материалы с $A_{эфф} > 2800$ Бк/кг разрешалось использовать по согласованию с федеральным органом Государственного санэпиднадзора России в каждом отдельном случае.

В Узбекистане основным регламентирующим документом являются нормы радиационной безопасности (НРБ-2006) и основные санитарные правила обеспечения радиационной безопасности (ОСПОРБ-2006) [4], которые говорят, что удельная эффективная активность $A_{эфф}$ природных радионуклидов в строительных материалах (щебень, гравий, песок, бутовый и пилонный камень, цементное и кирпичное сырье и пр.), добываемых на их месторождениях или являющихся побочным продуктом промышленности, а также отходы промышленного производства, используемые для изготовления строительных материалов (золы, шлаки и пр.), не должна превышать:

- для материалов, используемых в строящихся и реконструируемых жилых и общественных зданиях (I класс):

$$A_{эфф} < 370 \text{ Бк/кг}$$

- для материалов, используемых в дорожном строительстве в пределах территории населенных пунктов и зон перспективной застройки, а также при возведении производственных сооружений (II класс):

$$A_{эфф} < 740 \text{ Бк/кг}$$

- для материалов, используемых в дорожном строительстве вне населенных пунктов (III класс):

$$A_{эфф} \leq 1500 \text{ Бк/кг}$$

При $1500 \text{ Бк/кг} < A_{эфф} < 4000 \text{ Бк/кг}$ (IV класс) вопрос об использовании материалов решается в каждом случае отдельно по согласованию с территориальными центрами государственного санитарно-эпидемиологического надзора. При $A_{эфф} > 4000$ Бк/кг материалы не должны использоваться в строительстве.

Объекты испытаний

Как уже было сказано, для строительства в основном используются материалы и изделия минерального происхождения, сырьем для которых чаще всего являются горные породы, в той или

иной степени обладающие естественной радиоактивностью. Радиоактивность горных пород тем выше, чем больше концентрация в них минералов, содержащих естественные радиоактивные элементы, в основном семейства урана, тория, а также калия-40. Радиоактивность горных пород определяется содержанием радиоактивных породообразующих минералов. При этом в зависимости от качественного и количественного состава этих минералов, условий образования, возраста и степени метаморфизма их радиоактивность изменяется в очень широких пределах.

Особенностью распределения естественных радионуклидов является неравномерность их содержания в однотипных породах, особенно в магматогенных. Среди генетически различных типов пород наибольшей радиоактивностью характеризуются магматические изверженные породы (граниты, вулканический туф и др.), представляющие собой продукт кристаллизации магмы. Высокой радиоактивностью характеризуются широко распространенные минералы, содержащие калий-40 (глинистые материалы, большая часть полевых шпатов, слюды, калийные соли). Средней радиоактивностью обладают некоторые полевые шпаты, песчаник, глина. Низкой радиоактивностью обладают кварц, доломит, кальцит, известняк, гипс, каменная соль и др. Следует отметить, что некоторые строительные материалы (керамика, цемент) получают обжигом сырья до спекания, в результате чего в них может происходить концентрация радионуклидов за счет выгорания различных примесей, разложения минералов и уплотнения структуры. Поэтому керамические материалы и в частности кирпич могут обладать повышенной радиоактивностью.

В связи с этим, говоря о радиоактивности строительных материалов и изделий, их исследователю желательно представлять себе, что из себя представляет тот или иной строительный материал, из каких минералов он состоит, каким путем был получен. Поэтому мы сочли нужным дать краткое описание исследованных нами строительных материалов.

Алебастр - подвид гипса, получаемый путем мелкого помола гипсового камня.

Асфальт - смесь битумов с минеральными материалами: гравием; песком; минеральным порошком. Асфальтобетон - материал, который получается в результате уплотнения смеси из щебня, песка, минерального порошка и битумного вяжущего.

Бентонит - природный глинистый минерал, гидроалюмосиликат, образующийся при выветривании вулканических пород (туфов и пеплов). После соответствующих модификаций используется в нефтегазовой, строительной, пищевой, косметической промышленности.

Битумы - твёрдые или смолоподобные продукты, состоящие из смеси углеводородов и их производных. Природные битумы - ископаемые органического происхождения с первичной углеводородной основой. К ним относятся естественные производные нефти. Технические битумы - остаточные продукты технологической переработки нефти, каменного угля и сланцев.

Гипс - минерал из класса сульфатов (гидрат сульфата кальция).

Гравий - природный материал, получаемый при постепенном разрушении скальных пород под воздействием естественных природных причин. Добываемый гравий обычно содержит много примесей - песка, глины, почвы, различных органических веществ. Учитывая различный минералого-петрографический состав горных пород, зёрна гравия могут содержать граниты, кварцы, полевые шпаты, мрамор.

Гранит - магматическая глубинная горная порода. Состоит из кварца, калиевого и алюмосиликатного полевого шпата и слюд.

Доломит - минерал из класса карбонатов кальция и магния. Встречается в виде осадочной карбонатной горной породы. Молотый доломит широко используется для изготовления сухих строительных смесей. Плотные доломиты идут на изготовление облицовочных плит, которые, как правило, используются для наружной облицовки строений.

Известняк - осадочная, обломочная горная порода органического происхождения, состоящая преимущественно из карбоната кальция в виде кристаллов кальцита (известкового шпата). Известняки с большим содержанием углекислого магния называются доломитами.

Известь - материал, получаемый обжигом карбонатных горных пород, содержащих не менее 95% углекислого кальция (известняков, мела, мрамора).

Каолин - белая глина, состоящая из минерала каолинита. Образуется при разрушении гранитов, гнейсов и других горных пород, содержащих полевые шпаты.

Керамзит - лёгкий пористый строительный материал, зернистый бетонозаполнитель, получаемый путём обжига глинистых сланцев и различных сортов легкоплавкой, вспучивающейся глины.

Кирпич керамический (красный кирпич) - строительный камень, изготавливаемый из глины путем сушки и последующего обжига сырой кирпичной заготовки.

Кирпич огнеупорный - строительный камень, изготавливаемый из тугоплавкой шамотной глины, графита, оксидов кремния и алюминия, кварца и кокса при помощи обжига кирпичной заготовки при температуре 1300°-1400°С.

Кирпич силикатный - строительный камень, изготавливаемый из смеси кварцевого песка, воздушной извести и воды с помощью автоклавной обработки сырой кирпичной заготовки.

Кирпич сырцовый - необожжённый высушенный кирпич из глины.

Кирпичное сырьё - глины средней пластичности с постоянным составом минералов и без примесей известняка.

Мел - разновидность известняка. Осадочная горная порода органического происхождения, состоящая в основном из карбоната кальция с небольшим количеством карбоната магния. В меле может находиться незначительная примесь мельчайших зёрен кварца.

Минеральный порошок – остаток, образующийся в процессе дробления известняковых горных пород или отходы промышленного производства, которые затем подвергаются тонкому помолу. Наиболее распространены каменная и доломитовая мука. Основная сфера применения порошка – производство асфальтобетона. Порошок является наполнителем, который повышает вяжущую способность битума.

Мрамор - перекристаллизованный известняк, состоящий в основном из кальцита. Могут присутствовать включения доломита.

Песок – рыхлое скопление зёрен различного минерального состава размером 0,1-5 мм. Пески разделяют на природные и искусственные (отходы при дроблении горных пород и т.п.).

Цемент это тонко измельченная смесь гипса и так называемого клинкера. Клинкер - продукт равномерного обжига карбонатных (известняк, мел, ракушечник, доломит) и глинистых пород (глина, суглинок, лесс, глинистый сланец).

Щебень – строительный материал, получаемый при механическом дроблении обломков горной породы. В отличие от гравия не содержит примесей глины, почвы, различных органических веществ. Как и гравий щебень может содержать граниты, кварцы, полевые шпаты, мрамор.

Шифер - обобщённое название облицовочных стеновых и кровельных строительных материалов. Чаще всего под шифером понимают асбестоцементный шифер или сланцевый шифер.

Шлакоблок - строительный камень, полученный из шлакобетонного раствора путем его вибропрессования или естественной усадки в форме. Раствор состоит из наполнителя и цемента, используемого в качестве вяжущего материала. Наполнителем может служить не только шлак, но и керамзит, песок, гравий, щебенка и т.п.

В настоящей работе мы приводим результаты исследований радиоактивности проб различных строительных материалов (24 вида материалов, 652 пробы), отобранных в период с 2011 по 2020 годы в регионах Республики Узбекистан (Андижанская, Бухарская, Джизакская, Кашкадарьинская, Навоийская, Самаркандская, Сурхандарьинская, Сырдарьинская, Ферганская, Ташкентская области и Каракалпакистан) (таблица 1).

Табл. 1 - Виды строительных материалов, подвергнутых радиологическим испытаниям

№	Число проб	Строительный материал	№	Число проб	Строительный материал
1	2	Алебастр	13	6	Кирпичное сырьё
2	13	Асфальт	14	8	Мел
3	1	Бентонит	15	6	Минеральный порошок
4	58	Бетонные изделия	16	16	Мрамор
5	12	Гипсовые материалы	17	64	Песок разный
6	3	Гравий	18	27	Песчано-гравийная смесь
7	2	Гранит	19	1	Пром отходы (зола)
8	1	Доломит	20	7	Смеси шпаклевочные
9	14	Известь разная	21	185	Цемент
10	1	Каолин	22	2	Шифер
11	6	Керамзит	23	3	Шлакоблок
12	124	Кирпич разный	24	90	Щебень

Метод испытаний

Активности естественных радионуклидов Ra-226, Th-232 и K-40 определяются методом гамма спектрометрии. Активность Ra-226 и Th-232 обычно определяется путем измерения активности их дочерних продуктов распада: Pb-214 и Bi-214 (для Ra-226) и Ac-228, Pb-212, Bi-212 и Tl-208 (для Th-232). Мы определяли радионуклидный состав образцов строительных материалов на сцинтилляционном гамма-спектрометре с размером кристалла NaI(Tl) Ø80×80 мм и энергетическим разрешением 8,5% на линии 662 кэВ. Для калибровки по энергии спектрометра использовались точечные источники радионуклидов Cs-137 и Th-232. Для калибровки спектрометра по эффективности использовались объемные (геометрия однолитровых сосудов Маринелли) эталонные источники радионуклидов Ra-226, Th-232, K-40 и Cs-137 с инертными наполнителями плотностью 200, 900 и 1700 г/л. Активность эталонов составляла 1,75-6,2 кБк/кг с погрешностью установления активности 5% на уровне достоверности 0,95.

Измерения проводились по аттестованной методике научно-технического центра РАДЭК (Санкт-Петербург, Россия) [6]. Набор и обработка спектров проводилась с помощью программного обеспечения РАДЭК [6]. Ошибки измерений вычислялись на уровне достоверности 0,95. Ошибки включают в себя статистические и систематические ошибки, при этом последние в основном определяются точностью аттестации эталонов и измерением массы образцов. Эффективная удельная активность образца $A_{эфф}$ вычислялась по приведенной выше формуле (2). Абсолютная погрешность измерения активности рассчитывалась через абсолютные погрешности измерения удельной активности радионуклидов Ra-226 (ΔA_{Ra}), Th-232 (ΔA_{Th}) и K-40 (ΔA_K) по следующей формуле [6]

$$\Delta A_{эфф} = \sqrt{(\Delta A_{Ra})^2 + (1.30 \times \Delta A_{Th})^2 + (0.09 \times \Delta A_K)^2} \quad (3)$$

Результаты испытаний

Целью наших исследований является радиационная безопасность населения при осуществлении строительства и дальнейшей многолетней эксплуатации людьми объектов строительства, когда речь идет о снижении рисков для здоровья миллионов людей. Поэтому мы считаем, что здесь надо исходить из принципа подстраховки "*Better Safe Than Sorry (лучше подстраховаться, чем сожалеть)*". В связи с этим, обсуждая величины удельной эффективной активности проб строительных материалов, мы будем основываться на максимально возможных активностях. Максимальные значения удельных активностей вычисляются с учетом ошибок измерения, то есть по формуле $A_{max} = A + \Delta A$. Говоря о возможной радиоактивности какого-либо вида строительных материалов мы рассматриваем все значения, полученные для всех проб этих материалов и выбираем в качестве верхней границы возможных эффективных удельных активностей материала это максимальное значение. В настоящей работе мы приводим также минимально возможные значения удельных активностей $A_{min} = A - \Delta A$ и средние значения. Здесь надо сказать, что исходя из используемого нами принципа подстраховки под средними значениями мы понимаем средние арифметические значения по выборке максимальных значений удельной активности. Естественно, что в случае испытания только одной пробы под средним значением мы понимаем измеренное значение активности A без учета ошибок измерения ΔA . Таким образом мы получаем информацию о возможном диапазоне значений удельной эффективной активности $A_{эфф}$ для того или иного вида строительных материалов.

Полученные нами результаты по $A_{эфф}$ для проанализированных видов строительных материалов приведены в табл. 2 и, для наглядной, визуальной оценки, на рис. 1.

Табл. 2 –Предельные и средние значения удельной эффективной активности исследованных строительных материалов

№	Кол-во проб	Образец строительных материалов	Aэфф (Бк/кг)		
			макс	среднее	мин
1	16	Мрамор	11,4	8,5	4,9
2	8	Мел	16,7	13,4	8,9
3	12	Гипсовые	23,1	16,6	6,6
4	2	Алебастр	24,6	24,4	20,0

№	Кол-во проб	Образец строительных материалов	Аэфф (Бк/кг)		
			макс	среднее	мин
5	1	Доломит	45,8	40,2	34,6
6	2	Шифер	53,6	47,8	35,0
7	3	Гравий	76,3	59,4	44,4
8	7	Смеси шпаклевочные	77,7	41,4	12,3
9	1	Пром отходы (зола)	79,7	72,6	65,5
10	3	Шлакоблок	82,8	75,0	54,2
11	6	Минеральный порошок	124,2	71,3	28,3
12	185	Цемент	137,5	79,1	23,0
13	27	Песчано-гравийная смесь	160,7	85,8	35,9
14	6	Керамзит	168,2	82,9	35,1
15	14	Известь разная	173,1	48,5	8,6
16	6	Кирпичное сырье	177,5	148,1	90,8
17	1	Бентонит	177,6	166,0	154,3
18	13	Асфальт	177,9	128,3	42,8
19	58	Бетон	217,5	102,7	39,6
20	1	Каолин	232,4	216,0	200,0
21	64	Песок	312,5	118,0	25,4
22	2	Гранит	332,8	278,4	192,3
23	90	Щебень	375,0	96,3	17,1
24	124	Кирпич	400,8	173,2	71,3

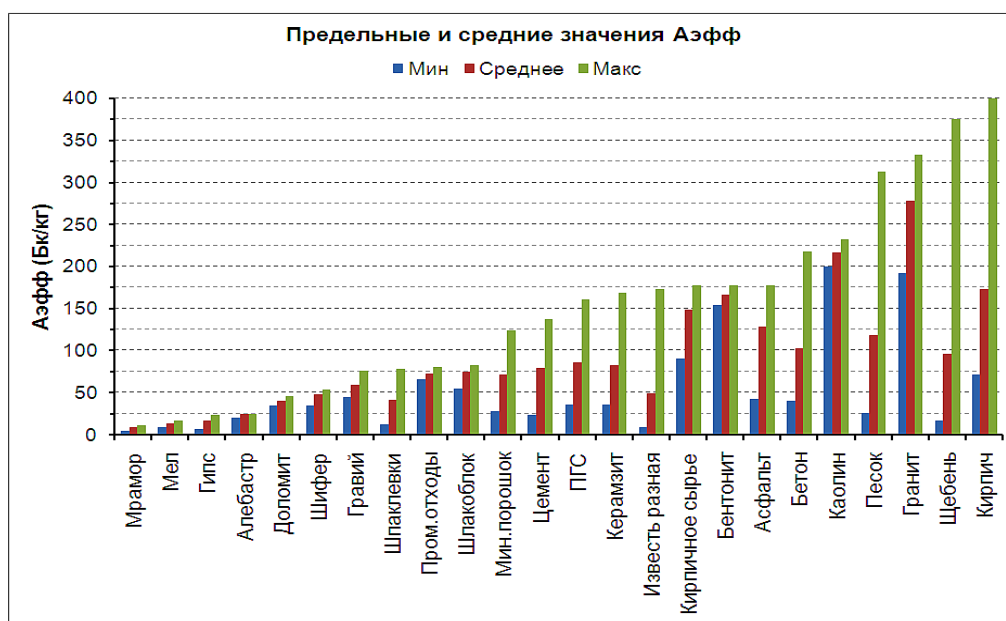


Рис. 1 - Пределные и средние значения удельной эффективной активности исследованных строительных материалов

Видно, что для некоторых видов строительных материалов наблюдается заметное отклонение максимальной активности от среднего значения. Для выяснения возможных причин в таблице 3 приведем результаты измерений удельных эффективных активностей некоторых проб извести, кирпича, щебня и песка. Пробы выбирались из набора проб одного вида строительного материала следующим образом - образец с максимальной Аэфф и образец с активностью, близкой к средней.

Рассмотрим пробы извести – известь гашеная, известь негашеная и известь негашенная с отходами известняка. В этих пробах активности радия-226 приблизительно одинаковы (в пределах ошибок измерения). Сильные различия наблюдаем для активности нуклидов торий-232 и К-40. Видно, что в пробах негашеной извести удельные активности нуклидов торий-232 и К-40 более чем на порядок больше их активностей в готовой гашенной извести, что и явилось причиной появления большой максимальной удельной активности в ряде проб "Известь". Интересно также посмотреть,

какой вклад в удельную эффективную активность проб могут дать дозообразующие нуклиды. Эту информацию для проб "Известь разная", "Кирпич", "Щебень" и "Песок" мы даем в таблице 4. Видно, что в случае проб "Известь негашеная" радионуклиды торий-232 и К-40 дают вклад порядка 45-65 Бк/кг, что сравнимо со вкладом Ra-226 (34-45 Бк/кг). В остальных испытанных пробах извести вклад нуклидов торий-232 и К-40 был незначительным (2-9 Бк/кг), а вклад Ra-226 составлял 5-40 Бк/кг.

Табл.3 –Результаты расчета удельной эффективной активности некоторых строительных материалов. Удельные активности радионуклидов, Аэфф и Амакс даны в Бк/кг

Строительный материал	Ra-226	Th-232	K-40	Аэфф	Амакс
Известь гашеная	34,4±5,7	<3,1	<36,9	41,8±5,7	47,5
Известь негашеная	44,6±6,4	36,7±3,7	508,5±51,0	138,1±9,2	147,3
Известь негашеная с отходами известняка	36,7±4,3	50,0±4,7	685,4±69,0	163,4±9,7	173,1
Кирпич керамический	58,5±6,5	44,0±4,3	641,3±63,0	173,4±10,3	183,7
Кирпич сырцовый	48,7±4,9	45,6±4,4	895,7±90,0	188,6±11,1	199,7
Кирпич огнеупорный	165,9±14,4	124,2±12,0	222,6±28,0	347,4±21,4	368,8
Кирпич огнеупорный	187,5±18,2	125,9±13,0	273,5±33,0	375,8±25,0	400,8
Щебень	31,8±4,8	26,6±2,5	260,8±26,0	89,9±6,3	96,1
Щебень	22,7±2,7	33,6±3,3	349,9±34,0	97,9±5,9	103,8
Щебень (Навои)	64,0±15,0	104,0±12,0	1230,0±120,0	309,9±24,2	334,1
Щебень (Навои)	282,2±29,0	22,8±5,6	368,0±59,0	345,0±30,4	375,3
Песок	31,3±4,8	23,5±2,7	478,8±47,3	104,9±7,3	112,3
Песок из отсевоов дробления	57,7±5,8	101,1±10,0	1172,0±120,0	294,6±17,9	312,5

Табл. 4 – Вклады удельных активностей дозообразующих радионуклидов в удельную эффективную активность некоторых строительных материалов. Вклады радионуклидов, Аэфф и Амакс даны в Бк/кг

Строительный материал	Ra-226	Th-232	K-40	Аэфф	Амакс
Известь гашеная	34,4±5,7	<4,0	<3,3	41,8±5,7	47,5
Известь негашеная	44,6±6,4	47,7±4,8	45,8±4,6	138,1±9,2	147,3
Известь негашеная с отходами известняка	36,7±4,3	65,0±6,1	61,7±6,2	163,4±9,7	173,1
Кирпич керамический	58,5±6,5	57,2±5,6	57,7±5,7	173,4±10,3	183,7
Кирпич сырцовый	48,7±4,9	59,3±5,7	80,6±8,1	188,6±11,1	199,7
Кирпич огнеупорный	165,9±14,4	161,5±15,6	20,0±2,5	347,4±21,4	368,8
Кирпич огнеупорный	187,5±18,2	163,7±16,9	24,6±3,0	375,8±25,0	400,8
Щебень	31,8±4,8	34,6±3,3	23,5±2,3	89,9±6,3	96,1
Щебень	22,7±2,7	43,7±4,3	31,5±3,1	97,9±5,9	103,8
Щебень (Навои)	64,0±15,0	135,2±15,6	110,7±10,8	309,9±24,2	334,1
Щебень (Навои)	282,2±29,0	29,6±7,3	33,1±5,3	345,0±30,4	375,3
Песок	31,3±4,8	30,6±3,5	43,1±4,3	104,9±7,3	112,3
Песок из отсевоов дробления	57,7±5,8	131,4±13,0	105,5±10,8	294,6±17,9	312,5

Заметное отличие удельной эффективной активности от среднего значения наблюдается также для проб кирпича. Из таблиц 3 и 4 видны различия в активностях радионуклидов в кирпиче огнеупорном и кирпиче керамическом и сырцовом, особенно для радия и тория. При этом основной вклад в высокую активность огнеупорного кирпича дают нуклиды Ra-226 и Th-232 (табл. 4). Удельная активность К-40 в огнеупорном кирпиче заметно ниже, чем в других испытанных пробах, в которых она лежит в пределах 400-1000 Бк/кг. Как было сказано выше (при описании объектов испытаний), огнеупорный кирпич отличается от других сортов кирпича как по составу, так и по технологии изготовления. В частности, огнеупорный кирпич делается при очень высокой температуры обжига (до 1400°С), которая может приводить к концентрации радионуклидов за счет выгорания различных примесей, разложения минералов и уплотнения структуры.

Заметное отличие удельной эффективной активности от среднего значения наблюдается также для двух проб щебня и одной пробы песка. Из таблиц 3 и 4 видно, что для щебня основной вклад в высокую удельную эффективную активность может дать как высокая удельная активность радия, так и тория и калия. Для песка из отсевоов дробления горных пород мы видим основной вклад

радионуклидов Th-232 и K-40. Эти обстоятельства не являются чем-то уникальным, так как и щебень и песок, используемые в качестве строительного материала в Узбекистане, есть продукты мраморных и гранитных карьеров, речного гравия и т.п., которые могут очень сильно различаться содержанием радионуклидов.

Исследование радиоактивности строительных материалов показывает, что помимо знания величины удельной эффективной активности полезно знать удельные активности дозообразующих радионуклидов Ra-226, Th-232 и K-40, а также их вклад в удельную эффективную активность с учетом взвешивающих коэффициентов для Th-232 и K-40 по отношению к Ra-226. Поэтому мы дополняем статью соответствующими данными (табл. 5 и 6), давая для наглядности также соответствующие графики (рис. 2-6).

Табл. 5 - Предельные и средние значения удельной активности радионуклидов Ra-226, Th-232 и K-40 в исследованных строительных материалах

№	Кол-во проб	Образец строй-материалов	Удельные активности дозообразующих нуклидов (Бк/кг)								
			мин			макс			среднее		
			Ra	Th	K	Ra	Th	K	Ra	Th	K
1	16	Мрамор	1,6	0,5	7,8	6,0	2,6	22,2	4,1	2,2	17,8
2	8	Мел	5,3	0,5	21,1	8,7	3,7	35,6	6,8	2,8	27,8
3	12	Гипсовые	3,9	1,2	16,7	12,2	6,1	84,4	7,2	3,5	37,8
4	2	Алебастр	10,6	3,8	51,1	10,6	6,7	53,3	10,6	5,6	52,2
5	1	Доломит	26,0	2,9	40,0	37,0	2,9	68,9	31,5	2,9	54,4
6	2	Шифер	12,5	9,2	90,0	22,4	16,8	137,8	15,5	13,1	114,4
7	3	Гравий	7,8	12,9	81,1	17,0	40,0	223,3	15,0	23,7	151,1
8	7	Смеси шпаклевоч-ные	4,4	3,3	27,8	30,4	14,9	371,1	16,1	7,8	141,1
9	1	Пром отходы	28,5	17,8	114,4	41,1	22,4	143,3	34,8	20,1	128,9
10	3	Шлакоблок	15,8	11,5	224,4	23,9	22,0	382,2	20,0	17,0	310,0
11	6	Минеральный порошок	9,4	4,2	38,9	94,0	24,2	524,4	36,0	10,6	160,0
12	185	Цемент	6,6	6,7	55,6	72,8	53,0	407,8	29,2	18,6	212,2
13	27	Песчано-гравийная смесь	4,7	7,2	95,6	38,0	50,6	703,3	19,2	25,9	297,8
14	6	Керамзит	13,6	7,5	111,1	88,0	33,3	477,8	31,1	15,4	292,2
15	14	Известь разная	5,3	1,5	12,2	51,0	54,7	754,4	20,9	9,4	118,9
16	6	Кирпичное сырье	17,1	26,1	390,0	74,6	50,3	730,0	39,0	39,1	548,9
17	1	Бентонит	23,4	28,6	965,6	32,8	34,6	1185,6	28,1	31,6	1075,6
18	13	Асфальт	7,1	9,5	178,9	69,3	51,2	1240,0	28,4	26,9	627,8
19	58	Бетон	10,8	6,8	164,4	74,9	69,3	1037,8	25,6	24,6	421,1
20	1	Каолин	31,3	83,1	562,2	48,5	101,7	693,3	39,9	92,4	627,8
21	64	Песок разный	3,1	2,2	44,4	63,5	111,1	1411,1	23,8	28,5	543,3
22	2	Гранит	7,0	66,0	1034,4	53,7	126,8	1467,8	21,9	95,6	1241,1
23	90	Щебень	7,1	0,8	22,2	311,2	116,0	1350,0	28,8	27,9	346,7
24	124	Кирпич	15,0	11,3	194,4	205,7	138,9	1106,7	46,1	45,3	635,6

Табл. 6 - Предельные и средние значения вкладов радионуклидов Ra-226, Th-232 и K-40 в удельную эффективную активность исследованных строительных материалов

№	Кол-во проб	Образец строй-материалов	Вклады дозообразующих нуклидов в удельную эффективную активность (Бк/кг)								
			мин			макс			среднее		
			Ra	Th	K	Ra	Th	K	Ra	Th	K
1	16	Мрамор	1,6	0,7	0,7	6,0	3,4	2,0	4,1	2,8	1,6
2	8	Мел	5,3	0,7	1,9	8,7	4,8	3,2	6,8	3,7	2,5
3	12	Гипсовые	3,9	1,5	1,5	12,2	7,9	7,6	7,2	4,6	3,4
4	2	Алебастр	10,6	4,9	4,6	10,6	8,7	4,8	10,6	7,3	4,7
5	1	Доломит	26,0	3,8	3,6	37,0	3,8	6,2	31,5	3,8	4,9
6	2	Шифер	12,5	11,9	8,1	22,4	21,9	12,4	15,5	17,0	10,3
7	3	Гравий	7,8	16,8	7,3	17,0	52,0	20,1	15,0	30,8	13,6
8	7	Смеси шпаклевоч-ные	4,4	4,3	2,5	30,4	19,4	33,4	16,1	10,1	12,7
9	1	Пром отходы	28,5	23,1	10,3	41,1	29,1	12,9	34,8	26,1	11,6

№	Кол-во проб	Образец строй-материалов	Вклады дозообразующих нуклидов в удельную эффективную активность (Бк/кг)								
			мин			макс			среднее		
			Ra	Th	K	Ra	Th	K	Ra	Th	K
10	3	Шлакоблок	15,8	15,0	20,2	23,9	28,6	34,4	20,0	22,1	27,9
11	6	Минеральный порошок	9,4	5,4	3,5	94,0	31,5	47,2	36,0	13,8	14,4
12	185	Цемент	6,6	8,7	5,0	72,8	68,9	36,7	29,2	24,2	19,1
13	27	Песчано-гравийная смесь	4,7	9,3	8,6	38,0	65,8	63,3	19,2	33,7	26,8
14	6	Керамзит	13,6	9,7	10,0	88,0	43,3	43,0	31,1	20,0	26,3
15	14	Известь разная	5,3	1,9	1,1	51,0	71,1	67,9	20,9	12,2	10,7
16	6	Кирпичное сырье	17,1	33,9	35,1	74,6	65,4	65,7	39,0	50,8	49,4
17	1	Бентонит	23,4	37,2	86,9	32,8	45,0	106,7	28,1	41,1	96,8
18	13	Асфальт	7,1	12,4	16,1	69,3	66,5	111,6	28,4	35,0	56,5
19	58	Бетон	10,8	8,8	14,8	74,9	90,1	93,4	25,6	32,0	37,9
20	1	Каолин	31,3	108,0	50,6	48,5	132,2	62,4	39,9	120,1	56,5
21	64	Песок разный	3,1	2,9	4,0	63,5	144,4	127,0	23,8	37,1	48,9
22	2	Гранит	7,0	85,8	93,1	53,7	164,8	132,1	21,9	124,3	111,7
23	90	Щебень	7,1	1,1	2,0	311,2	150,8	121,5	28,8	36,3	31,2
24	124	Кирпич	15,0	14,7	17,5	205,7	180,6	99,6	46,1	58,9	57,2

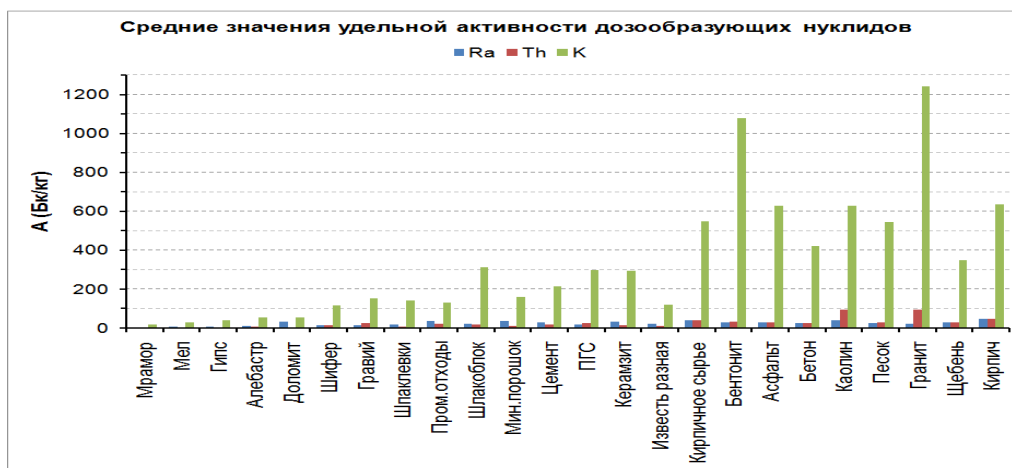


Рис. 2 - Средние значения удельной активности дозообразующих нуклидов

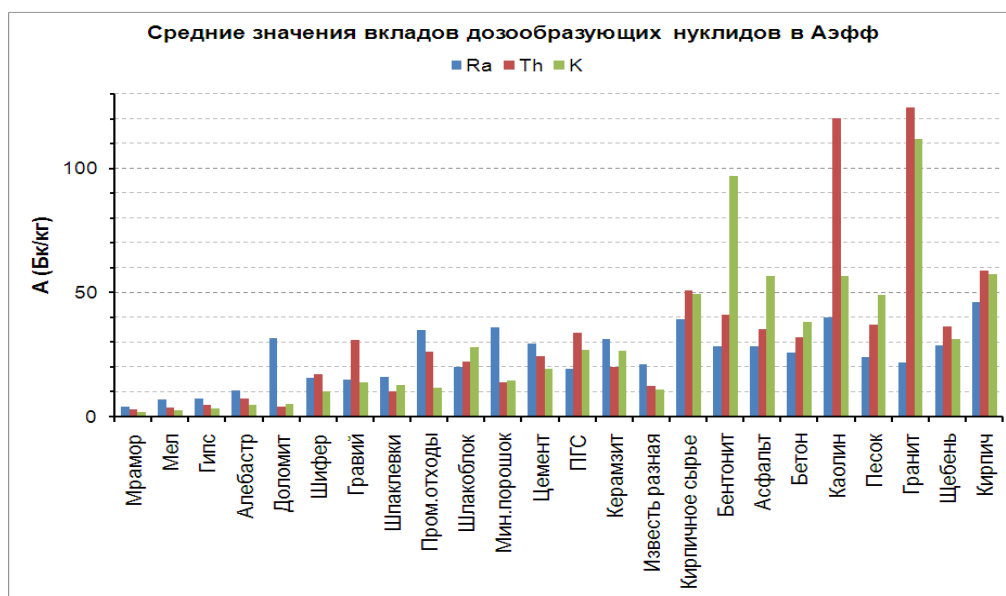


Рис. 3 - Средние значения вкладов дозообразующих нуклидов в удельную эффективную активность

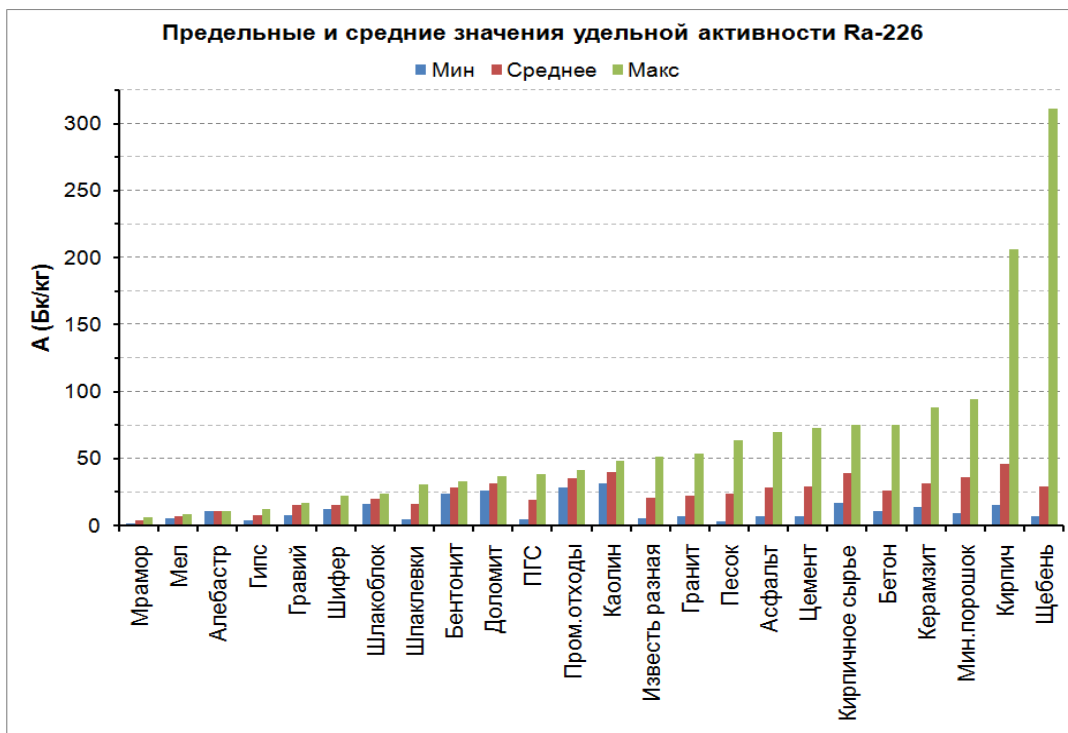


Рис. 4 -Предельные и средние значения удельной активности Ra-226

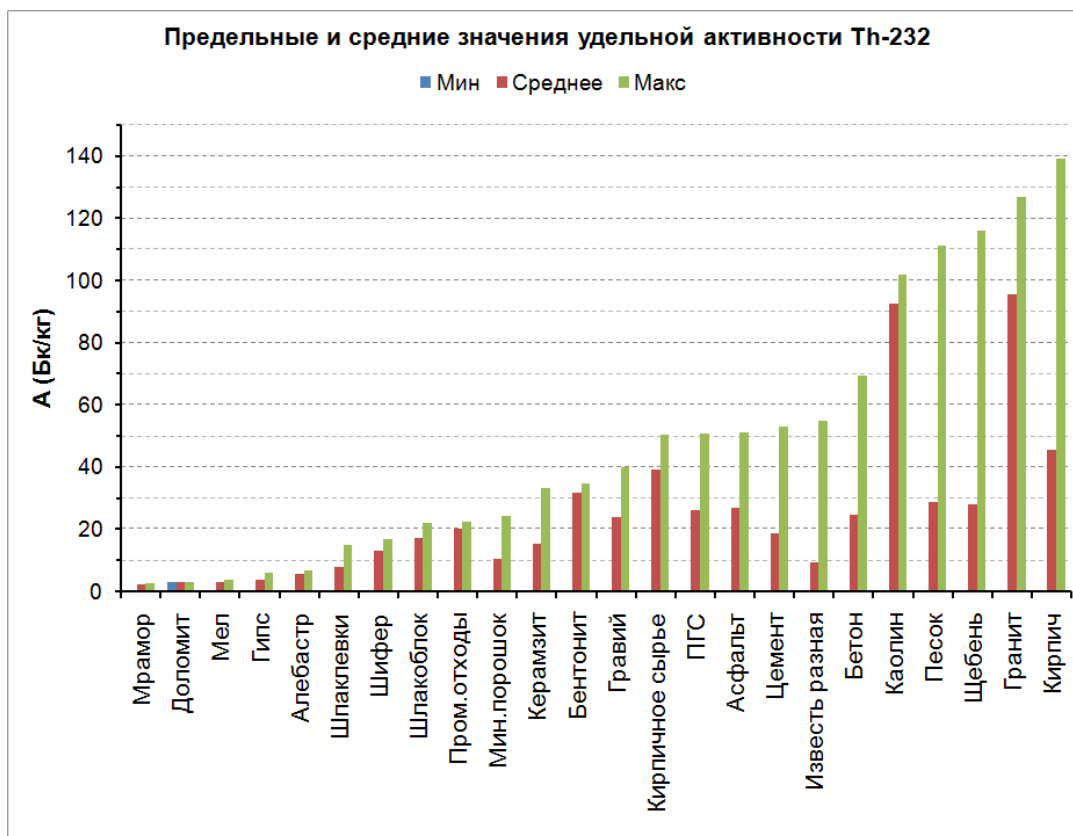


Рис. 5 - Предельные и средние значения удельной активности Th-232

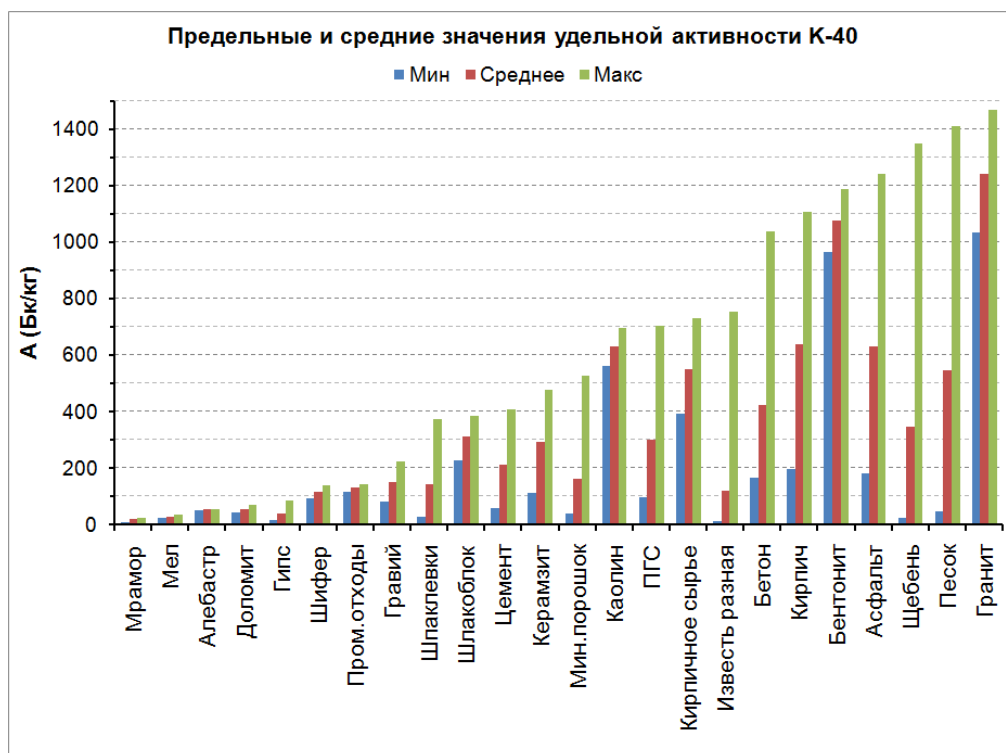


Рис. 6 - Предельные и средние значения удельной активности К-40

Значение удельной эффективной активности строительных материалов вычисляется через удельные активности дозообразующих радионуклидов и взвешивающие коэффициенты для тория-232 и калия-40 по отношению к радио-226. В различных нормативных документах приводятся разные значения этих коэффициентов. Корректно ли количественно сравнивать результаты, полученные разными исследователями при различающихся значениях этих коэффициентов?

Попробуем ответить на этот вопрос, сравнивая в таблице 7 результаты расчетов удельной эффективной активности Аэфф образцов некоторых строительных материалов из разных стран при различных значениях взвешивающих коэффициентов. Коэффициенты 1,30 и 0,09 для тория-232 и калия-40, соответственно, использовались нами на основании нормативных документов Узбекистана [4, 5]. Близкие к ним коэффициенты 1,31 и 0,085 использовались российскими исследователями [10, 11], 1,43 и 0,077 – турецкими исследователями при определении активности строительных материалов из Турции [12]. В этой же таблице 7 мы приводим также результаты наших исследований, сделанных в рамках настоящей работы (идентификатор "Узбекистан").

Следует заметить, что активности однотипных строительных материалов из разных стран в основном сопоставимы друг с другом. Существенная разница заметна: для белорусского керамического кирпича с аномально высоким содержанием радия и тория; гипса из Алжира и Китая, где заметно повышенное содержание радия и тория.

Табл. 7 – Сравнение удельных активностей некоторых строительных материалов из разных стран.

Сравнение значений удельной эффективной активности, вычисленных при разных значениях взвешивающих коэффициентов (1,30, 1,31 и 1,43 – коэффициенты для тория-232, а 0,090, 0,085 и 0,077 – соответствующие коэффициенты для калия-40)

Строительный материал	А (Бк/кг)			Аэфф (Бк/кг)		
	Ra-226	Th-232	K-40	1,30 0,09	1,31 0,085	1,43 0,077
Кирпич глиняный (Узбекистан) (*)	48,7	45,6	895,7	188,6	184,6	182,9
Кирпич глиняный (Алжир) [12]	65	51	675	192	189	190
Кирпич глиняный (Китай) [12]	46,2	28,4	137,4	95,5	95,1	97,4
Кирпич глиняный (Турция) [12]	58,9	11,7	248,8	96,5	95,4	94,8
Кирпич огнеупорный (Узбекистан) (*)	165,9	124,2	222,6	347,4	347,5	360,6

Строительный материал	А (Бк/кг)			Аэфф (Бк/кг)		
	Ra-226	Th-232	K-40	1,30 0,09	1,31 0,085	1,43 0,077
Кирпич огнеупорный (РФ, Брянск) [10]	120,2	156,5	88,7	331,6	332,8	350,8
Кирпич керамический (РФ, Брянск) [10]	10,9	59,5	42,8	92,1	92,5	99,3
Кирпич керамический (Узбекистан) (*)	58,5	44,0	641,3	173,4	170,7	170,8
Кирпич керамический (РФ, Красноярск) [10]	52,1	53,2	579,0	173,4	171,0	172,8
Кирпич керамический (РФ, Волгоград) [11]	56,6	49,4	531,2	168,6	166,5	168,1
Кирпич (Беларусь) [10]	280	230	330	608,7	609,4	634,3
Цемент (Алжир) [12]	41	27	422	114,1	112,2	112,1
Цемент (Китай) [12]	68,3	51,7	173,8	151,2	150,8	155,6
Цемент (Израиль) [12]	66,3	39,2	138,1	129,7	129,4	133,0
Цемент (Турция) [12]	26,1	10,4	129,7	51,3	50,7	51,0
Цемент (Узбекистан) (*)	17,3	7,9	60,4	33,0	32,8	33,2
Цемент (Узбекистан) (*)	41,1	44,8	320	128,1	127,0	129,8
Цемент (РФ, Волгоград) [11]	100,1	22,5	35,3	132,5	132,6	135,0
Цемент (РФ, Брянск) [10]	35,6	16,5	189,4	74,1	73,3	73,8
Цемент (РФ, Красноярск) [10]	57,7	21,2	187,0	102,1	101,4	102,4
Гипс (Алжир) [12]	50,0	21,0	275,0	102,1	100,9	101,2
Гипс (Китай) [12]	64,7	48,7	161,3	142,5	142,2	146,8
Гипс (Израиль) [12]	10,5	5,9	51,4	22,8	22,6	22,9
Гипс (Турция) [12]	27,5	15,6	200,2	65,8	65,0	65,2
Гипс (Узбекистан) (*)	3,9	2,1	16,8	8,1	8,1	8,2
Гипс (Узбекистан) (*)	12,2	6,1	32,7	23,1	23,0	23,4
Гипс (РФ, Волгоград) [12]	12,6	10,9	26,3	29,1	29,1	30,2
Известняк (Алжир) [12]	16	13	36	36,1	36,1	37,4
Известняк (Китай) [12]	19,5	13,4	63,2	42,6	42,4	43,5
Известняк (Израиль) [12]	12,1	4,1	51,1	22,0	21,8	21,9
Известняк (Турция) [12]	28,8	8,9	76,4	47,2	47,0	47,4
Известняк (Узбекистан) (*)	17,2	3,0	27,3	23,6	23,5	23,6
Известь (Узбекистан) (*)	6,1	3,1	24,9	12,4	12,3	12,5
Известняк (РФ, Калуга) [10]	52	12	23	69,7	69,7	70,9
Известняк (РФ, Волгоград) [11]	5,8	32,6	52,7	52,9	53,0	56,5
Известь (РФ, Волгоград) [11]	76,0	12,5	40,4	95,9	95,8	97,0
Известь (Узбекистан) (*)	44,6	36,7	508,5	138,1	135,9	136,2
Известь (РФ, Брянск) [10]	9	9	60	26,1	25,9	26,5
Гравий (Алжир) [12]	24	10	259	60,3	59,1	58,2
Гравий (Китай) [12]	28,5	19,5	286,7	79,7	78,4	78,5
Гравий (Турция) [12]	22,5	6,8	101,7	40,5	40,1	40,1
Гравий (Израиль) [12]	15	3	50,4	23,4	23,2	23,2
Гравий (Узбекистан) (*)	15,1	16,1	171,4	51,5	50,8	51,3
Гравий (Узбекистан) (*)	17,0	40,0	80,8	76,3	76,3	80,4
Гравий (РФ, Красноярск) [10]	38,2	47,5	624	156,1	153,5	154,2
Щебень (РФ, Брянск) [10]	50,6	66,0	1250	248,9	243,3	241,2
Щебень (РФ, Волгоград) [11]	36,3	36,3	121,5	94,4	94,2	97,6
Щебень (РФ, Красноярск) [10]	40,1	44,0	498,0	142,1	140,1	141,4
Щебень (Узбекистан) (*)	10,7	1,5	77,3	19,6	19,2	18,8
Щебень (Узбекистан) (*)	282,2	22,8	368,0	345,0	343,3	343,1
Щебень (Узбекистан) (*)	64,0	104,0	1230,0	309,9	304,8	307,4
Гранит (Беларусь) [10]	100,0	80,0	1200,0	312,0	306,8	306,8
Гранит (Узбекистан) (*)	7,0	75,5	1144,7	208,2	203,2	203,1

(*) - Активности образцов из Узбекистана определены в настоящей работе

Заклучение

Приведенные результаты показывают, что строительные материалы, используемые в Узбекистане, как правило, имеют максимальную удельную эффективную активность ниже порога 370 Бк/кг, то есть соответствуют I классу строительных материалов (разрешено для использования в строящихся и реконструируемых жилых и общественных зданиях). Типичные значения активностей лежат в пределах Аэфф ~ 5-230 Бк/кг. Однако могут быть единичные случаи для некоторых видов материалов (кирпич, щебень, гранит, песок), максимальные удельные эффективные активности которых могут быть близки к пороговому значению для I класса и даже несколько превышать его (кирпич огнеупорный). Такие случаи наблюдались в двух пробах из 124 (кирпич огнеупорный), щебень из отсевов дробления горных пород (2 пробы из 90), песок из отсевов дробления (1 проба из 64) и гранит, который вообще может иметь высокую радиоактивность. В целом же максимальные средние значения лежат в пределах Аэфф ~ 9-278 Бк/кг.

Говоря о вкладах дозообразующих радионуклидов в удельную эффективную активность следует сказать, что вклады могут лежать в пределах ~4-311 Бк/кг для радия-226, ~3-181 Бк/кг для тория-232 и ~2-132 Бк/кг для калия-40.

Использование при расчетах удельной активности Аэфф взвешивающих коэффициентов для тория-232 и калия-40 по отношению к радю-226, взятых из различных документов, не дает существенной разницы в расчетных величинах Аэфф – разница порядка только нескольких процентов.

Литература

1. Санитарные правила работы с радиоактивными веществами и источниками ионизирующих излучений, № 333-60. Утверждены 25.06.60. СССР, Москва, 1960.
2. Основные санитарные правила работы с радиоактивными веществами и другими источниками ионизирующих излучений ОСП 72/87. Утверждены 26.08.1987. СССР, Москва, 1987.
3. Федеральные санитарные правила, нормы и гигиенические нормативы. 2.6.1. Ионизирующее излучение, радиационная безопасность. Нормы радиационной безопасности НРБ-96. Гигиенические нормативы ГН 2.6.1.054-96. Утверждены 19.04.1996. РФ. 1996.
4. Санитарные нормы, правила и гигиенические нормативы Республики Узбекистан. СанПиН № 0193-06 "Нормы радиационной безопасности (НРБ-2006) и основные санитарные правила обеспечения радиационной безопасности (ОСПОРБ-2006)". Ташкент. 2006.
5. Республиканские строительные нормы. УзРСН 30-94, Инструкция о радиационном контроле за выпускаемыми на предприятиях стройкомплекса Республики Узбекистан строительными материалами, конструкциями и строительной продукцией. Ташкент, 1994.
6. Методика выполнения измерений удельной активности радионуклидов радия-226, тория-232, калия-40, цезия-137, стронция-90 в пробах продукции промышленных предприятий, предприятий сельского хозяйства и объектов окружающей среды. МВИ № 805/05. Аналитический комплекс "РАДЭК". Санкт-Петербург, 2005 г. (Методика выполнения измерений O'z O'U 0539:2011 (126/210-(01.00250-2008)-2011)).
7. Материалы и изделия строительные. Определение удельной эффективной активности естественных радионуклидов. Межгосударственный стандарт, ГОСТ 30108-94. Москва. 1994.
8. Виноградов А.П. Средние содержания химических элементов в главных типах изверженных горных пород земной коры //Геохимия. 1962. Вып. 7. С. 555-571.
9. Виноградов А.П. Закономерности распределения химических элементов в земной коре //Геохимия. 1956. Вып. 1. С. 6-52.
10. Е.В. Гулимова, Т.А. Младова, Н.В. Муллер. Экологическая безопасность строительных материалов и изделий : учеб. пособие / 2 изд., доп., Комсомольск-на-Амуре, ФГБОУ ВПО "КНАГТУ" (2014).
11. Сидельникова О.П., Козлов Ю.Д. Эффективная удельная активность природных радионуклидов в строительных материалах Волгоградской области // Интернет-вестник ВолгГАСУ. Сер.: Политематическая. 2013. Вып. 2(27).
12. V. Mavi, I. Akkurt. Natural radioactivity and radiation hazards in some building materials used in Isparta, Turkey // Radiation Physics and Chemistry 79, 933-937 (2010).

UDK: 523.03

DETERMINATION OF THE ASTROPHYSICAL S FACTOR OF ${}^8B(p,\gamma){}^9C$ CAPTURE REACTION FROM ${}^8B(d,n){}^9C$ REACTION.

Toshev F., Badalov K., Shoimov M.

Samarqand davlat universiteti

f.s_toshev@mail.ru

Abstract. The asymptotic normalization coefficients for ${}^9C \rightarrow {}^8B+p$ virtual decay have been determined by measuring the cross-section of ${}^8B(d,n){}^9C$ reaction in inverse kinematics at 28.8MeV/u using the RIPS facility. The deduced astrophysical S factor S_{18} of ${}^8B(p,\gamma){}^9C$ capture reaction in the center of mass energy range $1\text{-}100\text{keV}$ is $S_{18}=45 \pm 13\text{eVb}$.

Keywords: transfer reactions with radioactive nuclear beams, DWBA analysis, Asymptotic normalization coefficients, Astrophysical S factor.

Определение астрофизического S фактора реакции захвата ${}^8B(p,\gamma){}^9C$ из реакции ${}^8B(d,n){}^9C$.

Аннотация. Асимптотические нормировочные коэффициенты для виртуального распада ${}^9C \rightarrow {}^8B+p$ были определены путем измерения поперечного сечения реакции ${}^8B(d,n){}^9C$ в обратной кинематике при $28,8\text{МэВ/у}$ с использованием установки RIPS. Выведенный астрофизический S -фактор S_{18} реакции захвата ${}^8B(p,\gamma){}^9C$ в диапазоне энергий центра масс $1\text{-}100\text{keV}$ равен $S_{18}=45 \pm 13\text{eVb}$.

Ключевые слова: реакции переноса с помощью пучков радиоактивных ядер, анализа асимптотических нормировочных коэффициентов искаженных волн, Астрофизического S -фактора.

${}^8B(d,n){}^9C$ reaksiyadan ${}^8B(p,\gamma){}^9C$ ushlah reaksiyasining astrofizik S omilini aniqlash

Annotatsiya. ${}^9C \rightarrow {}^8B+p$ virtual parchalanish uchun asimptotik normallashtirish koeffitsientlari ${}^8B(d,n){}^9C$ reaksiyasining kesimini $28,8\text{ MeV/u}$ da RIPS qurilmasi yordamida teskari kinematikada o'lchash yo'li bilan aniqlandi. Olingan astrofizik S -faktor S_{18} ushlah reaksiyasi ${}^8B(p,\gamma){}^9C$ massa markazining energiya oralig'ida $1\text{-}100\text{keV}$, $S_{18}=45 \pm 13\text{eVb}$ ga teng.

Kalit so'zlar: radioaktiv yadro nurlari, DWBA analizi, asimptotik normalash koeffitsiyentlari, astrofizik S omil bilan reaksiyalarni o'tkazish.

Introduction

Radiative capture such as (p,γ) reactions are of crucial interest in astrophysics, since they play an important part in basic processes such as hydrogen burning. The thermonuclear energies relevant for such astrophysical processes are well below the Coulomb barrier, typically where cross-sections are very small. The measurement of such cross-sections is even more complicated when short-lived radioactive nuclides are involved in the entrance channel. This has led to the implementation of indirect methods allowing the experimental difficulties inherent to the direct measurements of capture cross-section to be circumvented.

This method relies on the very peripheral character of this capture process at solar energies. It consists in extracting nuclear quantities called Asymptotic Normalization Coefficients (ANC) from peripheral transfer cross-sections, through a Distorted Wave Born Approximation (DWBA) analysis.

Knowing these quantities, the S factor of the capture reaction can then be reliably calculated.

From the experimental point of view, the obvious advantage of such method lies in the cross-section magnitudes, which allow to make a measurement within a few days with secondary beams nowadays available. So far, this method (to which we shall refer as the ANC method) has only been applied to the above mentioned ${}^7\text{Be}(p,\gamma){}^8\text{B}$ solar reaction, and also to some test cases, the ${}^{16}\text{O}(p,\gamma){}^{17}\text{F}$ [2] and the ${}^{12}\text{C}(n,\gamma){}^{13}\text{C}^*$ reactions. For these two test cases the S factors obtained from the ANC method were found in good agreement with those extracted from a direct capture measurement.

In this Letter, we report on an experimental study of the ${}^8B(d,n){}^9C$ proton transfer reaction from which the S factor of the ${}^8B(p,\gamma){}^9C$ capture reaction can be derived using the ANC method. The ${}^8B(p,\gamma){}^9C$ capture at astrophysical energies represents a case similar to the ${}^7\text{Be}(p,\gamma){}^8\text{B}$ reaction, predicted to be non-resonant (direct) and strongly dominated by an electric dipole (E_1) transition in the

energy range of interest [4]. Nevertheless, the peripheral character of the capture is expected to be less pronounced than for the former reaction, due to the larger proton separation energy in ${}^9\text{C}$, 1.256MeV instead of 0.137MeV in ${}^8\text{B}$.

The ${}^8\text{B}(p,\gamma){}^9\text{C}$ is of interest for the nucleosynthesis in stars (such as supermassive stars [5]) where temperatures and densities are such that it can compete with the β decay of ${}^8\text{B}$, becoming a possible alternative path to the synthesis of CNO elements (the so-called hot proton–proton chain). A recent calculation of the S factor for this reaction (which we will note S_{18}) was performed [4] and the result was found to be in disagreement with a previous evaluation [5]. On the experimental side, only a preliminary estimate was determined from a Coulomb dissociation measurement of ${}^9\text{C}$ [6]. This estimate was found to be consistent with the prediction of [4], but smaller by a factor three to four than the calculated value of [5].

Experiment and results

The experiment was performed at the RIKEN Accelerator Research Facility where we have measured the cross-section of the ${}^8\text{B}(d,n){}^9\text{C}$ reaction at $28.8\text{MeV}/u$. The ${}^7\text{Be}(d,n){}^8\text{B}$ cross-section was also measured in the same run but in this Letter, we restrict ourselves to the results obtained for the former reaction.

The radioactive ${}^8\text{B}(d,n){}^9\text{C}$ beam was produced by fragmentation of a 70A MeV using the RIPS [7] fragment separator. As mentioned above, a relatively low incident energy is required in order to fulfill the condition of peripherality. The transfer reaction itself was studied at the final focal point F3 of RIPS. Upstream of the reaction target, a set of two position sensitive PPAC's provided a determination of the (X, Y) positions in the plane perpendicular to the beam, allowing to deduce incident position and angle. The beam spot size at the target position was $2\text{cm}\times 2\text{cm}$ FWHM. The deuteron target consisted of deuterated polyethylene (CD₂) foils of relatively large size ($5\text{cm}\times 8\text{cm}$), the total thickness being $5.7\text{mg}/\text{cm}^2$. The ejectile detection system was composed of three thin plastic scintillators, placed at 38cm downstream of the target. The first two detectors, 0.25mm thick, were used as $E-E$ telescope for ${}^9\text{C}$ ejectile identification. The last detector (1mm thick) served as a veto detector to reject beam particles, whose range in plastic was much larger than for the ejectiles which stopped in the second detector. This latter point was carefully checked by tuning RIPS in order to produce ${}^9\text{C}$ of the same energy as the ejectiles, and then check their range. Position dependence of the signals were checked by use of a PPAC with sensitive area of $15\text{cm}(H)\times 10\text{cm}(V)$ placed right before the plastic detectors. Finally, recoiling neutrons were detected in coincidence with ejectiles by eight cylindrical plastic BC408 scintillators cells, 14cm diameter and 3.81cm thick, coupled to a phototube through a conical light guide. They were placed at backward angles with respect to the beam direction (corresponding to forward angles in the center of mass (CM), covering individually a solid angle of 20msr in the laboratory frame.

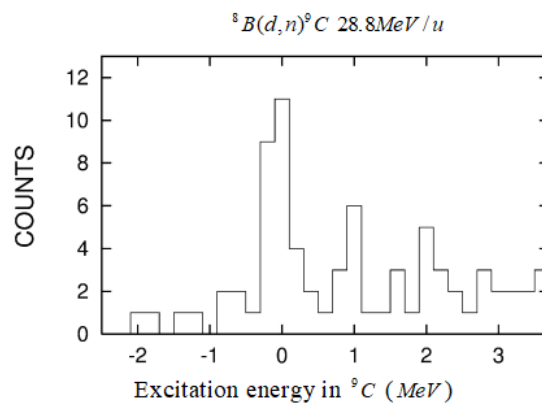


Fig. 1. Excitation energy spectrum in ${}^9\text{C}$ deduced from neutron angle and time-of-flight.

Fig.1. Shows the excitation energy spectrum obtained from the neutron TOF and angle in coincidence with ${}^9\text{C}$ ejectiles. The statistics are rather low, but the peak corresponding to the population of the ground state shows up very clearly. Counts at negative excitation energy correspond to random

coincidences. The counts at excitation energies greater than zero correspond to the sum of random coincidences and to background neutrons having larger TOF than the neutrons from the ground state, mainly originating from scattering on beam pipe and chambers. These counts do not correspond to excited states in ${}^9\text{C}$ since only the ground state of this nucleus is bound and events in Fig.1 are gated on ${}^9\text{C}$ ejectiles. In the following, random coincidences will be subtracted for the cross-section determination.

For absolute normalization of cross-sections, a precise determination of the neutron detection efficiency is necessary. We measured this efficiency during a separate run at the Orsay tandem accelerator, by studying the $p({}^7\text{Li}, {}^7\text{Be})n$ reaction at 40MeV , which produces neutrons in the energy range of interest ($2-4\text{MeV}$). The deduced error on the neutron efficiency was 8%. The total thickness and homogeneity of the CD2 target were determined during a separate run at the Orsay tandem accelerator, via the measurement of $p-d$ elastic scattering at 22meV , for which the cross-section is accurately known [8]. The error on the target thickness deduced from this analysis was 6%. Finally, the uncertainty on the number of incident particles was considered as negligible since they were recorded on tape with a fixed sample rate during each run.

DWBA analysis

The spin and parity values of ${}^8\text{B}$ and ${}^9\text{C}$ are respectively 2^+ and $3/2^-$. Two components contribute to the ${}^8\text{B}(d,n){}^9\text{C}$ cross-section, corresponding to $(l=1, j=3/2$ and $l=1, j=1/2)$ transfers. When the reaction is peripheral, transfer cross-sections can be factorized in terms of ANC's instead of spectroscopic factors. These ANC's can then be determined by normalizing DWBA cross-sections to the data, but without the large uncertainties inherent to spectroscopic factors due to the ambiguities on the potential parameters used to calculate the form factors. The experimental cross-section for the ${}^8\text{B}(d,n){}^9\text{C}$ reaction can be written as [15]:

$$\sigma(\theta) = (C_{1,3/2})^2 \frac{\sigma_{1,3/2}(\theta)}{b_{1,3/2}^2} + (C_{1,1/2})^2 \frac{\sigma_{1,1/2}(\theta)}{b_{1,1/2}^2} \quad (1)$$

where $\sigma_{l,j}$ are the calculated DWBA cross-sections (including the spin-statistical factors), and bl, j^2 are given by the ratio $(ulj(r)/W+(r))^2$ at large radius, $ulj(r)$ being the single-particle wave functions used in the DWBA calculation as form factors, and $W+(r)$ the Whittaker function. In the asymptotic region, bl, j^2 is constant and represents the squared amplitude of the tail of the single-particle wave-function. $C_{1,3/2}$ and $C_{1,1/2}$ are the two ANC's for the virtual decay ${}^9\text{C} \rightarrow {}^8\text{B} + p$, from which the S factor of the ${}^8\text{B}(p,\gamma){}^9\text{C}$ reaction can be extracted. Full finite-range calculations were performed using the code DWUCK5, [5] and including the effect of the deuteron d-state. The obtained results are consistent with those of zero-range calculations within less than 8%, a variation distinctly smaller than the uncertainty due to the choice of the optical potential or to the statistical error as will appear later. The proton bound-state wave functions were determined by adjusting the well-depth of a Woods-Saxon potential with "standard" parameters (radius $r_0 = 1.25\text{fm}$, diffuseness $a = 0.65\text{fm}$) and a spin-orbit Thomas term with $\lambda = 25$. The shapes of the angular distributions for $j=3/2$ and $j=1/2$ are similar, so that the relative contribution of both transitions cannot be determined from our data. In our case however, the ratio $\sigma_{l,j}/bl, j^2$ is almost independent of j within $\pm 1\%$ accuracy (for $0\text{cm} 15^0$), due to the peripherality of the reaction studied as will be discussed at the end of the present section. Consequently, Eq.(1) can be written as:

$$\sigma(\theta) = \left((C_{1,3/2})^2 + (C_{1,1/2})^2 \right) \frac{\sigma_{1,3/2}(\theta)}{b_{1,3/2}^2} \equiv S \sigma_{1,3/2}(\theta) \quad (2)$$

As in the case of the ${}^7\text{Be}(p, \gamma){}^8\text{B}$ reaction [1], the sum $(C_{1,3/2})^2 + (C_{1,1/2})^2$ determines the overall normalization of the capture cross-section at astrophysical energies. It can be extracted by normalizing $\sigma_{1,3/2}$ to the transfer data. S is the spectroscopic factor which we discuss below. Optical potentials to be used in DWBA calculations play a central role in the discussion of the accuracy of the ANC method. Since no elastic scattering data exists for either the entrance or exit channels, we have used sets of optical potentials for deuterons [11,12] and neutrons [13–16] derived from global formulae. The deuteron potential D2 [12] has been extensively used for stripping reactions, while the potential D1 [11] is more recent and was deduced from a broader set of data. For neutrons, potentials N1 and N2 of Refs.

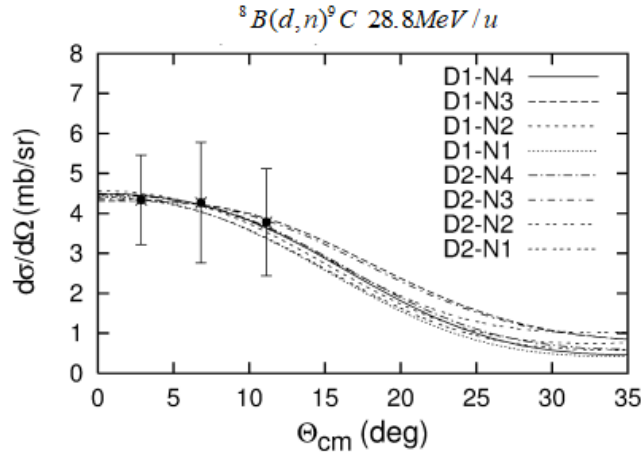


Fig.2. Angular distribution of the ${}^8\text{B}(d, n){}^9\text{C}$ reaction at 28.8 MeV/u compared with DWBA calculations using different sets of optical potentials. D1 and D2 correspond to the optical potentials N1, N2, N3, N4 for $n+{}^9\text{C}$ are from [13-16], respectively. All curves have been normalized to data.

[13] and [14], respectively, have been derived from a specific study of p-shell nuclei (at relatively low energy for the latter, however). Neutron potentials N3 [15] and N4 [16] were used for comparison.

Fig.2. Shows the calculated angular distributions $\sigma_{1,3/2}$ using combinations of the optical potentials mentioned above, each curve being normalized to the plotted data points. All shapes are rather similar, and the poor statistics of the data does not allow to discriminate between the different curves. But these forward angle data points can be used to determine the normalization factor of the curves (the quantities of interest) with nearly 20% statistical uncertainty.

The obtained values of $(C_{1,3/2})^2 + (C_{1,1/2})^2$ using above combinations of optical potentials are plotted in Table 1. These values exhibit fluctuations of about $\pm 19\%$ around the average value. In the calculation of S18 presented below, the average over all the plotted values of $(C_{1,3/2})^2 + (C_{1,1/2})^2$ has been used. The factorization of ANC's as expressed in Eq.(1) assumes that the reaction is peripheral enough to ensure that the cross-section is nearly proportional to the squared amplitude of the tail of the boundstate wave functions.

Table.1. Values of the sum of squared ANC's $(C_{1,3/2})^2 + (C_{1,1/2})^2$ deduced from the ${}^8\text{B}(d, n){}^9\text{C}$ cross-section at 28.8MeV/u by using combinations of optical potentials in the entrance and exit channels. D1 and D2 correspond to the optical potentials for $d+{}^8\text{B}$ from Refs. [11] and [12], are from [13-16], respectively.

Optical potentials	$(C_{1,3/2})^2 + (C_{1,1/2})^2$ [fm^{-1}]
D1-N1	0.97
D1-N2	1.11
D1-N3	1.15
D1-N4	1.11
D2-N1	1.17

$D2-N2$	1.42
$D2-N3$	1.22
$D2-N4$	1.30

This assumption can be checked by varying the potential parameters used to calculate the bound-state wave functions $ulj(r)$ (thus changing the tail amplitude), and examining whether the ratio between the tail amplitude b_2 (with respect to the Whittaker function) and the (forward) cross-section remains constant. This ratio is presented in Table 2 for three different sets of Woods–Saxon binding potential parameters. These calculations use optical potential sets D1–N4 but other potentials lead to similar results. One observes that, while the cross-section varies relatively strongly with the form-factor parameters the ratio remains nearly constant (within 10%), thus providing an indication that the reaction studied is essentially peripheral. As stressed in Refs. [1,2], spectroscopic factors are more uncertain quantities than ANC's because of their larger dependence on the Woods–Saxon used to calculate the proton form factor parameters. The experimental spectroscopic factor S deduced from Eq. (1) can still be compared to the predictions of the shellmodel. The average value obtained by normalizing the calculated DWBA cross-sections of Fig.2 to the data is $S = 0.73$. For comparison, shell-model calculations of the ${}^9\text{C}$ ground state were performed using successively Cohen–Kurath, Warburton and WBT (in a $p + sd$ model space) interactions. All three sets of calculations predict the spectroscopic factor $S_{1,1/2}$ for the $p_{1/2}$ orbital to be less than 5% of the one for the $p_{3/2}$ orbital, $S_{1,3/2} + S_{1,1/2} \approx S$. The sum of the corresponding spectroscopic factors $S_{1,3/2} + S_{1,1/2} \approx S$ ranges in the interval 0.81–0.97, slightly above but close to the experimentally determined value of 0.73. Such values are substantially lower than the one calculated in Ref.[5] ($S = 2.5$). In their calculation, the authors performed a rough estimate of the spectroscopic factor by restricting themselves to the ${}^6\text{Li}$ -core plus three protons in the $1p_{3/2}$ orbital (neglecting configuration mixing), thus getting a large value of S .

Calculation of S_{18} from the ANC's

The astrophysical S factor S_{18} can be deduced from the ANC's by calculating the matrix elements for the electromagnetic transition induced by the capture process. We have already mentioned that in the present case (just as in the case of the calculation of S_{17}), the largely dominant contribution to the transition is of electric dipole character. In a potential model, the matrix elements for $E1$ transitions are:

$$Q_{c \rightarrow b}^{(E1)} = \langle \psi_c \| \hat{T}^{E1} \| \Phi_b \rangle \quad (3)$$

where we have indicated with subscript c the proton in the continuum (scattering channel) and with b the bound-state, here corresponding to the ${}^9\text{C}$ ground state. The capture cross section is simply given by

$$\sigma_{c \rightarrow b}^{(E1)}(p, \gamma) = \frac{16\pi}{9} \frac{k_\gamma^3}{\hbar v} e^{-2} \sum_{c,b} |Q_{c \rightarrow b}^{(E1)}|^2 \quad (4)$$

where the sum runs over the $s_{1/2}$ and $d_{3/2}$ components of the continuum connected with $E1$ transitions to the ${}^9\text{C}$ ground-state ($j\pi = 3/2^-$). Here, $k\gamma = \gamma/hc$ is the photon wave number corresponding to a transition energy γ , v the core-proton relative velocity in the continuum and e^- is the single-particle proton effective charge. The S factor is related to the proton capture cross section by the relation:

$$S_{18}(E) \equiv \sigma_{p,\gamma}(E) E e^{2\pi\eta} \quad (5)$$

where E is the proton ${}^8\text{B}$ relative energy and $\eta = Ze2/hv^-$ is the Sommerfeld parameter. When the capture is peripheral, the radial component of Φ_b in the asymptotic region can be written as:

$$ulj(r) \approx bljW_{\eta,l}^+(kbr) \quad (6)$$

where bl_j are the constants defined in the previous section, $W_{\eta,1}$ the Whittaker function and kb the boundstate proton wave number. Therefore, the matrix elements are proportional to the ANC's and the sum $(C_{1,3/2})^2 + (C_{1,1/2})^2$ defines the absolute normalization of the capture cross-section. The approximation represented by Eq (6) is correct provided that the major contribution to the $E1$ matrix elements is from the asymptotic region. In general, this must be checked case by case when one wants to apply the ANC method to determine capture cross-sections. It can be investigated in the same way as in the transfer case, namely by checking the proportionality between the capture cross-section (or the S factor S_{18}) and the amplitude of the tail of the bound-state. For that purpose, one can vary the potential parameters used to calculate the wave functions Φ_c and Φ_b , which was done using the same potential parameters as in the case of the transfer (set 1-3 of Table 1). The ratio between S_{18} and b^2 , the tail amplitude, was found to be constant within nearly 10% at $1keV CM$ energy, as can be seen in Table 1. One can conclude that the ${}^8B(p,\gamma){}^9C$ reaction, although less peripheral than ${}^7Be(p,\gamma){}^8B$ at astrophysical energies, can be investigated using the ANC technique since the main contribution to the capture comes from the large radius region. At higher CM energies (above a few hundred keV) the interior starts playing an important role, the above approximations no longer hold, and the potential model becomes too uncertain.

Table 2. The potential parameters used to calculate the bound-state wave function, and the corresponding ratios of the squared tail amplitude of these wave functions to the calculated transfer cross-section at 6^0 in the center of mass, and to the S -factor S_{18} at $1keV CM$ energy.

Set	V_0 (MeV)	r_0 (fm)	a (fm)	$\sigma^{DVBA}(6^0)$ (mb/sr)	$b^2 / \sigma^{DVBA}(6^0)$	S_{18} (eVb)	b^2 / S_{18}
1	44.4	1.25	0.65	6.01	0.269	61.5	0.274
2	65.6	0.95	0.65	4.63	0.259	48.1	0.253
3	39.4	1.35	0.45	4.85	0.275	48.7	0.279

The energy dependence of S_{18} deduced from the model presented above in the CM energy range $1-100keV$ is a slow decrease by nearly 3%. In this energy domain, the average value is $S_{18} = 45eVb$. The estimated error due to the contribution of errors on the neutron detector efficiency (8%), absolute thickness of the target (6%), the choice of the optical potential in the DWBA calculation (19%) and the statistical error (20%) is $\pm 13eVb$. Our result on S_{18} is roughly a factor of two lower than the calculated value reported in [4] (about $85eVb$), where a microscopic cluster description of the 9C structure was used. Such tendency of microscopic cluster models to overestimate absolute cross-sections was already observed in the case of S_{17} , the S -factor of the ${}^7Be(p,\gamma){}^8B$ reaction at solar energies. Values of $S_{17}(0)$ deduced by similar calculations as in [9] stand near $27-30eVb$ depending on the interaction used, while the currently adopted value is $19+4-2eVb$. In Ref.[5], the mean value of S_{18} , averaged over the energy range $E_p 0.8MeV$ was found to be $S_{18} \approx 210eVb$, much higher than our results. The origin of such large value certainly comes from the value of 2.5 for the spectroscopic factor, well above both the one extracted from the present data, and those estimated in our shell model calculations.

In conclusion, we have provided for the first time an experimental determination of the S factor of the ${}^8B(p,\gamma){}^9C$ reaction by applying the ANC technique, particularly suitable in this case where short-lived nuclei are involved. Our result is lower by nearly a factor two than the one predicted in recent microscopic calculations.

References

1. S. B. Igamov and R. Yarmukhamedov, *Nucl. Phys. A* 781, 247 (2007)
2. C.A. Gagliardi et al., *Phys. Rev. C* 59 (1999) 1149.
3. N. Imai et al., Proceedings of the "Nuclei in the Cosmos 2000" Conference, to be published.

4. P. Descouvemont, Nucl. Phys. A 646 (1999) 261.
5. L. D. Blokhintsev, V. I. Kukulin, A. A. Sakharuk, D. A. Savin and E. V. Kuznetsova, *Phys. Rev. C* 48 (1993).
6. T. Motobayashi, in: B.M. Sherrill, D.J. Morrissey, C.N. Davids (Eds.), ENAM 98: Exotic Nuclei and Atomic Masses, AIP Conf. Proc., Vol. 455, AIP, New York, 1998, p. 882;
7. T. Kubo et al., Nucl. Instrum. Methods B 70 (1992) 309.
8. S. B. Igamov, M. C. Nadyrbekov and R. Yarmukhamedov, *Phys. At. Nucl.* 70, 1694. (2007).
9. A.M. Mukhamedzhanov et al., *Phys. Rev. C* 56 (1997) 1302.
10. R. Yarmukhamedov and Q. I. Tursunmahatov, *The Universe Evolution: Astrophysical and Nuclear Aspects*, eds. I. Strakovsky and L. D. Blokhintsev (NOVA Publishers, New York, 2013), pp. 219{270}.
11. W.W. Daehnick, J.D. Childs, Z. Vrcelj, *Phys. Rev. C* 21 (1980) 2253.
12. C.M. Perey, F.G. Perey, *Phys. Rev.* 132 (1963) 755.
13. B.A. Watson, P.P. Singh, R.E. Segel, *Phys. Rev.* 182 (1969) 977.
14. J.H. Dave, C.R. Gould, *Phys. Rev. C* 28 (1983) 2212.
15. D. Wilmore, P.E. Hodgson, *Nucl. Phys.* 55 (1964) 673.
16. F.D. Becchetti, G.W. Greenlees, *Phys. Rev.* 182 (1969) 1190.

УДК: 504.062:504.064:504.(075.8)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЪЁМНОЙ АКТИВНОСТИ РАДОНА В АТМОСФЕРНОМ ВОЗДУХЕ И В ПОЧВЕ САМАРКАНДСКОЙ И НАВОИНСКОЙ ОБЛАСТЯХ

А.М.Музаффаров¹, Р.М.Эшбуриев², А.Р.Журакулов³, Д.М.Холов³, Қ.Х.Хошимов²

¹Навоинский горно-металлургического комбината

²Самаркандский государственный университет

³Навоинский государственный горный институт

r-eshburiyev@mail.ru

Аннотация. В данной статье приведены результаты исследования концентрации и удельной активности различных радионуклидов, таких как - ²²²Rn, ²²⁰Tn и их разновидности в виде мощности экспозиционной дозы - МЭД, эквивалентной равновесной объемной активности радона - ЭРОАР, долгоживущие альфа нуклиды – ДАН в атмосферном воздухе Самаркандской и Навоинской области. Приведены некоторые результаты значений объемной активности радона, удельной активности радионуклидов, эффективной удельной активности - А_{эфф} и физических параметров окружающей среды.

Ключевые слова: уран, эквивалент, объёмная активность, радиационные факторы, активность, радионуклид, экспозиционная доза, эквивалентная доза, гамма-излучения, погрешность, миграция.

Самарқанд ва Навоий вилоятлари атмосфера ҳавоси ва тупроқларида радоннинг ҳажмий активлигини аниқлаш

Аннотация. Ушбу мақолада “Альфарад плюс” курилмаси ёрдамида Самарқанд ва Навоий худудлари атмосфера ҳавоси ва тупроқларида Радон-222 изотопининг экспозицион доза қуввати ҳамда радоннинг ҳажмий активлиги қиёсий ўрганилди. Маълумки Ер атмосферасида тарқалган радиоактив изотопларнинг қарийб 60 фоизини радон гази ташкил этади. Шу нуқтаи назардан радоннинг мазкур худудларда солиштирма активлигини ҳамда солиштирма эффектив активлигини ўрганиш амалий жиҳатдан ҳам муҳим ҳисобланади.

Kalit so'zlar: уран, эквивалент, ҳажмий активлик, радиацион факторлар, активлик, радионуклид, экспозицион доза, эквивалент доза, гамма-нурланиш, миграция.

Determination of the volumetric activity of radon in the ambient air and in the soil of the Samarkand and Navoi regions.

Abstract. In this article, the value of the equivalent volumetric activity of radon-222 in the air and the exposure dose rate of radon gas in the air and soils of Samarkand and Navoi regions were studied using the Alpha-Rad instrument. It is known that 60% of the radioactive activity in the Earth's atmosphere is radon gas. In this context, the study of the specific activity and specific effective activity of radon in these regions is learned.

Keywords: uranium, equivalent, volumetric activity, radiation factors, activity, radionuclide, exposure dose, equivalent dose, gamma radiation, error, migration.

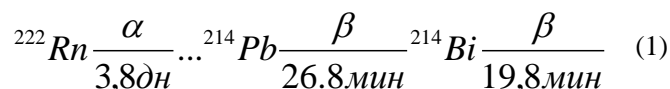
В атмосферном воздухе имеются различные радионуклиды - ^{222}Rn , ^{220}Tn и их разновидности в виде мощности экспозиционной дозы - МЭД, эквивалентной равновесной объемной активности радона – ЭРОА и долгоживущие альфа нуклиды – ДАН и так далее. Среди радиоактивных радионуклидов ^{222}Rn является одним из самых опасных естественных радионуклидов. В цепочке распада урана из радона образуются нелетучие радиоактивные радионуклиды - ^{218}Po , ^{214}Pb , ^{214}Bi и которые при попадании в организм выводятся из него с большим трудом. В ураноносных регионах, которыми в республике являются территории Самаркандской и Навоинской области повышенное содержание радионуклидов требует определения их концентрации в атмосферном воздухе населенных пунктов.

На основании вышесказанного разработана методика определения величин радионуклидов в атмосферном воздухе Самаркандской и Навоинской области является актуальной задачей прикладной ядерной физики, аналитической химии и радиоэкологии [1-4].

Техника и методика физического эксперимента.

Измерения объемной активности радона проводились измерительным комплексом «Альфарад плюс», предназначенный для определения плотности потока радона с поверхности почвы, экспрессных измерений и непрерывного мониторинга объемной активности - (ОА) радона-222 (^{222}Rn) и количества распадов Po^{218} (^{230}Th). Предел допускаемой относительной погрешности при измерениях ОА ^{222}Rn в почве составляет $\pm 30\%$.

Количество радона определяется комплексом установки «Альфарад плюс» на основании следующей реакции:



Измерения удельной активности радионуклидов в отобранных твердых пробах проводились на гамма-радиометре «ПРОГРЕСС-ГАММА», предел допускаемой относительной погрешности которого составляет $\pm 10\%$.

Значение удельной эффективной активности - $A_{\text{эфф}}$ естественных радионуклидов – (ЕРН) рассчитывают по формуле:

$$A_{\text{эфф}} = A_{\text{Ra}} + 1,31A_{\text{Tn}} + 0,09A_{\text{K}}; \quad (2)$$

где, A_{Ra} , A_{Tn} , A_{K} – соответственно удельная активность ^{226}Ra , ^{232}Tn и ^{40}K .

Значение абсолютной погрешности измерения удельной активности - $A_{\text{эфф}}$ i -того радионуклида и абсолютной погрешности определения ($\Delta_{\text{эфф}}$) рассчитывают по формуле:

$$\Delta_{\text{эфф}} = \sqrt{\Delta_{\text{Ra}}^2 + (1,31 \times \Delta_{\text{Tn}})^2 + (0,09 \times \Delta_{\text{K}})^2} \quad (3)$$

Значение удельной эффективной активности - $A_{\text{эфф}}$ ЕРН рассчитывают по формуле (1):

Основы проведения радиационного мониторинга и изучение поведение радона, основано на экспериментальные исследования физико-химических свойств контролируемых радионуклидов. На основании полученных результатов можно сделать вывод, позволяющей прогнозировать их миграционную активность в атмосферном воздухе Самаркандской и Навоинской области.

Полученные результаты и их обсуждение. Проведены более 120 замеров значений - МЭД, ЭРОА и ДАН в наблюдательных точках Самаркандской области и более 100 замеров значений - МЭД, ЭРОА и ДАН в наблюдательных точках Навоинской области. Из них некоторые результаты значений объемной активности радона, удельной активности радионуклидов, эффективной удельной активности - $A_{\text{эфф}}$ и физических параметров окружающей среды приведены в табл. 1.

Таблица 1.

Результаты измерений по определению ОАР, удельной активности радионуклидов, эффективной удельной активности и физических параметров окружающей среды

№ п/п	ОАР $\text{мБк}/\text{см}^3$	Температура воздуха $^{\circ}\text{C}$	Влажность %	Давление мм. Hg	Удельная активность в почве			
					K^{40} $\text{Бк}/\text{кг}$	Ra^{226} $\text{Бк}/\text{кг}$	Tn^{232} $\text{Бк}/\text{кг}$	$A_{\text{эфф}}$ $\text{Бк}/\text{кг}$
Самаркандская область								
1	$11234 \pm 323,2$	30	36	727	496	260	126	388
2	$9931 \pm 312,2$	30	37	728	485	285	116	391
3	$7712 \pm 313,3$	24	31	729	397	209	149	368
4	$9211 \pm 332,4$	28	33	729	477	240	185	393

5	8833± 223,3	33	38	729	458	211	158	302
6	4432 ± 148,4	31	32	730	399	198	107	304
Навоинская область								
7	4421 ± 332,4	25	22	730	397	289	149	399
8	4441 ± 198,4	23	29	730	477	264	185	393
9	3882 ± 288,5	24	31	731	458	243	158	372
10	3332 ± 285,9	28	30	732	399	231	107	334

Из полученных результатов в таблице 1. видно, что значения ОАР по Самаркандской области изменяется в пределах от 4432 мБк/см³ до 11234 мБк/см³, удельной активности радионуклидов –K⁴⁰ изменяется в пределах от 397 Бк/кг до 496 Бк/кг, - Th²³² изменяется в пределах от 107 Бк/кг до 185 Бк/кг и - Ra²²⁶ изменяется в пределах от 198 Бк/кг до 285 Бк/кг, а эффективная удельная активность – A_{эфф} изменяется в пределах от 302 Бк/кг до 393 Бк/кг, а по Навоинской области значения ОАР изменяется в пределах от 3332 мБк/см³ до 4441 мБк/см³, удельной активности радионуклидов –K⁴⁰ изменяется в пределах от 397 Бк/кг до 477 Бк/кг, - Th²³² изменяется в пределах от 107 Бк/кг до 185 Бк/кг и - Ra²²⁶ изменяется в пределах от 231 Бк/кг до 289 Бк/кг. Эффективная удельная активность – A_{эфф} изменяется в пределах от 334 Бк/кг до 399 Бк/кг.

Хотя объёмная активность радона в атмосферном воздухе и в почве в некоторых районах Самаркандской области достигается до 11234 мБк/см³, но в некоторых жилищных помещениях городского типа ОАР составляет 55000 мБк/см³, а в нижних этажах и подвальных помещениях три раза больше (150000 мБк/см³), тем не менее среднее значения ОАР не больше 3650 мБк/см³. Полученные результаты показывают что, величина объёмной активности для других радионуклидов, ²²⁶Ra, ²³²Tn и ⁴⁰K, а также для Самаркандской и Навоинской области аналогичные. Также для этих областей значения эффективной удельной активности почти совпадают. Что касается радона-222, этот радионуклид является основным источником радиоактивных изотопов в наземном пространстве и поэтому высокая активность радона наблюдается в воздухе и воде, а также в почве.

На основании полученных результатов установлены что ОАР зависит от удельной активности Ra²²⁶ и эффективной удельной активности - A_{эфф}. На рис. 1. приведен график зависимости ОАР от атмосферного давления. Из рисунка вытекает, что более плотных слоях атмосферы (730 – 735 мм.рт.ст.) значение ОАР значительно уменьшается и варьирует от 46333 Бк/м³ до 13448 Бк/м³. В менее плотных слоях атмосферы ОАР значительно выше. Такая численная аномалия радона в различных слоях атмосферы связано с тем, что радоновый газ неравномерно распределена в различных высотах атмосферы. На приземных слоях атмосферы плотность радона на много больше, особенно 0 – 5 км от поверхности Земли относительная концентрация радона почти 3-5 раз превышает чем в верхних слоях атмосферы.

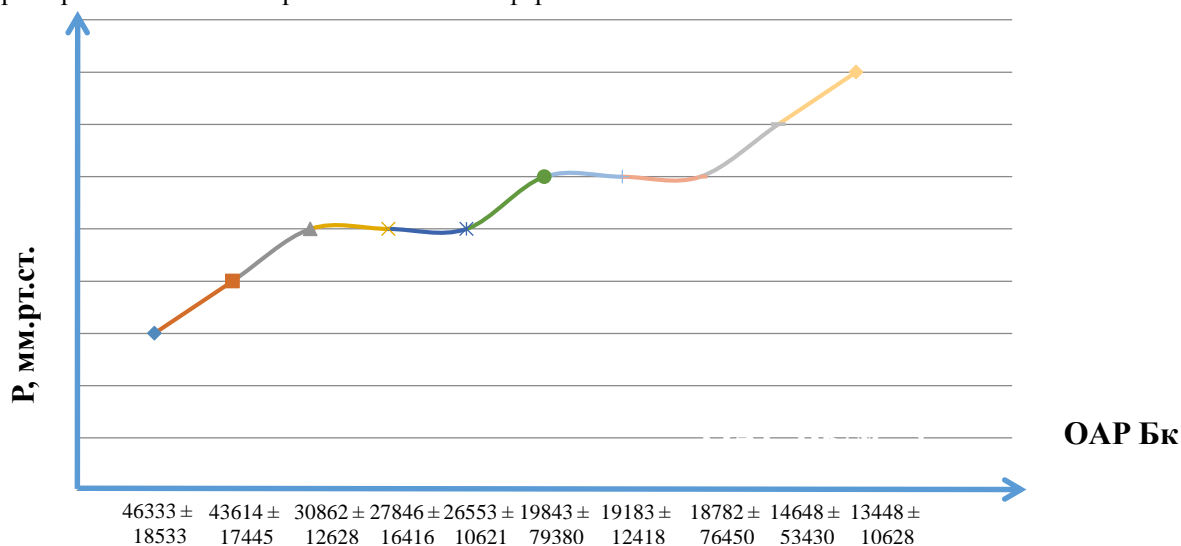


Рис.1.График зависимости ОАР от атмосферного давления воздуха.

На основании проведенных исследований найдено изменение значение ОАР, в зависимости от давления атмосферного воздуха, определены значение удельной активности радионуклидов –K⁴⁰, Th²³², Ra²²⁶ и эффективная удельная активность – (A_{эфф}).

На основании проведенных исследований замеров значений - МЭД, ЭРОА и ДАН в наблюдательных точках Самаркандской и Навоинской областях проведен расчёт годовой техногенной эффективной дозы которое составляет для населения Самаркандской области до 0,83мЗв/год, а для населения Навоинской области до 0,89 мЗв/год. Оба значения меньше чем значения установленной нормы.

Таким образом полученные экспериментальные результаты по определению удельной активности естественных радионуклидов K^{40} , Th^{232} , Ra^{226} , ^{222}Rn в атмосферном воздухе и в почве Самаркандской и Навоинской областях показывают, что удельная активность радионуклидов в исследованных регионах соответствует установленным нормам, а эффективная годовая доза радона-222 для населенных пунктов не превышает значений установленных в СанПиН-0193-06 [5].

Литература

1. Журакулов А.Р., Музаффаров А.М., Курбонов Б.И. Оценка состояния распределения естественных радионуклидов в почвах к близлежащим техногенным объектам //Наука и общество. Нукус-2020. №1. – С.16-21
2. Журакулов А.Р., Музаффаров А.М., Курбонов Б.И., Абдирахмонов У.Ш., Урунов И.О. Сезонное распределение радона - ^{222}Rn в многоквартирных домах в Навои и Самарканде //Научно-практический электронный журнал «ТЕХНИКА». Нукус. 2020. №3. – С.16-21
3. Музаффаров А.М., Саттаров Г.С., Кист А.А. Исследование поведения радия в технологическом процессе добычи урана //Инновационные технологии горно-металлургической отрасли. Тезисы докладов Республиканской конференции. Навои. 21 октябрь. 2011. – С. 227-229.
4. Музаффаров А.М., Темиров Б.Р., Саттаров Г.С. Экологические мониторинг техногенных факторов при добыче и переработке урана и золота // Экологический вестник. 2013. Выпуск №12.(152). – С.24-33.
- 5.«Нормы радиационной безопасности (НРБ-2006) и основные санитарные правила обеспечения радиационной безопасности (ОСПОРБ-2006). - Ташкент.: 2006. – 136 с.

UDK: 539.2

KOGERENT POTENTIAL METODI ASOSIDA AMORF HOLATDAGI Cu_xTi_{1-x} QOTISHMALARNING TERMO ELEKTR YURITUVCHI KUCHI (EYuK) ni HISOBLASH

O.Q.Quvondikov, D.X.Imamnazarov, F.B.Ruziboyeva
Samarqand davlat universiteti

Annotatsiya: Kuchli o'zaro ta'sir hamda gibrizatsiyani hisobga olgan holda s-d modeli uchun kogerent potensial metodi asosida amorf holatdagi paramagnit Cu_xTi_{1-x} qotishmalarning elektron strukturasi, solishtirma elektr qarshiligi ρ va termo e.yu.k. S kattaliklari hisoblandi. O'tkinchi metallar va ular qotishmalarining kinetik xususiyatlarining konsentratsiyaga qarab anomal o'zgarishi zaryad tashuvchilarning oraliq zonalararo o'tishlari bilan birga kuchli elektron-electron o'zaro ta'siri bilan bog'liqligi ko'rsatilgan. Hisoblangan kattaliklarning konsentratsiyaga bog'liqligi Zayman va Mott modellari bo'yicha hisoblash natijalari bilan taqqoslandi hamda tajriba natijalari bilan mos kelishishiga erishildi.

Kalit so'zlar: elektron struktura, elektronlar holat zichligi, solishtirma elektr qarshiligi, termo e.yu.k. koeffisienti, kogerent potensial metodi, holatlar gibrizlanishi.

Расчет термоэлектродвижущей силы (термо-э.д.с.) аморфных парамагнитных сплавов Cu_xTi_{1-x} в приближении когерентного потенциала

Аннотация. В рамках приближения когерентного потенциала для s-d-модели с учетом недиагонального беспорядка рассчитаны электронная структура, электросопротивление ρ и термо-э.д.с. S аморфных парамагнитных сплавов Cu_xTi_{1-x} . Показано, что аномальное изменение кинетических свойств переходных металлов и сплавов в зависимости от концентрации связаны с сильным взаимодействием с учетом гибридизации, сопровождающимся межзонными переходами токоносителей. Проведен сравнительный анализ с расчетами моделями Займана и Мотта, и получено удовлетворительное согласие рассчитанных концентрационных зависимостей ρ и S с экспериментальными данными.

Ключевые слова: электронная структура, плотность электронных состояний, удельное электросопротивление, величина коэффициента термо-э.д.с., метод когерентного потенциала, гибридизация состояний.

Calculation of the thermoelectric force (thermo-e.m.f.) of amorphous paramagnetic alloys Cu_xTi_{1-x} within the framework of the coherent potential approximation

Abstract. Within the framework of the coherent potential approximation for the s-d model, taking into account the off-diagonal disorder the electronic structure, electrical resistivity ρ , and thermo-e.m.f. coefficient S of amorphous paramagnetic Cu_xTi_{1-x} alloys are calculated. It is shown that the anomalous change in the kinetic properties of transition metals and alloys depending on concentrations associated with a strong interaction with hybridizations accompanied by interband transitions of current carriers. A comparative analysis is performed with the calculations by the Ziman and Mott models, and a satisfactory agreement of the calculated concentration dependences of ρ and S with the experimental data is obtained.

Keywords: electronic structure, elektron density of states, electrical resistivity, thermo-e.m.f. coefficient, coherent potential method, state hybridization.

Tartibsiz sistemalarning nazariyasini tuzishda hozirgi vaqtda ko'p karrali sochilish formalizmiga asoslangan Grin funksiyasi metodi, ya'ni kogerent potentsiallar metodi (KPM) keng qo'llaniladi. Bu metod Veyssning ferromagnitizm nazariyasidagi effektiv maydon metodiga o'xshash bo'lib, sochilish potentsialiga va qotishmalarning konsentratsion tarkibiga hech qanday chegaralanish qo'ymaydi.

Maqsadli yo'naltirilgan yangi materiallarni hosil qilishda ular tarkibiga kiruvchi elementlarning elektron strukturasi hamda kinetik hossalarni bilish juda muhim ahamyatga ega. Ayniqsa, termo E.Yu.K. va Xoll koeffitsenti kattaliklari qotishmalarning elektron strukturasi juda sezgir bo'ladi. Bu effektlarni o'rganish qotishmalarning elektron strukturasi haqida zarur ma'lumotlarni beradi. Shuning uchun ushbu ishda kogerent potentsiallar metodi yordamida qotishmalarning elektron strukturasi, solishtirma elektr qarshiligi, termo E.Yu.K koeffitsentini hisoblash konkret sistema, ya'ni amorf holatdagi Cu_xTi_{1-x} qotishmalar uchun tadbiiq qilinadi va tajriba natijalari bilan taqqoslanadi.

O'tkinchi metallar asosidagi amorf qotishmalarning kinetik xossalarni harakterlovchi kattaliklarni (solishtirma elektr qarshilikni, termo E.Yu.K koeffitsentini, Xoll effekti koeffitsentini) tajribada olingan qiymatlarini [1] fizik nuqtai-nazardan talqin etishda hozirgi vaqtda zaryad tashuvchilarning sochilishi kuchsiz bo'lgan holdagi qonunyatga asoslanuvchi umumlashgan Faber-Zayman modeli qo'llaniladi. Shuningdek, bu modelda d-elektronlarning zaryad ko'chishlari e'tiborga olinmaydi. Bu model asosida olib borilgan hisoblashlar shuni ko'rsatadiki, oddiy va nodir metallar asosidagi qotishmalarda solishtirma elektr qarshilikning konsentratsiyasiga va temperaturaga bog'liqligini tushuntirib berishga imkon beradi, ammo to'lmagan d-holatdagi elektronlarga (o'tkinchi metallar) bu modelni tadbiiq qilish jiddiy qiyinchiliklarga olib keladi.

Birinchidan, bunday qotishmalarning solishtirma elektr qarshiligi juda katta qiymatga $\rho(0) \geq 150 \text{ mK} \cdot \text{cm}$ ega bo'lib, bu esa ularda zaryad tashuvchilarning sochilishi kuchsiz emasligini bildiradi. Shuningdek, ko'pchilik qotishmalarda qarshilikning temperatura koeffitsenti manfiy ishoraga ega bo'lib, uning qiymati temperaturaning 4.2°K gacha pasayishida taxminan 3% ga oshishini ko'rsatadi. Solishtirma elektr o'tkazuvchanlikning temperaturaga bog'lanishi $T < 100\text{K}$ da $\sigma \sim T$ va $T > 100\text{K}$ da $\sigma \sim \sqrt{T}$ ekanligi tajribada kuzatilgan.

Ikkinchidan, bu qotishmalarda termo E.-Yu.-K (S) kattaligi juda kichik bo'lib, ishorasi musbat ekanligi tajribada kuzatilgan. 50°K temperaturada S ning T ga bog'lanishi chiziqli bo'lib, termo E.-Yu.-K ning T ga bog'lanishida ikkita sohani alohida-alohida qarab chiqishga to'g'ri keladi, ya'ni biri $T > 50\text{K}$ bo'lgan soha va ikkinchisi $15\text{K} < T < 50\text{K}$ bo'lgan soha. Ularning har birida S ning T ga bog'lanishi chiziqli bo'ladi va ularning har biri uchun mos keluvchi to'g'ri chiziqni tanlab olish mumkin.

Uchinchidan, elektr o'tkazuvchanlikda d-holatlarning ham ulushi bor degan farazga asoslangan modelning birlamchi parametrlarini ham tanlash ixtiyoriy bo'ladi, xususan, qotishmalarning effektiv valentligi masalasida, bu esa qotishmalarning elektron strukturasi hisoblamay, balki ma'lum degan faraz asosida olib boriladi. Shuning uchun ushbu ishda yuqoridagi kamchiliklarni bartaraf etish maqsadida o'tkinchi metallar asosidagi amorf qotishmalarda kinetik xossalarni o'rganishda KPM ni qo'llaymiz [2,3]. Kristall qotishmalar uchun yaratilgan KPM ni topologik notartib sistemalar uchun umumlashtirish bazi-bir qiyinchiliklarni keltirib chiqaradi. Shuning uchun ushbu ishda hisoblash nuqtai-nazardan oson bo'lgan quyidagi sxema asosida, aniqrog'i kogerent lokator yaqinlashishida ikki zonali umumlashgan s-model uchun nodiagonal tartibsizliklarni hisobga olgan holda, effektiv qotishmalarning bir zarrachali Grin funksiyasi hisoblaniladi. Bunda o'tish integrali huddi kristall qotishmalardagi singari bitta yoki uchta qiymatni qabul qilmay, balki amorf qotishmalardagi atomlarning juft taqsimlanish funksiyasiga mos keluvchi Gauss taqsimot funksiyasi orqali beriluvchi uzluksiz qator qiymatlarni qabul qiladi. Bunday sxema asosida aniqlangan amorf qotishmalarning elektron strukturasi keyinchalik kinetik xossalarni hisoblashda qo'llaniladi va kristall qotishmalardagi KPM yaqinlashdagi ifodalarni amorf qotishmalarga

qo'llash mumkin. Amorf holatdagi qotishmalarda gamiltonian tarkibiga kuruvchi o'tish integrali h_{mn} kristall holatdagi qotishmalardagiga qaraganda bir yoki uchta qiymatni qabul qilmay, qandaydir o'rtacha qiymat \tilde{h} atrofida dispersiyalangan bo'lib, h ning taqsimot harakterini Gauss funksiyasi ko'rinishda olish mumkin. Amorf qotishmalari uchun bunday sxema asosida kogerent potensial, qotishmalarning elektron strukturasi va qotishmalarning o'rtacha Grin funksiyalari aniqlanganidan so'ng, kristall qotishmalar uchun hisoblab chiqarilgan solishtirma elektr o'tkazuvchanlik σ va Mott formulasi asosidagi termo E.Yu.K ifodalarini amorf holatiga ham qo'llab, hisoblab topiladi [4,5]:

$$\rho = \frac{1}{\sigma}, \quad S = -\frac{\pi^2 k_B^2 T}{3|e|\varepsilon_F}, \quad \xi = \frac{d \ln \sigma(E)}{d \ln E} \Big|_{E=\varepsilon_F} \quad (1)$$

$$\sigma = \sigma_{ss} + \sigma_{dd} + 2\sigma_{sd} + 2\sigma_{cd} \quad (2)$$

$$\sigma_{ss} = 2 \frac{2e^2}{3\pi\Omega} \int d\eta \left(-\frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \sum_k \vartheta_{ss}^2 [\text{Im}G_{ss}(k, \eta^+)]^2 \quad (3)$$

$$\sigma_{dd} = 10 \frac{2e^2}{3\pi\Omega} \int d\eta \left(-\frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \sum_k \vartheta_{dd}^2 [\text{Im}G_{dd}(k, \eta^+)]^2 \quad (4)$$

$$\sigma_{sd} = \sqrt{20} \frac{2e^2}{3\pi\Omega} \int d\eta \left(-\frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \sum_k \vartheta_{ss}\vartheta_{dd} [\text{Im}G_{sd}(k, \eta^+)]^2 \quad (5)$$

$$\sigma_{cd} = \sqrt{20} \frac{2e^2 \hbar}{3\pi\Omega} \int d\eta \left(-\frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \sum_k \{ 2\vartheta_{ss}\vartheta_{sd} \text{Im}G_{ss}(k, \eta^+) \text{Im}G_{sd}(k, \eta^+) + \\ + 2\vartheta_{dd}\vartheta_{sd} \text{Im}G_{dd}(k, \eta^+) \text{Im}G_{sd}(k, \eta^+) + \vartheta_{sd}^2 \text{Im}G_{ss}(k, \eta^+) \text{Im}G_{dd}(k, \eta^+) \} \quad (6)$$

bunda $\sigma(E)$ – solishtirma elektr o'tkazuvchanlik, E_F – Fermi energiyasi, e – elektron zaryadi, k_B – Bolsman doimiysi, T – absolyut temperatura, $\text{Im}G_{\alpha\beta}(\eta)$ - o'rtacha Grin funksiyasining mavhum qismi bo'lib, ular quyidagi tenglamalardan aniqlanadi:

$$G_{ss}(k, Z) = \{ l^{ss} - \varepsilon_s(k) - \gamma^2 [l^{dd} - \Sigma_2 \varepsilon_s(k)]^{-1} \}^{-1} \quad (7)$$

$$G_{dd}(k, Z) = \{ l^{dd} - \Sigma_2 \varepsilon_d(k) - \gamma^2 [l^{ss} - \varepsilon_s(k)]^{-1} \}^{-1} \quad (8)$$

$$G_{sd} = G_{ds}(k, Z) = \gamma \{ [l^{ss} - \varepsilon_s(k)] [l^{dd} - \Sigma_2 \varepsilon_d(k)] - \gamma^2 \}^{-1} \quad (9)$$

bunda $\varepsilon_s(k)$ va $\varepsilon_d(k)$ mos ravishda s- va d-zonaning energetik spektri, γ esa gibridizatsiya parametri.

$\text{Cu}_x\text{Ti}_{1-x}$ qotishmalarning elektron strukturasi hisoblash uchun qotishma tarkibiga kiruvchi mis (Cu) va titan (Ti) elementlari s- va d-zonalarining yarim kengliklari W_α va ularning og'irlik markazri ε_α hamda gibridizatsiya γ parametrlari birlamchi kattaliklar sifatida 1-jadvalda keltirilgan [2]:

1-jadval.

	W_d	W_s	ε_d	ε_s	γ
Cu	3.1	17.6	-10.1	-8.2	1.2
Ti	4.3	10.0	-2.6	-4.6	1.0

s-elektronlarning holat zichligini birinchi yaqinlashishda yarim elliptik ko'rinishdagi formada:

$$n_0(E) = \frac{2}{\pi W^2} [W^2 - E^2]^{1/2} \quad (10)$$

d-holatlar uchun esa kuchli bog'lanish yaqinlashishi metodi asosida hisoblangan gibridlanmagan holatlar zichligidan foydalanamiz. Hisoblashlarni soddalashtirish maqsadida quyidagi yaqinlashishlarni ham e'tiborga olamiz, yani:

$$1. \gamma = x\gamma^{Cu} + (1-x)\gamma^{Ti}; \quad 2. v_{sd} = \left(\frac{\gamma}{W_s} \right) v_{ss};$$

$$3. \frac{1}{N} \sum_k \delta(E - \varepsilon_\alpha(k)) v_\alpha^2 = \frac{2(v_\alpha^m)^2}{\pi W_\alpha} \left[1 - \left(\frac{E}{W_\alpha} \right)^2 \right]^{3/2}$$

bunda $\vartheta_\alpha^m = \left(\frac{a}{\sqrt{3}} \right) W_\alpha$ – elektronlarning α -zonadagi maksimal tezligi ($\alpha=s,d$), a – qotishmadagi atomlararo o'rtacha masofa bo'lib, u quyidagi ifodadan topiladi: $a = x a^{Cu} + (1-x) a^{Ti}$, $a^{Cu} = 2.28 * 10^{-10} m$, $a^{Ti} = 2.48 * 10^{-10} m$. N - elektronlar konsentratsiyasi bo'lib, bitta atomga to'g'ri keluvchi hajm Ω orqali aniqlanadi: $N = \frac{1}{\Omega} = \frac{1}{x\Omega^{Cu} + (1-x)\Omega^{Ti}}$;

bunda $\Omega^{Cu} = 1.18 * 10^{-29} m^3$, $\Omega^{Ti} = 1.52 * 10^{-29} m^3$.

4. Qotishmaning Fermi energiyasi qotishmaning to'liq energetik spektridan aniqlanadi:

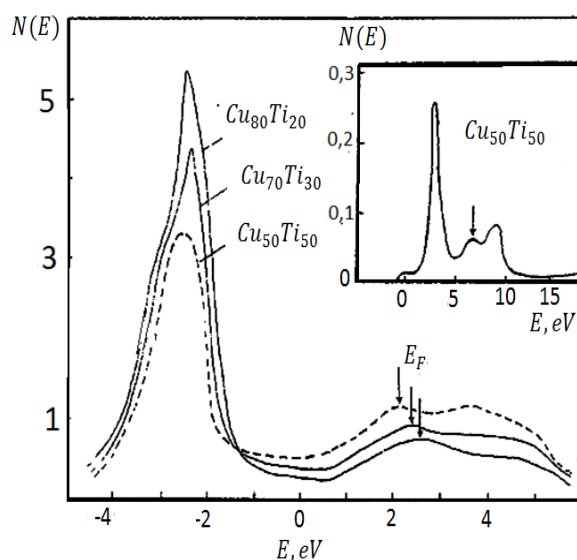
$$\int_{-\infty}^{\epsilon_F} [g^s(E) + g^d(E)] dE = x n_0^{Cu} + (1-x) n_0^{Ti}$$

bunda n_0^{Cu} – Cu uchun s- va d–elektronlar to‘liq soni; n_0^{Ti} – Ti uchun ($3d^24s^2$ elektron konfiguratsiyasi) s- va d–elektronlarning toliq soni bo‘lib, u 4 ga teng ($n_0^{Ti} = 4$). Mis elementi (Cu) GIK panjaraviy strukturaga ega bo‘lib, elementar yachaykadagi atomlar soni $Z = 4$ ga teng, bitta atomga to‘g‘ri keluvchi hajm $V_{at} = \frac{a^3}{Z}$ (a - panjara doimiysi) ga teng va molyar hajm $V_{mol} = N_A \frac{a^3}{Z}$ (N_A - Avagadro soni). U holda molyar massa μ bilan kristall zichligi $\rho = \frac{Z\mu}{N_A a^3}$ bog‘lanishdan $a^3 = \frac{Z\mu}{N_A \rho} = \frac{4 \cdot 63.54 \cdot 10^{-3}}{6.02 \cdot 10^{23} \cdot 8.93 \cdot 10^3} = 4.7 \cdot 10^{-29} m^3$ ni topamiz va $1 m^3$ hajmga to‘g‘ri keluvchi atomlar soni quyidagiga teng bo‘ladi: $N^{Cu} = \frac{Z}{a^3} = 8.49 \cdot 10^{28} m^{-3}$.

Ti elementi (Ti)- GPU panjaraviy strukturaga ega bo‘lib, uning panjara doimiylari $a = 2.95 \cdot 10^{-10} m$, $c = 4.69 \cdot 10^{-10} m$ ga teng bo‘lib, elementar yachaykadagi atomlar soni $Z = 2$ ga teng va bitta atomga to‘g‘ri keluvchi hajm $V_{at} = \frac{\sqrt{3} a^2 c}{2 Z}$. u xolda $1 m^3$ hajm birligiga to‘g‘ri keluvchi atomlar soni Ti elementi uchun quyidagiga teng bo‘ladi.

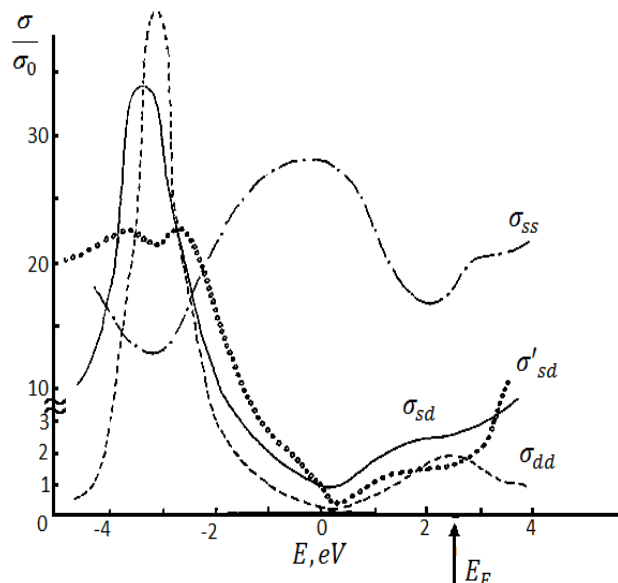
$$N^{Ti} = \frac{1}{V_{at}} = \frac{2Z}{\sqrt{3} a^2 c} = 6.6 \cdot 10^{28} m^{-3}$$

1-rasmda amorf qotishmalarning Cu–Ti uch xil konsentratsiyasi uchun kogerent potensial metodi asosida hisoblangan elektronlar holat zichliklari keltirilgan. Strelkalar yo‘nalishi mos ravishda Fermi energiyasining joylashishini ko‘rsatadi. Shu grafikning yuqori burchagida $Cu_{50}Ti_{50}$ amorf qotishmasining holatlar zichligining chiziqli kuchli bog‘lanish metodi (LMTO) bilan atom sferalari yaqinlashishida 1500 atomdan iborat bo‘lgan klaster uchun hisoblangan [6] elektronlar holat zichligi keltirilgan bo‘lib, fotoemission spektr natijalari bilan mos kelishini ko‘rish mumkin. Rasmdan ko‘rinadiki, kogerent potensial metodining lokator yaqinlanishida hisoblangan elektron strukturasi LMTO yordamida hisoblangan elektron struktura bilan mos tushadi. Amorf qotishmalarning Cu-Ti Fermi sathi-dagi elektronlar holat zichligi d-holatlar orqali aniqlanib, qotishma tarkibidagi Ti elementlari konsentratsiyasi oshib borishi bilan Fermi sathi energiyasi ham oshib boradi. Haqiqatan ham, Ti elementi uchun elektronlar holat zichligi funksiyasida Fermi sathi energiyasi Ti elementining d–holatiga (cho‘qqisiga) yaqin joylashgan bo‘ladi, mis Cu elementida d-holatlar to‘lgan bo‘lib, Fermi sathi energiyasi d-zonadan tashqarida joylashgan bo‘ladi. $Cu_{50}Ti_{50}$ qotishmalari uchun solishtirma elektr o‘tkazuvchanlikning partsiyal va natijaviy qiymatlarining Fermi energiyasining sathidan bog‘lanishi grafigi 2-rasmda keltirilgan.



1-rasm. Amorf qotishmalar Cu_xTi_{1-x} holatlar zichligining energiyaga bog‘liqligi (energetik spektri). Vertikal chiziqlar qotishma Fermi sathining joylashishini ko‘rsatadi (konsentratsiya o‘zgarishi bilan Fermi sathining ham siljib borishini ko‘rish mumkin). Shuningdek, yuqori burchakda kuchli bog‘lanish yaqinlanishi metodi (LMTO metod) asosida hisoblangan $Cu_{50}Ti_{50}$

2-rasm. $\text{Cu}_{50}\text{Ti}_{50}$ amorf qotishmalari uchun solishtirma elektr o'tkazuvchanlik tashkil etuvchilarining energiyaga bog'liqligi grafigi:



Bu rasmdan ko'rinadiki, d-zonaning solishtirma elektr o'tkazuvchanligi (σ_{dd}) Fermi energiyasi sathining mis (Cu) elementi d-cho'qqisi tamom siljib borishi bilan juda katta qiymatga oshib boradi, bu esa bunday energiyaga mos keluvchi holatlar zichligi katta qiymatga ega ekanligi bilan bog'liq bo'ladi va Fermi energiyasining istalgan ixtiyoriy qiymatlarida tezlikning zonalararo o'tishi matritsa elementlari bilan bog'liq bo'lgan (σ_{cd}) hadi gibridizatsion had (σ_{sd}) bilan bir xil tartibda bo'lib, u bilan energetik bog'liqligi juda yaqin bo'lib, Fermi energiyasining haqiqiy joylashgan nuqtasida (2-rasmda strelka bilan ko'rsatilgan) to'liq solishtirma elektr o'tkazuvchanlikning σ asosiy hadini s-holatlar (σ_{ss}) tashkil qiladi, ammo d-holatlar (σ_{dd}) va gibridizatsion tashkil etuvchilar (σ_{dd}), (σ_{cd}) ham unchalik kichik bo'lmagan qiymatlarga ega ekanligini ko'rish mumkin. Buning birdan-bir sababi s-elektronlarning holatlar zichligiga ulushi kichik bo'lsada, ularning kuchsiz sochilishga nisbatan so'nishi d-elektronlarga nisbatan juda kichik bo'lishi bilan bog'liq bo'lishi mumkin. Amorf qotishmalar $\text{Cu}_x\text{Ti}_{1-x}$ uchun qoldiq solishtirma elektr qarshilik ($\rho = \frac{1}{\sigma}$) va (1) ifoda orqali hisoblangan termo E.Yu.K kattaligi qiymatlari 3-jadvalda keltirilgan. Shuningdek, bu jadvalda $\text{Cu}_{43}\text{Ti}_{57}$ qotishmasi uchun Zayman modeli va Mott modeli bo'yicha hisoblangan qiymatlari bilan tajribada o'lchangan qiymatlari keltirilgan. Bu tajribadan ko'rinadiki, KPM bo'yicha hisoblangan qiymatlar Zayman va Mott modellari bo'yicha hisoblashlar natijasiga qaraganda tajriba natijalariga yaqinroq bo'lib, bazi bir konsentratsion qiymatlarda tajriba natijalardan unchalik kichik farq qilmaydi va KPM natijalari tajriba natijalari bilan mos tushishini ko'rish mumkin.

2-jadval.

x	30	34	40	45	50	53	57	60	70
ρ_{nazar}^{KPM} (mkOm·sm)	186	196	214	215	220	215	214	215	200
ρ_{taj} (mkOm·sm) [1]	—	183	193	195	204	—	188	176	—
ρ_{naz}^{Zayman} (mkOm·sm) [6]	—	—	—	—	—	—	398	—	—
ρ_{naz}^{Mott} (mkOm·sm) [6]	—	—	—	—	—	—	314	—	—
S_{naz}^{KPM} (mkV/K)	1.71	1.82	1.90	2.00	2.14	2.12	2.05	2.12	1.70
S_{taj} (mkV/K) [1]	—	1.9	1.6	—	1.34	1.80	1.44	—	—
S_{naz}^{Zayman} (mkV/K) [6]	—	—	—	—	—	—	5.43	—	—
S_{naz}^{Mott} (mkV/K) [6]	—	—	—	—	—	—	2.52	—	—

O'tkinchi metallar asosidagi ikki komponentali nomagnit amorf qotishmalarning elektron strukturasi, solishtirma elektr qarshiligi hamda termo E.Yu.K koeffitsenti kattaliklari kogerent potensial metodining umumlashtirilgan s-d modeli asosida amorf $\text{Cu}_x\text{Ti}_{1-x}$ qotishmasi uchun hisoblashlar bajarildi. Hisoblash natijasining tajriba natijalari hamda Zayman va Mott modellari asosidagi hisoblashlar natijasi

bilan taqqoslash shuni ko'rsatdiki, kogerent potensial metodi tajribada o'lchangan qiymatlarga ancha yaqin qiymatlarni beradi, vaholanki Zayman va Mott modellari bo'yicha hisoblangan natijalar tajriba qiymatlariga qaraganda juda katta qiymatlarga olib keladi. Bunga asosiy sabablardan biri gibridizatsiyaning ta'siri hamda d-zonaning elektr o'tkazuvchanlikka ulushi katta ekanligidan dalolat beradi. Shuningdek, s-d sochilish potentsiali Cu_xTi_{1-x} qotishmasi tarkibiga kiruvchi Cu va Ti elementlari Mendeleev jadvalining turli kataklarida joylashganligi sababli valentlikning katta farq qilishi oqibatida zaryad tashuvchilarning sochilishi kuchli bo'lib, bu esa kelajakda bunday notartib qotishmalarning electron strukturasi va kinetik xossalarini hisoblashda faqatgina kogerent potensial metodi asosidagina hisoblash kerak degan xulosaga olib keladi.

Adabiyotlar

1. Кувандиков О.К. Магнитные и кинетические свойства конденсированных сплавов и соединений на основе переходных и редкоземельных металлов. Ташкент. «Фан». 2009. – 291 с.
2. Эрнрейх Г., Шварц Л. Электронная структура сплавов - М.:Мир, 1979. - 200 с.
3. Brouers F., Vedyayev A.V. Theory of electrical conductivity of disordered binary alloys. The effect of s-d hybridization. - Phys.Rev.B, 1972, v.5. №2. –P. 384-360.
4. Грановский А.Б., Имамназаров Д.Х., Халилов И.Х. Электросопротивление и эффект Холла неупорядоченных сплавов Au_xAg_{1-x} в s-d модели (приближение когерентного потенциала). – ФММ, 1991, №7. – С.25-31.
5. Имамназаров Д.Х., Грановский А.Б. Температурная зависимость электросопротивления и эффекта Холла Au_xPd_{1-x} в s-d модели. – Вестник МГУ, Сер.3. Физика-астрономия, 2020, №3. – С.35-40.
6. Gallagher B.L. Greig D.The thermoelectric powers and resistivities of amorphous transition metal alloys. J.Phys.F, 1982.T.12, P.1721-1741.

UDK: 539.2:535.377

УСКОРЕННЫЙ ПРОЦЕСС ПРЕОБАЗОВАНИЯ ВОЛНОВОДНЫХ СЛОЕВ НА ОСНОВЕ СИЛИКАТНОГО СТЕКЛА

Арзикулов Э.У., Исаев И.Х., Эшбеков А.А., Туйманов Б.Н., Сафаров О.Ж.

*Самаркандский Государственный университет
eshbekov-a@mail.ru*

Аннотация. В данной статье экспериментально исследованы формирование волноводных слоев на основе оптического стекла путем низкотемпературной термообработки стекла в щелочном расплаве соли, отличающийся тем, что, с целью увеличения прироста показателя преломления, количества волноводных мод и глубины волноводного слоя, термообработку стекла в расплаве ведут в присутствии гамма-поля мощностью 500-5000 Р/с. Под влиянием терморadiационной обработки на процесс ионообменной диффузии разного радиуса $Na^+_{стекла} \leftrightarrow K^+_{расплав}$ в поверхностном слое стекла создавались механические сжимающие напряжения, которые приводили к формированию волноводного слоя.

Ключевые слова: силикатное стекло, гамма излучение, доза, градиентный профиль показателя преломления, ионный обмен, эффективная глубина волновода, коэффициент ионообменной диффузии, температура ионообменной диффузии.

Силикат shishalarda to'liqin o'tkazgich qatlamlarni hosil qilishni tezlashtirish jarayoni

Аннотация. Ushbu maqolada optik shishalarga ishqorli tuz eritmasida past haroratli issiqlik ishlov berish bilan to'liqin o'tkazgich hosil qilish, ya'ni sindirish ko'rsatkichi, to'liqin o'tkazgich modlari soni va to'liqin o'tkazgich qatlami chuqurligining oshishi quvvati 500-5000 R/s gamma maydonida va gamma maydonisiz o'tkazilganda bir-biridan farq qiladi. Turli xil radiusli $Na^+_{shisha} \leftrightarrow K^+_{eritma}$ ion almashinadigan diffuziya jarayoni radiatsiya maydonida o'tkazilganda shishaning sirt qatlamida mexanik siqivchi mexanik kuchlanish hosil bo'ladi va bu to'liqin o'tkazgich qatlami hosil bo'lishiga olib keldi.

Калит so'zlar: silika shisha, gamma nurlanish, doza, sindirish ko'rsatkichi profil gradiyenti, ion almashinish, to'liqin o'tkazgich effektiv chuqurligi, ion almashinish diffuziya koeffitsiyenti, ion almashinish diffuziya harorati.

Accelerated process of conversion of waveguide layers based on silicate glass

Abstract. The formation of waveguide layers based on optical glass by low-temperature heat treatment of glass in an alkaline salt melt, characterized in that, in order to increase the increase in the refractive index, the number of waveguide modes and the depth of the waveguide layer, heat treatment of glass in the melt is carried out in the presence of a gamma field with a power of 500-5000 R / s. Under the influence of thermal radiation treatment on the process of ion-exchange diffusion of different radii $\text{Na}^+_{\text{glass}} \leftrightarrow \text{K}^+_{\text{melt}}$, mechanical compressive stresses were created in the surface layer of glass, which led to the formation of a waveguide layer.

Keywords: silicate glass, gamma radiation, dose, gradient profile of the refractive index, ion exchange, effective waveguide depth, ion-exchange diffusion coefficient, ion-exchange diffusion temperature.

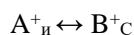
Введение

Основным материалом для изготовления оптических деталей служит оптическое стекло, которое отличается от технического высокой степенью однородности, химическим составом и физическими свойствами. Стекло устойчиво по отношению к действию углекислоты, хорошо сохраняет форму и легко обрабатывается.

Силикатные стекла с ионами щелочных металлов являются перспективным материалом для устройств интегральной оптики [1,2]. Они технологичны и обладают высокими оптическими и механическими характеристиками. Существует ряд методов формирования градиентных оптических волноводов в стеклах. К ним относятся термодиффузия, метод ионного обмена, метод ионной имплантации и запись волноводов лазерным лучом [1–4]. Все эти методы основаны на локальном изменении состава, структуры или внутренних механических напряжений в стекле, приводящих к локальному увеличению показателя преломления. Однако эти способы обладают и существенными недостатками. Недостатком технологического процесса создания волноводов при ионной имплантации является возникновение большого количества дефектов, а также необходимость стадии пост имплантационного отжига, которая может привести к исчезновению волноводного эффекта. Из них ионный обмен в расплаве соли является более актуальным. Это потому что в процессе ионного обмена сохраняется высокое качество полированной поверхности и низки потери на границе с подложкой, за счет отсутствия резкой границы волновод-подложка. Недостатком этого способа является длительное формирование многомодового волноводного слоя.

Теоретический анализ

Ионообменная реакция между источником ионов и стеклом представляет собой обратимую химическую реакцию, которую в общем виде можно записать следующим образом:



где A^+ и B^+ - обменивающиеся ионы, индексы “и” и “с” обозначают источник ионов и стекло соответственно. В ходе реакции ионы A^+ из внешнего источника замещают ионы B^+ в стекле. Однако данный вид записи процесса ионного обмена является чисто феноменологическим и не объясняет природы процесса. Прежде чем подробно рассматривать процесс ионного обмена, стоит кратко остановиться на структуре стекла. В качестве примера будут рассмотрены силикатные стёкла, которые представляют собой наиболее широко используемый в промышленности класс стеклообразных материалов. Кроме того, как будет показано далее, стёкла на основе диоксида кремния интенсивно применяются для модификации их свойств методом ионного обмена. Структурной единицей кварцевого стекла (стекло, в составе которого присутствует только SiO_2) является кремний-кислородный тетраэдр (рис 1). Маленький ион кремния располагается в центре тетраэдра, в вершинах которого находятся ионы кислорода. Между собой тетраэдры связываются вершинами, т.е. каждый ион кислорода “принадлежит” двум тетраэдрам.

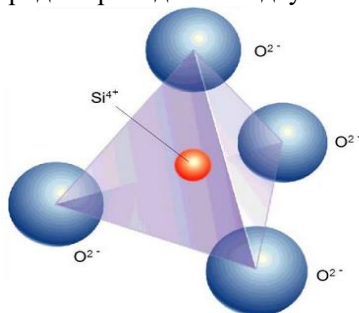


Рис. 1 – Схематичное изображение кремний-кислородного тетраэдра.

Однако синтез и формовка кварцевого стекла представляют собой трудоёмкую задачу, так как этот материал характеризуется высокой температурой размягчения. Для снижения рабочего диапазона температур в состав стекла вводят щелочные элементы. Введение щелочных катионов, встраивающихся в сетку стекла, приводит к разрыву связей Si-O. В структуре щелочно-силикатных стёкол различают мостиковые, т.е. связанные с двумя тетраэдрами, и немостиковые атомы кислорода, которые связаны с одним тетраэдром и щелочным катионом для компенсации заряд. С другой стороны, добавление только щелочных металлов в состав силикатного стекла приводит не только к снижению рабочего диапазона температур, но и ухудшению химической устойчивости стёкол. Введение щелочноземельных металлов способствует связыванию структуры стекла, так как каждый ион щелочноземельного металла, например, ионов кальция, для компенсации заряда образует связи сразу с двумя немостиковыми атомами кислорода.

Ионообменная обработка стекла на сегодняшний день крайне актуальна и востребована оптической и стекольной промышленностью, поскольку позволяет получать чрезвычайно широкий ассортимент ионообменных структур разного функционального назначения (оптика, фотоника, энергетика, сенсорика, телекоммуникации, дисплеи и т. д.) [5].

Наиболее близким к предполагаемому способу является способ формирования планарных волноводов в результате низкотемпературной $T < T_g$ где T_g - температура стеклования, ионообменной диффузии из расплавов солей заключающийся в том, что для формирования поверхностного слоя с повышенным показателем преломления стеклянная пластинка подвергается термической обработке в расплаве соли содержащей ионы, в результате обмена которых с ионами стекла повышается показатель преломления.

Изучение ионообменных процессов в стеклах "стекло-расплав соли" в течение многих лет остается одной из важнейших задач физической химии [6]. Помимо несомненной практической ценности, например, для разработки методов упрочнения стекла, исследование ионного обмена в таких системах позволяет определить важные термодинамические и структурные [7] характеристики стёкол. Низкотемпературный ионный обмен заключается в обмене ионов стекла на ионы из расплавов или растворов солей при температурах ниже интервала стеклования.

Для формирования поверхностного слоя с повышенным ПП стеклянная пластинка приводится в соприкосновение с расплавом соли, содержащей ионы, способные обмениваться с ионами стекла. Параметрами ионообменной диффузии являются время контакта стекла с солевым расплавом, температура процесса с учетом коэффициента взаимодиффузии ионов стекла и соли и температура размягчения стекла.

Простая технология ионообменной обработки стекла в солевых расплавах дает возможность получение глубоких волноводных слоев. Поэтому перед исследователями встает не только задача поиска оптимальных технологических процессов формирования волноводных структур в стекле, но и разработки специальных стёкол для устройств интегральной оптики.

При низкотемпературном ионном обмене изменяются оптические свойства стекла как за счет модификации химического состава стекла, так и под влиянием действующих в них макроскопических и микроскопических напряжений. В результате взаимодействия ионообменного слоя и незатронутой диффузией подложки возникают макроскопические напряжения, определяющие анизотропный прирост ПП в ионообменном слое и двойное лучепреломление. Взаимодействия иона диффузианта со своим непосредственным окружением возникает микроскопические напряжения. Микроскопические напряжения определяют изотропный прирост ПП [8-11].

При увеличении температуры и длительности ионообменного процесса наблюдается возрастание влияния релаксационных процессов на свойства ионообменных слоев [12].

Ионообменный синтез волноводных структур основан на том, что при замещении щелочных ионов стекла на катионы расплавов показатель преломления (ПП) стекла изменяется. Оптические свойства волноводных ионообменных слоев зависят от типа обменивающихся катионов, температуры и длительности ионообменного процесса. Для создания волноводного слоя с повышенным ПП используется ионообменное замещение содержащихся в стекле ионов Na^+ и K^+ на ионы Rb^+ , Cs^+ , Ag^+ , Li^+ , Tl^+ , Na^+ , K^+ из расплавов солей.

Для сохранения оптического качества поверхности температура ионообменного процесса выбирается ниже интервала стеклования (низкотемпературный ионный обмен).

Экспериментальная часть

Диффузия стекол проводилась в кварцевых тиглях. Для формирования волноводных слоев использовались полированные образцы размером 40x10x3 мм из стекла типа К-8. Образцы стекол термообрабатывались в расплаве KNO_3 при температурах 350-450 °С как в присутствии гамма-поля ^{60}Co при мощности 3000 Р/с, так и вне его. Размеры образцов ограничивались конструктивными особенностями печи.

Большой объем исследуемых слоев, получаемых в результате ионообменной диффузии (различные подложки, диффузионты, разнообразные технологические режимы) облегчают проведение измерения ПП, относительный ПП в диффузионных волноводах на стеклах позволяют использовать для призмы ввода-вывода излучения легкодоступный класс флинттов ($n=1,74971$ для тяжелых флинттов ТФ-5). На рис.2 приведена схема экспериментальной установки для измерения параметров волноводов. Волновод устанавливался на поворотном столике с помощью призмы ввода, ПП которой больше показателя преломления образца, лазерное излучение вводилось в волновод. Изменяя угол падения излучения на призму ввода, дискретно возбуждались волноводные моды, при этом на поверхности волновода наблюдался равномерно светящийся трек. По лимбу столика определялись резонансные углы возбуждения волновода, которые представляли собой угол между нормалью к входной грани призмы и её положением при наблюдении равномерно светящегося тракта. Зная резонансные углы, ПП призмы и угол при её основании, по традиционной формуле рассчитываются эффективные показатели преломления (ЭПП) волноводных мод. $n_m =$

$$n_p \cdot \sin \left[p \pm \arcsin \frac{\sin \varphi_m}{n_p} \right] \quad [13]$$

где n_m - ЭПП волноводных мод ($m=0, 1, 2$ - номер моды);

n_p - показатель преломления призмы;

p - угол при основании призмы;

φ_m - резонансный угол возбуждения волновода.

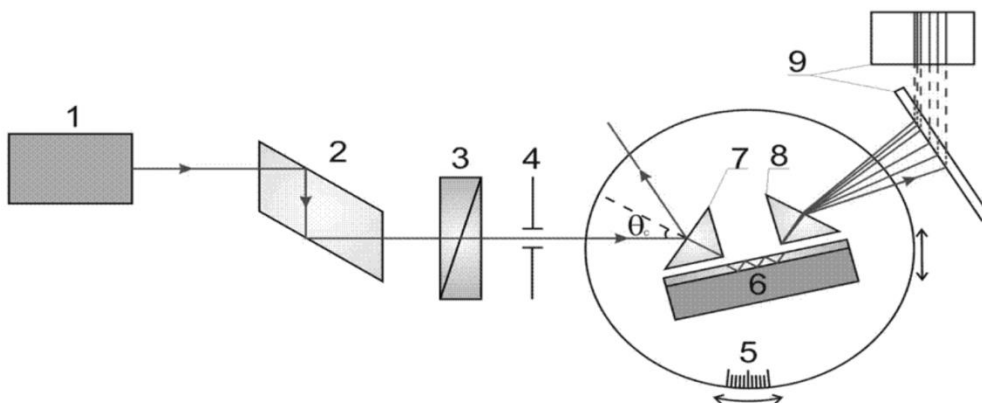


Рис.2. Схема экспериментальной установки для измерения параметров волноводов. 1-одномодовый He-Ne лазер (ЛГ-52-2), $\lambda=0,6328$ мкм, 2-Ромб Френеля, 3-поляризатор, 4-диафрагма, 5-поворотный столик с лимбом (стрелками показаны возможные перемещения поворотного столика), 6- исследуемый планарный волновод, 7-8-призмы ввода и вывода, 9-экран.

Призмы ввода и вывода были сделаны на стекле ТФ – 5 ($n_p=1,74971$). Угол призмы ввода был измерен на гониометре ГС-5, угол между основанием и входной гранью призмы $p = 50^{\circ}32'49'' \pm 5''$. Ошибка измерения угла θ_c составила ± 1 ; при этом ошибка определения эффективного ПП. n_m составляла величину $\pm 2 \cdot 10^{-4}$.

Известно [1], что изменение свойств силикатных стекол при низкотемпературном ионном обмене $R^+_{\text{стекла}} \leftrightarrow R^+_{\text{расплав}}$ определяется как изменение химического состава стекла, так и незавершенностью протекания релаксационных процессов в ионообменных слоях стекол. При этом вклад этих различных механизмов в результирующее изменение оптических свойств стекол определяется химическим составом стекла, температурной и продолжительностью протекания ионообменного процесса, степенью контакта 100% обменивающихся ионов. Так, при ионном обмене $Na^+_{\text{стекла}} \leftrightarrow Cs^+_{\text{расплав}}$ основную роль в изменении свойств играет изменение химического состава стекла, а при ионообменном замещении Na^+ на K^+ определяющую роль играют диффузионные напряжения [14] различного типа. Волноводы, полученные таким способом, имеют высокое качество полированной поверхности и низкие потери на границе с подложкой за счет

отсутствия резкой границы волновод-подложка. В то же время, существенным недостатком этого способа является длительное формирование многомодового волноводного слоя.

Параметры полученных волноводов определялись методом резонансного возбуждения волноводных мод с помощью призмной системы ввода-вывода излучения на длине волны He-Ne лазера ($\lambda=0,63$ мкм).

Результаты и обсуждение

Волноводы, полученные таким способом, имеют высокое качество полированной поверхности и низкие потери на границе с подложкой за счет отсутствия резкой границы волновод-подложка. В то же время, существенным недостатком этого способа является длительное формирование многомодового волноводного слоя. Поставленная цель была достигнута тем, что получение волноводных слоев на основе оптического силикатного стекла, включающее термообработку стекла в расплаве соли и низкотемпературный ионный обмен, проводилось в гамма-поле ^{60}Co . Суть этого способа заключается в следующем: полированные образцы из щелочно-силикатного стекла термообрабатывались в щелочном расплаве соли, низкотемпературный ионный обмен в котором приводит к формированию волноводного слоя. Температурно-временные параметры обработки выбирались из условия формирования волноводного слоя заданной толщины при сохранении высокого качества поверхности образцов. Ионный обмен осуществлялся в гамма поле ^{60}Co , мощность которого не приводила к радиационному перегреву образцов. Обработка образцов в гамма-поле при 500°C приводила к коррозии поверхности стекла, а при $T < 350^\circ\text{C}$ к медленному /несколько десятков часов/ формированию волноводного слоя. Ниже мощности 500 Р/с эффект не наблюдался, а при 5000 Р/с происходил радиационный перегрев образцов. В результате обмена ионов разного, радиуса $\text{Na}^+_{\text{стекла}} \leftrightarrow \text{K}^+_{\text{расплавов}}$ в поверхностном слое стекла создавались механические сжимающие напряжения, которые за счет эффекта фотоупругости приводили к формированию волноводного слоя.

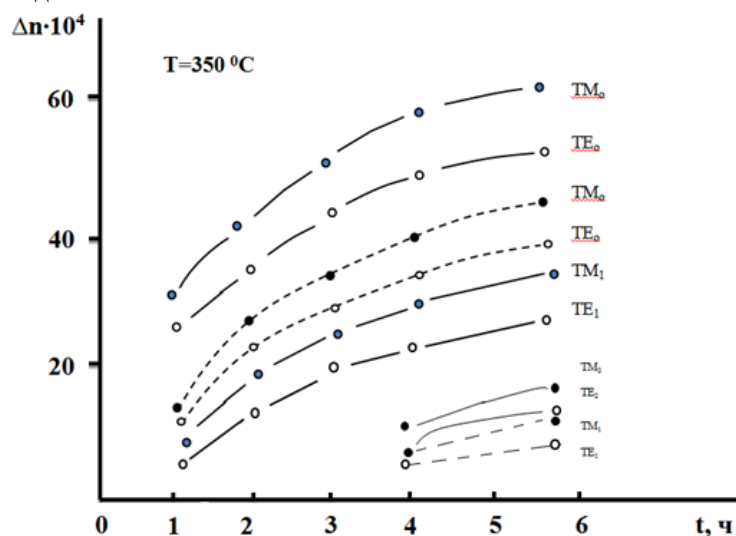


Рис. 3. Зависимости прироста показателя преломления Δn_0 волноводных мод от времени термообработки (t) при 350°C . Штриховыми кривыми показаны зависимости прироста показателя преломления волноводных мод для TE и TM поляризаций от времени термообработки в отсутствие гамма-поля, а сплошными кривыми при термообработке в гамма-поле.

Параллельно проводилась аналогичная обработка образцов вне гамма-поля. Параметры полученных волноводов определялись методом резонансного возбуждения волноводных мод с помощью призмной системы ввода-вывода излучения на длине волны лазера $\lambda = 0,63$ мкм. На рис. 3 и 4 показаны зависимости прироста показателя преломления волноводных мод от времени термообработки при $T=350^\circ\text{C}$ и $T=450^\circ\text{C}$, соответственно).

Штриховыми кривыми показаны зависимости прироста показателя преломления волноводных мод для TE и TM поляризаций от времени термообработки в отсутствие гамма-поля, а сплошными кривыми при термообработке в гамма-поле. Из рисунков видно, что гамма-поле позволяет увеличить число волноводных мод и прирост показателя преломления $\Delta n = n_m - n_s$.

(n_s – показатель преломления подложки). По измеренным ЭПП методом Венделя-Краммерса-Бриллюена восстанавливался профиль показателя преломления (ППП) волновода, по которому определялась глубина волноводного слоя.

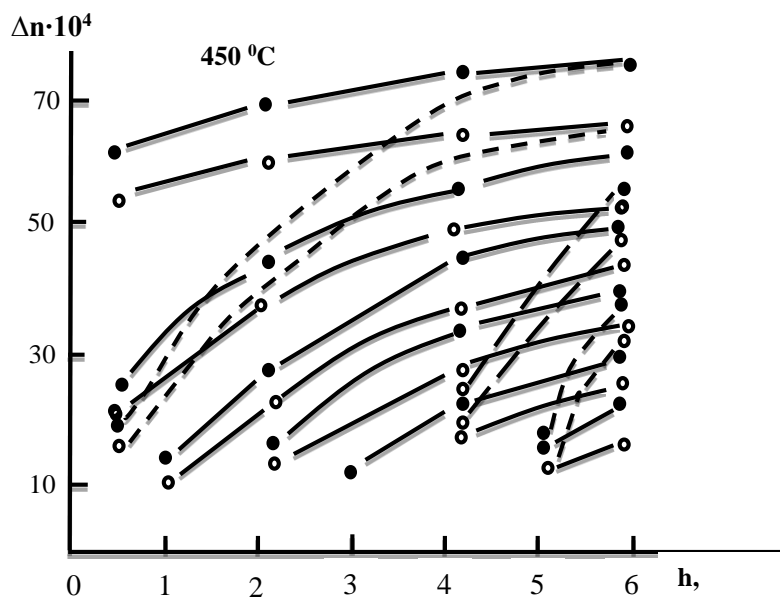


Рис. 4. Зависимости прироста показателя преломления (Δn_o) волноводных мод от времени термообработки (t) при 450°C. Штриховыми кривыми показаны зависимости прироста показателя преломления волноводных мод для ТЕ и ТМ поляризаций от времени термообработки в отсутствии гамма-поля, а сплошными кривыми - при термообработке в гамма-поле.

На рис. 5 представлен характерный вид ППП для ТМ поляризации в отсутствие гамма-поля (кривая 1) и в гамма-поле увеличивается глубина волновода (h). Параметры волноводов, полученных при термообработке в гамма-поле и вне гамма-поля сведены в таблице. Аналогичные эффекты наблюдались и при проведении низкотемпературной обработки образцов в щелочных расплавах других солей.

Таблица: Параметры волноводных слоев, полученных за счет низкотемпературного обмена $Na^+_{ст} \leftrightarrow K^+_{распл}$ в стекле К-8 при термообработке в гамма поле и вне гамма-поля.

Температри Т°С	Число волноводных мод		Прирост показателя преломления Δn_o за 3 часа водного слоя h			
	в гамма-поле	Без гамма-поля	в гамма-поле	Без гамма-поля	в гамма-поле	Без гамма-поля
350	3	2	$50 \cdot 10^{-4}$	$30 \cdot 10^{-4}$	10	5
400	4	3	-	-	-	-
450	6	3	$70 \cdot 10^{-4}$	$50 \cdot 10^{-4}$	18	10

При этом в зависимости от того или иного расплава температурные и временные параметры термообработки могут различаться. Это связано с различием в коэффициентах диффузии для различных щелочных ионов.

В процессе γ -облучения в стеклах возникают дефектные центры, возрастает подвижность составляющих стекло. Поэтому наблюдаемые изменения оптических свойств свидетельствуют об увеличении коэффициентов взаимодиффузии щелочных катионов под действием γ -излучения:

1. С увеличением коэффициентов взаимодиффузии щелочных катионов или
2. С уменьшением скорости релаксационных процессов в ионообменных слоях стекол.

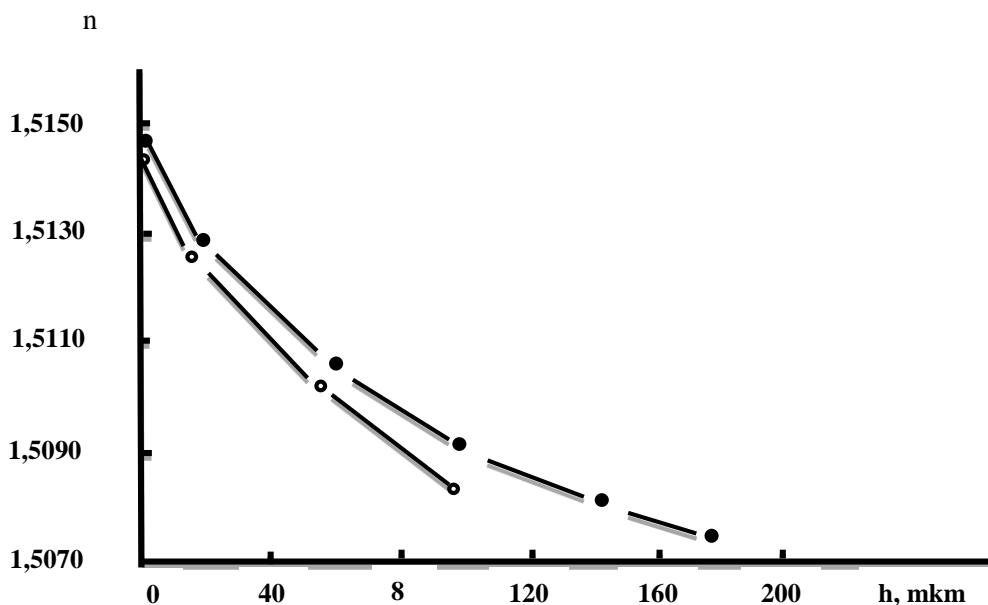


Рис. 5. Характерный вид профиля показателя преломления (n) для ТМ поляризации в отсутствие гамма-ноля (кривая 1) и в гамма-поле (кривая 2) в глубину (h) от поверхности образца.

Заключение

Таким образом обнаружено увеличение коэффициентов взаимо диффузии щелочных катионов под действием γ -облучения. Экспериментально показана возможность использования радиационно-стимулированной диффузии для увеличения скорости ионообменного формирования волноводных слоев в силикатных стеклах, расширение диапазонов варьирования их свойств. По нашему мнению, предложенный способ удовлетворяет критерию "существенные отличия", поскольку нами показано, что гамма-поле позволяет ускорить низкотемпературный ионный обмен в оптическом щелочно-силикатном стекле, что приводит к ускорению процесса получения волноводного слоя заданной толщины, увеличению прироста показателя преломления, количества волноводных мод и глубины волноводного слоя.

Эффект ускорения ионообменной диффузии под действием γ -поля может быть практически использован при ионообменном диффузии стеклообразных оптических элементов.

Литература

1. Никонов Н.В., Петровский Г. Т. Стекла для ионного обмена в интегральной оптике: современное состояние и тенденции дальнейшего развития (обзор). // Физика и химия стекла. 1999. Т. 25. N 1. С. 21-69.
2. Tervonen A., West B. R., Honkanen S. Ion-exchanged glass waveguide technology: a review // Opt. Engineering. 2011. Vol. 50. P. 071107.
3. Nolte S., Will M., Burghoff J., Tuennemann A. Femtosecond waveguide writing: a new avenue to three-dimensional integrated optics // Appl. Phys. A. 2003. Vol. 77. P. 109-111.
4. Cheng G., Mishchik K., Mauclair C., Audouard E., Stoian R. Ultrafast laser photoinscription of polarization sensitive devices in bulk silica glass // Opt. Express. 2009. Vol. 17. N 12. P. 9515-9520.
5. Никонов Н.В., Сгибнев Е.М., Сидоров А.И., Евстропьев С.К. Ионный обмен в щелочесодержащих стеклах: технологии, механизмы, применения. Часть 1. Серебряные, медные и таллиевые катионы. Учебное пособие. – СПб: Университет ИТМО, 2020. – 103 с.
6. Ботвинкин О.К., Денисенко О.Н., Черняков Т.Г. Ионный обмен в стеклоделии. В кн.: // Неорганические ионообменные материалы. Л. 1974. Вып. 1. -С. 265-273.
7. Мусеев В.В., Пермякова Т.В., Шешуков Г.Е. Ионообменные равновесия в системе стекло-расплавленная соль. // Физика и химия стекла. 1977. Т.3. №1. С.19-22.
8. Giallorenzi T.G., West E.L., Kirk R., Ginter R., Andrews B.A. Formation and Characteristics of graded-index optical waveguides buried in glass. // Appl. Opt. 1973. V.12. №6. P.1240-1245.

9. Каранетьян Г.О., Петровский Г.Т., Ремизов Н.В. Фундаментальные основы создания стеклообразных материалов градиентной оптики. //XV International congressonglass.-Leningrad. - 1989. -V 2a. -P.65-70.

10.Глебов Л.Б. Оптические свойства стекол при низкотемпературном ионном обмене. //XV International congressonglass. Leningrad. -1989. -V2a. -P.95-100.

11.Евстропьев С.К., Икрамов Г. И. Петровский Г.Т., Эшбеков А.А. Структурные микронапряжения в щелочносиликатном стекле, подвергнутом низкотемпературному ионному обмену. //Физика и химия стекла. 1992. Т.18. №2. С.169-173.

12.Евстропьев С.К., Никоноров Н.В. Роль напряжений в формировании оптических свойств силикатных стекол при низкотемпературном ионном обмене. //XV International congressonglass. Leningrad. 1989. V 2b. P.73-80. Кн. // Интегральная оптика. Под ред. Талкера Т.М. 1978. С.344.

13.Глебов Л.Б., Никаноров Н.В., Петровский Г.Т., Филипова М.Н. Влияние напряжений на показатель преломления градиентных слоев стекла, полученных методом ионообменной диффузии. // Физика и химия стекла. 1983, т.9, №6, с. 683-688.

УДК: 539.2

ЭКСИТОННЫЙ МЕХАНИЗМ ДВУХФОНОННОГО РЕЗОНАНСНОГО КОМБИНАЦИОННОГО РАССЕЯНИЯ СВЕТА В КВАНТОВОЙ ЯМЕ

У.И. Азимов

Самаркандский филиал Ташкентского университета информационных технологий

Аннотация. Развита теория экситонного механизма двухфононного резонансного комбинационного рассеяния света (2ФРКРС) в квантовой яме. Показано, что экситонный канал 2ФРКРС приводит к резкому усилению ($\alpha_0^{-3}/\ln^2\alpha_0$ раз, где α_0 - безразмерная константа экситон-ЛО-фононного взаимодействия) сечения 2ФРКРС по сравнению с аналогичным процессом в объемном полупроводнике. Это усиление обусловлено возможностью реального испускания ЛО-фонона в экситонном канале.

Ключевые слова: экситон, фонон, резонанс, комбинационное рассеяние света, квантовая яма.

Excitonic channel of two-phonon resonant raman scattering in a quantum well

Abstract. The theory of two-phonon resonant Raman scattering (2PRRS) is developed for a quantum well. It is shown that the excitonic channel of 2PRRS leads to the sharp enhancement (in $\alpha_0^{-3}/\ln^2\alpha_0$ times, α_0 is the dimensionless exciton-LO-phonon coupling constant) of the 2PRRS cross section in a comparison with the similar process in a bulk semiconductor. This enhancement is due to the possibility of the real LO – phonon emission in the excitonic channel.

Keywords: exciton, phonon, resonant, Raman scattering, quantum well.

Kvant o'rasida yorug'likning ikki fononli rezonans kombinasion sochilishining eksiton mexanizmi

Annotasiya. Kvant o'rasida yorug'likning ikki fononli rezonans kombinasion sochilishining (2FRKS) eksiton mexanizmi nazariyasi ishlab chiqilgan. 2FRKS-ning eksiton mexanizmi 2FRKS sochilish kesimining hajmiy yarimo'tkazgichdagi xuddi shunday jarayonga nisbatan kuchli ($\alpha_0^{-3}/\ln^2\alpha_0$ marta, bu erda α_0 - eksiton – LO – fonon bog'lanishining o'lchamsiz kattaligi) oshib ketishi ko'rsatilgan. Bu kuchayish eksiton mexanizmida yuz beradigan LO – fononning real chiqarilish imkoniyati bilan bog'langan.

Kalit so'zlar: eksiton, fonon, rezonans, yorug'likning kombinatsion sochilishi, kvant o'ra.

Теоретические исследования процессов многофононное резонансное комбинационное рассеяние света (МФРКРС) в объемном полупроводнике показали, что в сечение рассеяния дают вклад процессы двух типов: рассеяние через промежуточные состояния свободных электронно-дырочных пар (ЭДП) и через экситонные состояния [1].

Процессы с участием горячих экситонов Ванье -Мотта изучались в случае объемного полупроводника в ряде работ (см.[2]) и ссылки в ней). Качественно этот канал рассеяния можно описать следующим образом. При поглощении кванта возбуждающего света непрямым образом с одновременным испусканием ЛО-фонона рождается горячий экситон. Затем экситон совершает каскад из $N-2$ переходов через реальное промежуточное состояние с испусканием $N-2$ ЛО-фононов

и, наконец, непрямым образом аннигилирует, испуская квант вторичного излучения $\hbar\omega_s$ и последний фонон. При взаимодействии с LO-фононами вероятность испускания электроном $N-1$ фононов не зависит от безразмерной фреilihовской константы связи α_0 . Отсюда следует, что вклад в сечении МФРКС процессов с участием горячих экситонов Ванье - Мотта оказывается пропорциональным α_0 .

В настоящей статье рассматривается двухфононное РКРС в одиночной квантовой яме в случае, когда промежуточными состояниями являются двумерные экситоны. Показано, что в квантовой яме в рассеянии имеется только один не прямой переход, что приводит к существенному усилению вклада экситонов двухфононным РКРС по сравнению как с аналогичным рассеянием в объемном полупроводнике.

Рассмотрим второе фононное повторение, когда частоты возбуждающего света ω_l и частота рассеянного света ω_s связаны условием $\omega_s = \omega_l - 2\omega_{LO}$ (где ω_{LO} – частота объемных продольных оптических фононов (LO – фононов)). В этом случае для тензора рассеяния получим

$$S_{\beta\gamma\beta'\gamma'} = S_{\beta\gamma\beta'\gamma'}^{(0)}(S_1 + S_2), \quad (1)$$

$$\text{где } S_{\beta\gamma\beta'\gamma'}^{(0)} = (\pi\hbar^6\omega_s^2\omega_l^2)^{-1}(\hbar\omega_{LO})^4(2d/\pi a_0)^4 J_{\beta\gamma} J_{\beta'\gamma'}^* \delta(\omega_l - \omega_s - 2\omega_{LO}) \quad (2)$$

$J_{\gamma} = (e/m_0)P_{cv,\gamma}$. m_0 – масса свободного электрона; $P_{cv,\gamma}$ – проекция межзонного матричного элемента импульса, вычисленного на блоховских модулирующих множителях

$a_0 = \epsilon\hbar^2/\mu e^2$ – есть боровский радиус экситона, ϵ – диэлектрическая проницаемость материала квантовой ямы, e – заряд электрона, μ – приведенная эффективная масса, d – толщина ямы. Скалярные функции S_1 и S_2 представляют собой одно- и двукратные суммы по квантовым числам размерного квантования

$$S_1 = \alpha_0^2 \sum_n \int_0^\infty K dK I^2(K, n) [(1 + \alpha_v)^{-3/2} - (1 + \alpha_c)^{-3/2}]^4 \times \\ \times |G(n, n, K, \omega_l - \omega_{LO})|^2 |G(n, n, 0, \omega_l)|^2 |G(n, n, 0, \omega_s)|^2, \alpha_{v(c)} = (\alpha_0 m_{v(c)} / 4 m_e) K, \quad (3)$$

$$S_2 = \alpha_0^2 \sum_{\substack{n, n' \\ n > n'}} \int_0^\infty K dK I^2(K, n, n') \{ |G(n, n', K, \omega_l - \omega_{LO})|^2 \chi(n, n', \omega_l) \times \\ \times \chi(n, n', \omega_s) + |G(n', n, K, \omega_l - \omega_{LO})|^2 \chi(n', n, \omega_l) \chi(n, n', \omega_s) \}, \quad (4)$$

Функции $\chi(n, n', \omega)$, $I(K, n)$, $I(K, n, n')$ имеют вид

$$\chi(n, n', \omega) = (1 + \alpha_v)^{-3} |G(n, n, 0, \omega)|^2 + (1 + \alpha_c)^{-3} |G(n', n', 0, \omega)|^2, \quad (5)$$

$$I(K, n) = \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{b_n^2 + x^2} \right) \left\{ 1 - \frac{2b_n^4 [1 - \exp(-x)]}{x(b_n^2 + x^2)(2b_n^2 + 3x^2)} \right\}, b_n = 2\pi n; \quad (6)$$

$$I(K, n, n') = [\pi^2(n - n')^2 + x^2]^{-1} + [\pi^2(n + n')^2 + x^2]^{-1}, x = Kd. \quad (7)$$

В S_1 и S_2 функция Грина $G(n, n, 0, \omega_l)$ соответствует прямому рождению экситона, а $G(n, n, 0, \omega_s)$ – прямой его аннигиляции. Эти процессы могут иметь место, только если $K = 0$.

$$|G(n, n, 0, \omega)|^2 = \left[(\omega - \omega'_g - n^2\omega_\mu)^2 + \gamma^2 \right]^{-1}, \omega_\mu = \omega_c + \omega_v - \omega'_g = \omega_g - \Delta\omega. \quad (8)$$

Функция Грина $G(n, n', K, \omega_l - \omega_{LO})$ соответствует испусканию фонона на экситоном как для случая рассеяния в одной и той же зоне ($n = n'$), так и для случая перехода в другую зону ($n \neq n'$). Если квадрат модуля равен

$$|G(n, n', K, \omega_l - \omega_{LO})|^2 = \left| (\omega_l - \omega_{LO} - \omega'_g - \omega_c n^2 - \omega_v n'^2 - \frac{\hbar K^2}{2m_e})^2 + \gamma^2 \right|^{-1}. \quad (9)$$

Рассмотрим сначала случай в одной и той же зоне, описываемый функцией S_1 . На частотах $\omega_l < \omega'_g + n^2\omega_\mu$ все функции Грина нерезонансны (нет реальных переходов) и $S_1 \sim \alpha_0^2$, что соответствует фоновому рассеянию. На частоте $\omega_l^{(1)} = \omega'_g + n^2\omega_\mu$ становится возможным реальное прямое рождение экситона, и на этой частоте $|G(n, n, 0, \omega_l) \sim \gamma^{-2}|^2$. Так как $\gamma \sim \alpha_0$, то $S_1 \sim \alpha_0^0$. На частоте $\omega_l^{(1)}$ имеет место пик, который в α_0^{-2} раз превышает фон. В области частот $\omega'_g + n^2\omega_\mu < \omega_l < \omega'_g + n^2\omega_\mu + \omega_{LO}$ все функция Грина нерезонансны и $S_1 \sim \alpha_0^2$. Начиная с частоты $\omega_l^{(2)} \geq \omega'_g + n^2\omega_\mu + \omega_{LO}$ становится резонансной $G(n, n, K, \omega_l - \omega_{LO})$ (возможно реальное испускание фонона). Если параметр $\gamma/\omega_{LO} \ll 1$, то при интегрировании по переменной K вклад полюса функции $G(n, n, K, \omega_l - \omega_{LO})$ становится преобладающим, по этому с достаточной точностью можно считать, что

$$|G(n, n, K, \omega_l - \omega_{LO})|^2 = \frac{2\pi}{\gamma} \delta\left(\omega_l - \omega_{LO} - \omega'_g - n^2\omega_\mu - \frac{\hbar K^2}{2m_e}\right). \quad (10)$$

Тогда в области частот $\omega_l^{(2)}$

$$S_1 = \frac{2\pi\alpha_0^2}{\gamma} \frac{m_e}{\hbar} \sum_n I^2(K_0, n) [(1 + \alpha_v)^{-3/2} - (1 + \alpha_c)^{-3/2}]^4 |G(n, n, K, \omega_l)|^2 |G(n, n, 0, \omega_s)|^2$$

$$K_0 = \sqrt{2m_e/\hbar} \sqrt{\omega_l - \omega_{LO} - \omega'_g - n^2\omega_\mu},$$

т.е. $S_1 \sim \alpha_0$. Если $\omega_l = \omega_l^{(3)} = \omega'_g + n^2\omega_{LO} + 2\omega_{LO}$ (частота соответствующая прямой аннигиляции), то $|G(n, n, 0, \omega_l^{(3)})|^2 \sim \gamma^{-2}$ и $S_1 \sim \alpha_0^{-1}$. Таким образом, на частотной зависимости $S_1(\omega_l)$ имеются два пика: более слабый $S_1(\omega_l^{(1)}) \sim \alpha_0^0$, соответствующий реальному прямому рождению экситона, и сильный пик $S_1(\omega_l^{(3)}) \sim \alpha_0^{-1}$, соответствующий реальной прямой аннигиляции.

Частотная зависимость S_2 отличается от частотной зависимости S_1 тем, что на частоте $\omega_l^{(1)}$ $S_2 \sim \alpha_0^{-1}$, в то время как $S_1 \sim \alpha_0^0$. Дело в том, что функция $|G(n, n', K, \omega_l - \omega_{LO})|^2$ может быть аппроксимирована δ -функцией на частотах $\omega_l^{(4)} \geq \omega'_g + \omega_c n^2 + \omega_v n'^2 \omega_{LO}$.

Рассмотренный выше экситонный механизм двухфононного РКРС приводит к резкому возрастанию сечения рассеяния (тензор рассеяния $S_{\beta\gamma\beta'\gamma'} \sim \alpha_0^{-1}$ на резонансных частотах возбуждающего света) по сравнению с ЭДПами в качестве промежуточных состояний ($S_{\beta\gamma\beta'\gamma'} \sim \alpha_0^2 \ln^2 \alpha_0$). Таким образом, имеет место увлечение рассеяния в $\alpha_0^{-3} / \ln^2 \alpha_0$ раз. Отсюда можно сделать вывод, что в квазидвумерной электронной системе экситонный механизм двухфононного РКРС является преобладающим. Этот вывод представляется оправданным именно для двухфононного рассеяния, когда экситон фигурирует только в акте непрямого рождения (или непрямо аннигиляции) и однократного испускания ЛО – фонона.

Если частота возбуждающего света достаточно высока, так что энергия экситона хватает для испускания многих фононов, вопрос о соотношении вклада в рассеяние экситонного механизма и механизма ЭДП усложняется. Это связано с тем, что при испускании ЛО – фонона горячим экситоном он может перейти в состояние ЭДП и далее фононы будут испускаться электроном и дыркой. Не исследуя в данной работе относительную роль двух механизмов рассеяния, заметим лишь, что зависимость тензора рассеяния от константы связи α_0 в случае МФРКС при чисто экситонном механизме остается такой же, как и в случае двухфононного РКРС, так как появление дополнительной константы связи в числителе при переходе от N к $N+1$ испущенных фононов будет компенсироваться появлением константы $\gamma \sim \alpha_0$ в знаменателе, которая происходит от процесса реального испускания фонона экситоном.

Литература

1. Коровин Л.И., Палов С.Т., Эшпулатов Б.Э. ЖЭТФ, 1991, **99**, вып.5, с.1619-1631.
2. Траллеро Гинер К., Ланг И.Г., Павлов С.Т. ФТТ, 1981, **23**, № 5, с.1265-1275.
3. R.J.Elliott, K.London, J.Phys.Chem.Sol.8,382(1959);15,196(1960)
4. Б.П.Захарченя, Р.П.Сейсян. Диамагнитные экситоны в полупроводниках, УФН, 194-210 (1969)
5. Р.П.Сейсян. Диамагнитные экситоны в полупроводниках, (Обзор) ФТТ, 58, вып.5.833-880 (2016)
6. Р.П.Сейсян. Спектрокопия диамагнитных экситонов. (Под.Ред Б.П.Захарченя).М. «Наука», (1984), 272с.

MUALLIFLAR DIQQATIGA!

Hurmatli mualliflar, maqola muallif tomonidan qog'ozda chop etilgan va elektron shaklida taqdim qilinishi shart. **Maqolada quyidagi bandlar:** UDK, ishning nomi (o'zbek, rus va ingliz tillarida), maqola hammualliflarining ro'yxati (to'liq familiyasi, ismi, otasining ismi – o'zbek, rus va ingliz tillarida), muallif haqida ma'lumotlar: ish joyi, lavozimi, pochta va elektron pochta manzili; maqola annotatsiyasi (300 belgigacha, o'zbek, rus va ingliz tillarida), kalit so'zlar (5-7, o'zbek, rus va ingliz tillarida) bo'lishi lozim.

MAQOLALARGA QO'YILADIGAN TALABLAR!

Maqolalarning nashr etilishi uchun shartlar nashr etilishi mo'ljallangan maqolalar dolzarb mavzuga bag'ishlangan, ilmiy yangilikka ega, muammoning qo'yilishi, muallif tomonidan olingan asosiy ilmiy natijalar, xulosalar kabi bandlardan iborat bo'lishi lozim; ilmiy maqolaning mavzusi informativ bo'lib, mumkin qadar qisqa so'zlar bilan ifodalangan bo'lishi kerak va unda umumiy qabul qilingan qisqartirishlardan foydalanish mumkin; "Ilmiy axborotnoma" jurnali mustaqil (ichki) taqrizlashni amalga oshiradi.

**MAQOLALARNI YOZISH VA RASMIYLASHTIRISHDA
QUYIDAGI QOIDALARGA RIOYA QILISH LOZIM:**

Maqolalarning tarkibiy qismlariga: kirish (qisqacha), tadqiqot maqsadi, tadqiqotning usuli va obyekti, tadqiqot natijalari va ularning muhokamasi, xulosalar yoki xotima, bibliografik ro'yxat. Maqola kompyuterda Microsoft Office Word dasturida yagona fayl ko'rinishida terilgan bo'lishi zarur. Maqolaning hajmi jadvallar, sxemalar, rasmlar va adabiyotlar ro'yxati bilan birgalikda doktorantlar uchun 0,25 b.t. dan kam bo'lmasligi kerak. Sahifaning yuqori va pastki tomonidan, chap va o'ng tomonlaridan - 2,5 sm; orientatsiyasi - kitob shaklida. Shrift - Times New Roman, o'lchami - 12 kegl, qatorlar orasi intervali - 1,0; bo'g'in ko'chirish - avtomatik. Grafiklar va diagrammalar qurishda Microsoft Office Excel dasturidan foydalanish lozim. Matndagi bibliografik havolalar (ssilka) kvadrat qavsda ro'yxatda keltirilgan tartibda qayd qilish lozim. Maqolada foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati keltirilishi lozim. Bibliografik ro'yxat alfavit tartibida - GOST R 7.0.5 2008 talablariga mos tuziladi.

- Ikki oyda bir marta chiqadi.
- "Samarqand davlat universiteti ilmiy axborotnomasi"dan ko'chirib bosish faqat tahririyatning yozma roziligi bilan amalga oshiriladi.
- Mualliflar maqolalardagi fakt va raqamlarning haqqoniyligiga shaxsan mas'ul.

MAQOLAGA QUYIDAGILAR ILOVA QILINADI:

- Yo'llanma xati;
- Ekspert xulosasi.

E- mail: axborotnoma@samdu.uz

SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI ILMIY AXBOROTNOMASI

НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК

SCIENTIFIC REPORTS

Mas'ul kotib
Texnik muharrir

X.Sh.Tashpulatov
A. I. Inatov

Muharrirlar:

I.Sulaymonov	- fil.f.n., dotsent
E. U. Arziqulov	- f.-m.f.n., dotsent
O. Yusupova	- fil.f.n., dotsent

Mas'ul muharrirlar:

D. M. Aronbayev	- k.f.n., dotsent
A. Sh. Yarmuxamedov	- f.-m.f.n.
X. S. Haydarov	- f.-m.f.n., dotsent

Muassis: Samarqand davlat universiteti
Manzil: 140104, Samarqand shahri, Universitet hiyoboni, 15.
Telefon: (0 366) 239-14-07, Faks: (0 366) 239-13-87
e-mail: axborotnoma@samdu.uz

SamDU «Ilmiy axborotnoma» jurnali tahririyati kompyuterida terildi.
Bosishga 28.02.2021 yilda ruxsat etildi. Qog'oz o'lchami A-4. Nashriyot hisob tabog'i 10,00.
Buyurtma raqami 454. Adadi 30 nusxa.

Manzil: 140104, Samarqand shahri, Universitet xiyoboni, 15.
SamDU bosmaxonasida chop etildi.