САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ИЛМИЙ ДАРАЖАСИНИ БЕРУВЧИ PhD.27.06.2017.FM.02.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

ИШАНКУЛОВ ФАРРУХ ТОЛИБОВИЧ

УМУМЛАШГАН ГАРМОНИК ФУНКЦИЯЛАРНИ ДАРАХТЛАРДА ТАВСИФЛАШ

01.01.01 – Математик анализ

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Самарқанд шаҳри – 2018 йил

УДК: 517.986.6

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Contents of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ИЛМИЙ ДАРАЖАСИНИ БЕРУВЧИ PhD.27.06.2017.FM.02.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

ИШАНКУЛОВ ФАРРУХ ТОЛИБОВИЧ

УМУМЛАШГАН ГАРМОНИК ФУНКЦИЯЛАРНИ ДАРАХТЛАРДА ТАВСИФЛАШ

01.01.01 – Математик анализ

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Самарқанд шаҳри – 2018 йил

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида - B2017.4.PhD/FM161 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация Самарқанд давлат университетида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифасида (www.samdu.uz) ва «Ziyonet» Ахборот таълим порталида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар:	**Розиков Уткир Абдуллоевич** физика-математика фанлари доктори, профессор
Расмий оппонентлар:	**Эшкабилов Юсуп Халбаевич** физика-математика фанлари доктори **Норматов Эркин Панжиевич** физика-математика фанлари номзоди
Етакчи ташкилот:	**Наманган давлат университети**

Диссертация ҳимояси Самарқанд давлат университети ҳузуридаги PhD.27.06.2017.FM.02.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2018 йил «___»_________ соат____ даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 140104, Самарқанд ш., Университет хиёбони, 15-уй. Тел.: (+99866) 231-06-32, факс: (+99866) 235-19-38, 239-12-47, e-mail: patent@samdu.uz).

Диссертация билан Самарқанд давлат университетининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (___ рақами билан рўйхатга олинган). Манзил: 140104, Самарқанд ш., Университет хиёбони, 15-уй. Тел.: (+99866) 231-06-32.

Диссертация автореферати 2018 йил «____» _______________куни тарқатилди.
(2018 йил «____» ___________ даги _______ рақамли реестр баённомаси).

А.С. Солеев
Илмий даража берувчи Илмий кенгаш раиси, ф.-м.ф.д., профессор

А.М. Халхўжаев
Илмий даража берувчи Илмий кенгаш илмий котиби, ф.-м.ф.д.

С.Н. Лақаев
Илмий даража берувчи Илмий кенгаш қошидаги илмий семинар раиси, ф.-м.ф.д., профессор, академик

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида олиб борилаётган кўплаб илмий-амалий тадқиқотлар аксарият ҳолларда чизиқли бўлмаган математик моделлар ва *p*-Лапласиан қатнашган дифференциал тенгламаларга келтирилади. Суюқликларнинг текис оқиши хоссалари чизиқли Дарси қонуни ёрдамида Лаплас тенгламасига келтирилиб ўрганилади. Аммо суюқликларнинг нотекис ҳаракати, яьни турбулент оқимини ўрганишда чизиқли Дарси қонунини қўллаб бўлмайди. Шунда чизиқли бўлмаган Дарси қонунидан *p*-Лаплас тенгламаси келиб чиқади ва бу чизиқли бўлмаган тенглама ечимлари суюқликларнинг нотекис ҳаракатини ифодалайди. *p*-Лапласианинг ноллари бўлган *p*-гармоник функцияларни тадқиқ қилишга оид тадқиқотларни ривожлантириш муҳим вазифалардан бири бўлиб қолмоқда.

Ҳозирги кунда жаҳонда ночизиқли анализ муаммоларини тадқиқ қилиш, хусусан *p*-гармоник функцияларнинг даврий, кучсиз даврий ва бошқа синфларини тавсифлаш долзарб масалалардан бири ҳисобланади. Бу функциялар *p*-Лаплас тенгламасини қаноатлантирувчи функциялар бўлиб, механиканинг суюқликлар ҳаракатини таснифлашда, эҳтимоллар назариясининг тасодифий изғишлар назариясини ривожлантиришда ва статистик физиканинг спин системалари ҳолатини ифодалашда муҳим аҳамият касб этмоқда. Бу борада: Кэли дарахтида даврий *p*-гармоник функцияларни тавсифлаш; даврий *p*-гармоник функциялар чизиқли комбинациясининг *p*-гармониклигини текшириш; *p*-гармоник функцияларни тартиби кичик Кэли дарахтидан тартиби юқори Кэли дарахтига давом эттириш; гармоник функцияларнинг евклид фазосидаги хоссаларини Кэли дарахтига ўтказиш мақсадли илмий тадқиқотлар ҳисобланади.

Мамлакатимизда фундаментал фанларнинг амалий татбиқига эга бўлган математик анализнинг долзарб йўналишларига эътибор кучайтирилди. Жумладан, ночизиқли тенгламаларга келтириладиган замонавий масалаларга алоҳида эътибор қаратилди. Гармоник ва *p*-гармоник функцияларни таснифлаш, улар ёрдамида эхтимоллар назариясидаги тасодифий изғишлар, статистик механикадаги термодинамик системаларни ҳолатини ифодалаш ҳамда электр занжирлари хоссаларини таснифлаш бўйича салмоқли натижаларга эришилди. Алгебра, математик анализ, динамик системалар назарияси, амалий математика ва математик модделлаштириш фанларининг устивор йўналишлари бўйича халқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш асосий вазифалар ва фаолият йўналишлари этиб белгиланди[1]. Қарор ижросини таъминлашда гармоник ва *p*-гармоник функциялар назариясини узлуксиз ва дискрет фазоларда ривожлантириш муҳим аҳамиятга эга.

---

[1] Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2017 йил 18 майдаги «Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий-тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш тўғрисида»ги 292-сон қарори

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2008 йил 15 июлдаги ПҚ-916-сон «Инновацион лойиҳалар ва технологияларни ишлаб чиқаришга татбиқ этишни рағбатлантириш борасидаги қўшимча чора-тадбирлар тўғрисида»ги, 2017 йил 17 февралдаги ПҚ-2789-сон «Фанлар академияси фаолияти, илмий-тадқиқот ишларини ташкил этиш, бошқариш ва молиялаштиришни янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги Қарори ва 2017 йил 8 февралдаги ПФ-4947-сон «Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича ҳаракатлар стратегияси тўғрисида»ги Фармони ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий хужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишга ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига боғлиқлиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Евклид фазосида оддий гармоник функциялар учун олинган кўпгина натижалар Н.Килпелаин ва О.Мартиоларнинг ишларида *p*-гармоник функциялар учун давом эттирилган. Шунингдек, Ж.Ж.Манфреди илмий ишларида квазирегуляр акслантиришлар назариясидан фойдаланиб, *p*-гармоник функцияларнинг ноллари яккаланганлиги исботланган. Г.Аронссон томонидан *p*-гармоник функциянинг критик нуқта яқинидаги тасвири ҳақидаги теорема исботланган. А.Гоурнайнинг илмий ишларида шундай графлар қаралганки, уларнинг устида ўзгармасдан ташқари бошқа гармоник функциялар йўқлиги исботланган.

Ж.Ж.Манфреди, А.М.Оберман ва А.Р.Свиридовларнинг илмий ишларида чекли граф устида чизиқли бўлмаган хусусий ҳосилали эллиптик дифференциал тенгламаларнинг ечими мавжуд ва ягоналиги кўрсатилган. А. Кантон ва Ж.Фернандер дарахт типидаги графларда чегараланган гармоник функциялар учун классик Фату теоремасининг аналогини исботлаган. П.Лингвисвити ишларида гармоник ва *p*-гармоник функцияларнинг хоссалари ўрганилган. Евклид фазосида ва дарахт типидаги графларда *p*-гармоник функциянинг чизиқли комбинацияси *p*-гармоник функция бўлиши масаласи Х.Куратанинг илмий ишларида тадқиқ қилинган.

У.Розиқов ва Э.Норматовлар томонидан Кэли дарахти устида умумлашган гармоник функциялар ўрганилган. Бу гармоник функциялар тасодифий изғишлар, Гиббс ўлчовлари ва электр занжирлари хоссаларини ўрганиш учун қўлланилган. Ф.Хирошима, Ж.Лоринзи, У.А.Розиковларнинг ишида каср даражали дискрет Лапласиан қурилган ва унинг даврий гармоник функциялари мавжудлиги шартлари топилган ҳамда берилган нормал бўлувчига мос гармоник функциялар таснифланган. Ғ.И.Ботиров, М.М.Рахматуллаев, У.А.Розиков ва бошқаларнинг ишларида умумлашган гармоник функциялар қуриш орқали дарахт устида аниқланган Гиббс ўлчовлари таснифланган.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти Самарқанд давлат университетининг ОТ-Ф1-044 «Биринчи ва иккинчи тартибли чизиқли ўзгармас коэфициентли эллиптик системалар учун Коши масаласи» (2007-2011 йиллар) мавзусидаги илмий тадқиқот лойиҳаси, В.И.Романовский номидаги Математика институтининг Ф4-ФА-Ф013 «Ноассоциатив ва оператор алгебрлари, динамик системалар ва уларнинг статистик физика ҳамда популяцион биологияга қўлланиши» (2012-2016 йиллар) мавзусидаги илмий тадқиқотлар лойиҳалари доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади Кэли дарахтида даврий p-гармоник функцияларни таснифлаш ва p-гармоник функцияларни тартиби кичик Кэли дарахтидан тартиби юқори бўлган Кэли дарахтига давом эттиришдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари:

Кэли дарахти группавий ифодаси нормал бўлувчисининг индекси чекли бўлганда, даврий p-гармоник функция ўзгармас функция эканини исботлаш;

нормал бўлувчи индекси чексиз бўлган ҳолларда унга мос даврий p-гармоник функцияларнинг ўзгармас функциядан фарқлиларини таснифлаш;

p-гармоник функцияларнинг чизиқли комбинацияси p-гармоник бўлиши шартларини топиш;

ихтиёрий дарахт устида берилган p-гармоник функциялар учун максимум принципи ва ўрта қиймат ҳақидаги тасдиқларни исботлаш;

p-гармоник функцияларни тартиби кичик Кэли дарахтидан тартиби юқори Кэли дарахтига давом эттириш.

Тадқиқотнинг объекти Кэли дарахти**,** Кэли дарахти группавий ифодасининг чекли ва чексиз индексли нормал бўлувчилари, p-Лапласиан, дарахтлар устида p-гармоник функциялар.

Тадқиқотнинг предмети Кэли дарахти ва ихтиёрий дарахтлар устида даврий ҳамда кучсиз даврий p-гармоник функциялар, Курата p-гармоник функциялари ва даврий бўлмаган p-гармоник функциялардан иборат.

Тадқиқотнинг усуллари. Тадқиқот ишида Кэли дарахтининг группавий тасвири ва дискрет p-Лапласианнинг хоссалари, чизиқли бўлмаган анализ ҳамда рекуррент тенгламалар методларидан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

Кэли дарахти группавий тасвири нормал бўлувчисининг индекси чекли ва чексиз бўлган ҳолларда даврий p-гармоник функциялар таснифланган;

p-гармоник функцияларнинг чизиқли комбинацияси умуман олганда p-гармоник функция бўлмайди. Лекин даврий p-гармоник функциялар чизиқли комбинатциясининг p-гармоник бўлиши исботланган;

Куратанинг махсус дарахтидан бутун Кэли дарахтига, тартиби кичик Кэли дарахтидан тартиби юқори Кэли дарахтига p-гармоник функциялар давом эттирилган;

Кэли дарахти устида гармоник функциялар учун ўрта қиймат ҳақидаги теорема исботланган.

Тадқиқотнинг амалий натижалари тасодифий изғишлар хоссаларини, статистик механика моделларининг холатларини ҳамда электр занжирларини назорат қилишда қўлланиладиган дискрет *p*-гармоник функциянинг таснифланган.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги математик анализ, группалар назарияси ва ночизиқли функционал тенгламаларни ечиш усулларидан фойдаланилганлиги ҳамда математик мулоҳазаларнинг қатъий исботланганлиги билан асосланган.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти Кэли дарахти группавий тасвири нормал бўлувчисининг индекси чекли ва чексиз бўлган ҳоллар учун даврий *p* -гармоник функциялар тавсифланганлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти дискрет *p*-гармоник функциянинг таснифи статистик механика моделларининг ҳолатларини ифодалашда ва электр занжирларини назорат қилишда асос сифатида хизмат қилиши билан белгиланади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Диссертация тадқиқоти жараёнида олинган илмий натижалар қуйидаги йўналишларда амалиётга жорий қилинди:

Кэли дарахти группавий тасвирининг нормал бўлувчиси индекси чексиз бўлганда даврий *p*-гармоник функциялар синфи таснифидан UIAM/02/1 рақамли грант лойиҳасида Кэли дарахтида *p*-адик Гиббс ўлчовларни топишда фойдаланилган (Малайзия халқаро ислом университетининг 2017 йил 29 сентябрдаги маълумотномаси). Илмий натижанинг қўлланилиши даврий *p*-адик Гиббс ўлчовларини таснифлаш имконини берган;

кучсиз даврий *p*-гармоник функциялар билан даврий *p*-гармоник функцияларнинг устма-уст тушишидан UIAM/02/1 рақамли грантда Кэли дарахтида аниқланган Поттс моделининг асосий ҳолатларини топишда фойдаланилган (Малайзия халқаро ислом университетининг 2017 йил 29 сентябрдаги маълумотномаси). Илмий натижанинг қўлланилиши кучсиз даврий Гиббс ўлчовларини таснифлаш имконини берган;

тартиби кичик Кэли дарахтидан тартиби юқори Кэли дарахтига *p*-гармоник функцияларни давом эттирилишидан UIAM/02/1 рақамли грантда Гиббс ўлчовлар тўпламини кенгайтиришда фойдаланилган (Малайзия халқаро ислом университетининг 2017 йил 29 сентябрдаги маълумотномаси). Илмий натижанинг қўлланилиши Кэли дарахти устида берилган Изинг ва Поттс моделлари учун янги Гиббс ўлчовларни қуриш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари, 6 та илмий-амалий анжуманларда, жумладан 2 та халқаро ва 4 та республика илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Диссертация мавзуси бўйича жами 12 та илмий иш чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий Аттестация комиссиясининг докторлик диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 5 та мақола, жумладан, 3 таси хорижий ва 2 таси республика журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг ҳажми ва тузилиши. Диссертация кириш, учта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан ташкил топган. Диссертациянинг ҳажми 90 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устивор йўналишларига мослиги кўрсатилган, мавзу бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг **«p-гармоник функциялар ҳақида маълумотлар»** деб номланувчи биринчи бобида евклид фазосида ва дарахтларда гармоник ва p -гармоник функциялар тўғрисида зарурий маълумотлар, баъзи натижалар ҳамда Кэли дарахтининг группавий тасвири келтирилган.

Кэли дарахти $\Gamma^k = (V, L)$ чексиз дарахт бўлиб, унинг ҳар бир учидан $k+1$ та қирра чиқади ($k \geq 1$тартибли Кэли дарахти), бунда V - дарахтнинг учлари тўплами ва L - қирралар тўплами.

Кэли дарахтида $d(x, y): x, y \in V$ масофа қуйидагича киритилади

$$d(x, y) = \min\{d \mid \exists x = x_0, x_1, \ldots, x_{d-1}, x_d = y \in V,$$

$$\text{бунда } < x_0, x_1 >, < x_1, x_2 >, \ldots, < x_{d-1}, x_d > \text{ яқин қўшнилар}\}$$

Минимумни таъминловчи

$$\pi(x, y) = \{x = x_0, x_1, \ldots, x_{d-1}, x_d = y \in V\},$$

кетма-кетлик x дан y гача йўл деб аталади.

Диссертациянинг **«Кэли дарахти устида p-гармоник функцияларни таснифлаш»** деб номланувчи иккинчи боби Кэли дарахти устида p-гармоник функцияларни қуришга бағишланган.

2.1-параграфда Кэли дарахти группавий тасвирининг чекли индексли нормал бўлувчиларига нисбатан инвариант бўлган p-гармоник функциялар қурилган.

G_k^* - индекси чекли $m \geq 1$ бўлган нормал бўлувчи бўлсин.

1-таъриф. Агар ихтиёрий $x \in G_k, y \in G_k^*$ учун *u(yx)=u(x)* тенглик бажарилса, у ҳолда *u(x)* функция Кэли дарахтида G_k^* - даврий дейилади.

Қуйидаги тўплам берилган бўлсин:

$$\mathrm{R}=\{r(x,y)>0: r(x,y)=r(y,x),(x,y)\in L\}.$$

Берилган $p\in(1,\infty),\mathrm{R}, m\geq 1$ лар учун $\mathrm{H}_{p,k,m}(G_k^*,\mathrm{R})$ орқали G_k^* - даврий p-гармоник функциялар тўпламини белгилаймиз.

Қуйидаги теорема 2.1-параграфнинг асосий натижаси ҳисобланади.

1-теорема. $\forall p\in(1,\infty),\forall m\geq 1, \forall k\geq 1,$ m индексли $\forall G_k^*\subset G_k$ нормал бўлувчи ва фиксирланган R учун $\mathrm{H}_{p,k,m}(G_k^*,\mathrm{R})$ тўплам фақат ўзгармас функциялардан иборат бўлади.

Агар нормал бўлувчи H_o нинг индекси чексиз бўлса, $G_k/H_0=\{\ldots,H_{-1},H_0,H_1,\ldots\}$ билан фактор группани белгилаймиз. Фараз қилайлик $\mathrm{R}=\{r(x,y);\ x,y\in G_k\}$ (қаршиликлар тўплами) H_o-даврий бўлсин, яьни $x\in H_n, y\in H_m$ учун $r(x,y)=r_{nm}$ тенглик ўринли бўлсин. У ҳолда ўзгармасдан фарқли p-гармоник функциялар мавжуд, яьни қуйидаги натижа олинган.

2-теорема. R- H_o-даврий бўлиб, $\sum\limits_{s=-\infty}^{\infty} r_{s,s+1}<+\infty$ шартни қаноатлантирсин. У ҳолда Кэли дарахти устидаги H_o-даврий p-гармоник функция қуйидаги оилалардан бирига тегишли бўлади:

$$U_1=\{u:(x)=u_n=C^{\frac{1}{p-1}}\sum_{s=-\infty}^{n-1} r_{s,s+1},\quad \text{агар}\quad x\in H_n, n\in Z, C\geq 0\};$$

$$U_2=\{u:(x)=u_n=C^{\frac{1}{p-1}}\sum_{s=n}^{+\infty} r_{s,s+1},\quad \text{агар}\quad x\in H_n, n\in Z, C\geq 0\}.$$

2.2-параграфда p-гармоник функциялар орасида чизиқли муносабатлар ўрнатилган.

Агар $\sum_{j=1}^{m} t_j u_j$ функция ихтиёрий $t_1,\ldots,t_m\in R\setminus\{0\}$ учун p-гармоник бўлса, берилган $\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$ p-гармоник функциялар мажмуи чизиқли муносабатда дейилади.

U_1 ва U_2 синифлардан олинган p-гармоник функциялар орасидаги чизиқли муносабатларни қуйидаги теорема беради.

3-теорема. p-гармоник функцияларнинг q-мажмуаси $\{v_1,\ldots,v_{q_1},v_{q_1+1},\ldots,v_q\}$ учун $\{v_1,\ldots,v_{q_1}\}\subset U_1$ ва $\{v_{q_1+1},\ldots,v_q\}\subset U_2$ бўлсин. У ҳолда $\{v_1,\ldots,v_q\}$ мажмуа Кэли дарахти устида чизиқли муносабатда бўлади.

2.3-параграфда ихтиёрий дарахт устида аниқланган p-гармоник функциялар учун экстремум ҳақидаги қуйидаги натижа олинган.

4-теорема. Агар $u(x)$ функция ихтиёрий дарахт Γда p-гармоник бўлиб, $x_0\in\Gamma$ нуқтада ўзининг минимал ёки максимал қийматини қабул қилса, у ҳолда $u(x)$ функция Γда ўзгармас функция бўлади.

2-таъриф. Кэли дарахтида

$$\sum_{y\in S(x)} f(y)-(k+1)f(x)=0$$

дискрет Лаплас тенгламасини қаноатлантирувчи $f:V\to R$га гармоник функция дейилади, бунда $S(x)-x$ нуқтанинг яқин қўшнилари тўплами.

3-таъриф. $B_n=\{y\in V:d(x,y)\le n\}$ тўплам маркази $x\in V$ нуқтада ва радиуси n бўлган дискрет шар дейилади.

$W_n=\{y\in V:d(x,y)=n\}$ тўплам маркази $x\in V$нуқтада ва радиуси n бўлган дискрет сфера дейилади.

Классик потенциаллар назариясида ўрта қиймат ҳақидаги теорема муҳим роль ўйнайди. Унга мувофиқ гармоник функциянинг сфера марказидаги қиймати унинг сфера сиртидаги қийматларининг ўрта арифметигига тенг.

5-теорема. Агар $u(x)$функция $\Gamma^k=(V,L)$ да гармоник бўлса, у ҳолда исталган $x\in V$ нуқта ва mнатурал сон учун

$$u(x)=\frac{1}{|W_m(x)|}\sum_{y\in W_m(x)}u(y)$$

формула ўринли бўлади, бунда $|W_m(x)|$ дискрет сфера $W_m(x)$ нинг нуқталари сони, яъни $|W_m(x)|=k^{m-1}(k+1)$.

6-теорема. Агар $u(x)$функция $\Gamma^k=(V,L)$ да гармоник бўлса, у ҳолда исталган $x\in V$ нуқта ва mнатурал сон учун

$$u(x)=\frac{1}{|B_n(x)|}\sum_{y\in B_n(x)}u(y).$$

Диссертациянинг «p**-гармоник функцияларни тартиби кичик Кэли дарахтидан тартиби юқори Кэли дарахтига давом эттириш»** деб номланувчи учинчи бобида p-гармоник функцияларни давом эттириш масаласи қаралган.

$G_k/H=\{H_1,H_2,...\}$ - фактор группани қараймиз.

Кэли дарахти қирраларида йўналишни шундай аниқлаймизки, ҳар бир учга битта қирра кириб k та қирра чиқсин. Агар $<x,y>$ қирра x нуқтага кирувчи қирра бўлса, у ҳолда y нуқтани $x_\downarrow$ орқали белгилаймиз.

4-таъриф. Агар исталган $x\in G_k$ учун $x\in H_i$, $x_\downarrow\in H_j$ бўлганда $u(x)=u_{ij}$ бўлса, $u(x)$ функция H - кучсиз даврий дейилади.

3.1-параграфнинг асосий натижаси қуйидаги теоремадан иборат.

7-теорема. Агар H - ихтиёрий чексиз индексли нормал бўлувчи бўлса, у ҳолда H - кучсиз даврий p-гармоник функция H - даврий бўлади.

$k_2>k_1$ шартни қаноатлантирувчи $k_1,k_2\in N$ ни фиксирлаймиз.

G_{k_1} группани ташкил этувчилари тўплами $\{a_1,a_2,...,a_{k_1+1}\}$ ва G_{k_2} ни ташкил этувчилар тўплами $\{a_1,a_2,...,a_{k_2+1}\}$ ҳамда e бирлик элемент бўлсин.

Қуйидаги акслантиришни қараймиз:

$$\varphi:\{a_1,a_2,...,a_{k_2+1}\}\to\{e,a_1,a_2,...,a_{k_1+1}\},$$

$$\varphi(a_i)=\begin{cases}a_i, \text{ агар } i\le k_1+1\\ e, \text{ агар } i>k_1+1.\end{cases}$$

$g:G_{k_2}\to G_{k_1}$ акслантиришни $g(x)=g(a_{i_1}a_{i_2}...a_{i_m})=\varphi(a_{i_1})...\varphi(a_{i_m})$ формула билан аниқлаймиз. g акслантириш гомоморфизм эканлигини текшириш қийин эмас.

$\mathrm{R}=\{r(x,y);\ x,y\in G_k\}$ берилган бўлсин, бунда $r(x,y)$ функция g-даврий бўлсин, яъни $g(x)\ne g(y)$ шартни қаноатлантирадиган барча (x,y) қирралар учун $r(g(x),g(y))=r(x,y)$ тенглик бажарилсин.

3.2-параграфда қуйидаги теоремалар исботланган.

8-теорема. Кэли дарахти G_{k_1} устида $\alpha(x)$- p-гармоник функция, G_{k_2} да R g - даврий бўлсин, бунда $k_2>k_1$. У ҳолда

$$\beta(x)=\alpha(g(x)),x\in G_{k_2}$$

G_{k_2} да p-гармоник функция бўлиб, $\forall x\in G_{k_1}$ учун $\beta(x)=\alpha(x)$ тенглик ўринли бўлади.

Агар x нуқтадан y нуқтага “юқорига қараб” шундай $x=x_0,x_1,...,x_n=y$ йўл мавжуд бўлсаки, $d(x_{q+1},e)=d(x_q,e)+1,\ q=1,...,n$ тенгликлар ўринли бўлса, $y>x$ деб оламиз. $V_x=\{y\in V\mid y\ge x\}$ учлар тўплами ва уларни туташтирувчи қирралар тўплами $x\in V$ учдан “ўсувчи” Γ_x^k ярим чексиз дарахтни ташкил қилади.

$x\in G_{k_2}$ бўлсин. $d(t_x,e)=\max\limits_{y\in G_{k_1}\cap\pi(x,e)}d(y,e)$ шартни қаноатлантирувчи G_{k_1} даги ягона нуқтани t_x орқали белгилаймиз.

9-теорема. Кэли дарахти G_{k_1} устида $\alpha(x)$- p-гармоник функция бўлсин. У ҳолда исталган $k_2>k_1$ учун G_{k_2} да шундай $\gamma(x)$ p-гармоник функция мавжудки, $x\in G_{k_1}$ учун $\gamma(x)=\alpha(x)$ бўлади. Ундан ташқари $\forall x\in G_{k_2}\setminus G_{k_1}$ учун $\gamma(x)=\alpha(t_x)$ тенглик ҳам бажарилади.

3.3-параграфда Х. Курата ишида ([1][2], 6 мисол) келтирилган p-гармоник функциялар ёрдамида Кэли дарахти устида янги p-гармоник функциялар қурилган.

τ орқали умумий x_0 бошланғич нуқтага эга бўлган, m та ярим тўғри чизиқлардан иборат дарахтни белгилаймиз, яъни τ дарахтнинг учлари тўплами $\Lambda=\{x_0\}\cup\bigcup_{i=1}^m\{x_{i,k}\}_{k=1}^\infty$ бўлиб, бунда исталган $i=\overline{1,m}$ учун $x_{i,0}=x_0$. τ дарахтнинг қирралари тўплами E да ихтиёрий қаршилик функцияси $r=r(x,y)>0$, $(x,y)\in E$ берилган бўлсин. Λ да Курата функцияси

[2]Kurata H. Linear relations for p -harmonic functions // Discrete Appl. Math., 2008. - V.156. – P.103-109.

қуйидагича аниқланади:

$$u_i(x_0)=0,$$

$$u_i(x_{j,k})=\begin{cases} r(x_0,x_{j,1})+r(x_{j,1},x_{j,2})+\ldots+r(x_{j,k-1},x_{j,k}), \text{ агар } i=j, \\ 0, \text{ агар } i\neq j, \end{cases} \qquad (1)$$

$i=1,\ldots,m$.

[1] да (1) функцияларнинг қуйидаги хоссалари исботланган:

1) Ҳар бир u_i функция $\Lambda\setminus\{x_0\}$ да p-гармоник бўлиб, функцияларнинг $\{u_1,\ldots,u_m\}$ m - мажмуи $\Lambda\setminus\{x_0\}$да чизиқли муносабатда бўлади.

2) Ҳар бир $v_{i,j}=u_i-u_j$ айирма Λ да p-гармоник бўлади. Ундан ташқари, агар $M=\{(i_1,j_1),\ldots,(i_\mu,j_\mu)\}\subset\{1,\ldots,m\}\times\{1,\ldots,m\}$ тўпламда $i_1,j_1,\ldots,i_\mu,j_\mu$ сонларнинг исталган жуфти бир – биридан фарқли бўлса, у ҳолда $\{v_{i,j}\}_{(i,j)\in M}$ функциялар тўплами Λ да чизиқли муносабатда бўлади.

3) $\{v_{1,2},v_{1,3},\ldots,v_{1,m}\}$ $(m-1)$- мажмуи Λ да қисман чизиқли муносабатда бўлади.

Кэли дарахтида e да бошланадиган ва бошқа умумий нуқталарга эга бўлмаган m $(m\leq k+1)$ та турли $\pi_i=\{x_{i,j}\}_{j=1}^{\infty}, i=\overline{1,m}$ йўлларни қараймиз.

$\pi(x,e)$ ва $\pi(y,e)$ лар e нуқтада бошланадиган йўллар бўлсин. $\pi(x,e)\wedge\pi(y,e)$ орқали $\forall t\in\pi(x,e)\cap\pi(y,e)$ *учун* $d(e,z)\geq d(e,t)$ шартни қаноатлантирувчи $z\in\pi(x,e)\cap\pi(y,e)$ нуқтани белгилаймиз.

Кэли дарахтида $\alpha_i, i=\overline{1,m}$ функцияларни қуйидагича аниқлаймиз:

$$\alpha_i(x)=u_i(x_{j,q}) \text{ агар } \pi(x,e)\wedge\pi_j=x_{j,q}, \qquad (2)$$

бунда u_i функциялар (1) тенглик билан аниқланган.

3.3-параграфнинг асосий натижаси қуйидаги теоремадан иборат:

10-теорема. I) (2) формула орқали аниқланган ҳар бир α_i функция $V\setminus\{e\}$ да p-гармоник бўлади. $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_m\}$ тўпламдан иборат бўлган p-гармоник функцияларнинг m- мажмуи $V\setminus\{e\}$ да чизиқли муносабатда бўлади.

II) $\beta_{i,j}=\alpha_i-\alpha_j$ функциялар V да p-гармоник бўлади. Ундан ташқари, агар $M=\{(i_1,j_1),\ldots,(i_\mu,j_\mu)\}\subset\{1,\ldots,m\}\times\{1,\ldots,m\}$ тўпламда $i_1,j_1,\ldots,i_\mu,j_\mu$ сонларнинг исталган жуфти бир – биридан фарқли бўлса, у ҳолда $\{\beta_{i,j}\}_{(i,j)\in M}$ функциялар тўплами V да чизиқли муносабатда бўлади.

III) $\{\beta_{1,2},\beta_{1,3},\ldots,\beta_{1,m}\}$ $(m-1)$- мажмуи V да қисман чизиқли муносабатда бўлади.

ХУЛОСА

Диссертация иши Кэли дарахти устида даврий, кучсиз даврий p-гармоник функцияларни таснифлашга, шунингдек Кэли дарахти устида p-гармоник функцияларнинг чизиқли комбинацияси p-гармоник функция бўлишлиги шартларини топишга ва бундай функцияларни кичик тартибли дарахтдан юқори тартибли дарахтга давом эттиришга бағишланган.

Диссертацияда олинган илмий натижалар асосида қуйидаги хулосаларга келинди:

1. Кэли дарахтида аниқланган гармоник функция учун берилган шарнинг марказидаги қиймати шар чегарасидаги қийматлари ўрта арифметигига тенглиги кўрсатилган.
2. Кэли дарахти группавий ифодаси нормал бўлувчисининг индекси чекли бўлган ҳолда, унга мос даврий p-гармоник функция ўзгармас функциядан иборат бўлиши исботланган.
3. Нормал бўлувчининг индекси чексиз бўлган ҳолда ўзгармас функциядан фарқли даврий p-гармоник функциялар тавсифланган.
4. Кэли дарахти группавий ифодаси нормал бўлувчисининг индекси чексиз бўлган ҳолда ажратилган даврий p-гармоник функциялар орасида чизиқли боғланиш ўрнатилган.
5. p-гармоник функцияларни тартиби кичик Кэли дарахтидан тартиби юқори Кэли дарахтига давом эттирилган. Шунингдек, Х.Куратанинг махсус дарахтида аниқланган p-гармоник функцияси Кэли дарахтига давом эттирилган.

Олинган натижалар ночизиқли анализда, дифференциал тенгламалар назариясида ва дискрет p-гармоник функцияни тадқиқ қилишда қўлланилади.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ PhD.27.06.2017.FM.02.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНОЙ СТЕПЕНЕИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD) ПРИ САМАРКАНДСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

САМАРКАНДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИШАНКУЛОВ ФАРРУХ ТОЛИБОВИЧ

ОПИСАНИЕ ОБОБЩЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ НА ДЕРЕВЬЯХ

01.01.01 – Математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD) ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

г. Самарканд – 2018 год

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2017.4.PhD/FM161

Диссертация выполнена в Самаркандском государственном университете.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (www.samdu.uz) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (www.ziyonet.uz).

Научный руководитель:	**Розиков Уткир Абдуллоевич** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Эшкабилов Юсуп Халбаевич** доктор физико-математических наук
	Норматов Эркин Панжиевич кандидат физико-математических наук
Ведущая организация:	**Наманганский государственный университет**

Защита диссертации состоится «____» _____________2018 года в ____ часов на заседании Научного совета PhD.27.06.2017.FM.02.01 при Самаркандском государственном университете. (Адрес: 140104, г. Самарканд, Университетский бульвар, 15. Тел.: (+99866) 231-06-32, факс: (+99866) 235-19-38, e-mail: patent@samdu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Самаркандского государственного университета (зарегистрирована за №_____). (Адрес: 140104, г. Самарканд, Университетский бульвар, 15. Тел.: (+99866) 231-06-32, факс: (99866) 235-19-38).

Автореферат диссертации разослан «____» _______________2018 года.
(протокол рассылки №________ от «____» _______________2018 года).

А.С. Солеев
Председатель Научного совета по присуждению ученой степени, д.ф.-м.н., профессор

А.М. Халхужаев
Ученый секретарь Научного совета по присуждению ученой степени, д.ф.-м.н.

С.Н.Лакаев
Председатель научного семинара при Научном совете по присуждению ученой степени, д.ф.-м.н., профессор, академик

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии(PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Многие научно прикладные исследования проводимые на мировом уровне во многих случаях приводятся к нелинейным математическим моделям и дифференциальным уравнениям в которых участвует *p*-Лапласиан. Свойства плоского течения жидкостей изучаются приведением при помощи линейного закона Дарси к уравнению Лапласа. Однако, при изучении беспорядочного, т.е. турбулентного, течения жидкостей нельзя применят линейный закон Дарси. В этом случае нелинейный закон Дарси приводит к уравнению *p*-Лапласа и это нелинейное уравнение описывает беспорядочное движение жидкостей. Исследования *p*-гармонических функций являющихся нулями *p*-Лапласиана остаются одними из важных задач.

В настоящее время в мире одной из актуальных задач является исследование проблем нелинейного анализа, в частности, описание периодических, слабо периодических и других классов *p*-гармонических функций. Эти функции, удовлетворяющие уравнению *p*-Лапласа, имеют важное значение в механике при описании движения жидкостей, в теории вероятности для развития теории случайных блужданий и в статистической физике при описании состояния спиновых систем. В этой связи: описание периодических *p*-гармонических функций на дереве Кэли; установление *p*-гармоничности линейной комбинации периодических *p*-гармонических функций; продолжение *p*-гармонических функций с дерева Кэли меньшего порядка на дерево Кэли высокого порядка; перенесение свойств гармонических функций в евклидовом пространстве на дерево Кэли считаются целевыми научными исследованиями.

В нашей стране большое внимание уделяется актуальным направлениям математического анализа, имеющим фундаментальное и прикладное значения. В частности, уделяется особое внимание современным задачам приводящимся к нелинейным уравнениям. В описании гармонических и *p*-гармонических функций, при помощи которых в задачах описания случайных блужданий в теории вероятности, состояния термодинамических систем в статистической механике и свойств электрических цепей, достигнуты значительные результаты. Очень важно проведение научных исследований по приоритетным направлениям математических наук на уровне международных стандартов по алгебре и математическому анализу, теории динамических систем, прикладной математики и математическому моделированию[1]. Развитие теории гармонических и *p*-гармонических функций в непрерывных и дискретных пространствах играет важную роль в исполнении постановления.

---

[1] Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан от 18 мая 2017 года №292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений академии Наук Республики Узбекистан»

Эта диссертация, в определенной степени, служит осуществлению задач, обозначенных в Постановлениях Президента Республики Узбекистан №-ПП-916 «О дополнительных мерах по стимулированию внедрения инновационных проектов и технологий в производство» от 15 июля 2008 года, №-ПП-2789 «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности» от 17 февраля 2017 года и №-УП-4947 «О стратегии действий по дальнейшему развитию Республики Узбекистан» от 8 февраля 2017 года, а также в других нормативно-правовых актах по данной деятельности.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Многие результаты для гармонических функций в евклидовом пространстве продолжены в работах Н. Килпелаин и О. Мартио для *p*-гармонических функций. В работах Ж.Ж. Манфреди, используя теорию квазирегулярных отображений, доказана изолированность нулей *p*-гармонических функций. Г. Аронссон доказал теорему о представлении *p*-гармонических функций вблизи критической точки. В работах А. Гоурная рассматриваются такие графы на которых доказано, что не существует гармонических функций отличных от постоянной.

В работах Ж.Ж. Манфреди, А.М. Оберман и А.Р. Свиридова доказан существование и единственность на конечном графе решения нелинейного эллиптического уравнения. А. Кантон и Ж. Фернандер доказали, что на графах типа дерева для ограниченных гармонических функций имеет место аналог теоремы Фату. В работах П. Лингвисвити изучены свойства гармонических и *p*-гармонических функций. В работах Х. Курата исследован *p*-гармоничность линейной комбинации *p*-гармонических функций в евклидовом пространстве и на графах типа дерева.

У. Розиковым и Э. Норматовым изучены обобщенные гармонические функции на дереве Кэли. Эти гармонические функции применялись для изучения свойств случайных блужданий, меры Гиббса и электрических цепей. В работе Ф. Хирошима, Ж. Лоринзи и У.А. Розикова построен Лапласиан дробной степени, найдены условия существования его периодических гармонических функций и дано описание гармонических функций соответствующих данному нормальному делителю. В работах Г.И. Ботирова, М.М. Рахматуллаева, У.А. Розикова и др. построением обобщенных гармонических функций дано описание Гиббсовых мер на дереве.

Связь темы диссертации с научно – исследовательскими работами высшего учебного заведения, в которой выполнена диссертация.

Диссертационная работа выполнена в соответствии с плановой темой научно – исследовательских работ ОТ-Ф1-044 «Теория задачи Коши для линейных эллиптических систем первого и второго порядка с постоянными коэффициентами» (2007-2011гг.) Самаркандского государственного университета, Ф4-ФА-Ф013 «Неассоциативные алгебры, динамические системы и их применения в статистической физике и популяционной биологии» института математики имени В.И. Романовского (2012 – 2016 гг.).

Целью исследования является описание *p*-гармонических функций на дереве Кэли и продолжение *p*-гармонических функций с дерева Кэли меньшего порядка на дерево Кэли высокого порядка.

Задачи исследования:

в случае, когда нормальный делитель группового представления дерева Кэли имеет конечный индекс, доказать, что периодическая *p*-гармоническая функция является постоянной функцией;

в случае, когда нормальный делитель имеет бесконечный индекс, описать соответствующие периодические *p*-гармонические функции, отличных от постоянных функций;

найти условия *p*-гармоничности линейной комбинации *p*-гармонических функций;

для *p*-гармонических функций на произвольном дереве доказать утверждения о принципе максимума и среднем значении;

продолжить *p*-гармонические функции с дерева Кэли меньшего порядка на дерево Кэли высокого порядка.

Объект исследования. Дерево Кэли, нормальные делители конечного и бесконечного индекса группового представления дерева Кэли, *p*-Лапласиан, *p*-гармонические функции на деревьях.

Предмет исследования. Периодические и слабо периодические *p*-гармонические функции на дереве Кэли, *p*-гармонические функции Курата и непериодические *p*-гармонические функции.

Метод исследования. В диссертационной работе используется групповое представление дерева Кэли и свойства *p*-Лапласиана, методы нелинейного анализа и рекуррентных уравнений.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

в случаях конечного и бесконечного индекса нормального делителя группового представления дерева Кэли дано описание периодических *p*-гармонических функций;

линейная комбинация *p*-гармонических функций, вообще говоря, не является *p*-гармонической. Однако, для периодических *p*-гармонических функций доказана *p*-гармоничность линейной комбинации;

получено продолжение *p*-гармонических функций со специального дерева Курата на дерево Кэли, а также с дерева Кэли меньшего порядка на дерево Кэли высокого порядка;

доказана теорема о среднем для гармонических функций на дереве Кэли.

Практические результаты исследования состоят в описании дискретных *p*- гармонических функций применяемых при изучении свойств случайных блужданий, состояний моделей статистической механики и контроле электрических цепей.

Достоверность результатов исследования обоснована строгостью математических рассуждений и доказательств, использованием методов математического анализа, теории групп и методов решения нелинейных функциональных уравнений.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научное значение результатов исследования заключается в том, что дано описание периодических *p*-гармонических функций в случаях конечного и бесконечного индекса нормального делителя группового представления дерева Кэли.

Практическая значимость результатов исследования состоит в том, что описание дискретных *p*-гармонических функций служит основанием при описании состояний моделей статистической механики и контроле электрических цепей.

Внедрение результатов исследования. Результаты полученные в диссертации были внедрены на практике в следующих направлениях:

описание периодических *p*-гармонических функций в случае бесконечного индекса нормального делителя использованы в UIAM/02/1 для нахождения *p*-адических Гиббсовских мер (Международный Исламский университет, Малайзия, 29 сентября 2017 года). Применение этих научных результатов дало возможность описания периодических *p*-адических мер Гиббса;

утверждение о совпадении слабо периодических *p*-гармонических функций с периодическими *p*-гармоническими функциями использованы в гранте UIAM/02/1 при нахождении основных состояний модели Поттса на дереве Кэли (Международный Исламский университет, Малайзия, 29 сентября 2017 года). Применение научного результата дало возможность описания слабо периодических мер Гиббса;

утверждение о продолжении *p*-гармонических функций с дерева Кэли меньшего порядка на дерево Кэли высокого порядка использована в исследованиях гранта UIAM/02/1 для расширения множества Гиббсовских мер (Международный Исламский университет, Малайзия, 29 сентября 2017 года). Применение научного результата дало возможность построить новые Гиббсовские меры для моделей Изинга и Поттса на дереве Кэли.

Апробация результатов исследования. Результаты данного исследования были обсуждены на 6 научно-практических конференциях, в том числе на 2 международных и 4 республиканских научно - практических конференциях.

Публикация результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 12 научных работ, из них 5 входят в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты докторских диссертаций, в том числе 3 опубликованы в зарубежных журналах и 2 – в республиканских научных изданиях.

Объём и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 90 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведены обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В первой главе диссертации, названной **« в д ния p-гармонических функциях»** приведены необходимые предварительные сведения, некоторые известные результаты о гармонических и p-гармонических функциях в евклидовом пространстве и на деревьях, а также групповое представление на дереве Кэли.

Дерево Кэли $\Gamma^k=(V,L)$, есть бесконечное дерево, из каждой вершины которого выходит ровно $k+1$ рёбер (дерево Кэли порядка $k\geq 1$), где V - множество вершин и L - множество рёбер.

Расстояние $d(x,y): x,y\in V$ на дереве Кэли вводится по формуле

$$d(x,y)=\min\left\{d \,\middle|\, \exists x=x_0,x_1,\dots,x_{d-1},x_d=y\in V,\right.$$

$$\left.\text{где } <x_0,x_1>, <x_1,x_2>,\dots,<x_{d-1},x_d> - \text{ближайшие соседи}\right\}.$$

Последовательность

$$\pi(x,y)=\{x=x_0,x_1,\dots,x_{d-1},x_d=y\in V\},$$

реализующая указанный минимум, называется путем из x в y.

Вторая глава диссертации, названная **«Описание p-гармонических функций на дереве Кэли»**, посвящена построению p-гармонических функций на дереве Кэли.

В параграфе 2.1 построены p-гармонические функции на дереве Кэли, инвариантные относительно нормальных делителей конечного индекса группового представления дерева Кэли.

Пусть G_k^* – нормальный делитель конечного индекса $m\geq 1$,

Определение 1. Функция $u(x)$ заданная на дереве Кэли, называется G_k^*-периодической если для любых $x\in G_k$, $y\in G_k^*$ выполняется равенство $u(yx)=u(x)$.

Пусть дано множество

$$\mathrm{R}=\{r(x,y)>0: r(x,y)=r(y,x),(x,y)\in L\}.$$

Для заданных $p\in(1,\infty), \mathrm{R}, m\geq 1, \quad k\geq 1$, обозначим через $\mathrm{H}_{p,k,m}\left(G_k^*,\mathrm{R}\right)$ множество всех G_k^*-периодических, p-гармонических функций.

Основным результатом параграфа 2.1 является следующая теорема.

Теорема 1. Для $\forall p\in(1,\infty), \forall m\geq 1, \forall k\geq 1, \forall G_k^*\subset G_k$ нормального делителя с индексом m и для фиксированного R множество $\mathrm{H}_{p,k,m}\left(G_k^*,\mathrm{R}\right)$ состоит только из постоянных функций.

Если индекс нормального делителя H_o бесконечен, обозначим через $G_k/H_0=\{...,H_{-1},H_0,H_1,...\}$ фактор группу. Пусть $\mathrm{R}=\{r(x,y);\ x,y\in G_k\}$ (множество сопротивлений) является H_o-периодической, т.е. $r(x,y)=r_{nm}$, если $x\in H_n, y\in H_m$. Тогда существуют непостоянные периодические p-гармонические функции, т. е. получен следующий результат.

Теорема 2. Пусть R является H_o-периодической и удовлетворяет условию $\sum_{s=-\infty}^{\infty} r_{s,s+1}<+\infty$. Тогда произвольная H_o-периодическая p-гармоническая функция на дереве Кэли принадлежит одному из следующих семейств:

$$U_1=\{u:(x)=u_n=C^{\frac{1}{p-1}}\sum_{s=-\infty}^{n-1} r_{s,s+1}, \quad \text{если} \quad x\in H_n, n\in Z, C\geq 0\};$$

$$U_2=\{u:(x)=u_n=C^{\frac{1}{p-1}}\sum_{s=n}^{+\infty} r_{s,s+1}, \quad \text{если} \quad x\in H_n, n\in Z, C\geq 0\}.$$

Совокупность $\{u_1,u_2,...,u_m\}$ p-гармонических функций имеет линейное соотношение, если для любых $t_1,\ldots,t_m\in R\setminus\{0\}$ функция $\sum_{j=1}^{m} t_j u_j$ является p-гармонической.

Следующая теорема дает линейные соотношения между p-гармоническими функциями из классов U_1 и U_2.

Теорема 3. Пусть $\{v_1,...,v_{q_1},v_{q_1+1},...,v_q\}$ q-совокупность p-гармонических функций таких, что $\{v_1,...,v_{q_1}\}\subset U_1$ и $\{v_{q_1+1},...,v_q\}\subset U_2$. Тогда совокупность $\{v_1,...,v_q\}$ имеет линейное соотношение на дереве Кэли.

В параграфе 2.3 получен следующий результат об экстремуме для p-гармонических функций на произвольном дереве.

Теорема 4. Если $u(x)$ – p-гармоническая функция на Γ и в точке $x_0\in\Gamma$ она принимает минимальное или максимальное значение, то $u(x)$ – постоянная функция на Γ.

В параграфе 2.4 доказана теорема о среднем для гармонических функций на дереве Кэли.

Определение 2. Функция $f:V\to R$ называется гармонической функцией на дереве Кэли, если она удовлетворяет дискретному уравнению Лапласа

$$\sum_{y\in S(x)} f(y)-(k+1)f(x)=0,$$

где $S(x)$ – множество ближайших соседей вершины x.

Определение 3. Множество

$$B_n=\{y\in V: d(x,y)\le n\}$$

называется дискретным шаром с центром в точке x и радиусом n. Множество $W_n=\{y\in V: d(x,y)=n\}$ называется дискретной сферой с центром в точке $x\in V$ и радиусом n.

В классической теории потенциала важную роль играет теорема о среднем, согласно которой значение гармонической функции в центре сферы равно среднему арифметическому её значений на поверхности этой сферы.

Теорема 5. Если $u(x)$ гармоническая функция на $\Gamma^k=(V,L)$, то для любой вершины $x\in V$ и любого натурального числа m имеет место формула:

$$u(x)=\frac{1}{|W_m(x)|}\sum_{y\in W_m(x)} u(y),$$

где $|W_m(x)|$ – число точек сферы $W_m(x)$, т.е. $|W_m(x)|=k^{m-1}(k+1)$.

Теорема 6. Если $u(x)$ гармоническая функция на $\Gamma^k=(V,L)$, то для любой вершины $x\in V$ и любого натурального числа m имеет место формула

$$u(x)=\frac{1}{|B_n(x)|}\sum_{y\in B_n(x)} u(y).$$

В третьей главе диссертации, названной «**Продолжение p-гармонических функций с дерева Кэли меньшего порядка на дерево Кэли высокого порядка**», изучена задача продолжения p-гармонических функций.

Пусть $G_k/H=\{H_1,H_2,...\}$-фактор группа.

На ребрах дерева Кэли зададим направление такое, что из каждой вершины выходят ровно k ребер и входит ровно одно ребро. Если ребро $<x,y>$ есть ребро, входящее в точку x, то точку y обозначим через $x_{\downarrow}$.

Определение 4. Функция $u(x), x\in G_k$ называется H-слабо периодической, если $u(x)=u_{ij}$ при $x\in H_i$, $x_{\downarrow}\in H_j$ для любого $x\in G_k$.

Основным результатом параграфа 3.1 является следующая

Теорема 7. Пусть H – произвольный нормальный делитель бесконечного индекса, тогда любая H-слабо периодическая p-гармоническая функция является H-периодической.

Фиксируем $k_1,k_2\in N$, удовлетворяющие условию $k_2>k_1$.

Пусть $\{a_1,a_2,...,a_{k_1+1}\}$ - множество образующих группы G_{k_1},

$\{a_1, a_2, ..., a_{k_2+1}\}$ - множество образующих группы G_{k_2} и e – единичный элемент. Рассмотрим отображение

$$\varphi : \{a_1, a_2, ..., a_{k_2+1}\} \to \{e, a_1, a_2, ..., a_{k_1+1}\},$$

$$\varphi(a_i) = \begin{cases} a_i, \text{ если } i \le k_1 + 1 \\ e, \text{ если } i > k_1 + 1. \end{cases}$$

Пусть отображение $g : G_{k_2} \to G_{k_1}$ определено по формуле

$$g(x) = g(a_{i_1} a_{i_2} ... a_{i_m}) = \varphi(a_{i_1}) ... \varphi(a_{i_m}).$$

Легко видеть, что g является гомоморфизмом.

Пусть $\mathrm{R} = \{ r(x, y);\ x, y \in G_k \}$ и $r(x, y)$ являются g-периодическими, т.е. $r(g(x), g(y)) = r(x, y)$ для всех ребер (x, y) с $g(x) \ne g(y)$.

В параграфе 3.2 доказаны следующие теоремы:

Теорема 8. Пусть $\alpha(x)$ - p-гармоническая функция на дереве Кэли G_{k_1}. Пусть R является g-периодической на G_{k_2}, где $k_2 > k_1$. Тогда

$$\beta(x) = \alpha(g(x)), x \in G_{k_2}$$

является p-гармонической функцией на G_{k_2} такой, что

$$\beta(x) = \alpha(x), \forall x \in G_{k_1}.$$

Положим $y > x$, если существует путь $x = x_0, x_1, ..., x_n = y$ из x в y, «идущий вверх», т.е. такой, что $d(x_{q+1}, e) = d(x_q, e) + 1, q = 1, ..., n.$ Множество вершин $V_x = \{y \in V \mid y \ge x\}$ и соединяющие их ребра образуют полубесконечное дерево Γ_x^k, «растущее» из вершины $x \in V$.

Пусть $x \in G_{k_2}$. Обозначим через t_x единственную точку из G_{k_1} такую, что $d(t_x, e) = \max\limits_{y \in G_{k_1} \cap \pi(x, e)} d(y, e)$.

Теорема 9. Пусть $\alpha(x)$ - p-гармоническая функция на дереве Кэли G_{k_1}. Тогда для любого $k_2 > k_1$, существует p-гармоническая функция $\gamma(x)$ на G_{k_2}, удовлетворяющая условию:

$$\gamma(x) = \alpha(x) \text{ при } x \in G_{k_1}.$$

Более того,

$$\gamma(x) = \alpha(t_x),\ \forall x \in G_{k_2} \setminus G_{k_1}.$$

В параграфе 3.3 на основании p-гармонических функций, построенных в работе Курата (см. [1][2], пример 6) построены новые p-гармонические

[2] Kurata H. Linear relations for p -harmonic functions // Discrete Appl. Math., 2008. - V.156. - P.103-109.

функции на дереве Кэли.

Пусть τ есть дерево, состоящее из m полупрямых с общей начальной точкой x_0, т.е. множество вершин дерева τ является $\Lambda=\{x_0\}\cup\bigcup_{i=1}^{m}\{x_{i,k}\}_{k=1}^{\infty}$, где $x_{i,0}=x_0$ для любого $i=\overline{1,m}$. Пусть E - множество рёбер дерева τ и $r=r(x,y)>0$, $(x,y)\in E$, r - произвольная функция сопротивления на E.

На множестве Λ функция Курата определяется следующим образом:

$$u_i(x_0)=0,$$

$$u_i(x_{j,k})=\begin{cases} r(x_0,x_{j,1})+r(x_{j,1},x_{j,2})+\ldots+r(x_{j,k-1},x_{j,k}), \text{ если } i=j, \\ 0, \text{ если } i\neq j, \end{cases} \tag{1}$$

для $i=1,\ldots,m$.

В работе [1] доказаны следующие свойства функций (1):

1) Каждая функция u_i является p-гармонической в $\Lambda\setminus\{x_0\}$ и m-строка $\{u_1,\ldots,u_m\}$ функций имеет линейное соотношение в $\Lambda\setminus\{x_0\}$.

2) Каждая разность $v_{i,j}=u_i-u_j$ является p-гармонической в Λ. Кроме того, если $M=\{(i_1,j_1),\ldots,(i_\mu,j_\mu)\}\subset\{1,\ldots,m\}\times\{1,\ldots,m\}$ - множество, такое, что $i_1,j_1,\ldots,i_\mu,j_\mu$ - различные числа, то $\{v_{i,j}\}_{(i,j)\in M}$ имеет линейное соотношение в Λ.

3) $(m-1)$-строка $\{v_{1,2},v_{1,3},\ldots,v_{1,m}\}$ частично линейно связана в Λ.

Рассмотрим на дереве Кэли m $(m\leq k+1)$ различных путей $\pi_i=\{x_{i,j}\}_{j=1}^{\infty}, i=\overline{1,m}$, начинающихся в e и не имеющих других общих точек.

Пусть $\pi(x,e)$ и $\pi(y,e)$ - пути, начинающиеся в точке e. Через $\pi(x,e)\wedge\pi(y,e)$ обозначим точку $z\in\pi(x,e)\cap\pi(y,e)$ такую, что $d(e,z)\geq d(e,t), \forall t\in\pi(x,e)\cap\pi(y,e)$.

Определим функции $\alpha_i, i=\overline{1,m}$ на дереве Кэли следующим образом

$$\alpha_i(x)=u_i(x_{j,q}) \text{ при } \pi(x,e)\wedge\pi_j=x_{j,q}, \tag{2}$$

где u_i определены в (1).

Основным результатом параграфа 3.3 является следующая теорема:

Теорема 10. I) Каждая функция α_i, определенная по формуле (2), является p-гармонической функцией, определенной на $V\setminus\{e\}$. m-совокупность $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_m\}$ p-гармонических функций имеет линейное соотношение в $V\setminus\{e\}$.

II) Функции $\beta_{i,j}=\alpha_i-\alpha_j$ являются p-гармоническими на V. Пусть $M=\{(i_1,j_1),\ldots,(i_\mu,j_\mu)\}\subset\{1,\ldots,m\}\times\{1,\ldots,m\}$, такое, что $i_1,j_1,\ldots,i_\mu,j_\mu$,- различные целые числа. Тогда $\{\beta_{i,j}\}_{(i,j)\in M}$ имеет линейное соотношение в V.

III) $(m-1)$ совокупность $\{\beta_{1,2},\beta_{1,3},\ldots,\beta_{1,m}\}$ имеет частичное линейное соотношение в V.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа, посвящена описанию периодических, слабо периодических p-гармонических функций на дереве Кэли, нахождению условий p-гармоничности линейной комбинации p-гармонических функций на дереве Кэли, а также продолжению таких функций с дерева меньшего порядка на дерево высокого порядка.

Основные результаты исследования состоят в следующем:

1. Для гармонической функции на дереве Кэли доказано равенство ее значения в центре заданного шара среднему арифметическому значений на границе шара.
2. В случае, когда нормальный делитель группового представления дерева Кэли имеет конечный индекс, доказано, что соответствующая периодическая p-гармоническая функция является постоянной функцией.
3. В случае, когда нормальный делитель имеет бесконечный индекс, дано описание периодических p-гармонических функций отличных от постоянных функций.
4. В случае бесконечного индекса нормального делителя группового представления дерева Кэли установлено линейное соотношение между выделенными периодическими p-гармоническими функциями.
5. p-гармонические функции продолжены с дерева Кэли меньшего порядка на дерево Кэли высокого порядка. А также функция Х. Курата определенная на специальном дереве продолжена на дерево Кэли.

Полученные результаты применяются в нелинейном анализе, в теории дифференциальных уравнений и в исследовании p-гармонических функций.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) PhD.27.06.2017.FM.02.01 SAMARKAND STATE UNIVERSITY

SAMARKAND STATE UNIVERSITY

ISHANKULOV FARRUKH TOLIBOVICH

DESCRIPTION OF GENERALIZED HARMONIC FUNCTIONS ON TREES

01.01.01-Mathematical analysis

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Samarkand – 2018

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2017.4.PhD/FM161.

Dissertation has been prepared at Samarkand State University.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (uzbek, russian, english (resume)) on the website (www.samdu.uz) and the «Ziyonet» Information and educational portal (www.ziyonet.uz).

Scientific supervisor:	**Rozikov Utkir Abdulloyevich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Official opponents:	**Eshkabilov Yusup Khalbayevich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences
	Normatov Erkin Panjiyevich Candidate of Physical and Mathematical Sciences
Leading organization:	**Namangan State University**

Defense will take place «____» _____________2018 at _____ at the meeting of Scientific Council number PhD.27.06.2017.FM.02.01 at Samarkand State University. (Address: University Boulevard 15, Samarkand, 140104, Uzbekistan, Ph.: (+99866) 231-06-32, fax: (+99866) 235-19-38, e-mail: patent@samdu.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at Samarkand State University (is registered №______) (Address: University Boulevard 15, Samarkand, 140104, Uzbekistan, Ph.: (+99866) 231-06-32).

Abstract of dissertation sent out on «____» _______________2018 year
(Mailing report № ___________on «____» _______________2018 year)

A. S. Soleev
Chairman of scientific council on award of scientific degrees, D.F.-M.S., professor

A.M. Xalxujayev
Scientific secretary of scientific council on award of scientific degrees, D.F.-M.S.

S.N. Lakaev
Chairman of scientific Seminar under Scientific Council on award of scientific degrees, D.F.-M.S., professor, academician

INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

The aim of the research work is description of periodic p-harmonic functions and continuation of *p*-harmonic functins from low order Cayley tree to the high order Cayley tree.

The object of the research work is Cayley tree, normal divisors of finite and infinite index for the group representation of the Cayley tree, *p*-Laplasian, *p*-harmonic functions on trees.

Scientific novelty of the research work is as follows:

periodic *p*-harmonic functions corresponding to normal divisors of the group representation of a Cayley tree are described in the casees of finite and infinite indexes;

linear combination of *p*-harmonic functions is not *p*-harmonic function in general. But it is proved that linear comination of periodic *p*-harmonic functions is a *p*-harmonic function;

p-harmonic functions given on a special Kurata tree are extended to Cayley tree and p-harmonic functions given on a low order Cayley tree are extended to high order Cayley tree;

the mean value theorem for harmonic funcions on Cayley tree is proved.

Implementation of the research results. The resalts obtained during the dissertation research are applied in the following areas:

the description of periodic *p*-harmonic function on Cayley tree corresponding to normal divisor of infinite index of the group representation has been used in finding of *p*-adic Gibbs measures on Cayley tree in the grant UIAM/02/1 (Islamic University Malaysia, certificate dated September 29, 2017). The application of the result allows to describe *p*-adic Gibbs measures;

the coincideness of weakly periodic *p*-harmonic functions with periodic *p*-harmonic functions has been used in finding the weakly periodic ground states of Potts model on Cayley tree in grant UIAM/02/1 (Islamic University Malaysia, certificate dated September 29, 2017). The application of the result allows to describe of weakly periodic Gibbs measures;

the extension of *p*-harmonic functions from low order Cayley tree to high order Cayley tree has been used in extension of the set of Gibbs measures in grant UIAM/02/1 (Islamic University Malaysia, certificate dated September 29, 2017). The application of the result allows to construct new Gibbs measures for Ising and Potts models on Cayley trees.

The structure and volume of the thesis. The thesis consists of an introduction, three chapters, conclusion and bibliography. The volume of the thesis is 90 pages.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙҲАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (I часть; I part)

1. Rozikov U.A., Ishankulov F.T. Description of periodic p-harmonic functions on Cayley tree // Nonlinear Differ. Equ. Appl., 2010.– V.17, P.153–160. (№11. Springer. IF=0.873).
2. Розиков У.А., Ишанкулов Ф. Описание p-гармонических функций на дереве Кэли // Теоретическая и математическая физика. – Москва, 2010. – Том 162. - № 2.- С. 222 – 229.(№11. Springer. IF=0.831).
3. Ишанкулов Ф. Некоторые p – гармонические функции на дереве Кэли // ДАН РУз.,– Ташкент, 2010. - № 2. - С. 15-19. (01.00.00; №7)
4. Ишанкулов Ф. О слабо периодических p-гармонических функциях на дереве Кэли // Узб. матем. журнал. – Ташкент, 2010. - № 4. - С. 57 – 63. (01.00.00; №6)
5. Ishankulov F.T. Mean Value Theorem for Harmonic Functions on Cayley Tree //Journal of Siberian Federal University, Mathematics and Physics, 2015- 8- (1)- P. 28-30. (01.00.00; №49).

II бўлим (II часть; II part)

6. Rozikov U.A., Ishankulov F.T. Description of periodic p-harmonic functions on Cayley tree// Preprint ICTP Italy IC/2008/054, 9 pages.
7. Ишанкулов Ф. О слабо периодических p-гармонических функциях на дереве Кэли// Материалы конференции «Актуальные проблемы современной математики и ее обучения». -Ташкент, 25 март, 2010.С.88-89.
8. Ишанкулов Ф. Описание p-гармонических функций на дереве Кэли// В мире научных открытий. – Красноярск, 2010. Т.10. № 4. С. 9-10.
9. Ишанкулов Ф. Продолжение p- гармонических функций на дереве Кэли// Тезисы докладов республиканской научной конференции с участиям зарубежных ученых «Операторные алгебры и смежные проблемы». Ташкент, 2012.-С.152-154.
10. Ишанкулов Ф. Построение p- гармонических функций на дереве Кэли// Материалы республиканской научной конференции «Актуалные проблемы математического анализа». -Ташкент, 2012.-С.99-100.
11. Ишанкулов Ф. Теорема о среднем для гармонических функций на дереве Кэли// Тезисы докладов республиканской научной конференции с участиям зарубежных ученых «Современные методы математической физики и их приложения». -Ташкент, 2015. - С. 173 – 174.
12. Ишанкулов Ф. Принцип максимума для p- гармонических функций на деревях// International Conference on Nonlinear Analysis and its Applications, Samarkand, 2016. p. 98 – 99.

Автореферaтнинг ўзбек, рус ва инглиз тилларидаги нусхалари
«Ўзбекистон математика журнали» таҳририятида таҳрирдан ўтказилди.

Босишга рухсат этилди: 22.01.2018 йил.
Бичими 60x44 $^{1}/_{16}$, «Times New Roman»
гарнитурада рақамли босма усулида босилди.
Шартли босма табоғи 2. Адади: 100. Буюртма: № 12.

Ўзбекистон Республикаси ИИВ Академияси,
100197, Тошкент, Интизор кўчаси, 68.

«АКАДЕМИЯ НОШИРЛИК МАРКАЗИ»
Давлат унитар корхонасида чоп этилди.