



# ILMIY AXBOROTNOMA

НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК

SCIENTIFIC JOURNAL

2020-yil, 1-son (119)

ANIQ FANLAR SERIYASI

Matematika, Mexanika, Informatika, Fizika

Samarqand viloyat matbuot boshqarmasida ro'yxatdan o'tish tartibi 09-25.  
Jurnal 1999-yildan chop qilina boshlagan va OAK ro'yxatiga kiritilgan.

BOSH MUHARRIR  
BOSH MUHARRIR O'RINBOSARLARI:

R. I. XALMURADOV, t.f.d. professor  
H.A. XUSHVAQTOV, f.-m.f.n., dotsent  
A. M. NASIMOV, t.f.d., professor

## TAHRIRIYAT KENGASHI:

|                    |                                                              |
|--------------------|--------------------------------------------------------------|
| M. X. ASHUROV      | - O'zFA akademigi                                            |
| T. M. MO'MINOV     | - O'zFA akademigi                                            |
| Sh. A. ALIMOV      | - O'zFA akademigi                                            |
| S. N. LAKAYEV      | - O'zFA akademigi                                            |
| T. RASHIDOV        | - O'zFA akademigi                                            |
| N. N. NIZAMOV      | - f.-m.f.d., professor (SamDU)                               |
| A. S. SOLEEV       | - f.-m.f.d., professor (SamDU)                               |
| I. A. IKROMOV      | - f.-m.f.d., professor (SamDU)                               |
| B. X. XO'JAYAROV   | - f.-m.f.d., professor (SamDU)                               |
| N. B. FERAPONTOV   | - k.f.d., professor (Moskva davlat universiteti, Rossiya)    |
| Sh. M. TUGIZOV     | - professor, (Kaliforniya universiteti, AQSh)                |
| A. G. YaGOLA       | - f.-m.f.d., professor (Moskva davlat universiteti, Rossiya) |
| I. I. JUMANOV      | - f.-m.f.d., professor (SamDU)                               |
| E. A. ABDURAXMONOV | - k.f.d., professor (SamDU)                                  |
| N. K. MUXAMADIYEV  | - k.f.d., professor (SamDU)                                  |
| ANDREA PITACCO     | - Padova universiteti professori, Italiya                    |
| VEENA AGRAWAL      | - Dehli universiteti professori, Hindiston                   |
| MASLINA DARUS      | - Malayziya milliy universiteti professori, Malayziya        |
| ALBERTO DEL BIMBO  | - Florensiya universiteti professori, Italiya                |
| K. G. TOKHADZE     | - Sankt Peterburg davlat universiteti professori, Rossiya    |
| L. A. BULAVIN      | - Kiev milliy universiteti professori, Ukraina               |
| MIHAY BULAI        | - Aleksandr Ioan Kuza universiteti professori, Ruminiya      |
| J. X. XO'JAYEV     | - b.f.d., professor (SamDU)                                  |
| Z. I. IZZATULLAYEV | - b.f.d., professor (SamDU)                                  |
| L. A. ALIBEKOV     | - g.f.d., professor (SamDU)                                  |
| A. A. ABULQOSIMOV  | - g.f.d., professor (SamDU)                                  |
| X. SHODIEV         | - Vilfred Laurier universiteti professori (Kanada)           |
| L. SOBIROV         | - f.-m.f.d., professor (SamDU)                               |
| X. X. XUDOYNABAROV | - t.f.d., professor (SamDU)                                  |
| GUN-SIK PARK       | - Seul universiteti professori (Koreya)                      |

## MUNDARIJA / СОДЕРЖАНИЕ / CONTENTS

## МАТЕМАТИКА / МАТЕМАТИКА / MATHEMATICS

|                                                                                                                                                                         |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b><i>A.B. Кабулов, И.Х. Норматов, Э.Урунбаев</i></b><br>О задачах расшифровки и поиска максимального верхнего нуля дискретных монотонных функций                       | 4  |
| <b><i>J. I. Abdullayev, H. H. Ibragimov</i></b><br>Pifagor taxtasi yordamida Pifagor g'ishtlarini qurish                                                                | 15 |
| <b><i>A.X. Бегматов, З.Х. Очилов, А.З. Хусанов</i></b><br>Единственность и устойчивость решения задачи интегральной геометрии с возмущением                             | 21 |
| <b><i>Х.К. Каршибоев, Ш.А. Джалилов</i></b><br>Предельная теорема для времени попадания                                                                                 | 26 |
| <b><i>Б. И. Исломов, С. С. Вафоев</i></b><br>Краевая задача нового типа для уравнения параболо-гиперболического типа                                                    | 30 |
| <b><i>Б.М. Мамадалиев</i></b><br>Полные двумерные поверхности в ${}^2R_5$                                                                                               | 35 |
| <b><i>Х.Қурбонов, М.Муртазаев</i></b><br>Асимптотические соотношения для распределений стационарных длин очередей двойственных систем $M G 1 N$ и $GJ M 1 N-1$          | 38 |
| <b><i>А.У. Маматов</i></b><br>Численное моделирование процесса теплопроводности с двойной нелинейностью в двумерном случае при наличии переноса и источника(поглощения) | 41 |
| <b><i>А.Б. Неъматов</i></b><br>Основные свойства данных рассеяния оператора штурма-лиувилля с потенциалом близким в разных бесконечностях к различным $N$ -зонным       | 45 |
| <b><i>У.Н. Кулжанов</i></b><br>О спектре двухчастичного оператора Шредингера с точечным потенциалом в одномерном случае                                                 | 48 |
| <b><i>Д.Т. Сафарова</i></b><br>Равномерное связное пространство                                                                                                         | 53 |
| <b><i>A. Sh. Safarov</i></b><br>Goldbaxning ternar va binar problemalari hamda bu borada olingan keyingi natijalar                                                      | 58 |

## МЕХАНИКА / МЕХАНИКА / MECHANICS

|                                                                                                                                                |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b><i>Б.Х. Хужаёров, У.Ж. Сайдуллаев</i></b><br>Численное решение осесимметричной задачи фильтрации суспензий с образованием кейк-слоя         | 63 |
| <b><i>Л.Э. Бобомуродова, А.Дж. Джурсаев</i></b><br>Определение деформации сдвига амортизатора-втулки составных зубчатых колес передачи         | 70 |
| <b><i>Z. Xudayberdiyev, Sh. Xudayberdiyeva, I. Amirov</i></b><br>Chetlari sharnirli mahkamlangan elastik plastinkaning simmetrik tebranishlari | 74 |

**Б.Х. Имомназаров, Х.Х.Имомназаров, И.К.Хайдаров**

Об одной математической модели разбухания глинистого сланца вокруг цилиндрической скважины 78

**Д. А. Бекмирзаев, Н. Ш. Мансурова**

Колебания подземного трубопровода при произвольном направлении сейсмического нагружения 82

#### INFORMATIKA / ИНФОРМАТИКА / INFORMATICS

**G‘.M. Porsayev, U.X. Narzullayev, N.R. Zaynalov**

Steganografiya usullarini tasniflashdagi yangi yondashuv 88

**G‘.Yuldashev, M. O. Shamiyev**

Skremblerning turini aniqlash algoritmi 92

#### FIZIKA / ФИЗИКА / PHYSICS

**Л.М.Сабилов, Л.Л.Чайков, М.Н.Кириченко, Ш.Э.Каршибоев**

Методические указания по изучению динамики наноструктурных явлений в жидкостях методом динамического рассеяния света 96

**Ф.Р.Ахмеджанов, Э.Н.Курталиев, Ж.О.Курбанов, Т.Ш.Мустафаев**

Затухание акустических волн в кристаллах германата висмута 103

**О.Қ.Қувондиқов, Ш.Ҳ.Қувондиқов, Ҳ.А.Қайумов**

Kobalt ferrit asosidagi magnitli suyuqlikning magnitlanishi 106

**Султанов М.У., Усаров А.А., Тухтаев У.У., Кодиров А.А., Яхшибоев К.Х., Нурмуродов Л.Т.**

Влияние центральности столкновений к образованию заряженных пионов и протонов в dC- взаимодействиях при импульсе 4,2 ГэВ/с 112

**F.Xamrakulov, E.Lapukhin, T.Alimov, A.Kulmuradov**

Qisqa davrli pulsatsiyalanuvchi 2MASS\_22472590+5407249 va 2MASS\_22431277+5439408 o‘zgaruvchan yulduzlarini fotometrik tadqiqi 116

**R.M.Eshbo‘riyev, M.U.Sultanov, R.Sayfinov**

Yadro reaktorlari – yadro energetikasi manbayi 121

**Б.Жураев, Р.Турниязов, А.Ажабов, Н.Одилова**

Причина смены времен года а также существования тепловых и холодных поясов на земле 126

**А.Т.Халманов**

Высокочувствительная лазерная спектроскопия ультрамалых концентраций атомов и аэрозолей в различных фазовых состояниях вещества 129

**А.А.Холмуминов, Б.М.Матякубов**

О свойствах нановолоконных анизотропных нанопористых материалов 143

**О.К.Кувандиков, Д.Х.Имамназаров**

Kogerent potentsiallar metodi yordamida amorf holatdagi  $\text{Cu}_x\text{Ti}_{1-x}$  qotishmalarda xoll ko‘effitsentini hisoblash 149

#### Mualliflarga

UDK: 519.8

**О ЗАДАЧАХ РАСШИФРОВКИ И ПОИСКА МАКСИМАЛЬНОГО ВЕРХНЕГО НУЛЯ ДИСКРЕТНЫХ МОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ****А.В.Кабулов<sup>1</sup>, И.Х. Норматов<sup>2</sup>, Э.Урунбаев<sup>3</sup>**<sup>1</sup>Национальный университет Узбекистана,<sup>2</sup>Научно-инновационный центр информационно-коммуникационных технологий<sup>3</sup>Самаркандский государственный университет

**Аннотация.** Работа посвящена задаче построения алгоритмов решения отдельных классов дискретных экстремальных задач на отыскание точного оптимума, для решения которых используются процедуры расшифровки и нахождения максимального верхнего нуля дискретных монотонных функций. Исследуются методы решения задач расшифровки и поиска максимального верхнего нуля дискретных монотонных многозначных функций, строится приближенный параметрический алгоритм решения класса таких задач.

**Ключевые слова:** алгоритм, оптимум, метод, параметр, расшифровка, элемент, множество, шар, лексикография, дискрет, структура, булева функция, дизъюнктивных нормальных форм.

**Diskret monoton funksiyalarning dekodlash va maksimal yuqori nollarini izlash masalasi haqida**

**Annotatsiya.** Maqola aniq optimalni topishdagi diskret ekstremal masalalarning alohida sinflarini yechish uchun algoritmlarni qurish masalasiga bag'ishlangan bo'lib, masalani yechish uchun diskret monoton funksiyalarning maksimal yuqori nollarini topish va dekodlash usullaridan foydalaniladi. Dekodlash masalasini yechish va ko'p qiymatli diskret monoton funksiyalarning maksimal yuqori nollarini topish usullari o'rganilgan hamda bunday masalalar sinfini yechish uchun taqribiy parametrik algoritmlar qurilgan.

**Kalit so'zlar:** algoritmlar, optimal, usul, parameter, dekodlash, element, to'plam, shar, leksikografiya, diskret, struktura, Bul funksiyasi, diz'yuktiv normal shakl.

**On the problems of decoding and searching for the maximum upper zero of discrete monotone functions**

**Abstract.** The article is devoted to the problem of constructing algorithms for solving certain classes of discrete extremal problems to find the exact optimum, for the solution of which the procedures of decoding and finding the maximum upper zero of discrete monotone functions are used. Methods for solving the problems of decoding and finding the maximum upper zero of discrete monotone are studied. multivalued functions, an approximate parametric algorithm for solving the class of such problems is constructed.

**Keywords:** algorithm, optimum, method, parameter, decryption, element, set, sphere, lexicography, discrete, structure, Boolean function, disjunctive normal forms.

**Введение.** В данной работе строятся алгоритмы для решения отдельных классов дискретных экстремальных задач на отыскание точного оптимума. При получении алгоритмов используются процедуры расшифровки и нахождения максимального верхнего нуля дискретных монотонных функций (м.в.н. д.м.ф.). Даются методы решения задач, использующих процедуры расшифровки и поиска м.в.н. дискретных монотонных функций. Исследуются методы решения задач расшифровки и поиска м.в.н. д.м.ф. многозначных функций, строится приближенный параметрический алгоритм решения этих задач. Рассматривается класс задач, которые могут быть сведены к расшифровке монотонной функции, заданной на конечной структуре, или поиску м.в.н. д.м.ф.

**1. Постановка задачи расшифровки и поиска максимального верхнего нуля дискретных монотонных функций**

Рассмотрим декартово произведение множеств  $\tilde{M} = M \times M \times \dots \times M$ , где  $M$  - упорядоченное некоторым образом множество элементов  $a_1, a_2, \dots, a_t$  с введенным

соотношением порядка  $\leq$ . Введенное соотношение  $\leq$  порядка для  $(0,0,...,0)$  позволяет определить соотношение частичной упорядоченности для наборов из  $\tilde{M}$ .

Если для элементов  $\tilde{\alpha}$  и  $\tilde{\beta}$  множества  $\tilde{M}$  имеет место соотношение  $\tilde{\alpha} \leq \tilde{\beta}$  и не существует элемента  $\tilde{\gamma}$  такого, что  $\tilde{\alpha} \leq \tilde{\gamma} \leq \tilde{\beta}$ , то будем говорить, что  $\tilde{\beta}$  непосредственно следует за  $\tilde{\alpha}$ .

Множество  $M$  разбиваем по уровням. На нулевом уровне находится наименьший элемент  $\alpha \in M$ . Пусть построен  $i$ -й уровень. Уровень с номером  $i+1$  состоит из множества элементов

$$B = \{b : \exists c \text{ из } i\text{-го уровня и } \exists d \in M, \text{ таких, что } c \leq b, c \leq d \leq b\}.$$

Нормой набора  $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  в  $\tilde{M}$  назовем число  $|\tilde{\alpha}| = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|$ , где  $|\alpha_i| = j$ , если  $\alpha_j$  принадлежит  $j$ -му уровню.

Последовательность наборов  $\{\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_s\}$  называется цепью в  $\tilde{M}$ , если для любого  $j = \overline{1, s-1}$ ,  $\tilde{\alpha}_{j+1}$  непосредственно следует за набором  $\tilde{\alpha}_j$  ( $|\tilde{\alpha}_{j+1}| = |\tilde{\alpha}_j| + 1, j = \overline{1, s-1}$ ).

Число элементов цепи  $S$  называется длиной цепи и обозначается через  $d(S)$ . Отдельная точка является цепью длины равной единице. Элемент цепи, имеющий наименьшую норму, называется минимальным элементом цепи.

Расстояние  $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$  между наборами  $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  и  $\tilde{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$  структуры  $\tilde{M}$  определяется как  $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = \sum_{i=1}^n |\alpha_i| - |\beta_i|$ .

Шаром радиуса  $r$  и центром  $\tilde{\alpha} \in \tilde{M}$  называется совокупность точек  $\tilde{\beta}$  структуры  $\tilde{M}$  таких, что  $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \leq r$ .

Пусть на множестве  $S = (0, 1, 2)$  задан частичный порядок

$$0 < 1, 0 < 2 \quad (1)$$

В множестве наборов  $S^n = \{\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) : \alpha_i \in \{0, 1, 2\}\}$  порядок (3.1) индуцирует частичный порядок

$$\tilde{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n) \leq \tilde{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_n), \text{ если } \beta_i \leq \gamma_i \text{ по (3.1), где } i = \overline{1, n}. \quad (2)$$

Рассмотрим структуру  $S^n$ . В ней существует единственный минимальный элемент  $(0, 0, \dots, 0)$  и  $2^n$  несравнимых максимальных элементов наборов, все координаты которых принадлежат множеству  $\{1, 2\}$ . Разобьем  $S^n$  на уровни.

Уровень  $U_j$ , состоит из всех наборов, у которых ровно  $j$  координат принимает значения из  $\{1, 2\}$ , а остальные  $n - j$  координат равны нулю.

Очевидно, что  $|U_j| = c_n^j 2^j$ , где  $|L|$  мощность множества  $L$ . Как обычно, цепью в  $S^n$  будем называть множество  $\{\tilde{\alpha}_{i_1}, \tilde{\alpha}_{i_2}, \dots, \tilde{\alpha}_{i_k}\}$  такое, что  $\tilde{\alpha}_{i_1} \leq \tilde{\alpha}_{i_2} \leq \dots \leq \tilde{\alpha}_{i_k}$  и  $\alpha_{ij} \in U_{ij}, i = \overline{0, k}, (1 \leq k \leq n+1)$ .

Нормой набора  $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  в  $S^n$  является число  $|d| = \sum_{j=1}^n |d_j|$ , где

$$|d_j| = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha_i = 0, \\ 1, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Число  $A_n = \sum_{i=1}^n d_i k^{n-1}$  назовем номером  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \tilde{M}$ .

Говорят, что наборы  $\tilde{\alpha}$ ,  $U_k$ -го уровня в  $\tilde{M}$ ,  $(k = \overline{0, n})$  упорядочены в лексикографическом (анти лексикографическом) порядке, если они расположены на  $U_k$ -м уровне в порядке убывания (возрастания) номеров  $A_{\tilde{\alpha}}$ .

Считают, что набор  $\tilde{\alpha}$  непосредственно следует за  $\tilde{\beta}$  на  $U_k$ -м уровне  $(k = \overline{1, n})$  в  $\tilde{M}$ , если  $A_{\tilde{\beta}} < A_{\tilde{\alpha}}$ , и не найдется такого  $\tilde{\gamma}$  в  $U_k$  что  $A_{\tilde{\beta}} < A_{\tilde{\gamma}} < A_{\tilde{\alpha}}$ .

Пусть в  $\tilde{M}$  наборы на уровнях упорядочены в лексикографическом порядке.

Будем говорить, что  $\tilde{M}$  обладает свойством  $P_l$ , если из того, что  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$  - первые  $m$  элементов уровня  $U_i$  в  $\tilde{M}$ ,  $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l)$  - первые  $l$  элементов  $U_{i+1}$  и  $\tilde{\alpha}_m < \tilde{\beta}_l$ , следует, что для любого  $\tilde{\beta}_i$ ,  $(i = \overline{1, l-1})$  найдется  $\tilde{\alpha}_j$ ,  $(j = \overline{1, m})$  такой, что  $\tilde{\alpha}_j < \tilde{\beta}_i$ .

Пусть в  $\tilde{M}$  наборы на уровнях упорядочены в анти лексикографическом порядке.

Будем говорить, что  $\tilde{M}$  обладает свойством  $P_{al}$ , если из того, что  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  - первые  $m$  элементов уровня  $U_i$  в  $\tilde{M}$ ,  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l$  - первые  $l$  элементов  $U_{i+1}$ ,  $i = \overline{0, n-1}$ ,  $\tilde{\alpha}_i \leq \tilde{\beta}_j$ , следует, что для любого  $\tilde{\alpha}_i$ ,  $i = \overline{1, m-1}$ , найдется  $\tilde{\beta}_j$ ,  $j = \overline{1, l}$ , такой, что  $\tilde{\alpha}_i \leq \tilde{\beta}_j$ .

Нетрудно заметить, что для куба  $E_n^2$  справедливы свойства  $P_l$ ,  $P_{al}$ . Структура  $S_n$ , где  $S = \{0, 1, 2\}$  и  $0 < 1$ ,  $0 < 2$ , обладает свойством  $P_l$ , но не обладает свойством  $P_{al}$ .

Будем рассматривать функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  заданные на наборах множества  $\tilde{M}$  и принимающие значения из  $M$ .

Функция  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  называется монотонной относительно порядка  $\leq$ , если для любых наборов  $\tilde{\alpha}$  и  $\tilde{\beta}$  в  $\tilde{M}$  таких, что  $\tilde{\alpha}_i \leq \tilde{\beta}_j$ , имеет место соотношение  $f(\tilde{\alpha}_i) \leq f(\tilde{\beta}_j)$ .

Обозначим через  $M_n$  множество всех монотонных функций от  $n$  переменных на структуре  $\tilde{M}$ .

Совокупность всех функций, монотонных относительно порядка (1), назовем классом  $\sigma$ .

Набор  $\tilde{\alpha} \in \tilde{M}$  назовем верхним нулем (нижней единицей) функции  $f \in M_n$ , если  $f(\tilde{\alpha}) = 0$  ( $f(\tilde{\alpha}) \neq 0$ ), и для любого набора  $\tilde{\beta} \in M^n$  из  $\tilde{\alpha} \leq \tilde{\beta}$  ( $\tilde{\alpha} \geq \tilde{\beta}$ ) следует, что  $P_1$

Верхний нуль (нижняя единица)  $\tilde{\alpha}$  функции  $f \in M_n$  называется ее м.в.н. (минимальной нижней единицей (м.н.ед.)), если для любого верхнего нуля (нижней единицы)  $\tilde{\beta}$  функции  $f$  будет  $|\tilde{\beta}| < |\tilde{\alpha}|$  ( $|\tilde{\beta}| > |\tilde{\alpha}|$ ).

Пусть произвольная функция  $f \in M_n$  задана при помощи некоторого оператора  $A_f$ , который по любому набору  $\tilde{\alpha}$  выдает значение  $f(\tilde{\alpha})$ .

Существуют две основные задачи, связанные с монотонными функциями и часто встречающиеся в приложениях математической логики:

*Задача расшифровки монотонных функций.* Если некоторая (известная нам) монотонная функция  $f \in M_n$  задана оператором  $A_f$ , то требуется минимальным числом обращений к  $A_f$  полностью восстановить таблицу значений монотонной функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , т.е. определить значение данной функции на всех точках  $\tilde{M}$ .

*Задача поиска м.в.н. монотонных функций.* Если некоторая функция  $f \in M_n$  задана оператором  $A_f$  то потребуется минимальным числом обращений к  $A_f$  найти хотя бы один м.в.н. функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Очевидно, что аналогичной задачей является поиск м.н.ед. функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  минимальным числом обращений к оператору.

Рассмотрим множество алгоритмов  $\{F\}$ , позволяющих решать задачу расшифровки, т.е. множество алгоритмов, которые для произвольной функции  $f \in M_n$  с помощью оператора  $A_f$  полностью восстанавливают таблицу значений  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Пусть  $\varphi(F, f)$  - число обращений к оператору  $A_f$ , достаточное для восстановления таблицы значений монотонной функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  при применении алгоритма  $F$ .

Рассмотрим функции  $\varphi(F, n) = \max \varphi(F, f)$  и  $\varphi(n) = \min \varphi(F, n)$ . Функция  $\varphi(n)$  есть минимальное число обращений к оператору  $A_f$  достаточное для восстановления таблицы значений монотонной функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  при использовании алгоритма решающего поставленную задачу.

Функция  $\varphi(n)$  называется функцией Шеннона. В работе [1] показано, что для монотонных булевых функций  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  справедливо равенство  $\varphi(n) = C_n^{[n/2]} + C_n^{[n/2]+1}$ .

Пусть  $\{B\}$  - множество алгоритмов поиска м.в.н. произвольной функции  $f \in M_n$  с помощью оператора  $A_f$ .

Введем функцию  $\mu(B, f)$  - число обращений к оператору  $A_f$ , достаточное для нахождения м.в.н. функции  $f \in M_n$ .

Функция  $\mu(n) = \min_{B \in \{B\}} \max_{f \in \{M_n\}} \mu(B, f)$  называется функцией Шеннона для задачи поиска м.в.н.

Известно, что многие экстремальные задачи сводятся к поиску м.в.н. дискретных монотонных функций.

В [2] указанная задача решена в Шенноновской постановке. Согласно [2], для задачи поиска м.в.н. класса всех монотонных булевых функций  $\mu(n) = C_n^{[n/2]} + 1$ . В [2] доказано, что для класса функций  $k$ -значной логики, монотонных относительно естественного порядка и принимающих два значения, функция Шеннона  $\mu(n) = \omega(E_n^k) + 1$  при  $k > 2$ ,  $n \geq 2$  наибольшее число попарно несравнимых наборов которое можно выбрать в множестве  $k$ -значных наборов  $E_n^k$ .

Для некоторого подкласса  $M_n^m$  монотонных булевых функций

$$\mu(n) = \begin{cases} C_n^{[n/2]} + 1, & \text{если } n-1 \leq m \leq [n/2] \\ C_n^m + 1, & \text{если } f \leq m < [n/2]. \end{cases}$$

Здесь  $M_n^m$ -множество всех монотонных булевых функций  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  таких, что для любого  $\tilde{\alpha} \in E_n^2$  из того, что  $|\tilde{\alpha}| \geq m+1$  следует  $f(\tilde{\alpha}) = 1$ .

## 2. Методы поиска минимальных нижних единиц дискретных монотонных функций

Пусть м.н.ед.  $g \in M_n$  принадлежат множеству  $\bigcup_{i=r_1}^{r_2} U_i$  структуры  $\tilde{M}$ , где  $\tilde{M}$  обладает свойствам  $P_{al}$ ,  $0 \leq r_1 \leq r_2 \leq n$ .

Рассмотрим описание алгоритма  $\tilde{R}_1$  поиска м.н.ед. функции  $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$  на множестве наборов уровней  $U_{r_1}, U_{r_1+1}, \dots, U_{r_2}$ , являющегося модификацией алгоритмов поиска м.в.н функция  $g \in M_n$ . В этом алгоритме значения функции  $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$  на наборах  $\tilde{M}$  будем рассматривать в антилексикографическом порядке:

1. На первом шаге алгоритма вычисляем значение  $g$  на наборе с наименьшим номером  $r_2$ -го уровне. Пусть на  $i$ -м шаге вычислено значения  $g$  на некотором наборе  $\tilde{\alpha}, (r_2 - (i+1))$ -го уровня  $r_1 \leq i \leq r_2$ . Если  $g(\tilde{\alpha}_i) \neq 0$  то на  $(i+1)$ -м шаге необходим значение  $g$  на наборе  $\tilde{\alpha}_{i+1}$  с наименьшим номером  $(r-i)$ -го уровне. Если же  $g(\tilde{\alpha}_{i+1}) = 0$  то переходим и п.2. Если на  $(r_2 - r_1 + i)$ -м шаге получено  $g(\tilde{\alpha}_{r_2-r_1+i}) \neq 0$ , то алгоритм закончивает работу.

2. Пусть сделано  $(r+i)$  шагов  $(0 < r \leq r_2 - r_1)$ , т.е. вычислены значения  $g(\tilde{\alpha}_1) = g(\tilde{\alpha}_2) = \dots = g(\tilde{\alpha}_r) = g(\tilde{\alpha}_{r+1}) = 0$ , где  $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_{r+1}$  наборы с наименьшими номерами уровней  $U_{r_2}, \dots, U_{r_2-r}$ , соответственно. Тогда на  $(\tau+2)$ -м шаге вычисляется значение  $g$  на наборе  $\tilde{\alpha}_{r+1}$  в лексикографическом порядке на  $(r_2 - \tau)$ -м уровне. Пусть на  $i$ -м шаге  $(i \geq \tau+2)$  вычислено значение на наборе  $\tilde{\alpha}_j$ ,  $j$ -го уровне, где  $j \geq r_2 - \tau$ .

Если  $g(\tilde{\alpha}_i) = 0$  то на  $(i+1)$ -м шаге вычисляется значение  $g$  на наборе  $\tilde{\alpha}_{i+1}$ , следующем непосредственно за  $\tilde{\alpha}_j$  того же  $j$ -го уровня. Если такого набора не существует, то алгоритм заканчивает работу. Если  $g(\tilde{\alpha}_i) \neq 0$  и  $\tilde{\alpha}_i \in U_{r_1}$ , то алгоритм так же заканчивает работу. В случае  $g(\tilde{\alpha}_i) \neq 0$  и  $\tilde{\alpha}_i \in U_{r_1}, (j > r_1)$  на  $(i+1)$ -м шаге вычисляется значение  $g$



на наборе  $\tilde{\alpha}_{i+1}$ ,  $(j-1)$ -го уровня, который непосредственно следует в лексикографическом порядке за  $\tilde{\alpha}_i$  с наибольшим номером  $(j-1)$ -го уровня таким, что  $g(\tilde{\alpha}_i)$  определена по монотонности и  $g(\tilde{\alpha}_i) = 0$ . В случае, когда не существует набора  $\tilde{\alpha}_{i+1}$ , удовлетворяющего указанным свойствам, алгоритм останавливается.

Пусть алгоритм сделал  $S$  шагов до остановки. Тогда получаем цепочку наборов,  $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_s$  на которых последовательно вычислялось значение  $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . В результате м.н.ед.  $g(\tilde{x})$  - это набор  $\tilde{\alpha}_k$  из этой цепочки с максимальным  $k$  таким, что  $g(\tilde{\alpha}_k) \neq 0$ .

Если структура  $\tilde{M}$  обладает свойством  $P_L$  и м.в.н. функции  $g(\tilde{x})$  принадлежит  $\bigcup_{i=r_1}^{2r} U_i$ ,  $0 < r_1 < r_2 \leq n$ , то аналогично алгоритму  $R'_1$  можно построить алгоритм  $R'$  поиска м.в.н. функции  $g(\tilde{x})$ . В этом случае используется лексикографический порядок наборов уровней  $\tilde{M}$ .

Алгоритм  $R', R'_1$ , позволяют эффективно решать многие экстремальные задачи. Однако при  $n \geq 20$  они становятся нецелесообразными с точки зрения заданных ресурсов. Поэтому актуальной является проблема разработки более простых эвристических алгоритмов, позволяющих эффективно строить процесс поиска м.в.н., а также учитывающих результаты предыдущих шагов.

Пусть структура  $\tilde{M}$   $n$ -мерных наборов состоит из  $t$  уровней  $U_1, U_2, \dots, U_t$ ,  $|U_1| = \max_{i=1,2,\dots,t} |U_i|$ ,  $L = |U_1|$ . Зафиксируем числа  $\tau (1 \leq r \leq L)$ ,  $\rho (l < \rho < t, 0 < \rho < l)$ .

Рассмотрим множества  $M_k \subseteq U_k, |M_k| = r$  такие, что для любых  $M_k \subseteq U_k, |M_k| = r$  имеет место  $\min_{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in M_k} \rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \geq \min_{\tilde{\alpha}', \tilde{\beta}' \in M_k} \rho(\tilde{\alpha}', \tilde{\beta}')$ , где  $k = l - \rho, l - \rho + 1, l + \rho$ .

Положим  $g = \min_{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in M_k} \rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ .

Пусть задача  $Z$  состоит в вычислении  $q$  для множеств  $M$  типа  $M_k$  таких, что  $|M_k| = r$  и  $n \geq 20$ . Обозначим через  $\varphi(k, n, q)$  число точек в пересечении уровня  $U_k$  с шаром радиуса  $q$  и центром  $\tilde{\alpha} \in U_k$ .

Для числа  $C$  пересекающихся шаров радиуса  $q$ , справедлива оценка  $C \leq \frac{|U_k|}{\varphi(k, n, q)}$ .

Пусть  $\varphi(k, n, q) = \frac{|U_k|}{r}$ . На основе этого равенства определяем функциональную зависимость для  $q_r = \psi(k, n, r)$  и исходя из заданного  $r$ , вычисляем значения  $q = \psi(k, n, r)$ .

В [3] получено следующее утверждение. Пусть  $L$  - произвольное подмножество вершин  $E_n^2$ ,  $|L| = mG_n$  - групповой код в  $E_n^2$  с расстоянием  $d$  и  $|G_n| = B$ . Тогда существует подмножество  $L_d \subseteq L$ , все точки которого лежат друг от друга на расстоянии, не меньшем  $d$

, и которесодержит не менее  $B \frac{m}{2^n}$  точек. Из результатов работы [3] следует, что в  $E_n^2$  существует групповой код с расстоянием  $2r+1$  числом элементов  $B(n, r) \geq C \frac{2^n}{n^r}$ , ( $1 < C < 2$ ).

Пусть

$$L = U_i \subseteq E_n^2, |U| = C_n^2, i = \overline{0, n}, r = 1, M \subseteq U_i$$

для  $\forall \tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in M$ , где  $i = 0, 2, 4, \dots$

В силу утверждения [207] можно считать, что

$$C \frac{C_n^i}{n^i} \leq \frac{B(n, l)}{2^n} C_n^i \leq |M|.$$

Нетрудно заметить (см. [210]), что

$$|M| \leq \frac{C_n^i}{1 + C_{n-i}^i C_i^l + \dots + C_{n-i}^{l/2} C_i^{l/2}} \leq C' \frac{C_n^i}{n^l}.$$

Таким образом,

$$C \frac{C_n^i}{n^l} \leq |M| \leq C' \frac{C_n^i}{n^l}.$$

Рассмотрим параметрический алгоритм  $A(\rho, r, h, H)$  поиска м.н.ед. дискретной монотонной функции  $f(M_n)$  заданной на структуре  $\tilde{M}$ , где  $\rho$ -уровень порога исследования нижних единиц,  $r$ -число цепей, по которым ведется начальный поиск нижних единиц,  $h$ -шаг исследования на уровнях и  $H$ -число шагов подостижении цели.

Для всех уровней  $U_k$  структуры  $\tilde{M}$  находим расстояние

$$q_k = \left\lceil \frac{U_k}{r} \right\rceil, k = 1 - \rho, l - \rho + 1, \dots, l + \rho.$$

Построим  $r$  цепей, проходящих через точки множества  $\tilde{M}$  таким образом, чтобы для любых  $\tilde{\alpha}$  и  $\tilde{\beta}$  из различных цепей  $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$  было максимальным ( $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \geq q_k$ ).

Построение цепей производится индукцией по  $i = \overline{1, \rho}$ , начиная с уровня  $U_l$  и кончая  $U_{l+\rho}$ .

Пусть  $M_l = \{\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_r\}$ . На первом шаге за минимальные элементы  $r$  цепей примем  $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_r$ .

Пусть на  $(i-1)$ -м шаге построены цепи длиной  $(i-1)$ . Для любых  $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in M_{i-1}$  справедливо равенство  $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \geq q_{i-1}$   $i$ -й шаг. Для каждого набора  $\tilde{\alpha}_j \in M_{i-1}$ ,  $j = \overline{1, r}$  имеется  $l = n - i + 1$  сравнимых наборов из  $i$ -го уровня:  $\tilde{\beta}_{i1}^{\tilde{\alpha}_j}, \tilde{\beta}_{i2}^{\tilde{\alpha}_j}, \dots, \tilde{\beta}_{il}^{\tilde{\alpha}_j}$ .

Для  $\tilde{\alpha}_1$  выбираем произвольный набор  $\tilde{\beta}_i^{\tilde{\alpha}_1}$ . Для  $\tilde{\alpha}_2$  выбираем  $\tilde{\beta}_i^{\tilde{\alpha}_2}$ , который не входит в шар радиуса  $2q_i$  центром  $\tilde{\beta}_i^{\tilde{\alpha}_1}$ . Для  $\tilde{\alpha}_j$  выберем  $\tilde{\beta}_i^{\tilde{\alpha}_j}$ , не входящий в шары,

имеющие  $2q_i$  с центрами  $\tilde{\beta}_i^{\tilde{\alpha}_1}, \tilde{\beta}_i^{\tilde{\alpha}_2}, \dots, \tilde{\beta}_i^{\tilde{\alpha}_{j-1}}$ . Если такового не существует, то выбираем набор  $\tilde{\beta}_i^{\tilde{\alpha}_j}$ , находящийся на максимальном расстоянии от  $\tilde{\beta}_i^{\tilde{\alpha}_1}, \tilde{\beta}_i^{\tilde{\alpha}_2}, \dots, \tilde{\beta}_i^{\tilde{\alpha}_{j-1}}$ .

Цепи на уровнях с  $U_l$  до  $U_{l-\rho}$  строятся аналогично. Таким образом, получаем  $r$  цепей длиной  $2\rho$ . Далее, обращаясь к оператору  $A_f$ , вычисляем функцию на наборах построенных цепей. В результате для каждой цепи находим локальный минимум.

Среди локальных минимумов выбирается единица с минимальной формой. Затем функцию будем вычислять на наборах, лежащих на один уровень ниже чем  $\tilde{\alpha}$ , и не входящих в множество  $\{\tilde{\gamma}\}$  вершин  $\tilde{\gamma}$ , сравнимых хотя бы с одним локальным минимумом. Причем значение функции будем вычислять не на каждом наборе, а через  $h$  наборов в  $(1 \leq h \leq H)$ , начиная с некоторого фиксированного набора.

Если существует  $\tilde{\alpha}$  такой что  $f(\tilde{\alpha}) \neq 0$ , то будем искать нижнюю единицу среди наборов  $\tilde{\beta}$  таких, что  $\tilde{\beta} \leq \tilde{\alpha}$ . Дальнейшее исследование будем производить так же, как и на предыдущем уровне.

Когда количество обращений к оператору  $A_f$  достигает  $H$  поиск прекращается. Последнюю найденную нижнюю единицу функции  $f(\tilde{x})$  принимаем за минимальную.

Если найденная м.н.ед. не удовлетворяет поставленным требованиям, то, изменив параметры  $r, H, \rho, h$ , можем продолжить поиск до нахождения приемлемой единицы  $f$ .

### 3. Критерии сведения к задачам расшифровки и поиска максимального верхнего нуля дискретных монотонных функций

Пусть  $E_\rho = \{0, 1, \dots, \rho - 1\}$  и  $T_1^*, T_2^*, \dots, T_\omega^*$  - прямоугольные таблицы с элементами из  $E_\rho$ , содержащие по  $n$  столбцов  $m_1, m_2, \dots, m_\omega$  строк:

$$T_{nm}^0 = \bigcup_{i=1}^{\omega} T_i^* \sum_{i=1}^{\omega} m_i = m.$$

Строки назовем элементами, столбцы - признаками.

Заданием  $\omega$  таблиц определяем некоторое множество элементов и разбиением их на  $\omega$  классов:  $K_1, K_2, \dots, K_\omega$ . Таким образом, элемент  $a_{ij}^l$ ,  $l$ -й таблицы есть значение  $j$ -го признака на  $l$ -м объекте из  $l$ -го класса  $K_l$ . Предполагают, что каждый эталон содержится только в одном классе. Пусть  $S_1, S_2, \dots, S_m$  - эталон и  $x_1, x_2, \dots, x_m$  признаки. Тогда  $x_j(S_i) = \alpha_{ij}$  - значение на  $S_i$ .

Известно, что множество  $M = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_r}\}$  называется тестером, если для любой пары эталонов  $S_i, S_j$  принадлежащих разным классам, существует признак  $x_t \in M$  такой, что  $x_t(S_i) \neq x_t(S_j)$ . Очевидно, что в случае, когда  $m_1 = m_2 = \dots m_\omega = 1$  определения теста и тестеров таблиц совпадают. Тестер называется тупиковым, если после удаления из него любого признака он перестает быть тестером. Тестер называется минимальным, если он содержит минимальное число признаков среди всех тестеров таблиц.

Положим, что  $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  произвольная частичная функция  $k$ -значной логики  $m = \{f_1, f_2, \dots, f_m\}$  система не всюду определенных булевых функций  $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), i = \overline{1, m}$ .

Известно [4] что совокупность переменных  $M = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}\}$  называется существенной для  $F(\tilde{x})(m)$ , если найдется не всюду определенная функция  $\varphi = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}\}$   $k$ -значной логики  $m' = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$  (система булевых функций  $\varphi = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}\}$ ,  $i = \overline{1, m}$ ) такая, что  $F = \varphi$ ,  $(\varphi_i = f_i, i = \overline{1, m})$ .

Существенная совокупность  $M$  для  $F(m)$  называется тупиковой, если после удаления из нее любой переменной она перестает быть существенной для  $F(m)$ . Тупиковая  $M$  для  $F(m)$  называется минимальной, если содержит минимальное число переменных среди всех совокупностей переменных, существенных для  $F(m)$ .

Пусть  $T_{nm}$  - бинарная таблица, содержащая  $n$  столбцов и  $m$  строк и  $\rho_i$  вес  $i$ -й строки  $\rho_i > 0$ ,  $i = \overline{1, m}$ . Будем считать, что строки  $i_1, i_2, \dots, i_k$  образуют покрытие столбцов  $T_{nm}$ , если для любого  $j$ -го столбца  $T_{nm}$  существует хотя бы одна строка  $i \in \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$  такая, что элемент  $\alpha_{ij}$  в таблице  $T_{nm}$  является единичным. Покрытие  $M = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$  таблицы  $T_{nm}$  называется тупиковым, если после удаления из него строки  $R$  оно перестает быть покрытием  $T_{nm}$ . Покрытие  $M$  таблицы  $T_{nm}$  называется минимальным, если  $\sum_{j=1}^k \rho_{i_j}$  минимальное число среди всех сумм весов покрытий  $T_{nm}$ .

Пусть задан алфавит булевых переменных  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ . Рассмотрим множество  $\Omega$  всех э.к. от  $k$  переменных  $(0 \leq k \leq n, n \geq 1)$ . Обозначим через интервал (под куб) в кубе  $E_n^k$ , соответствующий э.к.  $N_A$ .

Произвольной э.к.  $A = 1$  в  $\Omega$  (интервалу  $N_A$ ) поставим в соответствие набор  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  такой, что

$$\alpha_i = \begin{cases} \sigma_1, & \text{если } i \in \{i_1, i_2, \dots, i_k\} \\ 2 - & \text{в противном случае} \end{cases},$$

причем э.к.  $A = 1$  соответствует набор  $(2, 2, \dots, 2)$ .

Рассмотрим структуру  $S^n$ , где  $S = \{0, 1, 2\}$ ,  $0 < 1, 0 < 2$ . Произведем кодировку элементов множества  $S: 0 \rightarrow 2, 1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 0$ . Имеем  $2 < 1, 2 < 0$ . Этот порядок индуцирует частичный порядок в множестве  $S^n$ :

$$\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq \tilde{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \text{ при } \tilde{\alpha}_i \leq \tilde{\beta}_i, i = \overline{1, n}.$$

Легко заметить, что наборам уровня  $U_j$  структуры  $S^n$  соответствуют э.к. ранга  $j$  множеству  $\Omega$ , и цепи  $\{\tilde{\alpha}^{i_1}, \tilde{\alpha}^{i_2}, \dots, \tilde{\alpha}^{i_k}\}$  в совокупность э.к.  $M_{ij}$ ,  $j = \overline{1, k}$  таких, что  $N_{M_{j_1}} \subset N_{M_{j_2}} \subset \dots \subset N_{M_{j_k}}$ .

Пусть  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  - функции алгебры логики и  $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  - частичная булева функция, заданная с помощью множеств  $M_1, M_2, M_1 \cap M_2 \neq \emptyset$ .

Введем функции  $g(y_1, y_2, \dots, y_n), \tilde{g}(y_1, y_2, \dots, y_n), y \in \{0, 1, 2\}$ , определенные на наборах  $\tilde{\alpha}$  множества  $S^n$ . Пусть  $\tilde{\alpha}$  соответствует э.к.  $A$  и  $\Omega$ :

$$g(\tilde{\alpha}) = \begin{cases} 0, & \text{если } M - \text{недопустимая э.к. для } f \\ 1, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

$$g(\tilde{\alpha}) = \begin{cases} 1, & \text{если } N_A \cap M_1 \neq \emptyset, N_A \cap M_2 \neq \emptyset, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Нетрудно доказать, что  $g(y_1, y_2, \dots, y_n), (\tilde{g}(y_1, y_2, \dots, y_n))$  - монотонная функция, т.е. для любых наборов  $\tilde{\alpha}$  и  $\tilde{\beta}$  в  $S^n$  таких, что  $\tilde{\alpha} \leq \tilde{\beta}$  справедливо:  $g(\tilde{\alpha}) \leq g(\tilde{\beta}), (\tilde{g}(\tilde{\alpha}) \leq \tilde{g}(\tilde{\beta}))$ , нижние единицы  $g(\tilde{\alpha}), (\tilde{g}(\tilde{\beta}))$  соответствуют максимальным интервалам  $N$  в  $N_f, (E_n^2 \setminus M_2, N \cap M_2, N \cap M_1 \neq \emptyset)$ . Причем множество всех нижних единиц  $g(\tilde{y}), (\tilde{g}(\tilde{y}))$  определяет совокупность всех максимальных интервалов  $N$  в  $N_f, (E_n^2 \setminus M_2, N \cap M_1 \neq \emptyset)$ .

Рассмотрим дискретную задачу  $Z_s \in \{Z_s\}, (Z'_s \in \{Z'_s\})$  поиска всех экстремумов (глобального экстремума) функционала  $F$  объекта  $S \in \{S\}$ . Очевидно, что множество  $\{Z_s\}, (\{Z'_s\})$  взаимно-однозначно соответствует совокупности  $\{S\}$ . Например, если  $S$  есть частично определенная функция  $k$ -значной логики  $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  то  $Z_F \in \{Z_F\}, (Z'_F \in \{Z'_F\})$  формируется как задача поиска всех совокупностей (минимальной совокупности) переменных, существенных для  $F(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \{F_n\}$ , где  $\{F_n\}$  - множество всех частично-определенных функций  $k$ -значной логики, зависящих от  $n$ -переменных.

Пусть объекту  $S$  соответствует монотонная функция  $\varphi(y_1, y_2, \dots, y_n) \in M$ , заданная на конечной структуре  $\tilde{M}$ . Причем верхние нули функции  $\varphi_s$  взаимно-однозначно соответствуют экстремумам функционала  $F$  объекта  $S$ .

Будем считать, что задача  $Z_s$  соответствует задаче расшифровки  $\varphi_s$  и  $Z'_s$ -поиска м.в.н.  $\varphi_s$ . Будем говорить о полном ведении множества  $\{Z_s\}$  задаче расшифровки, если для любой функции  $f$  из  $M_n$  существует  $M_n$  из  $\{Z_s\}$  такая, что  $\varphi_s = f$ . Обозначим через  $\{f_{\tilde{\alpha}}\}$  совокупность (класс) монотонных функций из  $M_n$ , у которых  $\tilde{\alpha} \in M$  есть максимальный верхний нуль.

Будем считать, что задача  $Z'_s$  соответствует классу  $\{f_{\tilde{\alpha}}\}$ , если  $\varphi_s = \{f_{\tilde{\alpha}}\}$ . В случае, когда для любого набора  $\tilde{\alpha} \in M_n$  существует  $Z'_s$  такая, что  $\varphi_s = \{f_{\tilde{\alpha}}\}$ , то будем говорить о

полном сведении совокупности  $\{Z'_s\}$  поиску м.в.н. функций в  $M_n$ . В противном случае сведение считается неполным.

**Теорема 1.** Если существует полное сведение совокупности  $\{Z_s\}$  к задаче расшифровки в  $M_n$ , то сведение совокупности  $\{Z'_s\}$  к поиску м.в.н. функций в  $M_n$  является полным.

**Доказательство.** Очевидно, что полное сведение совокупности  $\{Z_s\}$  к задаче расшифровки означает, что для любой функции из  $M_n$  существует  $Z_s$  из  $\{Z_s\}$ , для которой  $\varphi_s = f$ .

Поэтому для любого набора  $\tilde{\alpha} \in M_n$  существует такая  $Z'_s$ , что  $\varphi_s = \{f_{\tilde{\alpha}}\}$ . Следовательно, можно утверждать полное сведение  $\{Z'_s\}$  поиску м.в.н. функций в  $M_n$ . Теорема доказана.

Пусть  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  – булева функция,  $\{Z_f\}$  – класс задач  $Z$  построения сокращенных дизъюнктивных нормальных форм (д.н.ф.) для всех булевых функций  $f(x)$ .

Рассмотрим монотонную функцию  $g(y_1, y_2, \dots, y_n) \in S^n$ , соответствующую  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

**Теорема 2.** Сведение класса  $\{Z\}$  построения сокращенных дизъюнктивных нормальных форм для всех булевых функций  $f(x)$  к задаче расшифровки является неполным.

**Доказательство.** Оно следует из того, что для монотонной функции  $\psi(y_1, y_2, \dots, y_n)$  в  $S^n$  такой что

$$\psi(\tilde{\alpha}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \tilde{\alpha} \in \bigcup_{i=j}^n U_i, i < j < n \\ 0 & \text{– в противном случае} \end{cases}$$

не существует  $Z_f$  из  $\{Z_f\}$ , что  $\psi \equiv \varphi_f$ .

Аналогично доказывается, что сведение класса  $\{Z_f\}$  задач  $Z_f$  построения сокращенных д.н.ф. частичных функций  $F$ ,  $k$ -значной логики к задаче расшифровки является неполным.

### Литература

1. Hansel G. Sur le nombre des fonctions booléennes monotones de  $n$  variables. – Cr. Acad. Sci. Paris. 262. № 20 (1966), 1088-1090.
2. Ансель Ж.О. О числе монотонных булевых функций  $n$  переменных. – Кибернетический сборник. Новая серия. Вып. 5. – М., 1968. – с. 53-57.
3. Катериночкина Н.Н. Поиск максимального верхнего нуля монотонной функции алгебры логики. «ДАН СССР», т. 224, 1975, №3.
4. Соловьев Н.А. Тесты. – Новосибирск, 1971.
5. Журавлев Ю.И. Об алгоритмах выделения совокупностей существенных переменных не всюду определенных функций алгебры логики. В сб. «Проблемы кибернетики», вып.11. – М., 1964.

UDK: 511.12

## PIFAGOR TAXTASI YORDAMIDA PIFAGOR G'ISHTLARINI QURISH

J.I.Abdullayev<sup>1</sup>, H.H.Ibragimov<sup>2</sup><sup>1</sup>Samarqand davlat universiteti,<sup>2</sup>Termiz davlat universiteti Denov filiali

**Annotatsiya.** Pifagor taxtasi yordamida Pifagor g'ishtlarini hosil qilish usuli ko'rsatilgan.  $\mathbb{R}^n$  fazoda muntazam Pifagor g'ishti mavjudligining zarur va yetarli sharti keltirilgan.

**Kalit so'zlar:** Pifagor sonlari, Pifagor taxtasi, Pifagor g'ishti, Pifagor kubi, muntazam Pifagor g'ishti, diagonal, to'g'ri burchakli uchburchak, teng yonli uchburchak.

## Построение Пифагоровского кирпича с помощью доски Пифагора

**Аннотация.** Приведен метод построения Пифагоровских кирпичей с помощью доски Пифагора. Приведены необходимые и достаточные условия существования правильного кирпича Пифагора в пространстве  $\mathbb{R}^n$ .

**Ключевые слова:** Пифагоровы числа, Пифагорова доска, Пифагоровы кирпичи, Пифагоровы кубики, диагональ, прямоугольный треугольник, равнобедренный треугольник.

## Building Pythagorean bricks by using Pythagorean board

**Annotation.** A method of constructing Pythagorean bricks by using the Pythagorean board is shown. Necessary and sufficient conditions for the existence of a regular Pythagorean brick in the space  $\mathbb{R}^n$  are obtained.

**Keywords:** Pythagorean numbers, Pythagorean board, Pythagorean brick, Pythagorean cubes, regular diagonals Rectangular triangles, lateral triangles.

Qadimda matematikaga doir ishlarda (3, 4,5) uchligi ma'lum bo'lib, uning yordamida to'g'ri burchaklarni yasashga yordam bergan. Vitruviy bu uchlikni matematikaning oliy yutug'i deb, Platon esa birdamlik ramzi sifatida talqin qilgan. Me'morchilikda qadimgi Messopotamiya qabr toshlarida ikkita 9,12 va 15 o'lchamli uchburchaklardan tuzilgan teng yonli uchburchak uchraydi. Fira'vn Snofru piramidalari 20,21 va 29 hamda 18,24 va 30 o'lchamli uchburchaklardan foydalanib qurilgan.

Shu bilan birga yaqin o'tmishda mavzu atrofida Pifagor, Diofant, Evklid, Eyler kabi mashhur matematiklar shug'illanishgan. Ularning ilmiy merosidan foydalanib ko'plab matematiklar hozirgi kunda ham yangi-yangi natijalar olishmoqda. Biz adabiyotlarda Pifagor uchligi, Pifagor to'rtligi, Pifagor  $n$  ligi kabi savollarga turlicha yondashuvlarga duch kelamiz [1]-[6].

Bu mavzuda biz Pifagor uchligi, Pifagor to'rtligi, Pifagor  $n$  ligini beradigan umumlashgan formula bilan javob berish bilan birga, shu formuladan foydalanib "Pifagor taxtasi" yordamida "Pifagor g'ishtlari" qurish usulini ko'rsatamiz.

Agar butun musbat  $a, b$  va  $c$  sonlari uchun  $a^2 + b^2 = c^2$  tenglik o'rinli bo'lsa,  $(a, b; c)$  sonlarga Pifagor uchligi deyiladi. Bu holda tomonlari  $a$  va  $b$  bo'lgan to'g'ri burchakli to'rtburchak Pifagor taxtasi deyiladi [1]. Xuddi shunday  $a, b, c$  va  $d$  butun musbat sonlari uchun  $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$  tenglik o'rinli bo'lsa, u holda qirralari  $a, b$  va  $c$  bo'lgan to'g'ri parallelepiped Pifagor g'ishti deyiladi [1], [2].

**1-ta'rif.** Agar  $a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn}, d_n$  butun musbat sonlari uchun

$$a_{n1}^2 + a_{n2}^2 + \dots + a_{nn}^2 = d_n^2 \quad (1)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda qirralari  $a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn}$  bo'lgan to'g'ri parallelepipedni  $n$  o'lchamli Pifagor g'ishti yoki sodda qilib Pifagor g'ishti deymiz.

Agar Pifagor g'ishtining barcha qirralari teng, ya'ni  $a_{n1} = a_{n2} = \dots = a_{nn} = a$  bo'lsa, uni muntazam Pifagor g'ishti yoki  $n$  o'lchamli Pifagor kubi deymiz. Pifagor g'ishtini toping (quring) deyilganda uning qirralari uzunliklarini topish nazarda tutilgan bo'ladi. Agar (1) shartni qanoatlantiruvchi  $a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn}, d_n$  butun musbat sonlari berilgan bo'lsa, Pifagor g'ishti berilgan bo'ladi. Odatda Pifagor g'ishtining qirralari  $(a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn})$  vektor shaklda beriladi. Agar Pifagor g'ishtining diagonalini ko'rsatishga zarurat tug'lsa, uni  $(a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn}; d_n)$  shaklda yozamiz.

**1-teorema.** Agar  $\mathbb{R}^n$  fazoning o'Ichami  $n$  biror natural sonning kvadrati bo'lmasa, u holda bu fazoda birorta ham muntazam Pifagor g'ishti mavjud emas.

**Isbot.** Faraz qilaylik,  $\mathbb{R}^n$  fazoda muntazam Pifagor g'ishti mavjud bo'lib, uning qirrasi  $a \in \mathbb{N}$  bo'lsin. U holda

$$a_{n1}^2 + a_{n2}^2 + \dots + a_{nn}^2 = na^2$$

bo'lib,  $na^2$  biror  $d$  natural sonning kvadrati. Bu yerdan esa  $d = a\sqrt{n}$  butun emasli kelib chiqadi. Bu esa teoremani isbotlaydi.

**2-teorema.** Agar  $n$  soni biror natural sonning kvadrati bo'lsa, u holda  $\mathbb{R}^n$  fazoda ixtiyoriy  $a \in \mathbb{N}$  uchun qirralari  $a$  bo'lgan muntazam Pifagor g'ishti mavjud.

**Isbot.** Faraz qilaylik,  $n = k^2$ ,  $k \in \mathbb{N}$  bo'lsin. U holda ixtiyoriy  $a \in \mathbb{N}$  soni uchun qirrasi  $a$  bo'lgan muntazam Pifagor g'ishti mavjud, haqiqatan ham

$$a_{n1}^2 + a_{n2}^2 + \dots + a_{nn}^2 = na^2 = k^2 a^2 = (ka)^2$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Demak, parallelepiped diagonali  $d_n = ka$  ham butun musbat son ekan. Bu esa  $\mathbb{R}^n$ ,  $n = k^2$  fazoda barcha o'Ichamli muntazam Pifagor g'ishtlari mavjudligini ko'rsatadi.

Agar bizga tomonlari  $a$  va  $b$  bo'lgan Pifagor taxtasi berilgan bo'lsa, bu taxta yordamida ixtiyoriy  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 3$  fazoda Pifagor g'ishtlarini qurish mumkinligini ko'rsatamiz.

**3-teorema.** Agar  $a$  va  $b$  lar Pifagor taxtasining tomonlari,  $c$  unig diagonali bo'lsa, u holda ixtiyoriy  $\mathbb{R}^n$ ,  $n = k + 2$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , fazoda Pifagor taxtasi yordamida Pifagor g'ishti qurish mumkin. Bu Pifagor g'ishtining qirralari va diagonali quyidagicha topiladi:

$$\begin{aligned} n = 3 \text{ uchun } a_{31} &= c + a, a_{32} = c + a + b, a_{33} = c + b, d_3 = 2c + a + b, (2) \\ n = 4 \text{ uchun } a_{41} &= a_{42} = c + a, a_{43} = b + 2a + 2c, a_{44} = 3c + 2a + 2b, \\ d_4 &= 4c + 3a + 2b, \end{aligned}$$

$$n = k + 2 \text{ uchun } a_{n1} = a_{n2} = \dots = a_{nk} = c + a, a_{nk+1} = b + k(c + a),$$

$$a_{nk+2} = a_{nn} = \frac{k(k+1)}{2}(c + a) + kb - a, d_n = \frac{k(k+1)}{2}(c + a) + kb + c. (3)$$

**Isbot.** Teorema isbotini dastlab  $n = 3$  uchun keltiramiz. Buning uchun

$$a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 = d_3^2$$

tenglikda  $a_{31}$ ,  $a_{32}$ ,  $a_{33}$ , va  $d_3$  lar o'rniga, ularning (2) formuladagi ifodalarini qo'yamiz va

$$(c + a)^2 + (c + a + b)^2 + (c + b)^2 = (2c + a + b)^2 (4)$$

tenglikni to'g'ri ekanligini ko'rsatamiz. Buning uchun kvadratlarni ochamiz

$$\begin{aligned} c^2 + 2ac + a^2 + c^2 + 2ac + 2bc + a^2 + 2ab + b^2 + c^2 + 2cb + b^2 &= \\ = 4c^2 + 4ac + 4bc + a^2 + 2ab + b^2. \end{aligned}$$

Chap tomonda o'xshash hadlarni ixchamlaymiz va natijada

$$3c^2 + 4ac + 4bc + 2ab + 2a^2 + 2b^2 = 4c^2 + 4ac + 4bc + a^2 + 2ab + b^2$$

tenglikka kelimiz. Bu tenglik ikkala tomonidagi  $4ac$ ,  $4bc$ ,  $2ab$  hadlarni tashlab quyidagilarni hosil qilamiz

$$3c^2 + 2a^2 + 2b^2 = 4c^2 + a^2 + b^2 \text{ yoki } a^2 + b^2 = c^2.$$

Demak, (4) tenglik to'g'ri. Bu esa teoremani  $n = 3$  hol uchun isbotini beradi.

Endi teoremani umumiy hol  $n = k + 2$ ,  $k \in \mathbb{N}$  uchun isbotlaymiz. Buning uchun

$$a_{n1}^2 + a_{n2}^2 + \dots + a_{nn}^2 = d_n^2 (5)$$

munosabatning (3) formuladagi  $a_{n1}$ ,  $a_{n2}$ , ...,  $a_{nn}$  va  $d_n$  larning qiymatlarida tenglik bajarilishini ko'rsatamiz. U holda (5) tenglikka  $a_{n1}$ ,  $a_{n2}$ , ...,  $a_{nn}$  va  $d_n$  larning (3) formuladagi qiymatlarini qo'yib

$$\begin{aligned} k(c + a)^2 + (b + k(c + a))^2 + \left(\frac{k(k+1)}{2}(c + a) + kb - a\right)^2 &= \\ = \left(\frac{k(k+1)}{2}(c + a) + kb + c\right)^2 (6) \end{aligned}$$

tenglikni to'g'ri ekanligini ko'rsatamiz. Qavslarni ochib chiqib quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned} k(c + a)^2 + b^2 + 2bk(c + a) + (k(c + a))^2 + \left(\frac{k(k+1)}{2}(c + a) + kb\right)^2 - \\ - 2a\left(\frac{k(k+1)}{2}(c + a) + kb\right) + a^2 = \left(\frac{k(k+1)}{2}(c + a) + kb\right)^2 + \\ + 2c\left(\frac{k(k+1)}{2}(c + a) + kb\right) + c^2. \end{aligned}$$



Tenglikni ikki tomonidagi bir xil  $\left(\frac{k(k+1)}{2}(c+a) + kb\right)^2$  ifodani tashlab yuboramiz, hamda chap tomondagi  $a^2 + b^2$  ni o'ng tomondagi  $c^2$  ga tengligi uchun ularni ham tashlab yuboramiz. Tenglikning chap tomonidagi  $2a\left(\frac{k(k+1)}{2}(c+a) + kb\right)$  ifodani tenglik o'ng tomoniga o'tkazib, natijada

$$k(c+a)^2 + 2bk(c+a) + (k(c+a))^2 = 2c\left(\frac{k(k+1)}{2}(c+a) + kb\right) + 2a\left(\frac{k(k+1)}{2}(c+a) + kb\right)$$

ga ega bo'lamiz. O'ng tomondagi qo'shiluvchilardan  $2\left(\frac{k(k+1)}{2}(c+a) + kb\right)$  umumiy ko'paytuvchini qavsdan tashqariga chiqarib, natijada

$$k(c+a)^2 + 2bk(c+a) + (k(c+a))^2 = 2\left(\frac{k(k+1)}{2}(c+a) + kb\right)(c+a)$$

tenglikni hosil qilamiz. Tenglikni har ikki qismini noldan farqli  $c+a$  ga bo'lib

$$k(c+a) + 2bk + k^2(c+a) = 2\left(\frac{k(k+1)}{2}(c+a) + kb\right)$$

ni hosil qilamiz. Bu tenglik o'ng tomonidagi qavsni ochib quyidagini olamiz:

$$k(c+a) + 2bk + k^2(c+a) = k(k+1)(c+a) + 2kb.$$

Chap va o'ng tomondagi bir xil ifoda  $2kb$  ni tashlab, keyin tenglik har ikki tomonini  $k(c+a)$  ga bo'lib yuborsak  $1+k = k+1$  ayniyat hosil bo'ladi. Bu teoremani isbotlaydi.

Pifagor taxtasining tomonlari teng imkoniyatli bo'lganligi uchun quyidagi tasdiqni isbotsiz keltiramiz.

**4-teorema.** Bizga  $(a, b; c)$  Pifagor taxtasi berilgan bo'lsin. U holda ixtiyoriy  $\mathbb{R}^n, n = k + 2, k \in \mathbb{N}$ , fazoda bu taxta yordamida Pifagor g'ishtini qurish mumkin. Bu Pifagor g'ishtining qirralari

$$b_{n1} = b_{n2} = \dots = b_{nk} = c + b, b_{nk+1} = a + k(c + b), b_{nn} = \frac{k(k+1)}{2}(c + b) + ka - b,$$

uning diagonalini  $d_n = \frac{k(k+1)}{2}(c + b) + ka + c$  bo'ladi.

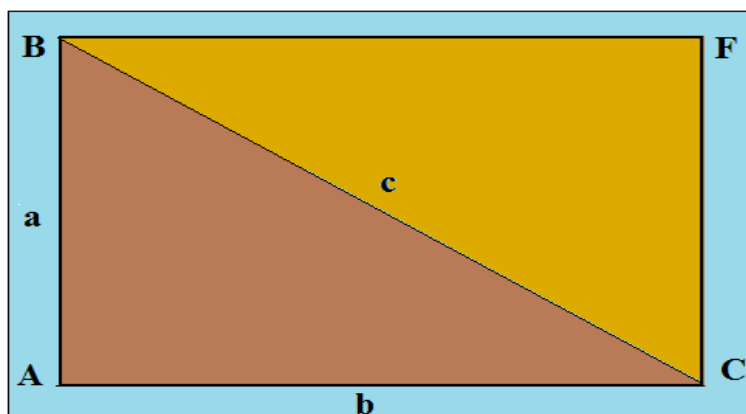
3-4- teoremlar yordamida qurilgan ikki seriya Pifagor g'ishtlar  $n > 3$  da qurilishiga ko'ra har xil bo'ladi,  $n = 3$  da Pifagor g'ishtlari o'zaro teng bo'ladi (1-jadvalga qarang).

(3,4;5) Pifagor taxtasi yordamida qurilgan Pifagor g'ishtlarini quyidagi jadvalda keltiramiz:

1-jadval

| P.G'<br>$\mathbb{R}^n$ | 3-teorema yordamida qurilgan<br>Pifagor g'ishtlari |           | 4-teorema yordamida qurilgan<br>Pifagor g'ishtlari |           |
|------------------------|----------------------------------------------------|-----------|----------------------------------------------------|-----------|
|                        | Qirralari                                          | Diagonali | Qirralari                                          | Diagonali |
| $\mathbb{R}^3$         | (8,12,9)                                           | 17        | (9,12,8)                                           | 17        |
| $\mathbb{R}^4$         | (8,8,20,29)                                        | 37        | (9,9,21,29)                                        | 38        |
| $\mathbb{R}^5$         | (8,8,8,28,57)                                      | 65        | (9,9,9,30,59)                                      | 68        |
| $\mathbb{R}^6$         | (8,8,8,8,36,93)                                    | 101       | (9,9,9,9,39,98)                                    | 107       |
| $\mathbb{R}^7$         | (8,8,8,8,8,44,137)                                 | 145       | (9,9,9,9,9,48,149)                                 | 155       |
| $\mathbb{R}^n$         | $(a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn})$                  | $d_n$     | $(b_{n1}, b_{n2}, \dots, b_{nn})$                  | $d_n$     |

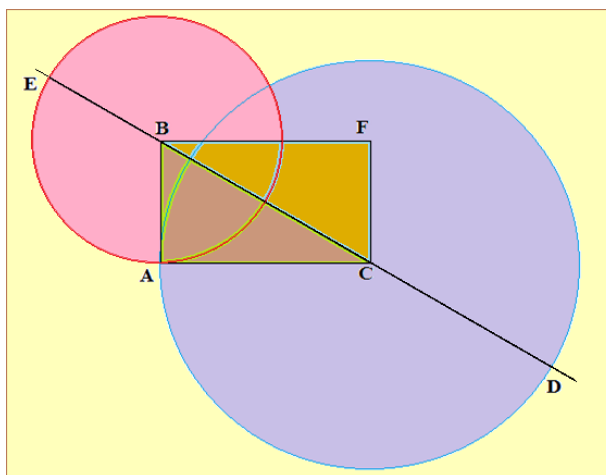
Endi Pifagor taxtasidan Pifagor g'ishtini qurish usulini ko'rsatamiz. Buning uchun, bizga  $(a, b; c)$  Pifagor taxtasi berilgan bo'lsa, sirkul va chizg'ich yordamida Pifagor g'ishti qirralari va diagonalini qurish usulini bayon qilamiz. Pifagor taxtasining uchlarini  $A, B, C$  va  $F$  harflari bilan belgilaymiz. U holda  $(AB, AC; BC)$  Pifagor taxtasi bo'ladi. Quyida 1-chizmada Pifagor taxtasi berilgan.



1-chizma

1-chizmada Pifagor taxtasining  $B$  uchini markaz qilib, radiusi  $r = a$  bo'lgan aylana chizamiz. Keyin Pifagor taxtasining  $C$  uchini markaz qilib radius  $R = b$  bo'lgan aylana chizamiz.  $BC$  tomonini o'z ichiga olgan to'g'ri chiziq o'tkazamiz.

Bu chiziqning aylanalar bilan kesishish nuqtalarini mos ravishda  $E$  va  $D$  lar bilan belgilaylik (2-chizmaga qarang). 2-chizmadan quyidagilarni hosil qilamiz.



2-chizma.

$$AB = BE = a, AC = CD = b, BD = BC + CD = c + b, CE = CB + BE = c + a,$$

$$DE = DC + CB + BE = c + a + b, BD + CE = c + a + b + c = a + b + 2c.$$

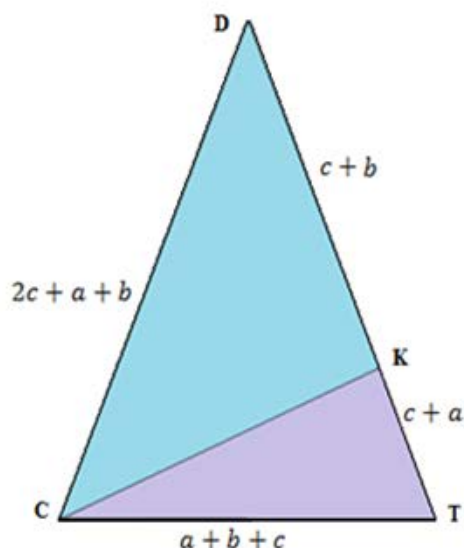
Shunday qilib, qirralari  $a_{31} = c + a$ ,  $a_{32} = c + a + b$ ,  $a_{33} = c + b$  va diagonali  $d_3 = 2c + a + b$  bo'lgan Pifagor g'ishti qurildi.

Berilgan Pifagor taxtasidagi  $ABC$  to'g'ri burchakli uchburchakdan yon tomoni  $a + b + 2c$  va asosi  $a + b + c$  bo'lgan teng yonli uchburchakka sirkul va chizg'ich yordamida o'tish usulini bayon qilamiz. Pifagor taxtasidagi  $ABC$  to'g'ri burchakli uchburchakning  $AC$  tomonini o'z ichiga olgan  $\ell$  to'g'ri chiziq o'tkazamiz.  $ABC$  to'g'ri burchakli uchburchakning  $B$  uchidan  $\ell$  to'g'ri chiziqqa parallel qilib  $e$  to'g'ri chiziq o'tkazamiz.  $ABC$  to'g'ri burchakli uchburchakning  $B$  uchini markaz qilib radiusi  $r = c$  bo'lgan aylana chizamiz. Bu aylananing  $e$  to'g'ri chiziq bilan kesishgan nuqtasini  $S$  orqali belgilaymiz, u holda  $BS = c$  bo'ladi.  $e$  to'g'ri chiziqda uzunligi  $BS$  kesmaga teng  $SO$  kesma qo'yamiz (3-chizmaga qarang).

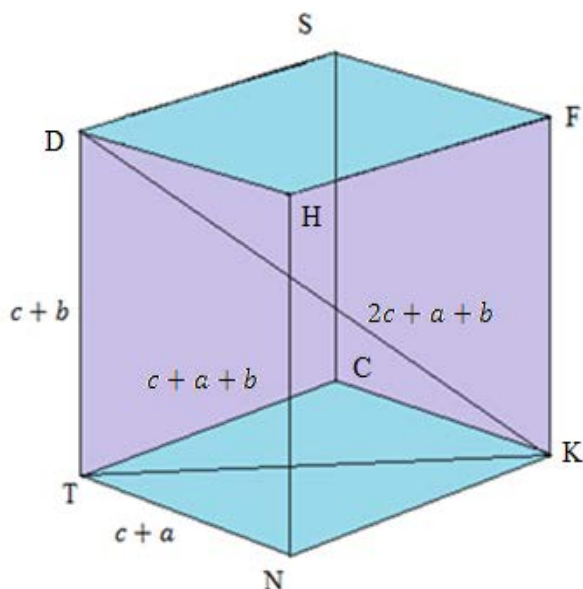
$S$  va  $O$  nuqtalardan  $\ell$  to'g'ri chiziqqa perpendikulyarlar tushiramiz. Bu perpendikulyarlarning asoslarini mos ravishda  $M$  va  $R$  harflari bilan belgilaymiz.  $M$  va  $R$  nuqtalarni markaz qilib radiusi  $r = a$  bo'lgan aylanalar chizamiz. Bu aylanalarning  $\ell$  to'g'ri chiziq bilan kesishish nuqtalarini mos ravishda  $T$  va  $Q$  bilan belgilaymiz.  $\ell$  to'g'ri chiziqdagi  $CT$  kesma o'rtasini  $N$  harifi bilan belgilaymiz. Bu  $N$  nuqtadan  $\ell$  to'g'ri chiziqqa perpendikulyar nur chiqaramiz.  $ABC$  to'g'ri burchakli uchburchakning  $C$  uchini markaz qilib, radiusi  $r = a + b + 2c = CQ$  bo'lgan aylana chizamiz. Bu



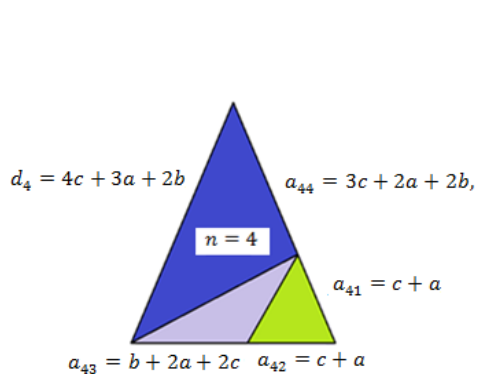
belgilab olamiz. Hosil bo'lgan  $D, S, H$ , va  $F$  nuqtalarni tutashtirib  $CTNK$  Pifagor taxtasiga teng bo'lgan  $DSHF$  Pifagor taxtasini hosil qilamiz. Bu taxtalarning mos uchlari tutashtirib  $CTNKDSHF$  "Pifagor g'ishti"ni hosil qilamiz. (5-chizmaga qaralsin). Xuddi shunday usul bilan keyingi teng yonli uchburchak (6-7-chizmaga qaralsin) kesmalaridan foydalanib  $n = 4$  va  $n = 5$  bo'lgan hol uchun "Pifagor g'ishti" ni qurish mumkin. Agar, 6-chizma 3-teoremaning  $n = 4$  bo'lgan natijasidan  $\mathbb{R}^4$  ga taaluqli "Pifagor g'ishti" qirralari va diagonalini keltirilgan bo'lsa, 7-chizma 3-teoremaning  $n = 5$  bo'lgan natijasidan  $\mathbb{R}^4$  ga taaluqli "Pifagor g'ishti" qirralari va diagonalini keltirilgan.



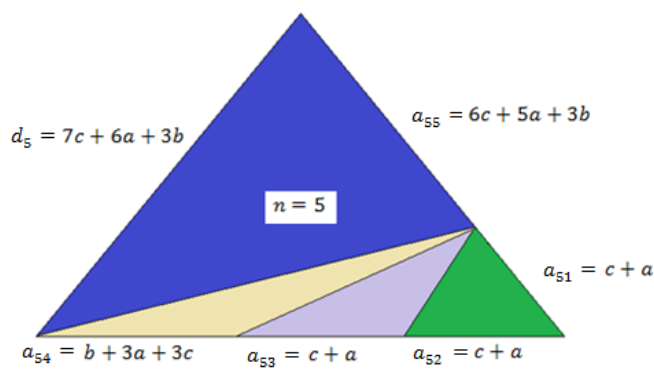
4-chizma.



5-chizma.



6-chizma



7-chizma

Xuddi shunday usul bilan keyingi teng yonli uchburchak kesmalaridan foydalanib  $n$  o'lchamli "Pifagor g'ishti" ni qurish mumkin.

### Adabiyotlar

1. A. A'zamov. Eyler g'ishti. Fizika, matematika va informatika. 2012. №1, 52-56.
2. R. Spira. The diophantine equation. Amer. Math. Monthly. 1962. T. 69. C. 360-365.
3. Иэн Стюарт. Величайшие математические задачи. М: Альпина нон-фикшн, 2016. 460 с.
4. B.D. Sokolowsky, A. G. Van Hooft, R. M. Volkert, C. A. Reiter. Math. Comp. 83(2014), №. 289, P. 2441—2454.
5. А.В.Ворон. Способ получения эйлеровых параллелепипедов на основе значений котангенса пифагоровых троек «Академия Тринитаризма», М., публ. 25656, 17.08.2019.
6. D. E. Joyce. Euclid's Elements. Clark University, June 1997. C. Book X, Proposition XXIX.

УДК: 517.946

## ЕДИНСТВЕННОСТЬ И УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ С ВОЗМУЩЕНИЕМ

А.Х.Бегматов, З.Х.Очилов, А.З.Хусанов

Самаркандский государственный университет

akrambegmatov@mail.ru

**Аннотация.** В работе рассматривается новый класс задач интегральной геометрии вольтерровского типа с весовой функцией специального вида. Доказаны теоремы единственности и существования решения, получены оценки устойчивости и формула обращения в пространствах Соболева, тем самым показана слабая некорректность решения задачи интегральной геометрии. Рассмотрено постановка задачи интегральной геометрии с возмущением на семействе параболах в полосе. Доказано теорема единственности ее решения в классе дважды непрерывно дифференцируемых и финитных функций, а также получены оценки устойчивости в пространствах конечной гладкости.

**Ключевые слова.** Задача интегральной геометрии, слабая и сильная некорректность, единственность и устойчивость.

## Uniqueness and stability problem of integral geometry with indignation

**Annotation.** A new class of Volterra type integral geometry problems with a special-weight function is considered. Theorems of uniqueness and the existence of a solution are proved, stability estimates and the inversion formula in Sobolev spaces are obtained, thereby showing the weak incorrectness of the solution of the integral geometry problem. The statement of the problem of integral geometry with a perturbation on the parabola family in the strip is considered. The uniqueness theorem of its solution is proved in the class of twice continuously differentiable and compactly supported functions, and stability estimates are obtained in spaces of finite smoothness.

**Keywords.** The problem of integral geometry, weak and strong incorrectness, uniqueness and stability

## Qo'zg'alishli integral geometriya masalasi yechimining yagonaligi va turg'unligi

**Annotatsiya.** Bu ishda maxsus ko'rinishdagi vazn funksiyali volterra tipidagi integral geometriya masalalarining yangi sinfi qaralgan. Integral geometriya masalasi yechimining mavjudligi va yagonaligi teoremlari isbotlangan, Sobolev fazolarida turg'unlik bahosi va teskarilanish formulalari olingan bo'lib, integral geometriya masalasi kuchsiz nokorrekt masala ekanligi ko'rsatilgan. Polosada (yo'lakda) parabolalar oilasi bo'yicha qo'zg'alishli integral geometriya masalasining qo'yilishi qaralgan. Ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi va finit funksiyalar sinfida yechimning yagonaligi teoremasi isbotlangan, shuningdek, chekli silliq fazolarda turg'unlik bahosi olingan.

**Kalit so'zlar:** integral, geometriya masalalari, kuchli va kuchsiz nokorrektlik, yagonalik va turg'unlik.

## Введение

Интегральная геометрия – это интенсивно развивающаяся область современной математики. Она является одним из крупных направлений в теории некорректных задач математической физики и анализа.

Приведем общую постановку задачи интегральной геометрии [1].

Пусть  $u(x)$  - достаточно гладкая функция, определенная в  $R^n$  и  $\{S(y)\}$  – семейство кусочно – гладких многообразий в этом пространстве, зависящих от параметра  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ .

Пусть, далее, от функции  $u(x)$  известны интегралы

$$\int_{S(y)} g(x, y) u(x) ds = f(y), \quad (1)$$

где  $g(x, y)$  - заданная весовая функция,  $ds$  - элемент меры на  $S(y)$ . Требуется по функции  $f(y)$  восстановить функцию  $u(x)$ .

Основные вопросы, возникающие при исследовании этой задачи следующие. Первый и самый принципиальный вопрос, определяет ли однозначно задание функции  $f(y)$  функцию  $u(x)$ ? Далее, как найти по функции  $f(y)$  функцию  $u(x)$ ? При этом важен вопрос: как получить аналитическую формулу, выражающую  $u(x)$  через  $f(y)$ ? Здесь следует отметить, что это возможно не во всех случаях. И, наконец, вопрос естественным образом связанный с теоремой существования решения задачи: каковы необходимые и достаточные условия принадлежности  $f(y)$  классу функций, представимых через интеграл (1)?

Задачами интегральной геометрии вольтерровского типа называются задачи, которые могут быть сведены к исследованию операторных уравнений вольтерра в смысле определения, данного М.М. Лаврентьевым [1].

Достаточно общие результаты по единственности и устойчивости решения задач интегральной геометрии в случае, когда многообразия, по которым ведется интегрирование, имеют вид параболоидов, весовые функции и многообразия инвариантны относительно группы всех движений вдоль фиксированной гиперплоскости, получены В.Г. Романовым [3]. Слабо некорректные задачи интегральной геометрии вольтерровского типа с весовыми функциями, имеющими особенность исследовались в работах [9-14]. Теоремы единственности, оценки устойчивости и формулы обращения слабо некорректных задач интегральной геометрии по специальным кривым и поверхностям с особенностями вершинах получены в [15-18].

Единственность решения значительно более широких классов задач интегральной геометрии в полосе, рассматриваемых как сильно некорректные, была установлена В.Г. Романовым (см.[4]). В работах А.Л. Бухгейма [5,6] получены формулы обращения для задачи восстановления функции через интегралы от неё по параболоидам в полупространстве  $y > 0$ , причем формула обращения, приведенная в [5], содержит только конечное число производных от данных. В [6] с помощью техники шкал банаховых пространств доказана теорема единственности решения задачи интегральной геометрии в полосе на параболах с весовой функцией, аналитической по части переменных.

В своей работе [2] М.М. Лаврентьев показал единственность решения сильно некорректной задачи интегральной геометрии в полосе на параболах с возмущением достаточно общего вида.

В работах [7-8] рассматриваются некоторые классы возмущенных полусингулярных интегральных уравнений в трехмерном пространстве, возникающие при исследовании ряда задач интегральной геометрии. Здесь доказаны теоремы единственности и в слабо некорректном случае теорема существования решения таких уравнений.

В статье рассматривается задача интегральной геометрии с весовой функцией специального вида по полуплоскости  $y > 0$ . Доказаны теоремы единственности и существования решения в классе гладких финитных функций, получены оценки устойчивости решения задачи в пространствах Соболева, что показывает её слабую некорректность, а также формулы обращения.

#### Основная часть

Введем обозначения, которые будем использовать в этом пункте:

$$\begin{aligned}(x, y) &\in R^2, (\xi, \eta) \in R^2, \lambda \in R^1, \mu \in R^1, \\ \Omega &= \{(x, y): x \in R^1, y \in (0, l), l < \infty\} \\ \overline{\Omega} &= \{(x, y): x \in R^1, y \in [0, l]\}\end{aligned}$$

Постановка задачи.

В полосе  $\overline{\Omega}$  рассмотрим семейство кривых, которое однозначно параметризуются с помощью координат своих вершин  $(x, y)$ , произвольная кривая семейства  $P(x, y)$  определяется соотношениями

$$P(x, y) = \left\{ (\xi, \eta) : \eta = (\xi - x + \sqrt{y})^2, 0 \leq \eta \leq y, x - \sqrt{y} \leq \xi \leq x \right\} \cup \\ \cup \left\{ (\xi, \eta) : \eta = (x + \sqrt{y} - \xi)^2, 0 \leq \eta \leq y, x \leq \xi \leq x + \sqrt{y} \right\}$$

**Задача 1.** Определить функцию двух переменных  $u(x, y)$ , если для всех  $(x, y)$  из полосы  $\overline{\Omega}$  известны интегралы от функции  $u(\bullet)$  по кривым  $P(x, y)$ :

$$\int_{x-\sqrt{y}}^x g(x-\xi) u\left(\xi, (\xi-x+\sqrt{y})^2\right) d\xi + \int_x^{x+\sqrt{y}} g(x-\xi) u\left(\xi, (x+\sqrt{y}-\xi)^2\right) d\xi = f(x, y) \quad (2)$$

где

$$g(x-\xi) = \left(1 \pm \frac{x-\xi}{\sqrt{y}}\right) \cdot \chi(x-\xi), \quad (3)$$

$$\chi(x-\xi) = \begin{cases} 1, & \text{если } x-\xi > 0, \\ 0, & \text{если } x-\xi < 0. \end{cases} \quad \text{- функция Хэвисайда.}$$

Функция  $u(x, y)$  – функция из класса  $\mathcal{C}$ , которые имеют все непрерывные частные производные до второго порядка включительно и финитны с носителем в  $R_+^2$ :

$$\text{supp } u \subset D = \{(x, y) : -a < x < a, 0 < a < \infty, 0 < y < l, \quad l < \infty\}$$

Доопределим правую часть уравнения (2) при  $y < 0$ .

Введем функцию

$$f^*(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & y \geq 0, \\ 0, & y < 0. \end{cases} \quad (4)$$

Как следует из постановки задачи 1 и условий, наложенных на функцию  $u(\bullet)$ , к функции  $f^*(x, y)$  можно применить преобразование Фурье по  $y$ . Рассмотрим преобразование Фурье по переменной  $y$  функции  $f^*(\lambda, y)$ . Учитывая, что

$$f^*(x, y) \equiv 0, \quad \text{при } y < 0,$$

Имеем

$$\varphi(\lambda, \mu) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu y} \hat{f}^*(\lambda, y) dy,$$

а интеграл в правой части последнего соотношения равен

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\mu y} \hat{f}(\lambda, y) dy = \int_0^{+\infty} e^{i\mu y} \hat{f}(\lambda, y) dy.$$

Таким образом, доопределив  $f(x, y)$  в нижней полуплоскости нулём, к обеим частям уравнения (2) можно применять преобразование Фурье по  $y$  и интеграл Фурье будет иметь вид:

$$\int_0^{+\infty} e^{i\mu y} \hat{f}(\lambda, y) dy.$$

Введем следующие функции

$$I(\lambda, \mu) = \int_0^{\infty} e^{i(\mu h^2 + h(2\mu\sqrt{\eta} + \lambda))} dh, \quad (5)$$

$$I_1(\lambda, \mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\mu y} \frac{d\mu}{(1 + \mu^2) I(\lambda, \mu)}, \quad (6)$$

$$I_2(\lambda, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda x} I_1(\lambda, y) d\lambda. \quad (7)$$

Справедлива следующая теорема:

**Теорема 1.** Пусть функция  $f(x, y)$  известна для всех  $(x, y)$  из полосы  $\bar{\Omega}$ . Тогда решение задачи 1 в классе  $\mathcal{U}$  единственно, имеет место представление

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} I_2(x - \xi, y - \eta) \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} \right) f(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (8)$$

и выполняется неравенство

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} \leq C_1 \|f\|_{W_2^{2,2}(\Omega)}$$

где  $C_1$  – некоторая постоянная.

Ответ на вопрос о существовании решения задачи интегральной геометрии дает следующая теорема:

**Теорема 2.** Пусть правая часть уравнения (2) удовлетворяет следующим условиям:

- 1)  $f(x, y)$  финитна по переменной  $x$ ;
- 2)  $f(x, y)$  имеет все непрерывные частные производные до второго порядка включительно;

$$3) \frac{\partial^m}{\partial y^m} f(x, y) \Big|_{y=0} = \frac{\partial^m}{\partial y^m} f(x, y) \Big|_{y=l} = 0 \quad (m = 0, 1, 2).$$

Тогда существует решение уравнения (2) в классе непрерывных функций, финитных по аргументу  $x$ , определенное формулой (8).

Теперь исследуем задачу интегральной геометрии с возмущением. Через  $S(x, y)$  обозначим часть  $R_+^2$ , ограниченную кривой  $P(x, y)$  и осью  $y = 0$ .  $\bar{\Omega}$  есть полоса:

$$\bar{\Omega} = \{(x, y) : x \in R^1, y \in [0, l]\}.$$

**Задача 2.** Определить функцию  $u(x, y)$ , если для всех  $(x, y) \in \bar{\Omega}$  известны интегралы от неё по кривым  $P(x, y)$  и площадям  $S(x, y)$  с весовой функцией  $k(x, y; \xi, \eta)$

$$\frac{1}{2} \int_0^y u(x - h, \eta) \frac{d\eta}{h + \sqrt{\eta}} + \int_0^y \int_{x-h}^{x+h} k(x, y; \xi, \eta) u(\xi, \eta) d\xi d\eta = F(x, y), \quad (9)$$

где  $h = \sqrt{y} - \sqrt{\eta}$ .

Функция  $k(x, y; \xi, \eta)$  – функция финитна, имеет все непрерывные частные производные до второго порядка включительно и вместе своими производными обращается в ноль на параболах

$$P(x, y) = \left\{ (\xi, \eta) : \eta = (\xi - x + \sqrt{y})^2, 0 \leq \eta \leq y, x - \sqrt{y} \leq \xi \leq x \right\} \cup \\ \cup \left\{ (\xi, \eta) : \eta = (x + \sqrt{y} - \xi)^2, 0 \leq \eta \leq y, x \leq \xi \leq x + \sqrt{y} \right\}$$

Функция  $F(x, y)$  считается известной во всей полуплоскости.

Уравнение (9) соответствует задаче интегральной геометрии с возмущением. Первое слагаемое в левой части (9)

$$\frac{1}{2} \int_0^y u(x - h, \eta) \frac{d\eta}{h + \sqrt{\eta}} = f(x, y),$$

где  $h = \sqrt{y} - \sqrt{\eta}$ , представляет собой совокупность интегралов от искомой функции по семейству половинок парабол с вершинами в точках  $(x, y)$ .



Второе слагаемое  $f_0(x, y) = F(x, y) - f(x, y)$ - интеграл с весом  $k(x, y; \xi, \eta)$  по частям полуплоскости, ограниченными параболой.

**Теорема 3.** Пусть функция  $F(x, y)$  известна в полосе  $\Omega$ . Весовая функция  $k(x, y; \xi, \eta) \in C_0^2(\Omega \times \Omega)$  вместе со своими производными до второго порядка включительно обращается в ноль на параболах  $P(x, y)$ . Тогда решение задачи 2 в классе дважды непрерывно дифференцируемых и финитных функций единственно в полосе  $\Omega$  и выполняется неравенство

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} \leq C_3 \|F\|_{W_2^2(\Omega)},$$

где  $C_3$  – некоторая постоянная.

Из условий, наложенных на функции  $u(x, y)$  и  $k(x, y; \xi, \eta)$  вытекает, что функции  $f(x, y)$  и  $F(x, y)$  будут иметь все непрерывные производные до второго порядка включительно.

### Литература

1. Лаврентьев М.М., Савельев Л.Я. Теория операторов и некорректные задачи. – Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 1999. – 702 с.
2. Лаврентьев А.М., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1986. – С.749
3. Романов В.Г. О восстановлении функции через интегралы по эллипсоидам вращения, у которых фокус неподвижен // Докл. АН СССР. – Москва, 1967. Т. 173. – № 4. – С. 766-769.
4. Романов В.Г. О восстановлении функции через интегралы по семейству кривых // Сиб. мат. журн., 1967. Т. 8. – № 5. – С. 1206-1208.
5. Бухгейм А.Л. О некоторых задачах интегральной геометрии // Сиб. мат. журн., 1972. Т. 13. – № 1. – С. 34- 42.
6. Бухгейм А.Л. Об одной задаче интегральной геометрии // Мат. проблемы геофизики. – Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1973. Вып. 4. – С. 69-73.
7. Бегматов Акбар Х. О некоторых классах полисингулярных интегральных уравнений // Сиб. мат. журн., 1994. Т. 35. – № 3. – С. 515-519.
8. Бегматов Акбар Х. О единственности решения задачи интегральной геометрии вольтерровского типа на плоскости // Докл. РАН. – Москва, 2009. Т. 427. – № 4. – С. 439-441.
9. Бегматов Акрам Х. Слабо некорректные задачи интегральной геометрии вольтерровского типа // Доклады РАН. – Москва, 1996. Т. 349. – № 3. – С. 297-298.
10. Бегматов Акрам Х. Задачи интегральной геометрии для семейства конусов в n-мерном пространстве // Сиб. мат. журн., 1996. Т. 37. – № 3. – С. 500-505.
11. Бегматов Акрам Х. Новые классы слабо и сильно некорректных задач интегральной геометрии // Второй Сиб. конгресс по прикл. и инд. математике. Тез. докл., ч. III. – Новосибирск: Институт математики СО РАН, 1996. – С. 298.
12. Бегматов Акрам Х. Некоторые новые классы задач интегральной геометрии. – Новосибирск, 1997. Препринт / РАН. Сибирское отделение. Институт математики. – № 40, 30 с.
13. Бегматов Акрам Х. Вольтерровские задачи интегральной геометрии на плоскости для кривых с особенностями // Сиб. мат. журн., 1997. Т. 38. – № 4. – С. 723-737.
14. Бегматов Акрам Х. Задачи интегральной геометрии по специальным кривым и поверхностям с особенностями в вершине // Доклады РАН. – Москва, 1998. Т. 358. – № 2. – С. 151-153.
15. Бегматов Акрам Х. Теоремы существования решения двух слабо некорректных задач интегральной геометрии // Доклады РАН. – Москва, 2002. Т. 386. – № 1. – С. 1-3.
16. Бегматов Акрам Х., Очилов З.Х. Задачи интегральной геометрии с разрывной весовой функцией // Доклады РАН. – Москва, 2009. 429. – № 3. – С. 295-297.
17. Begmatov Akram H., Ochilov Z.H. Recovering of function set by integrals along a curve in the plane // Ill-Posed and Non-Classical Problems of Mathematical Physics and Analysis, M.M. Lavrent'ev et al., Eds., Proceedings of International Conference, VSP. – Utrecht-Boston, 2003. – С. 191-197.
18. Бегматов Акрам Х., Очилов З.Х. Задачи интегральной геометрии вольтерровского типа с весовой функцией специального вида. Журнал Continuum: Математика. Информатика. Образование. Россия 2017 г., № 2., С. 11-15.

УДК: 517.9

## ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ ВРЕМЕНИ ПОПАДАНИЯ

Х.К.Каршибоев, Ш.А.Джалилов

Самаркандский институт экономики и сервиса  
karshiboyev@mail.ru; d\_shuxrat@mail.ru

**Аннотация.** В этой работе доказана предельная теорема для функция распределений  $\Phi_n^{(k)}(t)$  времени  $k$ -го попадания в  $V_n(x_b)$  при  $k \geq 2$ .

**Ключевые слова:** гомеоморфизмов окружности, времени попадания, число вращения.

## Tushish vaqti uchun limit teorema

**Annotatsiya.** Ushbu ishda  $V_n(x_b)$  renormalizatsiya atrofiga  $k$ -chi tushish vaqti ( $k \geq 2$ ) taqsimot funksiyalari  $\Phi_n^{(k)}(t)$  uchun limit teorema isbotlangan.

**Kalitli so'zlar:** aylana gomeomorfizmlari, tushish vaqti, burish soni.

## Limit theorem for hit time

**Abstract.** In this paper, it is proved the limit theorem for distribution functions  $\Phi_n^{(k)}(t)$ ,  $k \geq 2$  of  $k$ -th entrance times in  $V_n(x_b)$ .

**Key words:** homeomorphisms of a circle, hit time, rotation number.

Рассмотрим сохраняющий ориентацию гомеоморфизмов окружности  $T_f$  с поднятием  $f$  т.е.

$$T_f x = f(x) \pmod{1}, \quad x \in S^1 = R^1 / Z^1 \cong [0, 1),$$

где  $f(x)$ - непрерывная, строго возрастающая функция на  $R^1$ , удовлетворяющая условию  $f(x+1) = f(x) + 1$ ,  $x \in R^1$ . Функция  $f$  называется определяющей функцией или поднятием гомеоморфизма  $T_f$ . Отметим, что поднятие  $f$  определено с точностью до аддитивной целой константы, но эта неоднозначность устраняется начальным условием  $0 \leq f(0) < 1$ . А.Пуанкаре показал, что для любого  $x \in R^1$  существует конечный предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n} = \rho_f$ , здесь и всюду в дальнейшем  $f^{(n)}(x)$ -обозначает  $n$ -ую итерацию функции  $f(x)$ . Число  $\rho = \rho_f$  называемое *числом вращения*, не зависит от выбора  $x$  и является важнейшей числовой характеристикой гомеоморфизма  $T_f$ .

Предположим, что число вращения  $\rho = \rho_f$  иррационально. Пусть разложение  $\rho$  в непрерывную дробь имеет вид:  $\rho = [k_1, k_2, \dots, k_n, \dots]$ ,  $k_n \geq 1$ . Обозначим  $\frac{p_n}{q_n} = [k_1, k_2, \dots, k_n]$ ,  $n \geq 1$ . Числа  $q_n$ -называются *временами первого возвращения* и удовлетворяют разностному уравнению:  $q_{n+1} = k_{n+1}q_n + q_{n-1}$ ,  $n \geq 1$ ,  $q_0 = 1$ ,  $q_1 = k_1$ .

Пусть  $x_0 \in S^1$ . Положим  $x_i = T_f^i x_0$ ,  $i \geq 1$ . Заметим, что при нечётном  $n$  точка  $x_{q_n}$  лежит слева от  $x_0$ , а при чётном  $n$ - справа. Обозначим через  $V_n(x_0)$  замкнутый отрезок соединяющий точки  $x_{q_n}$  и  $x_{q_{n+1}}$ .  $V_n(x_0)$ - называется  $n$ -ой *ренормализационной окрестностью* точки  $x_0$ . Определим *отображение Пуанкаре*  $\pi_n: V_n(x_0) \rightarrow V_n(x_0)$ :

$$\pi_n(x) = \begin{cases} T_f^{q_{n+1}} x, & \text{если } x \in [x_{q_n}, x_0), \\ T_f^{q_n} x, & \text{если } x \in [x_0, x_{q_{n+1}}]. \end{cases}$$

По общей схеме метода ренормализационной группы (РГ) главным является изучение поведение отображения Пуанкаре  $\pi_n(x)$  при  $n \rightarrow \infty$ . Поскольку длина отрезка  $V_n(x_0)$  экспоненциально стремится к нулю и  $q_n \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ , поведение  $\pi_n(x_0)$  удобно изучить в новых перенормированных координатах. Введем перенормированные координаты  $z$  на  $V_n(x_0)$ :  $x = x_0 + z(x_0 - x_{q_n})$ . Отсюда видно, что в новых координатах  $x_0 \rightarrow 0$ ,  $x_{q_n} \rightarrow -1$ . Обозначим через  $a_n$  и  $(-b_n)$  перенормированные координаты точек  $x_{q_{n+1}}$  и  $x_{q_n+q_{n+1}}$  соответственно. В новых координатах отображению  $\pi_n(x)$  соответствует следующая пара  $(f_n, g_n)$ :

$$f_n(z) = \frac{f^{q_{n+1}}(x_0 + z(x_0 - x_{q_n})) - x_0 - p_{n+1}}{x_0 - x_{q_n}}, \quad z \in [-1, 0],$$

$$g_n(z) = \frac{f^{q_n}(x_0 + z(x_0 - x_{q_n})) - x_0 - p_n}{x_0 - x_{q_n}}, \quad z \in [0, a_n].$$

Хорошо известно, что преобразование ренормгруппы в множестве гомеоморфизмов окружности с изломами имеет периодические траектории. Обозначим через  $X$  множество пар строго возрастающих функций  $(f(x), x \in [-1, 0]; g(x), x \in [0, \alpha])$ , удовлетворяющих следующим условиям:

- a)  $f(0) = \alpha$ ,  $g(0) = -1$ ,  $f(-1) = g(\alpha)$ ,  $f(-1) < 0$ ,  $f^{(2)}(-1) \geq 0$ ;
- b)  $f(x) \in C^{2+\varepsilon}([-1, 0])$ ,  $g(x) \in C^{2+\varepsilon}([0, \alpha])$ , при некотором  $\varepsilon > 0$ .

Определим преобразование ренормализационной группы  $R_b : X \rightarrow X$ :

$$R_b(f(x), x \in [-1, 0]; g(x), x \in [0, \alpha]) = (\tilde{f}(x), x \in [-1, 0]; \tilde{g}(x), x \in [0, \alpha']),$$

где  $\tilde{f}(x) = -\alpha^{-1}f(g(-\alpha x))$ ,  $\tilde{g}(x) = -\alpha^{-1}f(-\alpha x)$ ,  $\alpha' = -\alpha^{-1}f(-1)$ .

Положим  $c = f'(-0) \cdot (g'(+0))^{-1}$ , т.е.  $c$  - величина излома пары  $(f, g)$  в точке  $x = 0$ . В работе Вула и Ханина доказано, что при фиксированном  $c$  и числе вращения равным “золотому сечению”, преобразование  $R_b$  имеет единственную периодическую орбиту  $\{f_i(x), g_i(x), i = 1, 2\}$  периода два. Функции  $f_i(x, c_i)$ ,  $g_i(x, c_i)$ ,  $i = 1, 2$  имеют вид:

$$f_i(x) = \frac{(\alpha_i + c_i x)\beta_i}{\beta_i + (\beta_i + \alpha_i - c_i)x}, \quad g_i(x) = \frac{\alpha_i \beta_i (x - c_i)}{\alpha_i \beta_i c_i + (c_i - \alpha_i - c_i \beta_i)x},$$

где  $\alpha_1 = \frac{c_1 - \beta_0^2}{1 + \beta_0}$ ,  $\alpha_2 = \frac{c_2 - \beta_0^2}{1 + \beta_0}$ ,  $c_1 = c$ ,  $c_2 = c^{-1}$ ,  $\beta_1 = \beta_2 = \beta_0$ , а число  $\beta_0$  - единст-венный корень

уравнения  $\beta^4 - \beta^3 - \beta^2 \frac{(c+1)^2}{c} - \beta + 1 = 0$  принадлежащий интервалу  $(0, 1)$ . При помощи пар

$(f_i, g_i)$ ,  $i = 1, 2$  определим гомеоморфизмы окружности  $T_i : T_i(x) = l_i(f_i(l_i^{-1}(x)))$ , если  $0 \leq x < (1 + \alpha_i)^{-1}$  и  $T_i(x) = l_i(g_i(l_i^{-1}(x)))$ , если  $(1 + \alpha_i)^{-1} \leq x < 1$ . Числа вращения этих гомеоморфизмов равны “золотому сечению”. Мы будем изучать гомеоморфизм  $T_1$ . Гомеоморфизм  $T_2$  изучается аналогичным образом. Гомеоморфизм  $T_1$  переобозначим через  $T_b$ . Обозначим через  $B(T_b)$  множество всех  $C^1$ -сопряженных с  $T_b$  гомеоморфизмов окружности.

**Теорема 1.** Для всех отображений  $T \in E(T_b)$  существует единственная непрерывная (в тихоновской топологии) функция  $U : I_+ \rightarrow R^1$  обладающая следующими свойствами [3]:

1. Для любых  $\vec{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k, \varepsilon_{k+1}, \dots, \varepsilon_n, \dots)$  и

$\vec{b} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k, b_{k+1}, \dots, b_n, \dots)$  из пространства  $I_+$  верна оценка

$$|U(\vec{\varepsilon}) - U(\vec{b})| \leq K_1 \alpha^k$$

где  $\alpha = \alpha(T_b) \in (0, 1)$  и константа  $K_1 > 0$  не зависит от  $\vec{\varepsilon}, \vec{b}$  и  $k$ .

2. Пусть  $1 \leq r < n$ ,  $\Delta(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \xi_n(x_0, T)$ ,  $\Delta(a_1, a_2, \dots, a_r) \in \xi_r(x_0, T)$ ,  
 $\Delta(a_1, a_2, \dots, a_n) \subset \Delta(a_1, a_2, \dots, a_r)$ .

Тогда

$$l(\Delta(a_1, a_2, \dots, a_n)) = l(\Delta(a_1, a_2, \dots, a_r)) \times \\ \times (1 + \psi_1(a_1, a_2, \dots, a_n; T)) \times \\ \times \exp\left\{\sum_{s=r+1}^n U(a_s, a_{s-1}, \dots, a_r, \dots, a_1, \vec{\gamma}(a_1))\right\}$$

где  $|\psi_1(a_1, a_2, \dots, a_n; T)| \leq \text{const } \alpha^r$ .

Пусть  $n \geq 1$  и  $V_n(x_0)$  -  $n$ -ая ренормализационная окрестность точки  $x_0 \in S^1$ .

Определим

$$E_n^{(1)}(x) = \min\{i \geq 1 : T_f^i x \in V_n(x_0)\},$$

$E_n^{(k)}(x) = \min\{i \geq E_n^{(k-1)}(x) : T_f^i x \in V_n(x_0)\}$ ,  $k \geq 1$ . Рассмотрим случайные величины  $D_n^{(k)}(x) = E_n^{(k)}(x) - E_n^{(k-1)}(x)$ . Отметим, что  $D_n^{(1)}(x) = E_n^{(1)}(x)$  принимает значения от 1 до  $q_{n+1}$ , а  $D_n^{(k)}(x)$  принимает всего два значения:  $q_n$  и  $q_{n+1}$ . Введем нормированные случайные величины:  $\overline{D}_n^{(k)}(x) = q_{n+1}^{-1} D_n^{(k)}(x)$ . Задача состоит в изучении сходимости функции распределений для случайных величин  $\overline{D}_n^{(k)}(x)$  при  $n \rightarrow \infty$ , а также их предельные распределения.

Обозначим  $F_n^{(k)}(t) = \mu_f(\{x \in S^1 : \overline{D}_n^{(k)}(x) \leq t\})$ ,  $t \in R^1$ . Отметим, что функции  $F_n^{(k)}(t)$  совпадают с соответствующими функциями распределения для линейного поворота  $T_\rho$ . В работе де Фария и Коэло доказано, что в зависимости от числа вращения  $\rho$  предельное распределение сходящейся подпоследовательности  $\{F_{n_i}^{(1)}(t)\}$  является или равномерным, или непрерывным и кусочно-линейным на отрезке  $[0, 1]$ . А в случае  $k > 1$  предельное распределение для сходящейся подпоследовательности  $\{F_{n_i}^{(k)}(t)\}$  является или распределением случайной величины  $X \equiv 1$ , или ступенчатым распределением с двумя точками разрыва.

Обозначим через  $\Phi_n^{(k)}(t)$  функцию распределения  $\overline{D}_n^{(k)}(x)$  относительно меры Лебега  $l$ :  $\Phi_n^{(k)}(t) = l(\{x \in S^1 : \overline{D}_n^{(k)}(x) \leq t\})$ ,  $t \in R^1$ .

Если диффеоморфизм  $T_f$  гладко сопряжен с линейным поворотом  $T_\rho$ , то для последовательности  $\{\Phi_n^{(k)}(t)\}$  все приведенные выше утверждения, относящиеся к  $\{F_n^{(k)}(t)\}$ , также справедливы. С другой стороны, для гомеоморфизмов окружности с одной точкой излома (или с несколькими точками излома лежащими на одной орбите и с нетривиальным произведением величин изломов) и с иррациональным числом вращения  $\rho_f$  сопрягающий гомеоморфизм  $T_\varphi$  является сингулярным.

Возьмем произвольный гомеоморфизм окружности  $T \in B(T_0)$ . Напомним, что  $E_n^{(k)}(x)$  означает времени  $k$ -го попадания точки  $x \in S^1$  в  $n$ -ый ренормализационный отрезок  $V_n$ . Обозначим  $D_n^{(k)}(x) = E_n^{(k)}(x) - E_n^{(k-1)}(x)$ ,  $x \in S^1$ . Случайная величина  $D_n^{(k)}(x)$  принимает всего два значения:  $q_n$  или  $q_{n+1}$ . Нормируем её разделив на  $q_{n+1}^{-1}$ :

$$\overline{D}_n^{(k)}(x) = q_{n+1}^{-1} D_n^{(k)}(x).$$

Обозначим через  $\Phi_n^{(k)}(x)$  функцию распределения случайной величины  $\overline{D}_n^{(k)}(x)$  относительно меры Лебега  $l$ .

**Теорема 2.** Пусть  $k > 1$ . Тогда функция распределения случайной величины  $\overline{D}_n^{(k)}(x)$  относительно меры Лебега задается следующим образом [2]:

$$\Phi_n^{(k)}(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t < q_n q_{n+1}^{-1}; \\ \sum_{i=0}^{q_n-1} l(T^i(\Delta_0^{(n+1)} \cap \pi_n^{-k} \Delta_0^{(n+1)})) + \\ + \sum_{j=0}^{q_{n+1}-1} l(T^j(\Delta_0^{(n)} \cap \pi_n^{-k} \Delta_0^{(n+1)})), & \text{если } q_n q_{n+1}^{-1} \leq t < 1; \\ 1, & \text{если } t \geq 1. \end{cases}$$

В этом работе сформулируем и докажем предельную теорему для последовательности функций распределения времени  $k$ -го попадания  $\Phi_n^{(k)}(t)$ ,  $k > 1$ .

**Теорема 3.** Пусть гомеоморфизм  $T \in B(T_b)$ ,  $k > 1$  и  $\Phi_n^{(k)}(t)$ -функция распределения случайной величины  $\overline{D}_n^{(k)}(x)$ . Тогда

1) для всех  $t \in R^1$  существует конечный предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n^{(k)}(t) = \Phi^{(k)}(t)$ ,

причем  $\Phi^{(k)}(t) = 0$ , если  $t \leq 0$ , и  $\Phi^{(k)}(t) = 1$ , если  $t \geq 1$ ;

2) функция  $\Phi^{(k)}(t)$  является ступенчатой функцией на  $[0, 1]$  с двумя точками разрыва.

**Доказательство теоремы 3.** Предположим, что  $k > 1$ . Функция распределения случайной величины  $\overline{D}_n^{(k)}(x)$  - ступенчатая функция, принимающая только три значения. Поэтому докажем существование предела  $\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{D}_n^{(k)}(t)$  в три этапа.

1)  $D_n^{(k)}(t) = 0$ , если  $t < q_n q_{n+1}^{-1}$ . Учитывая

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_n}{q_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \rho$$

получим, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n^{(k)}(t) = 0$ , если  $t \leq \rho$ .

2) Имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n^{(k)}(t) = 1, \text{ если } t \geq 1.$$

3) Теперь докажем существование предела суммы

$$\sum_{i=0}^{q_n-1} l(T^i(\Delta_0^{(n+1)} \cap \pi_n^{-k}(\Delta_0^{(n+1)}))) + \sum_{j=0}^{q_{n+1}-1} l(T^j(\Delta_0^{(n)} \cap \pi_n^{-k}(\Delta_0^{(n+1)}))) \quad (1)$$

Сначала мы должны выяснить структуру множества  $\pi_n^{-1}(\Delta_0^{(n+1)}) \cap V_n$ .

Напишем явный вид функции  $\pi_n^{-1}(x)$ :

$$\pi_n^{-1}(x) = \begin{cases} T^{-q_n} x, & \text{если } x \in [x_{q_n}, x_{q_{n+2}}), \\ T^{-q_{n+1}} x, & \text{если } x \in [x_{q_{n+2}}, x_{q_{n+1}}) \end{cases}$$

Функция  $\pi^{-1}(x)$ , как видно из последней формулы, имеет разрыв только в точке  $x = x_{q_{n+2}}$ .

Следовательно, для любого интервала  $I \subset V_n$  область  $\pi^{-1}(I)$  представляет собой интервал, если  $x_{q_{n+2}} \in I$ , или сумму двух интервалов, если  $I$  не содержит точку  $x_{q_{n+2}}$ , или сумму двух интервалов, если  $x_{q_n} \in I$ . Отсюда вытекает, что

$$\Delta_0^{(n+1)} \cap \pi_n^{-k}(\Delta_0^{(n+1)}) = \bigcup_{m=1}^{l_1(k)} \omega'_m, \quad \Delta_0^{(n)} \cap \pi_n^{-k}(\Delta_0^{(n+1)}) = \bigcup_{p=1}^{l_2(k)} \omega''_p$$

где  $\omega'_m$  и  $\omega''_p$  - такие интервалы, что  $\omega'_m \subset \Delta_0^{(n+1)}$ ,  $1 \leq m \leq l_1(k)$ ;  $\omega''_p \subset \Delta_0^{(n)}$ ,  $1 \leq p \leq l_2(k)$ .

Отметим, что  $l_1(k) + l_2(k) \leq 2^k$ . Сумму (1) обозначим  $S_n$  и напишем в следующем виде:

$$S_n = \sum_{m=1}^{l_1(k)} \sum_{i=0}^{q_n-1} l(T^i(\omega'_m)) + \sum_{p=1}^{l_2(k)} \sum_{j=0}^{q_{n+1}-1} l(T^j(\omega''_p)).$$

В силу утверждения теоремы 1. [3] суммы  $\sum_{i=0}^{q_n-1} l(T^i(\omega'_m))$  и  $\sum_{j=0}^{q_{n+1}-1} l(T^j(\omega''_p))$  сходятся при  $n \rightarrow \infty$ , отсюда следует, что существует конечный предел суммы  $S_n$  при  $S_n \rightarrow \infty$ . Теорема 3 доказана.

### Литература

1. Корнфельд И.П., Синай Я.Г., Фомин С.В. Эргодическая теория. –М.: Наука, 1980.
2. Вул Е.Б., Ханин К.М. Гомеоморфизмы окружности с особенностями типа излома// Успехи математических наук. -1990. т.45. вып.3(273) - С.189-190.
3. Джалилов А.А., Ханин К.М. Об инвариантной мере для гомеоморфизмов окружности с одной точкой излома// Ж. Функционал анализ и его приложения.-1998.-№32(3).-С.11-21.
4. Coelho Z., de Faria E. Limit laws of entrance times for homeomorphisms of the circle// Israel J.Math.-1996.- №93.-P.93-112.

УДК: 517.956.6

### КРАЕВАЯ ЗАДАЧА НОВОГО ТИПА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

**Б.И.Исломов, С.С.Вафоев**

*Национальный Университет Узбекистана  
islomovbozor@yandex.ru*

**Аннотация.** Данная работа посвящена исследованию задачи нового типа с условиями Трикоми Бицадзе-Самарского на характеристиках одного семейства. Доказана однозначная разрешимость поставленной задачи, для уравнения параболо-гиперболического типа.

**Ключевые слова:** уравнения первого рода, нелокальные условия, условия Бицадзе-Самарского, регулярное решение, интегральное уравнение Вольтерра.

### Parabolik-giperbolik tenglama uchun yangi tipdagi chegaraviy masala

**Annotatsiya.** Ishda parabolik-giperbolik tipdagi tenglama uchun Trikomi va Bisadze-Samarskiy shartlari qatnashgan masalasini mavjudligi va yagonaligi isbotlangan.

**Kalit so'zlar:** chegaraviy masala, birinchi tur tenglama, Trikomi va Bisadze-Samarskiy shartlari regular yechim, Volter tipidagi tenglama.

### A new type boundary value problem for a parabolic-hyperbolic type equation

**Abstract.** In this paper unique solvability for the new boundary value problem for a parabolic-hyperbolic equation type are proved.

**Keywords:** Equations of the first kind, nonlocal conditions, Bitsadze-Samarsky conditions, regular solution, Volterra integral equation.

### 1. Постановка задачи TBS . Рассмотрим уравнение

$$0 = Lu \equiv \begin{cases} u_{xx} - u_y, & (x, y) \in D_1, \\ u_{xx} - u_{yy}, & (x, y) \in D_2 \cup D_3, \end{cases} \quad (1)$$

где  $D_1$  — область, ограниченная отрезками  $AB$ ,  $BB_0$ ,  $B_0A_0$ ,  $A_0A$ , прямых  $y=0$ ,  $x=1$ ,  $y=h$ ,  $x=0$  соответственно;  $D_2$  — характеристический треугольник, ограниченный отрезком  $AB$  оси  $Ox$  и двумя характеристиками  $AC_1: x+y=0$ ,  $BC_2: x-y=1$  уравнения (1), выходящими из точек  $A(0,0)$  и  $B(1,0)$ , пересекающимися в точке  $C_1(0,5;-0,5)$ ;  $D_3$  — характеристический треугольник, ограниченный отрезком  $AA_0$  оси  $Oy$  и двумя характеристиками  $AC_2: x+y=0$ ,  $A_0C_2: y-x=1$  уравнения (1), выходящими из точек  $A(0,0)$  и  $A_0(0,h)$ , пересекающимися в точке  $C_2(-0,5;0,5)$ .

Введем обозначения:  $J \equiv AB = \{(x, y) : 0 < x < 1, y = 0\}$ ,  $I \equiv AA_0 = \{(x, y) : x = 0, 0 < y < h\}$ ,  
 $D_1 = D \cap \{x > 0, y > 0\}$ ,  $D_2 = D \cap \{x > 0, y < 0\}$ ,  $D_3 = D \cap \{x < 0, y > 0\}$ ,  $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup J \cup I$ ,  
 $J_1 = \{(x, y) : 0 < x < c, y = 0\}$ ,  $J_2 = \{(x, y) : c < x < 1, y = 0\}$ ,  $c \in J$ . Через  $P$  и  $Q$   
 обозначим, соответственно, точки пересечения характеристики  $AC_1$  и  $BC_1$  с характеристикой,  
 исходящей из точки  $E(c, 0) \in J$ ,

$$\theta(x) = (x/2; -x/2), \theta^*(x) = ((x+c)/2; (c-x)/2), \quad (2)$$

$\theta(x)$  и  $\theta^*(x)$  - точки пересечения характеристики  $AC_1$  и  $EQ$  с характеристикой, выходящей из  
 точки  $M(x, 0)$ ,  $(x, 0) \in J_2$  соответственно.

Настоящая работа посвящена исследованию задачи с условиями Трикоми [1, с. 29] на  
 характеристиках  $AP$  и  $AC_2$ , а также с условиями Бицадзе-Самарского [2] на характеристиках  $AC_1$   
 и  $EQ$  одного семейства.

**Задача TBS.** Найти в области  $D$  функцию  $u(x, y)$ , обладающую свойствами:

$$1) u(x, y) \in C(\bar{D}); \quad 2) u(x, y) \in C_{x,y}^{2,1}(D_1 \cup AB \cup A_0B_0) \cap C_{x,y}^{2,2}(D_2 \setminus EP) \cap C_{x,y}^{2,2}(D_3),$$

удовлетворяет уравнению (1) в областях  $D_1, D_2 \setminus EP$  и  $D_3$ ; 3)  $u_y \in C(D_1 \cup J_1 \cup J_2) \cap$   
 $\cap C(D_2 \cup J_1 \cup J_2)$  и на интервалах  $J_j$  ( $j = 1, 2$ ) выполняется условие склеивания

$$\lim_{y \rightarrow -0} u_y(x, y) = \lim_{y \rightarrow +0} u_y(x, y), (x, 0) \in J_1 \cup J_2, \quad (3)$$

4)  $u_x \in C(D_1 \cup I) \cap C(D_3 \cup I)$  и на интервалах  $I$  выполняется условие склеивания

$$\lim_{x \rightarrow -0} u_x(x, y) = \lim_{x \rightarrow +0} u_x(x, y), (0, y) \in I, \quad (4)$$

5)  $u(x, y)$  удовлетворяет краевым условиям

$$u|_{x=1} = \varphi_1(y), 0 \leq y \leq h, \quad (5)$$

$$u|_{AC_2} = \varphi_2(y), 0 \leq y \leq 1/2, \quad u|_{AP} = \varphi_3(x), 0 \leq x \leq c/2, \quad (6)$$

$$u[\theta(x)] = \mu u[\theta^*(x)] + \delta(x), (x, 0) \in \bar{J}_2, \quad (7)$$

где  $\varphi_j(t)$  ( $j = 1, 3$ ),  $\delta(x)$  - заданные функции, причём

$$\varphi_2(0) = \varphi_3(0) = 0, \mu \in (-\infty; +\infty) \setminus \{1\}, \varphi_3\left(\frac{c}{2}\right) = \delta(c), \varphi_1(y) \in C[0, h] \cap C^1(0, h), \quad (8)$$

$$\varphi_2(y) \in C\left[0, \frac{1}{2}\right] \cap C^2\left(0, \frac{1}{2}\right), \delta(x) \in C^1(\bar{J}_2) \cap C^3(J_2), \varphi_3(x) \in C^1\left[0, \frac{c}{2}\right] \cap C^3\left(0, \frac{c}{2}\right). \quad (9)$$

Заметим, что

- условие (6) и (7) является условием Трикоми на характеристиках  $AC_2$  и  $AP$ .
- условие (8) является условием Бицадзе-Самарского заданное на параллельных характеристиках  $AC_1$  и  $EQ$ .

Насколько нам известно, что аналоги задачи Трикоми для уравнения (1) изучены в работах [3]-[5]. Задача TBS для уравнения (1) ранее не были исследованы.

**2. Основные функциональные соотношения.** При исследовании задачи TBS важную роль играют функциональные соотношения между  $v_1(x)(v_2(y))$  и  $\tau_1(x)(\tau_2(y))$  из параболической и гиперболической части области  $D$ , где

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad (x, 0) \in \bar{J}, \quad \lim_{y \rightarrow 0} u_y(x, y) = \nu_1(x), \quad (x, 0) \in J, \quad (10)$$

$$u(0, y) = \tau_2(y), \quad (0, y) \in \bar{I}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} u_x(x, y) = \nu_2(y), \quad (0, y) \in I. \quad (11)$$

Как нам известно [6], решение задачи Коши с начальными условиями(10) для уравнения (1) в области  $D_2$  имеет вид:

$$u(x, y) = \frac{1}{2} [\tau_1(x+y) + \tau_1(x-y)] + \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} \nu_1(t) dt. \quad (12)$$

В силу (7) из первой условия (12), получаем функциональное соотношение между  $\tau_1(x)$  и  $\nu_1(x)$ , принесенное из области  $D_1$  на  $J_1$ :

$$\nu_1(x) - \tau_1'(x) = -\varphi_3'(x/2), \quad (x, 0) \in J_1. \quad (13)$$

В силу (2) из (12) получим

$$u\left[\theta(x)\right] = u\left[\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}\right] = \frac{1}{2} [\tau_1(0) + \tau_1(x)] + \frac{1}{2} \int_x^0 \nu_1(t) dt, \quad (14)$$

$$u\left[\theta^*(x)\right] = u\left[\frac{x+c}{2}, \frac{c-x}{2}\right] = \frac{1}{2} [\tau_1(c) + \tau_1(x)] + \frac{1}{2} \int_x^c \nu_1(t) dt. \quad (15)$$

Подставляя (14), (15) в (7), а затем, дифференцируя по  $x$  с учетом  $\mu \neq 1$  получим функциональное соотношение между  $\tau_1(x)$  и  $\nu_1(x)$ , принесенное из области  $D_2$  на  $J_2$ :

$$\nu_1(x) - \tau_1'(x) = -2\delta'(x)/(1-\mu), \quad (x, 0) \in J_2. \quad (16)$$

Аналогичным образом, используя решение задачи Коши [6], [7] с начальными данными (11) для уравнения (1) в области  $D_3$  с учетом второй условия(6), получаем функциональное соотношение между  $\tau_2(y)$  и  $\nu_2(y)$ , принесенное из области  $D_3$  на  $I$ :

$$\nu_2(y) - \tau_2'(y) = -\varphi_2'(y/2), \quad (0, y) \in I. \quad (17)$$

Согласно условиям задачи TBS, переходя к пределу при  $y \rightarrow +0$  в уравнении (1), получим функциональное соотношение между  $\tau_1(x)$  и  $\nu_1(x)$ , принесенное из области  $D_1$  на  $J$ :

$$\tau_1''(x) = \nu_1(x), \quad (x, 0) \in J. \quad (18)$$

Решение первой краевой задачи с условиями  $u(x, +0) = \tau_1(x)$ ,  $(x, 0) \in \bar{J}$ ,  $u(+0, y) = \tau_2(y)$ ,  $(0, y) \in \bar{I}$  (5) и для уравнения (1) в области  $D_1$  имеет вид[8], [9]:

$$u(x, y) = \int_0^y G_\xi(x, y; 0, \eta) \tau_2(\eta) d\eta + \int_0^y G_\xi(x, y; 1, \eta) \varphi_1(\eta) d\eta + \int_0^1 G(x, y; \xi, 0) \tau_1(\xi) d\xi, \quad (19)$$

где  $G(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ e^{-\frac{(x-\xi+2n)^2}{4(y-\eta)}} - e^{-\frac{(x+\xi+2n)^2}{4(y-\eta)}} \right\}$  - функция Грина первой краевой

задачи для уравнения  $u_{xx} - u_y = 0$ .

Дифференцируя (19) по  $x$ , получим

$$u_x(x, y) = \int_0^y G_{\xi x}(x, y; 0, \eta) \tau_2(\eta) d\eta + \int_0^y G_{\xi x}(x, y; 1, \eta) \varphi_1(\eta) d\eta + \int_0^1 G_x(x, y; \xi, 0) \tau_1(\xi) d\xi, \quad (20)$$



$$\text{здесь } G_{\xi x}(x, y; 0, \eta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \left[ \frac{1}{y-\eta} - \frac{(x+2n)^2}{2(y-\eta)^2} \right] e^{-\frac{(x+2n)^2}{4(y-\eta)}} =$$

$$= \frac{d}{d\eta} \left[ \frac{1}{\sqrt{\pi(y-\eta)}} e^{-\frac{x^2}{4(y-\eta)}} + \frac{1}{\sqrt{\pi(y-\eta)}} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} e^{-\frac{(x+2n)^2}{4(y-\eta)}} \right], \quad (21)$$

$$G_{\xi x}(x, y; 1, \eta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \left\{ \left( \frac{1}{2(y-\eta)} - \frac{(x-1+2n)^2}{4(y-\eta)^2} \right) e^{-\frac{(x-1+2n)^2}{4(y-\eta)}} + \right.$$

$$\left. + \left( \frac{1}{2(y-\eta)} - \frac{(x+1+2n)^2}{4(y-\eta)^2} \right) e^{-\frac{(x+1+2n)^2}{4(y-\eta)}} \right\} = \frac{d}{d\eta} \left[ \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}} e^{-\frac{(x-1)^2}{4(y-\eta)}} + \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} e^{-\frac{(x-1+2n)^2}{4(y-\eta)}} \right] +$$

$$+ \frac{d}{d\eta} \left[ \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}} e^{-\frac{(x+1)^2}{4(y-\eta)}} + \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} e^{-\frac{(x+1+2n)^2}{4(y-\eta)}} \right], \quad (22)$$

$$G_x(x, y; \xi, 0) = \frac{1}{2\sqrt{\pi y}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x+2n)^2 + \xi^2}{4y}} \left[ \frac{\xi}{y} ch 2\xi(x+2n) - \frac{x+n}{y} sh 2\xi(x+2n) \right]. \quad (23)$$

Используя формулу (20) интегрирования по частям с учетом (21), (22), а затем, принимая во внимание (8) и  $\lim_{z \rightarrow 0} z^{-\sigma} e^{-1/z} = 0$ , ( $\sigma > 0$ ), имеем

$$u_x(x, y) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^y \frac{\tau'_2(\eta)}{\sqrt{y-\eta}} e^{-\frac{x^2}{4(y-\eta)}} d\eta - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^y \frac{\tau'_2(\eta)}{\sqrt{y-\eta}} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} e^{-\frac{(x+2n)^2}{4(y-\eta)}} d\eta +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^y \frac{\varphi'_1(\eta)}{\sqrt{y-\eta}} e^{-\frac{(x-1)^2}{4(y-\eta)}} d\eta + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^y \frac{\varphi'_1(\eta)}{\sqrt{y-\eta}} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} e^{-\frac{(x-1+2n)^2}{4(y-\eta)}} d\eta +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^y \frac{\varphi'_1(\eta)}{\sqrt{y-\eta}} e^{-\frac{(x+1)^2}{4(y-\eta)}} d\eta + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^y \frac{\varphi'_1(\eta)}{\sqrt{y-\eta}} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} e^{-\frac{(x+1+2n)^2}{4(y-\eta)}} d\eta +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{\pi y}} \int_0^1 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x+2n)^2 + \xi^2}{4y}} \left[ \frac{\xi}{y} ch 2\xi(x+2n) - \frac{x+n}{y} sh 2\xi(x+2n) \right] \tau_1(\xi) d\xi. \quad (24)$$

Согласно условиям задачи TBS переходя к пределу при  $x \rightarrow +0$  в (24) с учетом (4), (11) и тождеств:

$$\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} e^{-\frac{(2n-1)^2}{4(y-\eta)}} = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} e^{-\frac{(2n+1)^2}{4(y-\eta)}} = e^{-\frac{1}{4(y-\eta)}} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\frac{(2n+1)^2}{4(y-\eta)}}, \quad \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} e^{-\frac{(2n)^2}{4(y-\eta)}} = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\frac{n^2}{y-\eta}},$$

получим функциональное соотношение между  $\tau_2(y)$  и  $v_2(y)$ , принесенное из области  $D_1$  на  $I$ :

$$v_2(y) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^y \frac{\tau'_2(\eta)}{\sqrt{y-\eta}} d\eta - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^y \frac{K_1(y, \eta)}{\sqrt{y-\eta}} \tau'_2(\eta) d\eta + F_1(y, \varphi'_1, \tau_1), \quad (25)$$

где  $K_1(y, \eta) = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\frac{n^2}{y-\eta}}$ ,  $F_1(y, \varphi'_1, \tau_1) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y \frac{\varphi'_1(\eta)}{\sqrt{y-\eta}} e^{-\frac{1}{4(y-\eta)}} d\eta + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y \frac{\varphi'_1(\eta)}{\sqrt{y-\eta}} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\frac{(1+2n)^2}{4(y-\eta)}} d\eta +$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{\pi y}} \int_0^1 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{4n^2 + t^2}{4y}} \left[ \frac{t}{y} ch 4tn - \frac{n}{y} sh 4tn \right] \tau_1(t) dt.$$

### 3. Исследование задачи *TBS*. Доказана следующая теорема.

**Теорема.** Если выполнены условия (8) и (9), то в области  $D$  существует единственное регулярное решение задачи *TBS*.

**Доказательство теоремы.** Исключив  $\nu_1(x)$  из соотношений (13), (16), (18) с помощью условия склеивания (3) и условиям (5), (7),  $u|_{x=0} = \tau_2(y)$  с учетом (8), (10) получаем для определения  $\tau_1(x)$  задачу

$$\tau_1''(x) - \tau_1'(x) = -\varphi_3'(x/2), \quad (x, 0) \in J_1, \quad \tau_1(0) \equiv \tau_2(0) = \varphi_3(0), \quad \tau_1(c) = 0 \quad (26)$$

и

$$\tau_1''(x) - \tau_1'(x) = -2\delta'(x)/(1-\mu), \quad (x, 0) \in J_2, \quad \tau_1(c) = 0, \quad \tau_1(1) = \varphi_1(0). \quad (27)$$

Решая задачу (26) и (27) соответственно представим в виде

$$\tau_1(x) = c_0(e^x - 1) - \int_0^x e^{x-t} \varphi_3'\left(\frac{t}{2}\right) dt + 2\varphi_3\left(\frac{x}{2}\right) - \varphi_3(0), \quad (x, 0) \in \bar{J}_1 \quad (28)$$

и

$$\tau_1(x) = \tilde{c}_0(e^x - e^c) - \frac{2}{1-\mu} \left[ \int_c^x e^{x-t} \delta'(t) dt - \delta(x) + \delta(c) \right], \quad (x, 0) \in \bar{J}_2, \quad (29)$$

$$\text{где } c_0 = \frac{\int_0^c e^{c-t} \varphi_3'\left(\frac{t}{2}\right) dt - 2\varphi_3\left(\frac{c}{2}\right) + \varphi_3(0)}{e^c - 1}, \quad \tilde{c}_0 = \frac{\frac{2}{1-\mu} \left[ \int_c^1 e^{1-t} \delta'(t) dt - \delta(1) + \delta(c) \right] + \varphi_1(0)}{e - e^c}.$$

В силу (8) и (19) из (28) и (29) заключаем, что

$$\tau_1(x) \in C^1(\bar{J}) \cap C^2(J). \quad (30)$$

Поставляя (28) и (29) в (13) и (16) соответственно с учетом (10), (30) определим функцию  $\nu_1(x)$  из класса  $\nu_1(x) \in C(\bar{J}_1) \cap C^1(J_1)$  и  $\nu_1(x) \in C(\bar{J}_2) \cap C^1(J_2)$ .

Исключив  $\nu_2(y)$  из соотношений (17) и (25) с учетом (4) получим интегральное уравнение относительно  $\tau_2'(y)$ :

$$\tau_2'(y) - \int_0^y K_2(y, t) \tau_2'(t) dt = \int_0^y K_3(y, t) \varphi_1'(t) dt + F_2(y, \tau_1), \quad (0, y) \in I, \quad (31)$$

где  $K_2(y, t)$ ,  $K_3(y, t)$  и  $F_2(y, \tau_1)$  — известные функции.

Принимая во внимание  $\lim_{z \rightarrow 0} z^{-\sigma} e^{-\frac{1}{z}} = 0$  для любых фиксированных  $\sigma > 0$  с учетом (8), (9), (30) заключаем, что

1) ядра  $K_2(y, t)$  непрерывно в  $\{(y, t): 0 \leq t < y \leq h\}$  и при  $y \rightarrow t$  допускает оценку

$$|K_2(y, t)| \leq \text{const}(y-t)^{-\frac{1}{2}}; \quad (32)$$

2) ядра  $K_3(y, t)$  непрерывно и ограничено в  $\{(y, t): 0 \leq t \leq y \leq h\}$ , т.е.

$$|K_3(y, t)| \leq \text{const}; \quad (33)$$

3) функция  $F_2(y, \tau_1)$  принадлежит классу

$$F_2(y, \tau_1) \in C[0, h] \cap C^2(0, h). \quad (34)$$

Таким образом, в силу (32), (33) и (34) уравнение (31) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода со слабой особенностью.

Согласно теории интегральных уравнений Вольтерра второго рода заключаем, что интегральное уравнение (31) однозначно разрешимо в классе  $C[0, h] \cap C^2(0, h)$  и его решение дается формулой

$$\tau_2'(y) = F_2(y, \tau_1) + \int_0^y K_3(y, t) \varphi_1'(t) dt + \int_0^y K_2^*(y, t) \left[ F_2(t, \tau_1) + \int_0^t K_3(t, z) \varphi_1'(z) dz \right] dt, \quad (0, y) \in \bar{I}, \quad (35)$$

где  $K_2^*(y, t)$  резольвента ядра  $K_2(y, t)$ .

В силу  $\tau_2(0) = \varphi_2(0) = \varphi_3(0) = 0$  из (35) находим функцию  $\tau_2(y)$  из класса  $C^1[0, h] \cap C^2(0, h)$ .

Поставляя (35) в (17) с учетом (4), (11), (35) определим функцию  $\nu_2(y)$  из класса  $\nu_2(y) \in C[0, h] \cap C^1(0, h)$ .

Таким образом, решение задачи *TBS* можно восстановить в области  $D_1$  как решение первой краевой задачи для уравнения (1) (см. (19)), а в областях  $D_j$  ( $j = \overline{2, 3}$ ) как решение задачи Коши для уравнения (1). Следовательно, задача *TBS* однозначно разрешима.

Теорема доказана.

### Литература

1. Трикоми Ф. О линейных уравнениях в частных производных второго порядка смешанного типа. – М.-Л.: Гос.тех.издат, 1947. – 192 с.
2. Бицадзе А.В. К теории нелокальных краевых задач. // «ДОК.АН СССР». 1984. Т.227. № 1. С.17.
3. Джураев Т. Д., Сопуев А., Мамажонов М. Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. – Т.: Фан, 1986. – 220 с.
4. Золина Л.А. О краевой задаче для модельного уравнения гипербола-параболического типа. // «ЖВМ и МФ». 1966. Т. 6. № 6. С. 991-1001.
5. Бжихатлов Х.Г., Нахушев А.М. Об одной краевой задаче для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа. // «Доклады АН СССР». 1968. Т. 183. № 2. С. 261-264.
6. Тихинов А.Н. Самарский А.А. Уравнений математической физики. – М.: Наука, 1977. – 736 с.
7. Эгамбердиев У. О некоторых краевых задачах для смешанного параболо - гиперболического уравнения с двумя линиями изменения типа. // В кн.: «Краевые задачи механики сплошных сред». – Т.: Фан. 1982. – С. 117-128.
8. Джураев Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типа. – Т.: Издательство. «ФАН», 1979. – 240 с.
9. Полжий Г. Н. Уравнений математической физики. – М.: Высшая школа, 1964. – 560 с.

УДК:512.81

## ПОЛНЫЕ ДВУМЕРНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ В ${}^2R_5$

Б.М.Мамадалиев

Ферганский государственный университет  
mamadaliyev\_botirjon@mail.ru

**Аннотация.** В рассматриваемом пространстве  ${}^2R_5$  любая двумерная поверхность имеет касательную плоскостей, геометрия которых бывает трёх типов. Определено условие, когда геометрия на касательной двумерной поверхности бывает одного типа.

**Ключевые слова:** аффинное пятимерное пространство, норма вектора, евклидова, Минковского, галилеева геометрия, двумерная поверхность, полная двумерная поверхность.

### ${}^2R_5$ da ikki o'lvovli to'la sirtlar

**Annotatsiya.** Qaralayotgan  ${}^2R_5$  fazodagi ikki o'lvovli sirtlarning urinma tekisligida uch xil geometriya mavjud bo'ladi. Maqolada ikki o'lvovli to'la sirtlarning urinma tekisligidagi geometriya faqat bir xil bo'lishi keltirilgan.

**Kalit so'zlar:** besh o'lvovli affin fazo, vektor normasi, Yevklid, Minkovski, Galiley geometriyalari, ikki o'lvovli sirt, ikki o'lvovli to'la sirt.

Full two – dimensional surfaces in  ${}^2R_5$ 

**Abstract.** In the space  ${}^2R_5$  under consideration, any two-dimensional surface has tangent planes, the geometry of which is of three types. The condition is determined when the geometry on a tangent two-dimensional surface is of the same type.

**Keywords:** Affine five – dimensional space, vector norm, Euclidean, Minkowski, Galilean geometry, two – dimensional surface, full two – dimensional surface.

Пятимерное псевдоевклидово пространство индекса два  ${}^2R_5$  - это аффинное пятимерное пространство, где скалярное произведение векторов  $\vec{X}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$  и  $\vec{Y}(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$  определяется формулой  $(\vec{X} \cdot \vec{Y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - x_4y_4 - x_5y_5$ .

Норма вектора определяется как корень от скалярного квадрата вектора, а расстояние между точками равно норме вектора, соединяющего эти точки [1].

Следовательно, норма вектора  $|\vec{X}|$  вычисляется по формуле  $|\vec{X}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 - x_5^2}$ , которая принимает вещественное, мнимое значение и может быть равной нулю.

Пусть  $\pi$  - двумерная плоскость пространства  ${}^2R_5$ . В отличие от евклидова пространства  $R_5$ , геометрия на двумерных плоскостях  $\pi \subset {}^2R_5$  может быть трёх типов: евклидовой, Минковского, галилеевой.

Геометрия двумерных поверхностей в евклидовом пространстве  $R_5$  изучена в работе [2], где доказано существование двумерной поверхности, принадлежащей сфере пространства  $R_5$ .

Изучение свойств двумерных поверхностей в  ${}^2R_5$  существенно связано с геометрией на касательных плоскостях.

Поэтому задача определения геометрии на касательной плоскости двумерной поверхности представляет геометрический интерес.

Как отмечалось ранее, геометрия на двумерной плоскости может быть трёх типов. Поэтому задача существования двумерной поверхности в  ${}^2R_5$ , геометрия на касательной плоскости которой будет одного типа, является задачей этой статьи.

В общем случае, решение этой задачи очевидно и просто. Предположим, что мы рассматриваем подпространство  $M(x, y, z, 0, 0) \in {}^2R_5$ , являющееся трехмерным евклидовым пространством. Тогда любая регулярная двумерная поверхность имеет касательную плоскость, геометрия которой будет евклидовой.

Мы рассматриваем задачу для двумерных поверхностей, не принадлежащих одному четырехмерному подпространству пространства  ${}^2R_5$ .

**Определение.** Двумерную поверхность  $F_2 \in {}^2R_5$  назовем полной, если она пространственная, т. е. не принадлежит четырехмерному подпространству  $M_4 \subset {}^2R_5$ .

**Задача.** Существует ли полная двумерная поверхность пространства  ${}^2R_5$ , геометрия на касательной плоскости которой будет только одного типа?

Существование полных регулярных поверхностей в  ${}^2R_5$  если следует, от существования аналогичных поверхностей в евклидовом пространстве  $R_5$  доказанном в работе [2].

Пусть  $\vec{r}(u, v) = x_1(u, v)\vec{e}_1 + x_2(u, v)\vec{e}_2 + x_3(u, v)\vec{e}_3 + x_4(u, v)\vec{e}_4 + x_5(u, v)\vec{e}_5$  векторное уравнение двумерной поверхности  $F_2$  в  ${}^2R_5$ . Когда  $x_i(u, v)$  регулярно и векторы  $r_u, r_v$  не коллинеарны, поверхность  $F_2$  имеет двумерную касательную плоскость в каждой точке  $F_2$  [3]

. Причем векторы  $r_u$  и  $r_v$  составляют базис на этой касательной плоскости. Геометрия на этой касательной плоскости определяется базисными векторами, то есть векторами  $r_u$ ,  $r_v$ .

Когда векторы  $r_u$ ,  $r_v$  вещественные или оба мнимые, геометрия на плоскости евклидова. Если один из них вещественный, а второй мнимый, то это – касательная плоскость Минковского. В случае изотропии векторов  $r_u$ ,  $r_v$  – касательная плоскость – галилеева.

Аналитически, когда касательная плоскость евклидова, эти условия выражаются формулой

$$\begin{cases} \vec{r}_u^2 = x_{1u}^2 + x_{2u}^2 + x_{3u}^2 - x_{4u}^2 - x_{5u}^2 > 0 \\ \vec{r}_v^2 = x_{1v}^2 + x_{2v}^2 + x_{3v}^2 - x_{4v}^2 - x_{5v}^2 > 0 \end{cases}$$

**Утверждение 1.** Существует полная двумерная поверхность  $F_2 \subset {}^2R_5$ , все касательные плоскости которой евклидовы.

Действительно, двумерная полная поверхность, заданная уравнением  $\vec{r}(u, v) = (5u^3 + 2v^3)\vec{e}_1 + (2u^3 + 2v^3 - 1)\vec{e}_2 + (3u^3 + 3v^3 - 2)\vec{e}_3 + (-3u^3 - v^3)\vec{e}_4 + (u^3 - 3v^3)\vec{e}_5$  является примером поверхности, удовлетворяющей утверждению 1. Доказывается непосредственным вычислением нормы  $r_u$ ,  $r_v$ .

Для того, чтобы геометрия на касательной плоскости была геометрией Минковского, должно выполняться условие.

$$\begin{cases} \vec{r}_u^2 = x_{1u}^2 + x_{2u}^2 + x_{3u}^2 - x_{4u}^2 - x_{5u}^2 > 0 \\ \vec{r}_v^2 = x_{1v}^2 + x_{2v}^2 + x_{3v}^2 - x_{4v}^2 - x_{5v}^2 < 0 \end{cases} \quad \vec{r}_u^2 \cdot \vec{r}_v^2 < 0$$

**Утверждение 2.** Существует полная двумерная поверхность  $F_2 \subset {}^2R_5$  все касательные плоскости которой есть плоскость Минковского.

Действительно, двумерная полная поверхность, заданная уравнением  $\vec{r}(u, v) = (4u^3 - v^3)\vec{e}_1 + (2u^3 - v^3 - 5)\vec{e}_2 + (u^3 - 2v^3 - 2)\vec{e}_3 + (3u^3 + 4v^3)\vec{e}_4 + (u^3 + 5v^3)\vec{e}_5$  является примером поверхности, удовлетворяющей утверждению 2.

Для того, чтобы геометрия на касательной плоскости была галилеевой, базисные векторы должны иметь вырожденную норму, то есть  $\vec{r}_u^2 = x_{1u}^2$  и  $\vec{r}_v^2 = 0$ . Например,  $\vec{r}(u, v) = u\vec{e}_1 + chu\vec{e}_2 + shu\vec{e}_3 + shu\vec{e}_4 + chu\vec{e}_5$

**Утверждение 3.** Существует полная двумерная поверхность  $F_2 \subset {}^2R_5$ , все касательные плоскости которой являются галилеевыми.

Действительно, двумерная полная поверхность, заданная уравнением  $\vec{r}(u, v) = u_1\vec{e}_1 + y(u, v)\vec{e}_2 + z(u, v)\vec{e}_3 + y(u, v)\vec{e}_4 + z(u, v)\vec{e}_5$   $M(x, y, z, y, z) \subset {}^2R_5$  является примером поверхности, удовлетворяющей утверждению 3. Множество  $M(x, y, z, y, z)$  эквивалентно галилееву пространству  $\Gamma_3$  [1]. Поверхность, заданная этим уравнением, является поверхностью галилеева пространства  $\Gamma_3$ . В галилеевом пространстве поверхности имеют только галилееву касательную плоскость.

В работе [2] доказано существование двумерной поверхности определенной на сфере в  $R_5$ . Относительно этого класса  $W$  поверхностей справедлива следующая теорема.

**Теорема.** Не существует двумерной поверхности из  $W$ , где геометрия на касательной плоскости была одного типа.

**Доказательство.** В работе [2] дано условие принадлежности поверхности  $F_2$  в пространстве  $R_5$  сфере  $S^4 \subset R_5$ . Сфера пространства  ${}^2R_5$ , то есть геометрическое место точек равноудаленное от данной точки, рассматривается в трёх видах. Первое когда радиус сферы вещественный, мнимый или изотропный.

Сфера в  ${}^2R_5$  имеет уравнение

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 - x_5^2 = \begin{cases} 1 & \text{сфера вещественного радиуса} \\ -1 & \text{сфера мнимого радиуса} \\ 0 & \text{сфера нулевого радиуса} \end{cases}$$

Если воспользоваться методом наложенного пространства, то есть координатную систему в  ${}^2R_5$  также считать координатой в  $R_5$  сфера в  $R_5$  задается уравнением  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = 1$ .

Легко установить взаимную однозначность соответственно сферой пространств  ${}^2R_5$  и  $R_5$ . Взаимная однозначность нарушается только в тех точках  $S_4 \subset R_5$ , которые являются точками изотропной сферы. Используя эту взаимно однозначное соответствие докажем, что каждая поверхность из класса  $W$ , имеет касательную плоскость параллельную, соответственно, касательную плоскостям, вещественную сферу и сферу мнимого радиуса. Следовательно, поверхность  $F_2 \subset W$  не может быть поверхностью в  ${}^2R_5$ .

### Литература

1. Б.А.Розенфельд. Неевклидовы пространства. –М.: Наука, 1969.
2. Ю.А.Аминов, Я.С.Наседкина. Условия принадлежности двумерной поверхности из  $E_5$  гиперсфера или гиперплоскости. / Математические заметки, 2013.
3. А.Д.Александров, Н.Ю.Нецветаев. Геометрия. –М.: Наука, 1990.

UDK: 517.977.56

### АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СТАЦИОНАРНЫХ ДЛИН ОЧЕРЕДЕЙ ДВОЙСТВЕННЫХ СИСТЕМ $M|G|1|N$ И $GJ|M|1|N-1$

Х.Қурбонов, М.Муртазаев

Самаркандский государственный университет

**Аннотация.** В работе устанавливаются асимптотические формулы для распределений стационарных длин очередей двойственных систем массового обслуживания  $M|G|1|N$  и  $GJ|M|1|N-1$  при  $\rho < 1$  ( $\rho$ -загрузка система). Также находятся формулы для распределений числа свободных шест рассматриваемых двойственных систем при  $\rho > 1$ .

**Ключевые слова:** система государственной службы, длина очереди, двоичные системы, загрузка системы, период занятости.

#### Ikkanilma $M|G|1|N$ va $GJ|M|1|N-1$ xizmat sistemalari statsionar navbat uzunliklari taqsimotlari uchun asimptotik munosabatlar

**Annotatsiya.** Ishda  $M|G|1|N$  va  $GJ|M|1|N-1$  ikkanilma xizmat ko'rsatish sistemalari statsionar navbat uzunliklari taqsimotlari uchun  $\rho < 1$  bo'lganda asimptotik formulalar o'rnatiladi. Shuningdek,  $\rho > 1$  da qarayotgan xizmat ko'rsatish sistemalari bo'sh o'rinlar sonlari taqsimotlari uchun formulalar topiladi.

**Kalit so'zlar:** ommaviy xizmat ko'rsatish sistemasi, navbat uzunligi, ikkanilma sistemalar, sistemaning yuklanishi, bandlik davri.

#### Asymptotic relations for the stationary queue size distributions of the dual queue systems $M|G|1|N$ and $GJ|M|1|N-1$

**Abstract.** In this work asymptotic formulas for the distributions of stationary queue lengths of dual queueing systems  $M|G|1|N$  and  $GJ|M|1|N-1$   $\rho < 1$  ( $\rho$ -loading system) are established. Formulas are also found for the distributions of the number of free poles of the considered dual systems for  $\rho > 1$ .

**Keywords:** Public service system, queue length, binary systems, system load, employment period.

Рассматриваются одноканальные двойственные системы массового обслуживания  $M|G|1|N$  и  $G|M|1|N-1$  (для краткости записей их обозначим через  $F_{1N}$  и  $F_{2N}$ , соответственно), которые характеризуются тем, что длины интервалов времени между последовательными моментами поступления в  $F_{1N}$  и длительности времен обслуживания в  $F_{2N}$  имеют общую экспоненциальную функцию распределения с параметром  $\lambda$ . Длительности времен обслуживания в  $F_{1N}$  и длины интервалов времени между соседними моментами поступления в  $F_{2N}$  независимы, одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения  $B(x)[B(+0) = 0]$  и со средним  $\mu^{-1}$ . Максимальное число требований, которые одновременно могут находиться в  $F_{1N}$  (в  $F_{2N}$ ) равно  $N+1$  ( $N$ ),  $N \geq 1$ .

Пуст  $\zeta_k$  период занятости системы  $F_{1k}$  ( $k \geq 1$ );

$\xi_1$  и  $\xi_2$  стационарные длины очереди систем  $F_{1N}$  и  $F_{2N}$ , соответственно.

$\rho_1 = \lambda\mu^{-1}$  ( $\rho_2 = \mu\lambda^{-1}$ ) загрузка системы  $F_{1N}$  ( $F_{2N}$ ).

Положим

$$\sigma^2 = \int_0^\infty x^2 dB(x) < \infty,$$

$$b = 1 + 2(1 - \rho_1)(\lambda\sigma)^{-2} = 1 + 2(1 - \rho_2^{-1})(\lambda\sigma)^{-2}$$

$$a_x = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0, \\ [x] + 1, & \text{если } x > 0, \end{cases}$$

где  $[x]$ -целая часть.

В работах [1] и [2] были приведены производящие функции вероятностных распределений  $P(\xi_1 = k)$ ,  $k = \overline{0, N+1}$  и  $P(\xi_2 = k)$ ,  $k = \overline{0, N}$ , которые имеют достаточно сложный вид, не пригодных к применению. В настоящей работе устанавливаются асимптотические формулы для функций распределения  $\xi_1$  и  $\xi_2$ , с помощью которых результаты работа [6], полученные для классической системы  $M|M|1|N$ , легко устанавливаются и для систем  $F_{1N}$  и  $F_{2N}$ .

**Теорема 1.** При  $N \rightarrow \infty$ ,  $\rho_1 \rightarrow 1$  и  $x \rightarrow \infty$  ( $0 < x \leq N+1$ ) имеет место соотношение

$$P(\xi_1 < x) = \frac{1 - b^{-a_x}}{1 - b^{-N-1}} + O\left(\frac{1}{x} + |1 - \rho_1|\right). \quad (1)$$

**Теорема 2.** При  $N \rightarrow \infty$ ,  $\rho_2 \rightarrow 1$  и  $x \rightarrow \infty$  ( $0 < x \leq N+1$ ) имеет место соотношение

$$P(N - \xi_2 < x) = \frac{1 - b^{-a_x}}{1 - b^{-N-1}} + O\left(\frac{1}{x} + |1 - \rho_2|\right). \quad (2)$$

**Теорема 3.** Если  $N \rightarrow \infty$  и  $\rho_1 \rightarrow 1$ , то при любом фиксированном  $x$  ( $0 < x < N+1$ )

$$P(N - \xi_1 < x) = \frac{b^{a_x} - 1}{b^{N+1} - 1} + O\left(\frac{1}{N} + |1 - \rho_1|\right). \quad (3)$$

**Теорема 4.** Если  $N \rightarrow \infty$  и  $\rho_2 \rightarrow 1$ , то при любом фиксированном  $x$  ( $0 < x < N+1$ )

$$P(\xi_2 < x) = \frac{b^{a_x} - 1}{b^{N+1} - 1} + O\left(\frac{1}{N} + |1 - \rho_2|\right). \quad (4)$$

Здесь предел  $\rho_1 \rightarrow 1$  и  $\rho_2 \rightarrow 1$  понимается как  $\lambda \rightarrow \mu$ .

**Доказательство теоремы 1.** В работе [5] установлены следующие соотношения:

$$P(\xi_1 = 0) = (1 + \lambda M\zeta_N)^{-1}, \quad (5)$$

$$P(\xi_1 = k) = \frac{\mu(M\zeta_k - M\zeta_{k-1})}{1 + \lambda M\zeta_N}, \quad 1 \leq k \leq N$$

Отсюда, для всех  $x \leq N+1$  имеем

$$P(\xi_1 < x) = P(\xi_1 \leq a_x) = \frac{\mu M\zeta_{a_x-1}}{1 + \lambda M\zeta_N} \quad (6)$$

Воспользовавшись асимптотическим выражением для  $M\zeta_N$ , приведенным в [3]

$$M\zeta_N = \frac{1 - b^{-N-1}}{\mu(1 - \rho_1)} \left(1 + O\left(\frac{1 - \rho_1}{1 - b^{-N-1}}\right)\right), \quad (7)$$

из (6) получим

$$P(\xi_1 < x) = \frac{1 - b^{-a_x}}{1 - \rho_1} \left(1 + O\left(\frac{1 - \rho_1}{1 - b^{-a_x}}\right)\right) \cdot \left\{1 + \frac{\rho_1(1 - b^{-N-1})}{1 - \rho_1} \left(1 + O\left(\frac{1 - \rho_1}{1 - b^{-N-1}}\right)\right)\right\}^{-1}.$$

Отсюда имеем

$$P(\xi_1 < x) = \frac{1 - b^{-a_x}}{1 - b^{-N-1}} g(x, N, \rho_1), \quad (8)$$

где  $g(x, N, \rho_1) = \left(1 + O\left(\frac{1 - \rho_1}{1 - b^{-a_x}}\right)\right) \cdot \left(1 + \frac{1 - \rho_1}{b^{N+1} - 1} + O\left(\frac{1 - \rho_1}{1 - b^{-N-1}}\right)\right)^{-1}$ .

Исследуем поведение функции  $g(x, N, \rho_1)$ , при всех возможных изменениях  $x, N$  и  $\rho_1$ . Пусть  $x(1 - \rho_1) \rightarrow \alpha$  ( $0 \leq \alpha < \infty$ ) при  $x \rightarrow \infty$  и  $\rho_1 \uparrow 1$ . Тогда

$$\frac{x(1 - \rho_1)}{1 - b^{-ax}} \rightarrow \frac{\alpha}{1 - e^{-\alpha m}} < \infty,$$

где  $m = 2(\mu\sigma)^{-2}$ .

Если  $x(\rho_1 - 1) \rightarrow \alpha$  ( $0 \leq \alpha < \infty$ ) при  $x \rightarrow \infty$  и  $\rho_1 \downarrow 1$ , то

$$\frac{x(1 - \rho_1)}{1 - b^{-ax}} \rightarrow \frac{\alpha}{e^{\alpha m} - 1} < \infty.$$

Следовательно, при  $x|1 - \rho_1| \rightarrow \alpha < \infty$

$$\frac{1 - \rho_1}{1 - b^{-ax}} = O\left(\frac{1}{x}\right).$$

Если  $x(1 - \rho_1) \rightarrow \infty$ , то  $b^{-ax} \rightarrow 0$  и

$$\frac{1 - \rho_1}{1 - b^{-ax}} = O(1 - \rho_1)$$

и при  $x(\rho_1 - 1) \rightarrow \infty$

$$\frac{\rho_1 - 1}{b^{-ax} - 1} = O\{(\rho_1 - 1)b^{-ax}\}.$$

Таким образом, установим, что при  $x \rightarrow \infty$  и  $\rho_1 \rightarrow 1$

$$\frac{1 - \rho_1}{1 - b^{-ax}} = O\left(\frac{1}{x} + |1 - \rho_1|\right)$$

Аналогичным путем установим, что

$$\frac{1 - \rho_1}{b^{N+1} - 1} = O\left(\frac{1}{N} + |1 - \rho_1|\right)$$

и

$$\frac{1 - \rho_1}{1 - b^{-N-1}} = O\left(\frac{1}{N} + |1 - \rho_1|\right).$$

На основе этих рассуждений из (8) получим

$$g(x, N, \rho_1) = \left(1 + O\left(\frac{1}{x} + |1 - \rho_1|\right)\right) \cdot \left(1 + O\left(\frac{1}{N} + |1 - \rho_1|\right)\right)^{-1}.$$

Отсюда, учитывая, что  $x \leq N + 1$ , имеем

$$g(x, N, \rho_1) = 1 + O\left(\frac{1}{x} + |1 - \rho_1|\right),$$

на основе чего из (8) следует утверждения теоремы 1.

**Доказательство теоремы 2.** В работе [4] было установлено соотношение

$$P(\xi_2 = N - k) = \frac{1 + \lambda M \zeta_N}{\lambda M \zeta_N} P(\xi_1 = k + 1), \quad k = \overline{0, N}.$$

Отсюда при  $x \leq N + 1$  получим

$$P(N - \xi_2 < x) = \frac{1 + \lambda M \zeta_N}{\lambda M \zeta_N} \{P(\xi_1 < x + 1) - P(\xi_1 = 0)\}. \quad (9)$$

Повторя вышеизложенные рассуждения, нетрудно проверить, что

$$\frac{1 + \lambda M \zeta_N}{\lambda M \zeta_N} = 1 + O\left(\frac{1}{N} + |1 - \rho_1|\right)$$

и

$$P(\xi_1 = 0) = \frac{1}{\lambda M \zeta_N} = O\left(\frac{1}{N} + |1 - \rho_1|\right).$$

Поскольку при  $x \leq N + 1$  для всех  $\rho_1$  и  $N \geq 1$

$$\frac{1 - b^{-ax}}{1 - b^{-N-1}} \leq 1,$$

то по теореме 1 из (10) следует (2).

**Доказательство теоремы 3.** Поскольку

$$P(N - \xi_1 < x) = P(N - \xi_1 < a_x) = 1 - P(\xi_1 \leq N - a_x) = 1 - P(\xi_1 < N - a_x + 1),$$

то по теореме 1 имеем

$$P(N - \xi_1 < x) = \frac{b^{a_x} - 1}{b^{N+1} - 1} + O\left(\frac{1}{N - a_x + 1} + |1 - \rho_1|\right). \quad (10)$$

Если учесть, что при любом фиксированном  $x < N + 1$



$$\frac{1}{N - a_x + 1} = O\left(\frac{1}{N}\right),$$

то из (10) получим равенство (3).

**Доказательство теоремы 4.** На основе (2) имеем

$$\begin{aligned} P(\xi_2 < x) &= P(\xi_2 < a_x) = 1 - P(N - \xi_2 \leq N - a_x) = 1 - P(N - \xi_2 < N - a_x + 1) = \\ &= \frac{b^{a_x-1} - 1}{b^{N+1} - 1} + O\left(\frac{1}{N - a_x + 1} + |1 - \rho_1|\right). \end{aligned}$$

Отсюда при  $x < N + 1$  получим соотношение (4).

#### Литература

1. Qurbonov H., Rabbimov A. M[G]1|N va GJ[M]1|N-1 – xizmat ko'rsatish sistemalari statsionar navbat uzunliklari taqsimotlari uchun ikkilanma munosabat. /Respublika ilmiy-amaliy konferensiya materiallari, Nukus, 2019 y, 27-28 mart, 270-271 b.
2. Qurbonov H., Bozorova O'.  $M_2|G_2|1|N_1, \infty$  imtiyozli xizmat ko'rsatish tarmog'ida oddiy talablar navbat uzunliklari taqsimoti haqida. /SamDU ilmiy axborotnomasi, 2019 y, 3-son 54-58 b.

УДК: 532.546

### ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ДВОЙНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ В ДВУМЕРНОМ СЛУЧАЕ ПРИ НАЛИЧИИ ПЕРЕНОСА И ИСТОЧНИКА(ПОГЛОЩЕНИЯ)

А.У.Маматов

Национального университета Узбекистана  
mmtovabrjon1995@gmail.com

**Аннотация.** В статье были получены следующие результаты: в многомерном поле было построено автомодельное решение для уравнения теплопроводности нелинейни  $n=2$ , из полученного автомодельного решения выбрана исходная функция для условия Коши, в числовом моделировании применен метод прогонки, в процессе получены результаты с помощью программ C#, Mathcad и Matlab и представлены в графическом виде.

**Ключевые слова:** уравнение теплопроводности, автомодельное решение, условия Коши, нелинейное граничное условие, метод прогонки, неявной схемы.

#### Ikki karra nochiziqli ikki o'lchovli issiqlik tarqalish jarayonida manba(yutulish) va issiqlik uzatish hodisasini chiziqli modellashtirish

**Annotatsiya.** Maqolada quyidagi natijalar olindi: ko'p o'lchovli sohada chiziqsiz issiqlik tarqalish tenglamasi  $n=2$  uchun avtomodel yechim qurildi, olingan avtomodel yechimdan Koshi sharti uchun boshlang'ich funksiya tanlab olindi, sonli modellashtirishda haydash usulidan foydalinildi, taqiqot jarayonida C#, Mathcad va Matlab dasturlari orqali natijalar olindi va grafik ko'rinishida berildi.

**Kalitso'zlar:** issiqlik tarqalish tenglamasi, avtomodel yechim, Koshi sharti, chiziqsiz chegaraviy shart, haydash usuli, oshkormas sxema.

#### Numerical modeling of the process of thermal conductivity with double nonlinearity in a two-dimensional case with the presence of transfer and source (absorption)

**Abstract.** In the article, the following results were obtained: in the multidimensional area, the linear heat dissipation equation an automodel solution for  $n=2$  was constructed, the initial function for the Koshi condition was selected from the obtained automodel solution, the driving method was used in numerical modeling, the results were obtained through the C#, Mathcad, and Matlab programs and presented in graphical form.

**Keywords:** thermal conductivity equation, automodel solution, Cauchy condition, non-linear boundary condition, driving method, implicit scheme.

Рассмотрим в области  $Q = \{(t, x): 0 < t < T, a < x < b, c < y < d\}$  уравнение

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( u_i^{m_i-1} \left| \frac{\partial u_i^k}{\partial x} \right|^{p-2} \frac{\partial u_i^l}{\partial x} \right) + v(t, x, u_i) \frac{\partial u_i}{\partial x} + \gamma(t) u_i^\beta, \quad x \in R^N \quad (1)$$

с начальным (условия Коши)

$$u(x,0)=u_0(x)\geq 0, \quad a < x < b, \quad c < y < d \quad (2)$$

и краевыми условиями

$$\begin{cases} u(t,a)=\varphi_1(t) \\ u(t,b)=\varphi_2(t) \end{cases}, \begin{cases} u(t,c)=\phi_1(t) \\ u(t,d)=\phi_2(t) \end{cases}, t>0 \quad (3)$$

где параметры  $m \neq 1, p \neq 2, l \neq 1, \beta > 0 \in R^N$ ,  $v_1(t, x)$ ,  $\gamma(t)$  - непрерывные функции своих аргументов, при  $v(t, x, u) > 0, i=1,2$  среда движется по направлению оси, в противном случае в противоположном направлении,  $u_0(x, y)$  - финитная функция,  $T, a, b, c, d$  - заданные числа,  $\gamma(t)u^\beta$  мощность источника (поглощения),  $\gamma(t) > 0$  соответствует источнику, а  $\gamma(t) < 0$  поглощению. При  $\gamma(t) = 0$  правый часть отсутствует.

Уравнения (1) описывает ряд физических явлений: реакции-диффузии в двумерной нелинейной среде, процессы теплопроводности в нелинейной среде, нелинейной фильтрации жидкости и газа, подчиненной закону политропии, математические модели биофизики, теория ферментативного анализа, вопросы физики плазмы и т.д., где изучаются вопросы диссипативных тепловых структур, возникающих в результате диссипации энергии (сочетание автокаталитического поведения и совместное действие нелинейных источников, стоков и процесса диффузии) [1,7].

Уравнение (1) записывается в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( u_1^{m_1-1} \left| \frac{\partial u_1^k}{\partial x} \right|^{p-2} \frac{\partial u_1^l}{\partial x} \right) + v \frac{\partial u_1}{\partial x} + \varepsilon u_1^\beta \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( u_2^{m_2-1} \left| \frac{\partial u_2^k}{\partial x} \right|^{p-2} \frac{\partial u_2^l}{\partial x} \right) + v \frac{\partial u_2}{\partial x} + \varepsilon u_1^\beta \end{cases}$$

автомодельное решение ищется следующим образом:

$$\begin{cases} u_1(t, x) = \bar{u}_1(t) \cdot w_1(\eta(t, x), \tau_1(t)) \\ u_2(t, x) = \bar{u}_2(t) \cdot w_2(\eta(t, x), \tau_2(t)) \end{cases} \quad (1')$$

Составляем неизвестные в уравнении (1):

$$A_1 = \left( \frac{\beta_1 \beta_2 - 1}{\beta_1 + 1} \right) \left( \frac{\beta_1 + 1}{\beta_2 + 1} \right)^{\frac{\beta_1}{\beta_2 + 1}}; \alpha_1 = \frac{\beta_1 + 1}{\beta_1 \beta_2 - 1}; B_1 = \beta_1^{\frac{\beta_1}{\beta_2 + 1}}$$

$$A_2 = \left( \frac{\beta_1 + 1}{\beta_2 + 1} \right)^{\frac{1}{\beta_1 + 1}} A_1^{\frac{\beta_2 + 1}{\beta_1 + 1}}; \alpha_2 = \frac{\beta_2 + 1}{\beta_1 \beta_2 - 1}; B_2 = \beta_1^{-\frac{\beta_1}{\beta_1 + 1}}.$$

Мы выполняем следующие автомодельные замены:

$$\begin{cases} \bar{u}_1(t) = A_1(T+t)^{-\alpha_1} \\ \bar{u}_2(t) = A_2(T+t)^{-\alpha_2} \end{cases}$$

В системе имеются следующие критические случаи[3,4]:

$$\tau_1(t) = \begin{cases} A_1(T+t)^{-\mu_1} & \text{if } m_1 + k(p-2) + l - 2 \neq \left\{ \frac{1}{\alpha_1}; 0 \right\} \\ A_1^{-\frac{1}{\alpha_1}} \ln|T+t| & \text{if } m_1 + k(p-2) + l - 2 = \frac{1}{\alpha_1}; m_1 + k(p-2) + l - 2 \neq 0 \\ t + c & \text{if } m_1 + k(p-2) + l - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\tau_2(t) = \begin{cases} A_2(T+t)^{-\mu_2} & \text{if } m_2 + k(p-2) + l - 2 \neq \left\{ \frac{1}{\alpha_2}; 0 \right\} \\ A_2^{-\frac{1}{\alpha_2}} \ln|T+t| & \text{if } m_2 + k(p-2) + l - 2 = \frac{1}{\alpha_2}; m_2 + k(p-2) + l - 2 \neq 0 \\ t + c & \text{if } m_2 + k(p-2) + l - 2 = 0 \end{cases}$$

Оба уравнения будут иметь решение, когда  $\tau_1(t) = \tau_2(t)$ . Из этой системы уравнений получается уравнение Зельдовича-Компанеса[5] следующим образом:

$$\frac{d}{d\xi} \left( f_i^{m_i-1} \left| \frac{df_i^k}{d\xi} \right|^{p-2} \frac{df_i^l}{d\xi} \right) + \frac{1}{p} \frac{d}{d\xi} (\xi - f_i) = 0$$

$$f_i(\xi) = \left( a_i - b_i \xi^{\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{m_i+k(p-2)+l-2}}$$

(1)-(2) с помощью алгоритма линейного разделения [2] для решения задачи получен следующий результат

**Теорема:** Пусть будут уместны следующие условия,

$$h_i = \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_i(k(p-1)-1) - \alpha_{3-i}m_i}, \gamma_i = \frac{(p-1)(k(p-1)-1-m_i)}{(k(p-1)-1)^2 - m_1m_2}, i = 1,2;$$

$$k(p-1) > m+1, m = \max\{m_1, m_2\}, \gamma_i > m_i\gamma_{3-i}, -\frac{N}{p} \frac{\gamma_i}{\gamma_i - m_i\gamma_{3-i}} + h_i \leq 0, i = 1,2,$$

$$u_+(0, x) \geq u_0(x), v_+(0, x) \geq v_0(x), x \in R^N,$$

В этом случае (1)-(2)- это равенство уместно для решения задач :

$$u(t, x) \leq u_+(t, x), v(t, x) \leq v_+(t, x), x \in R^N$$

здесь

$$u_+(t, x) = A(T+t)^{-\alpha_1} \left( a - \frac{h_1^{-\frac{1}{p-1}} \alpha_1^{-\frac{1}{p-1}} |x|^{\frac{p}{p-1}}}{(T+t)^{\frac{1-\alpha_1(k(p-1)-1)-\alpha_2m_1}{p-1}}} \right)_+^{\gamma_1},$$

$$v_+(t, x) = B(T+t)^{-\alpha_2} \left( a - \frac{h_1^{-\frac{1}{p-1}} \alpha_1^{-\frac{1}{p-1}} |x|^{\frac{p}{p-1}}}{(T+t)^{\frac{1-\alpha_1(k(p-1)-1)-\alpha_2m_1}{p-1}}} \right)_+^{\gamma_1},$$

$$A^{k(p-1)-1} B^{m_1} = \frac{p-1}{p^2 k (\gamma_1 - m_1 \gamma_2)} \left| \frac{p-1}{pk \gamma_1} \right|^{p-2},$$

$$B^{k(p-1)-1} A^{m_2} = \frac{p-1}{p^2 k (\gamma_2 - m_2 \gamma_1)} \left| \frac{p-1}{pk \gamma_2} \right|^{p-2},$$

$$(b)_+ = \max(0, b).$$

В  $\overline{\Omega}$  построим двумерную сетку  $\overline{\omega}_h$  по  $x$  с шагом  $h = \frac{b-a}{N}$ , сетку  $\overline{\omega}_l$  по  $y$  с шагом  $l = \frac{d-c}{M}$ , и временную сетку  $\overline{\omega}_\tau$  по  $t$  с шагом  $\tau = \frac{T}{L}$ ,  $T > 0$  [6]:

Для численного решения задачи (1)-(3) применяется метод переменных направлений в сочетании интегро-интерполяционного метода (метод баланса), записанных для элементарных объемов сеточной области [1].

Полученная схема нелинейно относительно искомой функции и для нахождения ее решения используется метод итераций. Для линеаризации диффузионной части используется метод Пикара (простой итерации), а для линеаризации правой части использовались методы Пикара, Ньютона и специальный метод.

Разработан вычислительный алгоритм. При разработке программного обеспечения, иллюстрирующего имитационный процесс поведения решения с течением времени

(визуализация) использовалась среда VisualStudio 2012 C# с включением графической библиотеки OpenGL.

Результаты вычислительных экспериментов показывают, что все итерационные методы пригодны для построенной схемы. Для достижения одинаковой точности метод Ньютона требует меньше итераций, чем метод Пикара. В некоторых случаях количество итераций почти два раза, а максимальное число итераций 3-4 раза меньше чем у других методов. Так как в правой части уравнения (1) присутствует степенная нелинейность, естественно специальный метод даёт хорошие результаты, чем метод Пикара.

В качестве тестового примера были взяты решения уравнения (1) полученные методами эталонных уравнений и нелинейного расщепления [2]. В рисунках 1-4 приведены результаты расчета для различных значений параметров  $m_1, m_2, l, p, k, \beta$  и времени.

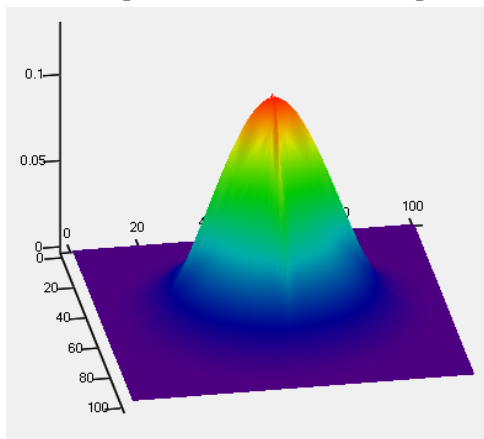


Рис. 1.  $p_1=2.5, m_1=m_2=1.4, k=1, l=1, t=0.48$

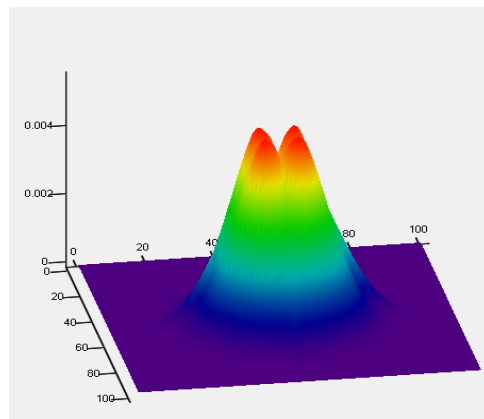


Рис. 2.  $p_1=2.2, m_1=m_2=1.4, k=1.1, l=1, t=0.98$

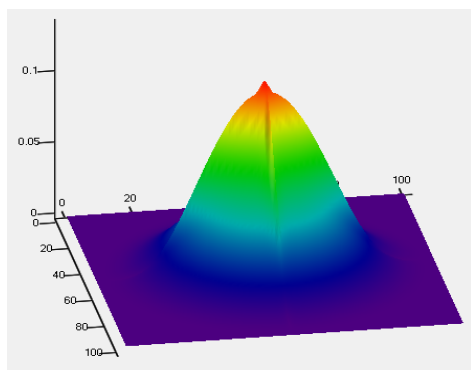


Рис. 3.  $p_1=2.5, m_1=m_2=2, k=1.4, l=1.2, t=0.02$

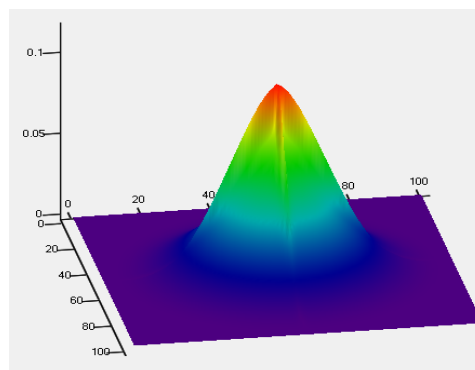


Рис. 4.  $p_1=2.1, m_1=m_2=2, k=1.5, l=1.4, t=0.94$

### Литература

1. Aripov M., Khaydarov A. Numerical Modeling of a system of mutual reaction-diffusion type. WSPC – Proceedings Trim Size. ISAAC07, 2009. 790-793 p.
2. Арипов М. Методы решения нелинейных краевых задач. – Т.: Фан, 1989. – 189 с.
3. Арипов М., Садуллаева Ш. Эффекты конечной скорости распространения возмущения для кросс диффузии // Доклады академии наук Республики Узбекистан, 2016, №4, 12-14.
4. Арипов М., Садуллаева Ш. Исследованию свойств нелинейной системы диффузионного уравнения с неоднородной плотностью и источником // Доклады академии наук Республики Узбекистан, 2015, № 6, 8-11.
5. Зельдович Я. Б., Компанеец А. С. К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры. Сборник, посвященный 70-летию акад. А. Ф. Иоффе. – М., 1950. – 61-71.
6. Самарский А. А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977.
7. Хайдаров А. Моделирование нелинейных диффузионных процессов при наличии поглощения и линейного переноса. Вычислительные технологии. 2004, № 9. с. 163-168.

УДК 517.947.5

# ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ДАННЫХ РАССЕЯНИЯ ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ С ПОТЕНЦИАЛОМ БЛИЗКИМ В РАЗНЫХ БЕСКОНЕЧНОСТЯХ К РАЗЛИЧНЫМ $N$ -ЗОННЫМ

А.Б.Неъматов

Самаркандский государственный университет  
akbar.1969@mail.ru

**Аннотация.** В настоящей работе рассматривается в пространстве  $L_2(R^1)$  самосопряженные операторы  $H \equiv -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$ ,  $H_N^j \equiv -\frac{d^2}{dx^2} + q_N^j(x)$  где  $q(x)$  вещественная функция, удовлетворяющая следующим условиям  $(1+x^2)|q(x) - q_N^{(1)}(x)| \in L_1(0, \infty)$ ,  $(1+x^2)|q(x) - q_N^{(2)}(x)| \in L_1(-\infty, 0)$ . Здесь  $q_N^{(1)}(x)$ ,  $q_N^{(2)}(x)$ , в общем случае, различные конечнозонные непериодические потенциалы. В работе изучены основные свойства данных рассеяния оператора  $H$ .

**Ключевые слова:** оператор Штурма-Лиувилля, собственное значение, собственная функция, спектр, данные рассеяния, конечнозонный потенциал.

## Har xil cheksizlikda turli $N$ - zonali potentsiyallarga yaqin potentsialli Shturm – Liuvill operatori ushun sochilish nazariyasi berilganlarining asosiy xossalari

**Annotatsiya.** Ushbu maqolada  $L_2(R^1)$  fazoda berilgan o'z-o'ziga qo'shma  $H \equiv -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$ ,  $H_N^j \equiv -\frac{d^2}{dx^2} + q_N^j(x)$  operatorlar qaraladi, bu yerda  $q(x)$  haqiqiy qiymatli funksiya va quyidagi shartlarni qanoatlantiradi  $(1+x^2)|q(x) - q_N^{(1)}(x)| \in L_1(0, \infty)$ ,  $(1+x^2)|q(x) - q_N^{(2)}(x)| \in L_1(-\infty, 0)$ . Bunda  $q_N^{(1)}(x)$ ,  $q_N^{(2)}(x)$  lar har xil davriy bo'lmagan chekli zonali potentsiallar. Maqolada  $H$  operator uchun sochilish nazariyasi berilganlarining asosiy xossalari o'rganilgan.

**Kalit so'zlar:** Shturm-Liuvill operatori, xos qiymat, xos funksiya, spektr, sochilish nazariyasining berilganlari, chekli zonali potentsial.

## The main properties of the scattering data of the Sturm-Liouville operator with potential nearly to different $N$ -zone at infinities

**Abstract.** In this paper the self-adjoint operator  $H \equiv -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$ ,  $H_N^j \equiv -\frac{d^2}{dx^2} + q_N^j(x)$  on the Hilbert space  $L_2(R^1)$  is considered. The potential  $q(x)$  is real-valued function and satisfying the conditions  $(1+x^2)|q(x) - q_N^{(1)}(x)| \in L_1(0, \infty)$ ,  $(1+x^2)|q(x) - q_N^{(2)}(x)| \in L_1(-\infty, 0)$ . The functions  $q_N^{(1)}(x)$ ,  $q_N^{(2)}(x)$  are not necessarily periodic, finite-zone potentials. In this paper, we study the main properties of the scattering data of the operator  $H$ .

**Key words:** Sturm-Liouville operator, eigenvalue, eigenfunction, spectr, scattering datas, finite-zone potential.

Рассмотрим в пространстве  $L_2(R^1)$  самосопряженный оператор порожденный дифференциальным выражением вида

$$Hy \equiv -y'' + q(x)y = \lambda y, \quad (-\infty < x < \infty) \quad (1)$$

где  $q(x)$  вещественная функция, удовлетворяющая следующим условиям

$$(1+x^2)|q(x) - q_N^{(1)}(x)| \in L_1(0, \infty), \quad (1+x^2)|q(x) - q_N^{(2)}(x)| \in L_1(-\infty, 0). \quad (2)$$

Здесь  $q_N^{(1)}(x)$ ,  $q_N^{(2)}(x)$ , в общем случае, различные конечнозонные непериодические потенциалы.

В настоящей работе изучены основные свойства данных рассеяния и вводятся определения данных рассеяния уравнения (1), в классе потенциалов (2).

Рассмотрим невозмущенные самосопряженные операторы

$$H_N^{(j)}y \equiv -y'' + q_N^{(j)}(x)y = \lambda y, \quad (-\infty < x < \infty), \quad j = 1, 2, \quad (3)$$

с совпадающими спектрами

$$\sigma(H_N^{(1)}) = \sigma(H_N^{(2)}) = E_N = [0, \lambda_1] \cup [\mu_1, \lambda_2] \cup \dots \cup [\mu_N, \infty).$$

Для невозмущенных уравнений (3) решения Вейля-Блоха имеют вид:

$$\begin{aligned} \varphi_{1,2}(x, \lambda) &= \sqrt{\frac{P(x, \lambda)}{P(\lambda)}} \exp\left\{\pm i\sqrt{R(\lambda)} \int_0^x \frac{du}{P(u, \lambda)}\right\}, \quad \text{при } j=1, \\ \psi_{1,2}(x, \lambda) &= \sqrt{\frac{Q(x, \lambda)}{Q(\lambda)}} \exp\left\{\pm i\sqrt{R(\lambda)} \int_0^x \frac{du}{Q(u, \lambda)}\right\}, \quad \text{при } j=2, \end{aligned}$$

где

$$R(\lambda) = \lambda \prod_{k=1}^N (\lambda - \lambda_k)(\lambda - \mu_k), \quad P(x, \lambda) = \prod_{k=1}^N (\lambda - \xi_k^{(1)}(x)), \quad Q(x, \lambda) = \prod_{k=1}^N (\lambda - \xi_k^{(2)}(x)),$$

а  $\xi_k^{(j)}(t)$   $k=1, 2, \dots, N$ ,  $j=1, 2$  спектральные параметры, соответствующие потенциалам  $q_N^{(j)}(x+t)$ .

Обозначим через  $f(x, \lambda)$ ,  $g(x, \lambda)$  решения уравнения (1) удовлетворяющие условиям

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x, \lambda) - \varphi_1(x, \lambda)) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (g(x, \lambda) - \psi_2(x, \lambda)) = 0, \quad \lambda \in E_N^{\circ}.$$

При  $\lambda \neq 0, \lambda_1, \mu_1, \dots, \lambda_N, \mu_N$  пары функций  $\{f(x, \lambda), \overline{f(x, \lambda)}\}$ ,  $\{g(x, \lambda), \overline{g(x, \lambda)}\}$  образуют фундаментальные системы решений уравнения (1). Поэтому при  $\lambda \in E_N^{\circ}$

$$\begin{aligned} g(x, \lambda) &= c_{11}(\lambda) f(x, \lambda) + c_{12}(\lambda) \overline{f(x, \lambda)}, \\ f(x, \lambda) &= c_{22}(\lambda) g(x, \lambda) + c_{21}(\lambda) \overline{g(x, \lambda)}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} c_{11}(\lambda) &= \frac{P(\lambda)}{2i\sqrt{R(\lambda)}} W\{g(x, \lambda), \overline{f(x, \lambda)}\}, \quad c_{12}(\lambda) = \frac{P(\lambda)}{2i\sqrt{R(\lambda)}} W\{f(x, \lambda), g(x, \lambda)\}, \\ c_{21}(\lambda) &= \frac{Q(\lambda)}{2i\sqrt{R(\lambda)}} W\{f(x, \lambda), g(x, \lambda)\}, \quad c_{22}(\lambda) = -\frac{Q(\lambda)}{2i\sqrt{R(\lambda)}} W\{f(x, \lambda), \overline{g(x, \lambda)}\}. \end{aligned}$$

Матрица  $C = (c_{ij}(\lambda))_{i,j=1,2}$  называется матрицей перехода и обладает следующими свойствами:

**I.** При  $\lambda \in E_N^{\circ}$  имеют место следующие равенства

$$\begin{aligned} |c_{12}(\lambda)|^2 - |c_{11}(\lambda)|^2 &= \frac{P(\lambda)}{Q(\lambda)}, \quad |c_{21}(\lambda)|^2 - |c_{22}(\lambda)|^2 = \frac{Q(\lambda)}{P(\lambda)}, \\ c_{21}(\lambda) &= \frac{Q(\lambda)}{P(\lambda)} c_{12}(\lambda), \quad c_{11}(\lambda) = -\frac{P(\lambda)}{Q(\lambda)} \overline{c_{22}(\lambda)}. \end{aligned}$$

**II.** Функции  $c_{12}(\lambda)$  и  $c_{21}(\lambda)$  являются предельными значениями функций мероморфных в комплексной плоскости  $\lambda$  с разрезами  $E_N$  при этом на берегах разреза выполняются равенства

$$c_{12}(\lambda^e) = \overline{c_{12}(\lambda^h)}, \quad c_{21}(\lambda^e) = \overline{c_{21}(\lambda^h)}.$$

Здесь  $\lambda^e, \lambda^h$  точки верхнего и нижнего берега разреза соответственно.

**III.** Для функций  $c_{ij}(\lambda)$ ,  $i, j=1, 2$  при  $|\lambda| \rightarrow \infty$ ,  $\text{Im} \sqrt{\lambda} \geq 0$  справедливы следующие асимптотические равенства

$$\begin{aligned} c_{11}(\lambda) &= O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right), \quad c_{12}(\lambda) = 1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right), \\ c_{21}(\lambda) &= 1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right), \quad c_{22}(\lambda) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right). \end{aligned}$$

**IV.** При каждом фиксированном  $x$  функции  $\frac{\psi_2(x, \lambda)}{c_{12}(\lambda)}$  и  $\frac{\varphi_1(x, \lambda)}{c_{21}(\lambda)}$  ограничены на спектре  $E_N$  и в окрестностях границ зон.

V. Пусть  $M = \{0, \lambda_1, \mu_1, \dots, \lambda_N, \mu_N\}$ . При  $\lambda \notin M$  функция  $c_{21}(\lambda)\sqrt{R(\lambda)}$  непрерывно дифференцируема по переменной  $s = \sqrt{\lambda}$ . Функции  $c_{21}(\lambda)\psi_1(x, \lambda)\sqrt{R(\lambda)}$  и  $c_{12}(\lambda)Q(\lambda)\sqrt{R(\lambda)}$  непрерывны в плоскости  $\lambda$  с разрезами по  $E_N$  вплоть до границ зон спектра, при этом

если  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} Q(\lambda)\psi_2(x, \lambda) \neq 0$ , то  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} Q(\lambda)\sqrt{R(\lambda)}c_{12}(\lambda)[(c_{11}(\lambda)/c_{12}(\lambda)) + 1] = 0$ ,

если  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} Q(\lambda)\psi_2(x, \lambda) \equiv 0$ , то  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sqrt{R(\lambda)}c_{12}(\lambda)[(c_{11}(\lambda)/c_{12}(\lambda)) + 1] = 0$ ,

если  $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_n, (\mu_n)} Q(\lambda)\psi_2(x, \lambda) \neq 0$ , то

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_n, (\mu_n)} Q(\lambda)\sqrt{\lambda - \lambda_n, (\mu_n)}c_{12}(\lambda) \cdot [(c_{11}(\lambda)/c_{12}(\lambda)) + 1] = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N,$$

если  $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_n, (\mu_n)} Q(\lambda)\psi_2(x, \lambda) \equiv 0$ , то

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_n, (\mu_n)} \sqrt{\lambda - \lambda_n, (\mu_n)}c_{12}(\lambda) \cdot [(c_{11}(\lambda)/c_{12}(\lambda)) + 1] &= 0, \\ \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_n, (\mu_n)} \sqrt{\lambda - \lambda_n, (\mu_n)}c_{21}(\lambda) \cdot [(c_{22}(\lambda)/c_{21}(\lambda)) + 1] &= 0, \quad n = 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

VI. Функции  $c_{12}(\lambda)$  и  $c_{21}(\lambda)$  имеют конечное число нулей  $\{\tilde{\lambda}_k\}_{k=0}^l$ , лежащих в лакунах. Корни функций  $c_{12}(\lambda)$ ,  $c_{21}(\lambda)$  не более чем двукратные. Собственные значения оператора  $H$  совпадают с нулями функций  $c_{12}(\lambda)$  и  $c_{21}(\lambda)$ .

VII. Обозначим обратные величины норм собственных функций  $f(x, \tilde{\lambda}_k)$ ,  $\hat{g}(x, \tilde{\lambda}_k)$  через  $m_k^+$ ,  $m_k^-$ , так что

$$(m_k^+)^{-1} = \|f(x, \tilde{\lambda}_k)\|, \quad (m_k^-)^{-1} = \|\hat{g}(x, \tilde{\lambda}_k)\|,$$

где

$$\hat{g}(x, \tilde{\lambda}_k) = \begin{cases} g(x, \tilde{\lambda}_k), & \text{при } \lim_{\lambda \rightarrow \tilde{\lambda}_k} Q(\lambda)\psi_2(x, \lambda) \equiv 0, \\ \lim_{\lambda \rightarrow \tilde{\lambda}_k} (Q(\lambda)g(x, \lambda)/2i\sqrt{R(\lambda)}), & \text{при } \lim_{\lambda \rightarrow \tilde{\lambda}_k} Q(\lambda)\psi_2(x, \lambda) \neq 0. \end{cases}$$

Числа  $m_k^+$ ,  $m_k^-$  связаны следующими соотношениями:

$$(m_k^+)^{-2} \cdot (m_k^-)^{-2} = -4R(\tilde{\lambda}_k) \cdot \frac{(\dot{c}_{12}(\tilde{\lambda}_k))^2}{(P(\tilde{\lambda}_k))^2}, \quad \text{при } \lim_{\lambda \rightarrow \tilde{\lambda}_k} Q(\lambda)\psi_2(x, \lambda) \equiv 0,$$

$k = 0, 1, 2, \dots, l$ ;

$$(m_k^+)^{-2} \cdot (m_k^-)^{-2} = (\dot{c}_{21}(\tilde{\lambda}_k))^2, \quad \text{при } \lim_{\lambda \rightarrow \tilde{\lambda}_k} Q(\lambda)\psi_2(x, \lambda) \neq 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, l.$$

Набор состоящий из матрицы-функции  $C = (c_{ij}(\lambda))_{i,j=1,2}$ , собственных значений  $\tilde{\lambda}_k \in R^1 \setminus E_N$ , и нормирующих постоянных  $m_k^\pm$ ,  $k = 0, 1, \dots, l$  будем называть данными рассеяния оператора  $H$ .

### Литература

1. Фирсова Н.Е. Прямая и обратная задача рассеяния для одномерного возмущенного оператора Хилла. Мат. сб., 1986, т. 130(172), № 3(7), с. 346-385.
2. Левитан Б.М., Хасанов А.Б. Оценка функции Коши в случае конечнозонных потенциалов. Функц. анализ и его прилож., 1992, т. 26, № 2, с. 18-28.
3. Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. — Киев: Наукова думка, 1977. — 332 с.
4. Hasanov A.B. Shturm-Liuvill chegaraviy masalalari nazariyasiga kirish. II-qism. — T.: TURON-IQBOL, 2014. — 528 b.

УДК.984

**О СПЕКТРЕ ДВУХЧАСТИЧНОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА С ТОЧЕЧНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ В ОДНОМЕРНОМ СЛУЧАЕ****У.Н.Кулжанов***Самаркандский государственный университет**uquljonov@bk.ru*

**Аннотация.** В работе рассматривается точечно-взаимодействующая двухчастичная квантовая система. Соответствующий оператор Шредингера (оператор энергии) строится как самосопряженное расширение симметрического оператора Лапласа. Описан существенный спектр и доказано существование одного отрицательного собственного значения оператора Шредингера при положительных значениях параметра расширения.

**Ключевые слова.** Оператор Шредингера, симметрический оператор, расширение самосопряженного оператора, параметр расширения.

**Bir o'Ichamli nuqtali potentsialli ikki zarrachali Shredinger operatorining spektri haqida**

**Annotatsiya.** Ushbu ishda nuqtali ta'sirlashuvchi ikki zarrachali kvant sistemasi qarang. Mos Shredinger operatori (energiya operatori) simmetrik Laplas operatorining o'z-o'ziga qo'shma kengaytmasi sifatida qurilgan. Shredinger operatorining muhim spektri topilgan va kengaytirish parametrlarining musbat qiymatlarida yagona manfiy xos qiymati mavjudligi isbotlangan.

**Kalit so'zlar:** Shredinger operatori, simmetrik operator, o'z-o'ziga qo'shma operator kengaytmasi, kengaytirish parametri.

**On the spectrum of the two-particle Schrödinger operator with the contact potential in the one-dimensional case**

**Abstract.** In the following paper it is considered a contact-interacting two-particle quantum system. The corresponding Schrödinger operator (energy operator) is defined as a self-adjoint extension of the symmetric Laplace operator. It is described the essential spectrum and it is proved the existence of the unique negative eigenvalue of the Schrödinger operator under positive values of the extension parameter.

**Keywords:** Schrödinger operator, symmetric operator, extension of a self-adjoint operator, extension parameter.

**1. Введение**

Задачи о точечном взаимодействии двух и трех одинаковых квантовых частиц изучались в различных физических работах. В работах Ф.А. Березина и Л.Д. Фаддеева [1] и Р.А. Минлоса и Л.Д. Фаддеева [2,3] впервые было предложено строгое математическое описание точечного взаимодействия двух и трех частиц соответственно. В работах [2,3] гамильтониан рассматриваемой системы трактовался с помощью теории самосопряженных расширений симметрических операторов и вводился как некоторое самосопряженное расширение симметрического оператора Лапласа, определенного на области функций трех переменных  $x_1, x_2, x_3; x_j \in R^3; j=1,2,3$  обращающихся в нуль при совпадении любых двух аргументов  $x_j = x_k; j \neq k; j,k=1,2,3$ . Предложенное расширение называлось расширением Скорнякова-Тер-Мартирозьяна. В работе [4] с использованием результатов работ [1,2] изучался гамильтониан трех частиц (двух фермионов и одной частицы иной природы) с одинаковыми массами, взаимодействующих точечным образом и было показано, что расширения Скорнякова-Тер-Мартирозьяна являются самосопряженными и полуограниченными. В работе [5] обобщены результаты работ [1-4] на случай трех произвольных частиц и показано, что соответствующий гамильтониан имеет неограниченный снизу дискретный спектр.

В настоящей статье, следуя (в основном) схеме использованной в работах [2-5], мы изучим задачу двух произвольных частиц с точечным взаимодействием. Доказано, что расширения Скорнякова-Тер-Мартирозьяна оператора Лапласа, определенного на области функций двух переменных  $x_1, x_2 \in R$ , обращающихся в нуль при совпадении переменных, т.е. при  $x_1 = x_2$ , является самосопряженным. Доказано, что существенный спектр рассматриваемого расширения



совпадает с полуосью  $[0, \infty)$  и если параметр расширения  $\varepsilon \leq 0$ , то оно не имеет собственного значения, а если параметр расширения  $\varepsilon > 0$ , то оно имеет одно отрицательное собственное значение. Основные результаты работы основываются на изучение спектра расширения оператора  $h_\varepsilon$ , зависящего от параметра расширения  $\varepsilon$ .

## 2. Предварительные сведения и выбор расширения

Гамильтониан (оператор энергии) рассматриваемой двухчастичной системы задается как некоторое расширение  $\tilde{H}$  следующего симметрического оператора  $\tilde{H}_0$ , действующего в гильбертовом пространстве  $L_2(R^2) \equiv L_2$  по формуле

$$\tilde{H}_0 = \left( -\frac{1}{2m_1} \Delta_{x_1} - \frac{1}{2m_2} \Delta_{x_2} \right) \varphi(x_1, x_2) \quad (1)$$

и определенного на множестве функций

$$D(\tilde{H}_0) = \left\{ \varphi \in L_2 : (\Delta_{x_1} + \Delta_{x_2}) \varphi \in L_2, \varphi(x, x) = 0 \right\}$$

где  $\Delta_{x_i}$  -оператор Лапласа по переменной  $x_i \in R$ ,  $m_i$  -масса  $i$ -й частицы,  $i=1,2$ .

После соответствующего преобразования Фурье оператор  $\tilde{H}$  перейдет в оператор

$$H_0 f(p_1, p_2) = \left( \frac{1}{2m_1} p_1^2 + \frac{1}{2m_2} p_2^2 \right) f(p_1, p_2),$$

определенный на множестве  $D(H_0) \subset L_2$  функций  $f(p_1, p_2)$ , удовлетворяющих условиям:

$$\int_{R^2} (p_1^4 + p_2^4) |f(p_1, p_2)|^2 dp_1 dp_2 < \infty, \quad \int_{\Gamma_p} f(p_1, p_2) d\nu_p = 0.$$

Здесь  $\Gamma_p = \{(p_1, p_2) \in R^2 : p_1 + p_2 = p, p \in R\}$  - семейство прямых с естественной Лебеговой мерой  $d\nu_p$ . Замена переменных  $P = p_1 + p_2$ ,  $p = \frac{m_2}{M} p_1 - \frac{m_1}{M} p_2$ ,  $M = m_1 + m_2$  осуществляем естественный изоморфизм между пространствами

$$L_2(R^2) \text{ и } L_2(R_p) \otimes L_2(\Gamma_p).$$

Последнее пространство может быть отождествлено с пространством  $L_2(R) \otimes L_2(R)$ , при этом оператор но записывается в виде тензорное произведения операторов

$$H_0 = I \otimes \left( \frac{1}{2M} h_1 + \frac{1}{2m} h_0 \right),$$

где  $I$  - единичный оператор,  $m = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ ,  $h_1$  -оператор умножения на число  $P^2$  в пространстве  $L_2(R)$ , и является самосопряженным,  $h_0$  -замкнутый неотрицательный симметрический оператор, действующий в  $L_2(R)$  по формуле:

$$h_0 f(p) = p^2 f(p)$$

и его область определения  $D(h_0)$  состоит из функций  $f \in L_2(R)$ , удовлетворяющих условиям:

$$\int p^4 |f(p)|^2 dp < \infty; \quad \int f(p) dp = 0. \quad (2)$$

В дальнейшем интеграл без указания пределов понимается как интегрирование по всему пространству  $R$ .

**Лемма 1.** Для любого  $z \in \Pi_0 = C^1 \setminus [0, \infty)$  дефектное подпространство  $\mathfrak{R}_z \subset L_2(R)$  оператора  $h_0$  состоит из функций вида

$$u(p) = \frac{c}{p^2 - z}, c \in C^1.$$

**Доказательство.** Пусть  $g \in \mathfrak{R}_z$ . Тогда для любого  $f \in D(h_0)$  выполняется соотношение

$$((h_0 - z)f, g) = \int (p^2 - z)f(p)\overline{g(p)}dp = \int f(p)\overline{(p^2 - \bar{z})g(p)}dp = 0.$$

Из последнего равенства и условия (2) следует, что

$$(p^2 - \bar{z})g(p) = c, c \in C^1$$

или

$$g(p) = \frac{c}{p^2 - \bar{z}}.$$

Лемма доказана.  $\Delta$

Из доказанной леммы следует, что для любого  $z \in \Pi_0$  дефектное подпространство  $\mathfrak{R}_z$  является одномерным. Следовательно,  $h_0$  есть симметрический оператор с индексами дефекта (1,1). Используя общую теорию расширений [4] получим, что оператор  $h_0$  имеет однопараметрическое семейство самосопряженных расширений.

Поскольку оператор  $h_0$  неотрицателен, как и в работах [2-5] воспользуемся теорией расширений полуограниченных операторов. Дефектное подпространство  $\mathfrak{R}_{-1}$  оператора  $h_0$  состоит из функций вида

$$u_c(p) = \frac{c}{p^2 + 1}, c \in C^1.$$

Более того, следуя схемам работ [2,4] сопряженный оператор  $h_0^*$  описывается с помощью следующей леммы.

**Лемма 2.** Область определения  $D(h_0^*)$  оператора  $h_0^*$  состоит из функций вида

$$g(p) = f(p) + \frac{c_1}{p^2 + 1} + \frac{c_2}{(p^2 + 1)^2}, \quad (3)$$

где  $f \in D(h_0)$ ,  $c_1, c_2 \in C^1$ . Оператор  $h_0^*$  действует на функцию  $g$  вида (3) по формуле

$$h_0^*g(p) = p^2g(p) - c_1,$$

где  $c_1$  - константа взятая из разложения (3) функции  $g$ .

Теперь выберем расширения оператора  $h_0$ . Для любого  $\varepsilon \in R$  ставим соответствие множество  $D(h_\varepsilon), D(h_0) \subset D(h_\varepsilon) \subset D(h_0^*)$ , следующим образом:

$$D(h_\varepsilon) = \left\{ g \in D(h_0^*) : g(p) = f(p) + \frac{c}{p^2 + 1} + \frac{(\varepsilon - 2)c}{(p^2 + 1)^2}, f \in D(h_0) \right\} \quad (4)$$

Сужение оператора  $h_0^*$  на область  $D(h_\varepsilon)$  обозначим через  $h_\varepsilon$ . По определению  $h_\varepsilon$  является расширением оператора  $h_0$ .

**Тереома 1.** Для любого  $\varepsilon \in R$  расширение  $h_\varepsilon$  является самосопряженным оператором.

**Доказательство.** Нетрудно проверить, что для любых  $g_1, g_2 \in D(h_\varepsilon)$  выполняется соотношение  $(h_\varepsilon g_1, g_2) = (g_1, h_\varepsilon g_2)$ , т.е.  $h_\varepsilon$  является симметрическим оператором. Достаточно доказать, что индексы дефекта оператора  $h_\varepsilon$  равны (0,0).

Пусть  $\psi \in \mathfrak{R}_{-1}(h_\varepsilon)$ . Тогда функция  $\psi(p)$  имеет вид

$$\psi(p) = \frac{b}{p^2 + 1}, b \in C^1$$

и для любого  $g \in D(h_\varepsilon)$  имеет место равенство  $((h_\varepsilon + 1)g, \psi) = 0$ . Если учесть (4), то последнее равенство имеет вид

$$\int \left[ (p^2 + 1) \left( f(p) + \frac{c}{p^2 + 1} + \frac{(\varepsilon - 2)c}{(p^2 + 1)^2} \right) - c \right] \overline{\psi(p)} dp =$$

$$= \int (p^2 + 1) f(p) \overline{\psi(p)} dp + (\varepsilon - 2)c \int \frac{\overline{b}}{(p^2 + 1)^2} dp = 0.$$

Так как

$$\int (p^2 + 1) f(p) \overline{\psi(p)} dp = 0$$

и  $\varepsilon - 2 \neq 0$ ,  $c \neq 0$ , то  $b = 0$ . Это означает, что  $\psi(p) = 0$ . Тем самым доказано, что индексы дефекта оператора равны  $(0, 0)$ .  $\Delta$

### 3. Спектральные свойства оператора $h_\varepsilon$

Основным результатом этой работы является следующая теорема.

**Теорема 2.** Для любого  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  существенный спектр оператора  $h_\varepsilon$  совпадает с полуосью  $[0, \infty)$ . Если  $\varepsilon \geq 0$ , то  $h_\varepsilon$  не имеет отрицательного собственного значения и если  $\varepsilon < 0$ , то  $h_\varepsilon$  имеет одно простое собственное значение  $z = -\frac{4}{\varepsilon^2}$ , соответствующая собственная функция с точностью до постоянного множителя имеет вид

$$g_\varepsilon(p) = \frac{1}{p^2 + \frac{4}{\varepsilon^2}}$$

**Доказательство.** Сначала докажем, что существенный спектр оператора совпадает с полуосью  $[0, \infty)$ . Для этого при каждом  $z \geq 0$  рассмотрим последовательности отрезковых слоев

$$G_n(z) = \left\{ p \in \mathbb{R} : \sqrt{z} + \frac{1}{n+1} < |p| < \sqrt{z} + \frac{1}{n} \right\}, n = 1, 2, 3, \dots$$

Каждый отрезковой слой  $G_n(z)$  разделим на полуслои вида

$$G_n^+(z) = \{p \in G_n(z) : p \geq 0\}, \quad G_n^-(z) = \{p \in G_n(z) : p < 0\}$$

По построению объемы (меры) этих частей равны и  $\mu(G_n^+(z)) = \mu(G_n^-(z)) = \frac{1}{2} \mu(G_n(z))$ . С помощью простого вычисления получим, что мера отрезкового слоя  $G_n(z)$  равен

$$V_n = \mu(G_n(z)) = \frac{1}{n(n+1)}$$

Определим последовательность функций

$$f_n^{(z)}(p) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{V_n}}, & p \in G_n^+(z) \\ -\frac{1}{\sqrt{V_n}}, & p \in G_n^-(z), \quad n = 1, 2, 3, \dots \\ 0, & p \in \mathbb{R} \setminus G_n^-(z), \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Легко проверить, что  $f_n^{(z)} \in L_2(\mathbb{R})$ ,  $\|f_n^{(z)}\| = 1$ ,  $(f_n^{(z)}, f_m^{(z)}) = 0$  при  $n \neq m$  и  $f_n^{(z)} \in D(h_0)$ , то есть

$$\int f_n^{(z)}(p)dp = 0, \quad n=1,2,3,\dots$$

Более того,

$$\begin{aligned} \|(h_\varepsilon - zI)f_n^{(z)}\|^2 &= \int |(p^2 - z)f_n^{(z)}(p)|^2 dp = \\ &= \int_{G_n(z)} \frac{1}{V_n} |p^2 - z|^2 dp = \frac{1}{V_n} \int_{\sqrt{z} + \frac{1}{n+1}}^{\sqrt{z} + \frac{1}{n}} (p^2 - z)^2 dp < \\ &< \frac{1}{V_n} \left(2\sqrt{z} + \frac{1}{n}\right)^2 \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{n(n+1)} = \left(2\sqrt{z} + \frac{1}{n}\right)^2 \frac{1}{n^2}. \end{aligned}$$

Отсюда видно что,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(h_\varepsilon - zI)f_n^{(z)}\| = 0.$$

Это означает, что если  $z \geq 0$ , то  $z \in \sigma_{\text{ess}}(h_\varepsilon)$ , следовательно  $[0, \infty) \subset \sigma_{\text{ess}}(h_\varepsilon)$ . Для полного описания спектра построим резольвенту оператора  $h_\varepsilon$ . Пусть  $(h_\varepsilon - z)g = \psi$ . Тогда

$$(p^2 - z)g(p) - c = \psi(p)$$

или

$$g(p) = \frac{\psi(p)}{p^2 - z} + \frac{c}{p^2 - z} \quad (5)$$

Сравнивая (4) и (5) получим уравнения относительно  $c$ :

$$f(p) + \left( \frac{1}{p^2 + 1} - \frac{1}{p^2 - z} \right) c + \frac{(\varepsilon - 2)c}{(p^2 + 1)^2} = \frac{\psi(p)}{p^2 - z},$$

где  $f \in D(h_0)$ .

Интегрируя последнее равенство по всему  $R$  приходим к уравнению для определения  $c$ :

$$(\varepsilon\sqrt{-z} - 2)\pi c = \int \frac{\psi(p)}{p^2 - z} dp \quad (6)$$

Находя из уравнения (6) постоянное  $c$  и подставляя его в (5) получим выражения для  $g(p)$ :

$$g(p) = \frac{\psi(p)}{p^2 - z} - \frac{1}{\pi(\varepsilon\sqrt{-z} - 2)} \cdot \frac{1}{p^2 - z} \int \frac{\psi(q)}{q^2 - z} dq.$$

Таким образом, если  $z \in \Pi_0$  и  $\varepsilon\sqrt{-z} - 2 \neq 0$ , то резольвента оператора  $h_\varepsilon$  действует в  $L_2(R)$  по формуле

$$R_z(h_\varepsilon)g(p) = \frac{g(p)}{p^2 - z} - \frac{1}{\pi(\varepsilon\sqrt{-z} - 2)} \cdot \frac{1}{p^2 - z} \int \frac{g(q)}{q^2 - z} dq \quad (7)$$

и является органичным оператором. Отсюда непосредственно следует, что  $\sigma_{\text{ess}}(h_\varepsilon) = [0, \infty)$ .

Теперь если  $\varepsilon \leq 0$  и  $z \in \Pi_0$ , то  $\varepsilon\sqrt{-z} - 2 \neq 0$ . Это означает, что в этом случае  $\sigma(h_\varepsilon) = [0, \infty)$  и  $h_\varepsilon$  не имеет отрицательного собственного значения.

Рассмотрим случай  $\varepsilon > 0$ . Тогда уравнение  $\varepsilon\sqrt{-z} - 2 = 0$  имеет одно отрицательное решение  $z = -\frac{4}{\varepsilon^2}$ . Пусть  $\varepsilon > 0$ ,  $z = -\frac{\varepsilon^2}{4}$ . Из уравнения  $(h_\varepsilon - z)g(p) = 0$  получим, что

$$g(p) = \frac{c}{p^2 - z} \quad (8)$$

Сравнивая (4) и (8) получим равенство

$$f(p) + \frac{c}{p^2 + 1} + \frac{(\varepsilon - 2)c}{(p^2 + 1)^2} = \frac{c}{p^2 - z}.$$

Интегрируя последнее равенство по всему пространству  $R$  получим  $\pi(\varepsilon\sqrt{-z} - 2)c = 0$  или  $(\varepsilon + |\varepsilon|)c = 0$ . Так как  $\varepsilon < 0$  и  $\varepsilon + |\varepsilon| = 0$ , то в качестве  $c$  можем взять любое число, в частности,  $c = 1$ .

Таким образом, если  $\varepsilon > 0$ , то число  $z = -\frac{4}{\varepsilon^2}$  является собственным значением, а функция

$$g_\varepsilon(p) = \frac{1}{p^2 + \frac{4}{\varepsilon^2}}$$

соответствующей собственной функцией оператора  $h_\varepsilon$ . Теорема доказана.  $\Delta$

### Литературы

1. Ф. А. Березин, Л. Д. Фаддеев // Замечание об уравнение Шредингера с сингулярным потенциалом. ДАН СССР, 1961, Т.137, №5.
2. Р. А. Минлос, Л. Д. Фаддеев // ДАН СССР, 1961, Т.141, №6, с.1335-1338.
3. Р. А. Минлос, Л. Д. Фаддеев // ЖЭТФ. 1961.Т.41. №12. с. 1850-1851.
4. Р. А. Минлос, М. Х. Шерматов // Вестник МГУ, сер.1, 1989, №6, с.7-14.
5. А. М. Mel'nikov, R. A. Minlos // Advances in Soviet Mathematics, v.5, 1991, P.99-122.
6. Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман // Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1966.

УДК: 515.12

## РАВНОМЕРНОЕ СВЯЗНОЕ ПРОСТРАНСТВО

Д. Т. Сафарова

Национальный университет Узбекистана  
safarova.dilnora87@mail.ru

**Аннотация.** В этой статье мы изучаем некоторые топологические свойства равномерного пространства и его гиперпространства. Если равномерное пространство  $(X, \mathcal{U})$  является предкомпактным, равномерно локально компактным и равномерно связным, то его равномерное гиперпространство  $(\exp_c X, \exp_c \mathcal{U})$  также изучалось для сохранения свойств предкомпактного, равномерно локально компактного и равномерно связного пространства.

**Ключевые слова:** равномерное пространство, равномерность, гиперпространство, предкомпактное пространство, равномерно локально компактное пространство, равномерно связное пространство,

### Tekis bog'lamli fazolar

**Annotatsiya.** Mazkur ishda tekis fazo va uning giperfazosi orasidagi munosabatlar o'rganilgan. Tekis fazo  $(X, \mathcal{U})$  tekis oldkompakt, tekis local kompakt va tekis bog'lanishli bo'lsa uning tekis giperfazosi  $(\exp_c X, \exp_c \mathcal{U})$  ham mos ravishda tekis oldkompakt, tekis local kompakt va tekis bog'lanishli xossalari saqlashi o'rganilgan.

**Kalit so'zlar:** tekis fazo, tekis, giperfazo, oldkompakt fazo, tekis local kompakt fazo, tekis bog'lanishli fazo.

## Uniformly connected space

**Abstract.** In this paper, we study some topological properties of uniform space and its hyperspace. If a uniform space  $(X, \mathcal{U})$  is a precompact, uniformly locally compact and uniformly connected, then its uniform hyperspace  $(\exp_c X, \exp_c \mathcal{U})$  has also been studied properties of a precompact, uniformly locally compact and uniformly connected.

**Keywords:** Uniform space, uniformity, hyperspace, precompact space, uniformly locally compact space, uniformly connected space.

**Введения.** В работе [6] исследован вероятностных функтор  $P_\beta^{\mathcal{U}} : \text{Unif} \rightarrow \text{Unif}$  в категории равномерных пространств. Доказаны, что существует единственное естественное преобразование  $T : S \circ P_\beta^{\mathcal{U}} \rightarrow P \circ S$ , где  $S : \text{Unif} \rightarrow c\text{Unif}$  функтор компактификации Самуила. В работе [7] показан, что функтор  $P_\tau$  является  $\tau$ -аддитивных вероятностных мер не сохраняющий полноты равномерных пространств.

В настоящей работе доказано, что если равномерное пространство  $(X, \mathcal{U})$  предкомпактно тогда и только тогда, когда равномерное пространство  $(\exp_c X, \exp_c \mathcal{U})$  предкомпактно; если равномерное пространство  $(X, \mathcal{U})$  равномерно локально компактно; тогда равномерное пространство  $(\exp_c X, \exp_c \mathcal{U})$  также равномерно локально компактно.

**Определение 1.** Пусть  $X$  – непустое множество. Семейство  $\mathcal{U}$  покрытий множества  $X$  называется равномерностью на  $X$ , если выполняются условия [1]:

- (P1) Если  $\alpha \in \mathcal{U}$  и  $\alpha$  вписано в некоторое покрытие  $\beta$  множества  $X$ , то  $\beta \in \mathcal{U}$ .
- (P2) Для любых  $\alpha_1 \in \mathcal{U}$ ,  $\alpha_2 \in \mathcal{U}$  существует  $\alpha \in \mathcal{U}$ , которое вписано и в  $\alpha_1$ , и в  $\alpha_2$ .
- (P3) Для любого  $\alpha \in \mathcal{U}$  существует  $\beta \in \mathcal{U}$ , сильно звездно вписанное в  $\alpha$ .
- (P4) Для любой пары  $x, y$  различных точек  $X$  существует такое  $\alpha \in \mathcal{U}$ , что ни один элемент  $\alpha$  не содержит одновременно  $x$  и  $y$ .

Семейство  $\mathcal{U}$  состоящая из множества  $X$ , удовлетворяющего условиям (P1)-(P3), называется псевдоравномерностью на  $X$ ; а пара  $(X, \mathcal{U})$  – псевдоравномерным пространством.

Семейство  $\mathcal{U}$  состоящая из множества  $X$ , удовлетворяющего условиям (P1)-(P4), называется равномерностью на  $X$ ; а пара  $(X, \mathcal{U})$  – равномерным пространством.

Семейство  $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}$  называется базой равномерности  $\mathcal{U}$ , если для любого  $\alpha \in \mathcal{U}$  существует  $\beta \in \mathcal{B}$  такое, что  $\beta$  вписано в  $\alpha$ . Очевидно, что равномерность может иметь много баз. Наименьшее кардинальное число, являющееся мощностью какой-либо базы равномерности  $\mathcal{U}$ , называется её весом и обозначается  $w(\mathcal{U})$ .

**Предложение 1.** Семейство  $\mathcal{B}$  покрытий множества  $X$  будет базой некоторой равномерности  $\mathcal{U}$  на  $X$  тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия [1]:

- (B1) Для любой пары  $\beta_1, \beta_2 \in \mathcal{B}$  существует такое  $\beta \in \mathcal{B}$ , которое вписано в  $\beta_1$  и в  $\beta_2$ .
- (B2) Для всякого  $\beta \in \mathcal{B}$  существует  $\gamma \in \mathcal{B}$ , сильно звездно вписанное в  $\beta$ .
- (B3)  $\bigcap \{\beta(x) : \beta \in \mathcal{B}\} = \{x\}$  для любой точки  $x \in X$ .

**Предложение 2.** Для любой равномерности  $\mathcal{U}$  на  $X$  семейство  $\tau_{\mathcal{U}} = \{O \subset X : \text{для каждого } x \in O \text{ существует такое } \alpha \in \mathcal{U}, \text{ что } \alpha(x) \subset O\}$  есть топология на  $X$  и топологическое пространство  $(X, \tau_{\mathcal{U}})$  есть  $T_1$ -пространство [1].

Топология  $\tau_{\mathcal{U}}$  называется топологией, порожденной или индуцированной равномерностью  $\mathcal{U}$ .

Равномерное пространство  $(X, \mathcal{U})$  называется компактом, если множество  $X$  с топологией, индуцированной равномерностью  $\mathcal{U}$ , есть компакт [5].

Пусть  $(X, \mathcal{U})$  – равномерное пространство, а  $\text{exp } X$  – множество всех непустых замкнутых подмножеств пространства  $(X, \tau_{\mathcal{U}})$ . Для каждого  $\alpha \in \mathcal{U}$  положим  $P(\alpha) = \{\langle \alpha' \rangle : \alpha' \subseteq \alpha\}$ , где  $\langle \alpha' \rangle = \{F \in \text{exp } X : F \subseteq \cup \alpha'\}$  и  $F \cap A \neq \emptyset$  для каждого  $A \in \alpha'$ .

**Предложение 3.** Если  $\mathcal{B}$  – база равномерного пространства  $(X, \mathcal{U})$ , то  $P(\mathcal{B}) = \{P(\alpha) : \alpha \in \mathcal{B}\}$  образует базу некоторой равномерности  $\text{exp } \mathcal{U}$  на  $\text{exp } X$  [1].

Равномерное пространство  $(\text{exp } X, \text{exp } \mathcal{U})$  называется гиперпространством замкнутых подмножеств равномерного пространства  $(X, \mathcal{U})$ , а равномерность  $\text{exp } \mathcal{U}$  – равномерностью Хаусдорфа на  $\text{exp } X$ .

**Замечание 1.** Пусть  $\text{exp}_c X$  – множество всех непустых компактных подмножеств равномерного пространства  $(X, \mathcal{U})$ . Для каждого  $\alpha \in \mathcal{U}$  положим  $K(\alpha) = \{\langle \alpha' \rangle : \alpha' \subseteq \alpha \text{ и } \alpha' \text{ – конечно}\}$ . Заметим, что  $K(\alpha)$  – покрытие множества  $\text{exp}_c X$  [1].

Псевдоравномерное пространство  $(X, \mathcal{U})$  называется предкомпактным, если псевдоравномерность  $\mathcal{U}$  имеет базу  $\mathcal{B}$ , состоящую из конечных покрытий.

**Теорема 1.** Равномерное пространство  $(X, \mathcal{U})$  предкомпактно тогда и только тогда, когда равномерное пространство  $(\text{exp}_c X, \text{exp}_c \mathcal{U})$  предкомпактно.

**Доказательство. Необходимость.** Пусть  $(X, \mathcal{U})$  предкомпактное пространство и рассмотрим произвольное покрытие  $P(\alpha) = \{\langle \alpha' \rangle : \alpha' \subseteq \alpha\}$ , где  $\langle \alpha' \rangle = \{F \in \text{exp}_c X : F \subseteq \cup \alpha'\}$  и  $F \cap A \neq \emptyset$  для каждого  $A \in \alpha'$  в  $(\text{exp}_c X, \text{exp}_c \mathcal{U})$ . Рассмотрим след  $\alpha \in \mathcal{U}$  в пространстве  $(X, \mathcal{U})$ . Ясно, что  $\alpha \in \mathcal{U}$  есть покрытие пространства  $(X, \mathcal{U})$ . Так как  $(X, \mathcal{U})$  предкомпактно, то для любого  $\alpha \in \mathcal{U}$  существует конечное подпокрытие  $\alpha_0$  покрытия  $\alpha$ , принадлежащее  $\mathcal{U}$  и  $\alpha_0 = \{A_i : i = 1, 2, \dots, n\}$  покрывает пространство  $(X, \mathcal{U})$ , т.е.  $X = \bigcup_{i=1}^n A_i$ . Рассмотрим всевозможные конечные комбинации покрытие  $\alpha_0$  и положим  $P(\alpha_0) = \{\langle \alpha'_0 \rangle : \alpha'_0 \subseteq \alpha_0\}$ , где  $\langle \alpha'_0 \rangle = \{F \in \text{exp}_c X : F \subseteq \cup \alpha'_0, F \cap A_i^s \neq \emptyset, A_i^s \in \alpha'_0, i = 1, 2, \dots, n, s = 1, 2, \dots, k\}$ . Ясно, что  $P(\alpha_0)$  есть покрытие пространства  $(\text{exp}_c X, \text{exp}_c \mathcal{U})$ . Покажем, что  $P(\alpha_0)$  конечное покрытие. Пусть  $F \in \text{exp}_c X$  произвольный элемент, тогда  $F \subset X$ . Так как покрытие  $\alpha_0 \in \mathcal{U}$  конечное в  $(X, \mathcal{U})$ , то  $X = \bigcup_{i=1}^n A_i$ . Существует  $\langle \alpha'_0 \rangle \in P(\alpha_0)$ , что  $F \in \langle \alpha'_0 \rangle$ , то  $F \subseteq \cup \alpha'_0, F \cap A_i^s \neq \emptyset, A_i^s \in \alpha'_0$  для каждого  $i = 1, 2, \dots, n, s = 1, 2, \dots, k$ . Тогда покрытие  $P(\alpha_0)$  конечное. Значит  $(\text{exp}_c X, \text{exp}_c \mathcal{U})$  предкомпактно.

**Достаточность.** Пусть  $(\text{exp}_c X, \text{exp}_c \mathcal{U})$  предкомпактно, то существует  $P(\alpha_0)$  конечное покрытие пространство  $\text{exp}_c X$ . В силу предложения 3 пространство  $(X, \mathcal{U})$  есть замкнутое равномерное подпространство пространства  $(\text{exp}_c X, \text{exp}_c \mathcal{U})$ . Значит,  $P(\alpha_0) = \{\langle \alpha'_0 \rangle : \alpha'_0 \subseteq \alpha_0\}$  покрывает пространство  $(X, \mathcal{U})$ . Отсюда следует  $X \subset \cup \alpha'_0$ , где  $\alpha'_0$  – конечное покрытие. Значит,  $(X, \mathcal{U})$  предкомпактно. Теорема 1 доказана.

Равномерное пространство  $(X, \mathcal{U})$  называется равномерно локально компактным, если существует покрытие  $\alpha \in \mathcal{U}$ , состоящее из компактных подмножеств.

**Теорема 2.** Пусть равномерное пространство  $(X, \mathcal{U})$  равномерно локально компактно. Тогда равномерное пространство  $(\text{exp}_c X, \text{exp}_c \mathcal{U})$  равномерно локально компактно.

**Доказательство.** Пусть равномерное пространство  $(X, \mathcal{U})$  равномерно локально компактно. Покажем, что  $(\text{exp}_c X, \text{exp}_c \mathcal{U})$  равномерно локально компактно. Если  $(X, \mathcal{U})$  равномерно локально компактно, то существует покрытие  $\alpha \in \mathcal{U}$  состоящее из компактных подмножеств, т.е.  $\alpha = \{U_a : a \in M\}$ , где  $U_a$  компактных подмножеств в  $X$  и  $\bigcup_{a \in M} U_a$  покрывает пространства  $X$ . Ясно, что  $\alpha$  есть покрытие пространства  $X$ . Рассмотрим всевозможные конечные комбинации множества  $U_a$ , где  $a \in M$ , т.е.  $P(\alpha) = \{\langle \alpha' \rangle : \alpha' \subseteq \alpha, \alpha' - \text{конечно}\}$  есть покрытие пространства  $\text{exp}_c X$ . Ясно, что покрытие  $P(\alpha)$  состоящее из конечных объединений компактных подмножеств. Отсюда получим, что  $\langle \alpha' \rangle = \{F \in \text{exp}_c X : F \subset \cup \alpha', F \cap U'_a \neq \emptyset, U'_a \in \alpha'\}$  есть компактное множество, где  $U'_a$  компактные подмножества в  $X$  для любого  $a \in M$ . Значит,  $(\text{exp}_c X, \text{exp}_c \mathcal{U})$  равномерно локально компактно. Теорема 2 доказана.

Равномерное пространство  $(X, \mathcal{U})$  называется равномерно связным, а равномерность  $\mathcal{U}$  – связной, если всякое равномерно непрерывное отображение  $f : (X, \mathcal{U}) \rightarrow (D, \mathcal{U}_D)$  равномерного пространства  $(X, \mathcal{U})$  в любое дискретное равномерное пространство  $(D, \mathcal{U}_D)$  является постоянным.

Конечная последовательность  $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  подмножеств множества  $X$  называется сцепленной, если  $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$  на каждом  $i = 1, 2, \dots, n-1$ .

**Предложение 4.** Для равномерного пространства  $(X, \mathcal{U})$  следующие условия равносильны [1]:

- (1) Равномерное пространство  $(X, \mathcal{U})$  равномерно связно.
- (2) Равномерность  $\mathcal{U}$  не содержит дизъюнктивных покрытий, состоящих из не более чем одного элемента.
- (3) Для любого  $\alpha \in \mathcal{U}$  и для любой точки  $x \in X$  имеет место  $\bigcup_{n=1}^{\infty} \alpha^n(x) = X$ .
- (4) Для любого  $\alpha \in \mathcal{U}$  и для любых точек  $x, y \in X$  найдется такая конечная сцепленная последовательность  $\{A_1, A_2, \dots, A_k\} \subset \alpha$ , что  $x \in A_1, y \in A_k$ .

**Теорема 3.** Для равномерного пространства  $(X, \mathcal{U})$  следующие условия равносильны:



(1) Для любого  $\alpha \in \mathcal{U}$  и для любых точек  $x, y \in X$  найдется такая конечная сцепленная последовательность  $\{A_1, A_2, \dots, A_k\} \subset \alpha$ , что  $x \in A_1$ ,  $y \in A_k$ .

(2) Для любого  $P(\alpha) \in \exp_c \mathcal{U}$  и для любых множеств  $F_1, F_k \in \exp_c X$  найдется такая конечная сцепленная последовательность  $\{\langle \alpha'_1 \rangle, \langle \alpha'_2 \rangle, \dots, \langle \alpha'_k \rangle\} \subset P(\alpha)$ , что  $F_1 \in \langle \alpha'_1 \rangle$ ,  $F_k \in \langle \alpha'_k \rangle$ .

**Доказательство.** Докажем импликацию  $(1) \Rightarrow (2)$ . Для любого  $P(\alpha) \in \exp_c \mathcal{U}$  и для любых компакта  $F_1, F_k \in \exp_c X$  выберем произвольные точки  $x \in F_1$ ,  $y \in F_k$ . Покажем, что существует такая конечная сцепленная последовательность  $\{\langle \alpha'_1 \rangle, \langle \alpha'_2 \rangle, \dots, \langle \alpha'_k \rangle\} \subset P(\alpha)$ , что  $F_1 \in \langle \alpha'_1 \rangle$ ,  $F_k \in \langle \alpha'_k \rangle$ .

Пусть точка  $x_\alpha$  пробегает по компакта  $F_1$  и  $y_\alpha$  пробегает по компакта  $F_k$ . То получаем конечная сцепленная последовательность  $\{A_1^\alpha, A_2^\alpha, \dots, A_k^\alpha\} \subset \alpha$ , что  $x_\alpha \in A_1^\alpha$  и  $y_\alpha \in A_k^\alpha$ . Так как  $F_1, F_k$  – компакты, то существуют конечные множества  $\{A_1^{\alpha_1}, A_1^{\alpha_2}, \dots, A_1^{\alpha_n}\}$  покрывает компакта  $F_1$  и  $\{A_k^{\alpha_1}, A_k^{\alpha_2}, \dots, A_k^{\alpha_n}\}$  покрывает компакта  $F_k$ .

Тогда существует конечные сцепленные системы множеств  $A_1^{\alpha_1}, A_2^{\alpha_1}, \dots, A_k^{\alpha_1}; A_1^{\alpha_2}, A_2^{\alpha_2}, \dots, A_k^{\alpha_2}; \dots; A_1^{\alpha_n}, A_2^{\alpha_n}, \dots, A_k^{\alpha_n}$  точек  $x_1, x_2, \dots, x_k$  и точек  $y_1, y_2, \dots, y_k$ . Тогда системы  $\langle \alpha'_1 \rangle = \langle A_1^{\alpha_1}, A_1^{\alpha_2}, \dots, A_1^{\alpha_n} \rangle$ ,  $\langle \alpha'_2 \rangle = \langle A_2^{\alpha_1}, A_2^{\alpha_2}, \dots, A_2^{\alpha_n} \rangle, \dots$ ,  $\langle \alpha'_k \rangle = \langle A_k^{\alpha_1}, A_k^{\alpha_2}, \dots, A_k^{\alpha_n} \rangle$  – сцепленные системы в  $\exp_c X$  такие, что  $F_1 \in \langle \alpha'_1 \rangle$  и  $F_k \in \langle \alpha'_k \rangle$ .

Докажем импликацию  $(2) \Rightarrow (1)$ . Пусть  $x$  и  $y$  произвольные точки равномерного пространства  $(X, \mathcal{U})$ . Тогда  $F_1 = \{x_1\}$  и  $F_k = \{x_k\}$  замкнутые множества и  $F_1, F_k \in \exp_c X$ . Так как в силу (2) существует конечная сцепленная последовательность  $\{\langle \alpha'_1 \rangle, \langle \alpha'_2 \rangle, \dots, \langle \alpha'_k \rangle\} \subset P(\alpha)$ , что  $F_1 \in \langle \alpha'_1 \rangle$ ,  $F_k \in \langle \alpha'_k \rangle$ . Пусть  $\langle \alpha'_1 \rangle = \langle A_1^1, A_2^1, \dots, A_{n_1}^1 \rangle$ ,  $\langle \alpha'_2 \rangle = \langle A_1^2, A_2^2, \dots, A_{n_2}^2 \rangle, \dots$ ,  $\langle \alpha'_k \rangle = \langle A_1^k, A_2^k, \dots, A_{n_k}^k \rangle$ . Так как  $F_1 = \{x_1\} \in \langle A_1^1, A_2^1, \dots, A_{n_1}^1 \rangle$ ,  $F_k = \{x_k\} \in \langle A_1^k, A_2^k, \dots, A_{n_k}^k \rangle$ . Отсюда имеем, что  $x_1 \in A_i^1, i=1, 2, \dots, n_1$  и  $x_k \in A_i^k, i=1, 2, \dots, n_k$ . Ясно, что  $\langle \alpha'_i \rangle \cap \langle \alpha'_{i+1} \rangle \neq \emptyset$  для любого  $i=1, 2, \dots, n_k-1$ . Выберем по точке  $F_1 \in \langle \alpha'_1 \rangle \cap \langle \alpha'_2 \rangle$ ,  $F_2 \in \langle \alpha'_2 \rangle \cap \langle \alpha'_3 \rangle, \dots$ ,  $F_{k-1} \in \langle \alpha'_{k-1} \rangle \cap \langle \alpha'_k \rangle$  в силу (2). Из  $F_1 \in \langle \alpha'_1 \rangle \cap \langle \alpha'_2 \rangle$  имеем, что существует, например  $A_1^2 \in \langle \alpha'_2 \rangle$ , что  $A_1^1 \cap A_1^2 \neq \emptyset$ . Из  $F_2 \in \langle \alpha'_2 \rangle \cap \langle \alpha'_3 \rangle$  имеем, что, например  $A_1^3 \in \langle \alpha'_3 \rangle$ , что  $A_1^2 \cap A_1^3 \neq \emptyset$ , и т.д. из  $F_{k-1} \in \langle \alpha'_{k-1} \rangle \cap \langle \alpha'_k \rangle$  имеем, что, например  $A_1^k \in \langle \alpha'_k \rangle$ , что  $A_1^{k-1} \cap A_1^k \neq \emptyset$ . Значит, мы нашли сцепленные системы  $F_1, F_2, \dots, F_k$ , такие, что  $x_1 \in F_1$  и  $x_k \in F_k$ . Значит, условие 1) выполняется. Теорема 3 доказана.

**Определение 2.** Равномерное пространство  $(X, \mathcal{U})$  называется равномерно сцепленным, если для любого покрытия  $\alpha \in \mathcal{U}$  существует такое натуральное число  $n$ , что ко всякой паре  $x, y \in X$  можно подобрать такую сцепленную последовательность  $\{A_1, A_2, \dots, A_k\} \subset \alpha$ , что  $k \leq n, x \in A_1, y \in A_k$  [1].

Из предложения 4 следует, что всякое равномерно сцепленное равномерное пространство  $(X, \mathcal{U})$  является равномерно связным.

**Следствие 1.** Пусть равномерное пространство  $(X, \mathcal{U})$  равномерно сцеплено. Тогда равномерное пространство  $(\exp_c X, \exp_c \mathcal{U})$  равномерно сцеплено.

**Следствие 2.** Равномерное пространство  $(X, \mathcal{U})$  равномерно связно тогда и только тогда, когда равномерное пространство  $(\exp_c X, \exp_c \mathcal{U})$  равномерно связно.

### Литература

1. А.А. Борубаев. Равномерная топология. – Бишкек: Илим, 2013. -338 с.
2. Michael. E. Topologies on spaces of supsets // Trans. Amer. Math. Soc. – 1951. – № 1 (71). – P. 152-172.
3. Isbell J.R. Uniform spaces. Providence.-1964. p. 175.
4. James I.M. Topological and Uniform Spaces. Springer, New York, 1987. p. 163.
5. Энгелькинг Р. Общая топология. – Москва: Мир, 1986. – 752 с.
6. V.V.Fedorchuk., Y.V.Sadovnichy. On some categorical properties of uniform space of probability measures // Topology and its application. 1998. № 82, 131-151 p.
7. V.V.Fedorchuk. On a preservation of completeness of uniform spaces by the functor  $P_\tau$  // Topology and its application. 1999. № 91, 25-45 p.
8. R.B.Beshimov, D.T.Safarova. Topological properties of hyperspaces // Bulletin of National University of Uzbekistan: Mathematics and Natural Sciences, Vol. 2: Iss. 1, 2019. p. 15-35.

UDK: 511.2

### GOLDBAXNING TERNAR VA BINAR PROBLEMALARI HAMDA BU BORADA OLINGAN KEYINGI NATIJALAR

**A.Sh.Safarov**

*Termiz davlat universiteti  
asafarov1977@mail.ru*

**Annotatsiya.** Maqolada Goldbaxning ternar va binar problemalari, hamda bu masalalarning yechish usullari, shu bilan birgalikda hozirda olingan natijalari keng bayon qilingan. Rimanning  $\zeta(s)$  funksiyasi nollari uchun teorema keltirilgan va mazkur teoremadan kelib chiqadigan yangi natijalar olingan.

**Kalit soʻzlar:** Eyler-Goldbax muammosi, ternar problema, binar problema, Eratosfen gʻalviri, trigonometrik yigʻindilar metodi, Rimanning umumlashgan gipotezasi (URG), Dirixle L – funksiyasi  $L(s, \chi)$ .

### Тернарная и бинарная проблема Гольдбаха и ее последние результаты

**Аннотация.** В статье подробно рассмотрены тернарные и бинарные проблемы Гольдбаха, текущие результаты, а также способы вычисления этих задач. Приведена теорема для нулей дзета функции Римана и получены новые результаты, вытекающие из вышеупомянутой теоремы.

**Ключевые слова:** Проблема Эйлера- Гольдбаха, тернарная проблема, бинарная проблема, решето Эратосфена, метод тригонометрической суммы, обобщенная гипотеза Римана, L- функция Дирихле.

### Goldbach's ternary and binary problem and its latest results

**Abstract.** The article examines in detail the ternary and binary Goldbach problems, current results, and the methods for calculating these problems. The theorem is given for the zeros of the Riemann's zeta function and new results are obtained that follow from the aforementioned theorem.

**Keywords:** Euler-Goldbach problem, ternary problem, binary problem, Eratosthenes sieve, trigonometric sum method, Generalized Riemann hypothesis, L - Dirichlet function.

X.Goldbax va L.Eyler orasidagi 1742 yildagi yozishmalardan Eyler-Goldbax muammosi vujudga kelgan. U zamonaviy tilda quyidagicha ifodalanadi [1]:

I. Har qanday toq natural  $n \geq 9$  sonni uchta toq tub sonlarning yig'indisi ko'rinishida yozish mumkin;

II. Har qanday juft natural  $n \geq 6$  sonni ikkita toq tub sonlarning yig'indisi ko'rinishida yozish mumkin.

Bu tasdiqlarning birinchisiga Goldbaxning ternar problemi, ikkinchisiga esa Goldbaxning binar problemi ham deb yuritiladi.

Tushunarliki, Goldbaxning binar problemasining o'rinli ekanligidan ternar problemani o'rinli ekanligi kelib chiqadi. Haqiqatan ham,  $2n = p_1 + p_2$  bo'lsa, u holda  $2n + 3 = p_1 + p_2 + 3$ , tenglik barcha  $n = 3, 4, \dots$  lar uchun bajariladi.

Bu muamolar o'z vaqtida matematikaning juda ham qiyin problemalardan hisoblangan. 1912 yilgacha Goldbax problemasini hozirgi zamon matematikasi metodlari bilan yechib bo'lmaydi degan fikr mavjud bo'lgan.

Faqat 1919 yilga kelib V.Brun mohiyati jihatidan Eratosfen g'alvirining takomillashtirilgani bo'lgan metodni ishlab chiqdi. U o'z metodi yordamida har qanday yetarlicha katta natural sonni har biri 9 tadan ortiq bo'lmagan tub sonlar ko'paymasidan iborat bo'lgan ikkita qo'shiluvchining yig'indisi ko'rinishida ifodalash mumkin ekanligini ko'rsatdi.

Keyinchalik B. Brun natijasi bir necha bor yaxshilandi, lekin Goldbax problemasini bu metod bilan yechib bo'lmadi. Shunga qaramasdan B. Brun metodi, keyinchalik esa uning turli shakl o'zgartirilgan variantlari: A. Selberg g'alviri, Yu.Linnikning katta g'alvirlari tub sonlar taqsimoti nazariyasida tadbiiq etilib, bu sohada salmoqli natijalar olish imkonini berdi.

Ingliz matematiklari G.Xardi va Dj. Littlvud (Hardy G.H., Littlewood J.E.) lar 1924 yilda Goldbaxning ternar problemaga doiraviy usulni qo'llab, hozircha isbotlanmagan Dirixle  $L$  – funksiyani no'llari haqidagi Rimanning umumlashgan gipotezasini(URG) (unga ko'ra Dirixle  $L$  – funksiyasi

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}, \quad \text{Res} = \sigma > 1, (s = \sigma + it)$$

(bunda  $\chi(n)$  –Dirixle xarakteri) ning barcha trivial bo'lmagan no'llari  $\sigma = \frac{1}{2}$  to'g'ri chiziqda yotadi) o'rinli deb qarab yetarlicha katta  $n$  toq sonining uchta tub son yig'indisi  $n = p_1 + p_2 + p_3$  ko'rinishda ifodalashlar soni  $\mathcal{R}(n)$  uchun asimptotik formula oladilar.

I.M. Vinogradov [2,10] o'zi yaratgan trigonometrik yig'indilar metodi yordamida 1937 yilda yetarlicha katta  $n \geq N_0$  lar uchun bu masalani hal qildi. 1956 yilda K.G.Borozdkin bunda  $N_0 \leq \exp \exp \exp(41,96)$  bo'lishi kerak ekanlini ko'psatdi. Keyinchalik bu natija Chen Jing Ren va A. Qosimovlar tomonidan bir necha bor yaxshilandi.

$(1, N_1)$  oraliqdagi toq sonlar uchun Goldbaxning ternar problemasining o'rinli ekanligi kompyuterlar yordamida tekshirib ko'rilgan. Shuning uchun ham faqat  $(N_1, N_0)$  – oraliqda problemani o'rinli ekanligini isbotlash qoldi. Bu sohadgi oxirgi natija J. –M.Deshouillers, G. Effinger, H.Te Riele va D. Zinoviev [3] larga tegishli. Ular agar URG o'rinli bo'lsa, ternar problemani barcha toq  $n \geq 6$  lar uchun o'rinli ekanligini ko'rsatdilar. Lekin URG esa hozircha to'la isbotlanmagan.

Endi Xardi - Littlvud va I.M. Vinogradov metodlarining mohiyatiga to'xtalib o'tamiz.

Avvalo, Xardi - Littlvud metodi haqida. Bu metodning mohiyati quyidagidan iborat: faraz qilaylik  $A = \{a_m\}$  – manfiy bo'lmagan butun sonlarning qat'iy o'suvchi ketma-ketligi bo'lsin. Ushbu

$$F(z) = \sum_{m=1}^{\infty} z^{a_m}, \quad (|z| < 1)$$

funksiyani qaraymiz. U holda uning  $s$  – darajasi

$$F^S(z) = \sum_{m_1=1}^{\infty} \dots \sum_{m_s=1}^{\infty} z^{a_{m_1} + \dots + a_{m_s}} = \sum_{n=0}^{\infty} R_s(n) z^n,$$

dan iborat bo'ladi. Bunda  $R_s(n)$  bilan  $n$  sonining  $A$  dan olingan  $s$  ta hadning yig'indisi ko'rinishda ifodalashlar soni belgilangan. Masala hech bo'lmasa  $n$  ning katta qiymatlarida  $R_s(n)$  ni baholashdan iborat.

Koshining integral formulasiga ko'ra

$$R_s(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho} F^s(z) z^{-n-1} dz,$$

bunda  $0 < \rho < 1$ .

Xardi–Littlvd–Ramanudjan (X-L-R) metodi bo'yicha  $R_s(n)$  ikkita  $I_1$  va  $I_2$  qo'shiluvchilarga ajratiladi.  $R_s(n)$  uchun asimptotik formulada birinchi qo'shiluvchi  $I_1$  bosh hadni, ikkinchi qo'shiluvchi  $I_2$  esa qoldiq hadni beradi. Shunday qilib X–L–R ning doiraviy usuli, bu  $R_s(n)$  dan taxmin qilinayotgan bosh hadni ajratish usulidir.

Endi I.M. Vinogradov metodining mohiyatiga to'xtalib o'tamiz.

Bu metodning mohiyati quyidagidan iborat: avvalo X–L–R metodidagi integral tagidagi funksiyani (cheksiz qatorni) chekli trigonometrik yig'indi bilan almashtirdi. Keyin  $I_1$  ni X–L–R metodi bo'yicha tekshiradi,  $I_2$  esa I.M. Vinogradovning trigonometrik yig'indilar metodi [2,10] bilan baholanadi.

I.M. Vinogradov metodi Goldbaxning ternar problemasini isbotlash va Varing problemasidagi qoldiq hadni yaxshilash imkonini beribgina qolmay, balki hozirgacha qiyin hisoblanib kelingan kasr qismlarining taqsimlanishi, kvadratik chegirmalarning soni singari ko'pchilik masalalarda ham muhim natijalar olish imkonini berdi.

Ikkita tub son yig'indisi haqidagi problemani esa Rimanning umumlashgan gipotezasiga tayanib ham hal etib bo'lmadi. G.Xardi va Dj. Littlvdlar faqatgina “deyarli barcha” juft sonlarning ikkita tub son yig'indisi ko'rinishida ifodalanishiniga ko'rsata oldilar xolos, ya'ni agar  $E(X)$  bilan  $X$  dan katta bo'lmagan va ikkita tub son yig'indisi ko'rinishida ifodalanmaydigan deb gumon qilingan juft sonlar sonini belgilasak

$$\lim_{X \rightarrow \infty} \frac{E(X)}{X} = 0$$

ekanligini isbotladilar.

1930 yilda L.G.Shnirelman sonlar nazariyasining additiv masalalarini yechish uchun yangi metodni taklif etdi. U o'zi taklif etgan metod bilan shunday bir  $r$  absolyut doimiysi mavjudki, har bir  $n$  natural sonini  $r$  tadan ortiq bo'lmagan tub sonlar yig'indisi ko'rinishida ifodalash mumkin ekanligini ko'rsatdi. Lekin L.G.Shnirelman isbotidagi  $r$  soni ancha katta bo'lib chiqdi ( $r \leq 8 \cdot 10^5$ ).

Keyinchalik  $r$  ning qiymati ketma-ket bir necha bor N.P.Romanov, X.Xeylbron, E.Landau, Sherka, D.Richchi, X.Shapiro, J.Varga, In Ven-Linya, N.I.Klimov, R.Von va boshqa matematiklar tomonidan yaxshilandi.

A.F.Lavrik faqatgina L.G.Shnirelman metodidan foydalanib  $r = 8$  dan yaxshi natija olish mumkin emasligini ko'rsatdi. Shuning uchun ham ko'pchilik mualliflar o'z izlanishlarida L.G.Shnirelman metodining boshqa metodlar bilan kombinatsiyasidan foydalanganini aytib o'tish joizdir.

Lekin binar problema hosirgacha t'ola hal etilgan emas. Bu sohada N.G.Chudakov [4], T. Esterman [5] va Van-der-Corput [6] lar Vinogradovning trigonometrik yig'indilar metodini qo'llab deyarli barcha juft sonlarning ikkita toq tub sonning yig'indisi ko'rinishida ifodalanishini ko'satdilar. Aniqroq qilib aytganda agar  $E(X)$  bilan  $[2, X]$  oraliqdagi ikkita tub son yig'indisi ko'rinishida ifodalanmaydigan juft sonlarning sonini belgilasak, yuqoridagi mualliflar belgilangan  $A > 0$  soni uchun

$$E(X) \ll \frac{X}{\ln^A x}$$

bahoning o'rinni ekanligini isbotladilar. Bu natija boshqa metod bilan Yu.Linnik [11] tomonidan ham isbot qilingan.

A.F.Lavrik [12]  $n$  juft sonining ikkita tub son yig'indisi ko'rinishida ifodalashlar soni, ya'ni

$$n = p_1 + p_2 \quad (1)$$

tenglamaning tub sonlardagi yechimlari soni  $\mathcal{R}(n)$  uchun asimptotik formula oladi. Bu formula (1, X) oraliqdagi  $n$  ning ko'pi bilan

$$\ll \frac{X}{\ln^A x}$$

ta qiymatidan boshqa barcha qiymatlari uchun o‘rinli.

Keyinchalik  $E(X)$  ning yuqoridagi baholari bir necha bor yaxshilandi. Jumladan R.C.Vaughan [13]

$$E(X) < X \exp(-c\sqrt{\ln X}), \quad (2)$$

R.C. Vaughan va H.L.Montgomerylar [7]

$$E(X) < X^{1-\delta}, \quad (3)$$

bunda  $\delta$ ,  $0 < \delta < 1$  shartni qanoatlantiruvchi effektiv konstanta. R.C. Vaughan va H.L. Montgomerylar [7] da, agar URG o‘rinli bo‘lsa,  $\delta = \frac{1}{2} + \varepsilon$  deb olish mumkin ekaligini aytib o‘tganlar. Bu yerda  $\varepsilon > 0$  yetarlicha kichik o‘zgarmas son. I.Allakov [8], J.Chen, C.Pan [9] lar tomonidan  $\delta$  ning qiymati aniqlashtirilib yetarlicha katta  $X$  lar uchun

$$E(X) < X^{0.96}$$

baholar olingan.

Faraz qilaylik  $\chi - q$  ( $q \leq T$ ) moduli bo‘yicha Dirixle xarakteri bo‘lsin. Ma’lumki ([14], IX-bob, §2), shunday bir o‘zgarmas  $c_1$  soni mavjudki Dirixle  $L$  – funksiyasi  $L(s, \chi)$ , ( $s = \sigma + it$ )

$$\sigma > 1 - \frac{c_1}{\ln T}, \quad |t| \leq T$$

sohada faqat birta primitiv haqiqiy xarakter  $\tilde{\chi}(\bmod \tilde{r})$  ( $\tilde{r} \leq T$ ) uchun  $\tilde{\delta} = 1 - \tilde{\beta}$  haqiqiy no‘lga ega bo‘lishi mumkin. Agar shu shartni qanoatlantiruvchi no‘l  $\tilde{\beta}$  mavjud bo‘lsa, u

$$\frac{c_2}{\tilde{r}^{1/2} \ln^2 \tilde{r}} \leq 1 - \tilde{\beta} \leq \frac{c_1}{\ln T}$$

tengsizlikni qanoatlantiradi. Bu no‘l  $\tilde{\beta}$  ni  $L$  – funksiyaning maxsus no‘li deb ataymiz.

I.Allakov [14] da  $n$  juft sonining ikkita tub son yig‘indisi ko‘rinishida ifodalashlar soni,  $\mathcal{R}(n)$  uchun asimptotik formula oldi. Bu formula  $(1, X)$  oraliqdagi  $n$  ning ko‘pi bilan

$$E(X) < X \exp(-c\sqrt{\ln X})$$

ta qiymatidan boshqa barcha qiymatlari uchun o‘rinli. Lekin u Dirixle  $L$  – funksiyasining yuqorida ko‘rsatilgan maxsus noli mavjud bo‘lsa, bu asimptotik formulada tartibi bosh hadning tartibi bilan bir xil bo‘lgan had ham ishtirok etadi. Shuning uchun ham I.Allakov tomonidan [14] da isbotlangan formulalar Dirixle  $L$  – funksiyasining maxsus no‘li mavjud bo‘lmagan holda oqatdagidek asimptotik formula bo‘lsada shunday no‘l mavjud bo‘lgan holda oqatdagidan boshqacharoq formulani ifodalaydi. Ya’ni bu holda  $\mathcal{R}(n)$  uchun quyidan baho olingan.

[15] da I.Allakov  $n$  juft sonining ikkita tub son yig‘indisi ko‘rinishida ifodalashlar soni,  $\mathcal{R}(n)$  uchun quyidan baho olgan. Bu baho  $(1, X)$  oraliqdagi  $n$  ning ko‘pi bilan

$$E(X) < X^{0.96}$$

ta qiymatidan boshqa barcha qiymatlari uchun o‘rinli.

Shuning uchun ham bu sohadagi izlanishlar muhim hisoblanadi.

I.Allakovning [15] da

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + (T - \gamma_n)^2} \leq c_3 \ln T, \quad T \geq T_0 \geq 3$$

bahosidagi  $c_3$  ning qiymati aniqlashtirilib sonli baho olinganini ta’kidlab o‘tamiz. Aniqroq qilib aytganda  $c_3$  ning  $T_0$  orqali ifodaga keltirilib chiqarilib  $T_0 = 3$  da hisoblangan va  $c_3 = 5,4695$  natija olingan, ya’ni quyidagi teorema isbotlangan.

**Teorema.** Agar  $q_n = \beta_n + i\gamma_n, n = 1, 2, 3, \dots$  lar  $\zeta(s)$  ning barcha trivial bo'lmagan nollari bo'lsa, u holda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + (T - \gamma_n)^2} \leq c_3 \ln T, \quad T \geq T_0 \geq 3$$

munosabat o'rinli. Bu yerda

$$c_3 = \frac{4}{(T_0^2 + 1)\ln T_0} + \frac{1,5834 + \ln 2\pi}{\ln T_0} + 1 + \frac{\gamma}{\ln T_0} + \frac{3}{2T_0 \ln T_0} + \frac{1}{12T_0^2 \ln T_0} \leq 5,4695$$

va  $\gamma = 0,5772 \dots$  – Eyler doimiysi.

Agarda biz bu bahoda  $T_0 = 14$  deb olsak  $c_3 \leq 2,28$  bahoga ega bo'lamiz.

Keltirilgan teoremadan ushbu natijalar kelib chiqadi.

**1-natija.**  $\zeta(s)$  ning  $T \leq |\operatorname{Im} q_n| \leq T + 1$  shartni qanoatlantiruvchi nollari soni  $2,28 \ln T$  dan ko'p emas.

**2-natija.** Agar  $T \geq T_0 \geq 3$  bo'lsa,

$$\sum_{|T - \gamma_n| > 1} \frac{1}{(T - \gamma_n)^2} \leq c_4 \ln T,$$

$$c_4 = 5 \left( \frac{1}{(T_0^2 + 1)\ln T_0} + \frac{0,22305 + \ln 2\pi}{\ln T_0} + 1 + \frac{3}{2T_0 \ln T_0} + \frac{1}{12T_0^2 \ln T_0} \right) \leq 7,61.$$

Olingan sonli natijalar [15] dagi natijalarning yaxshilangani hisoblanadi.

#### Adabiyotlar

1. Бухштаб А.А. Теория чисел. –М.: Просвещение, 1967. - 384 с.
2. Виноградов И.М. Особые варианты метода тригонометрических сумм. – М.: Наука, 1976. – 120 с.
3. Deshouillers J. –M., Effinger G., Te Riele H. and Zinoviev D. A complete Vinogradov 3-primes theorem under the Riemann hypothesis. // Electronic research announcements of the American Mathematical Society. vol.3, p.99-104 (September 17, 1997), S1079-6762(97), 00031-0.
4. Чудаков Н.Г. О проблеме Гольдбаха // Доклады АН СССР. –М.:, 1937. т.17. - с. 331-334.
5. Esterman T. On Goldbach's problem: Proof that almost all even positive integers are sums of two primes // Pros. London Math. Soc. -1938. - V.44, №2, - P.307-314.
6. Van-der-Corput J.G. Sur l' hypothese de Goldbach // Proc. Akad. Wet. Amsterdam . 1938, v.41, P. 76-80.
7. Montgomery H.L., Vaughan R.C. The exceptional set in Goldbach's problem // Acta arithm. – 1975.- V.27. - P.353-370.
8. Аллаков И. А. Об исключительном множестве в бинарной проблеме Гольдбаха. - Т.: 1981, 76 с. - С решением редколлегии Узб. матем. журнала Деп. в ВИНТИ 30.10.81. № 5166-81.
9. Chen Jing ren and Pan Chendong. The exceptional set of Goldbach-number (I) // Sci. Sinica. - 1980. - № 4(23). - P. 416 - 430.
10. Виноградов И.М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел. - М.: Наука. 1980. - 144с.
11. Линник Ю.В. Новое доказательство теоремы Гольдбаха-Виноградова. //Матем. сб. 19(61), 1946 б с.3-8.
12. Лаврик А.Ф. К бинарным проблемам аддитивной теории простых чисел в связи с методом тригонометрических сумм И.М. Виноградова // Вестник ЛГУ. - 1961. - №13. - с. 11-27.
13. Vaughan R.C. Mean value theorems in prime number theory // J. London Math. Soc. - 1975. - №2 (10). - p. 153-162.
14. Аллаков И. Сонлар назариясининг баъзи бир аддитив масаларини аналитик усуллар билан ечиш. Монография. -Т, «Таълим» 2012, 200 б.
15. Аллаков И. Исключительное множество суммы двух простых чисел. //Диссертация на соискание ученой степени канд. физ.-мат.наук. – Т., 1983. – 148 с.

УДК 532.546

**ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИИ СУСПЕНЗИЙ С ОБРАЗОВАНИЕМ КЕЙК-СЛОЯ****Б.Х.Хужаёров, У.Ж.Сайдуллаев***Самаркандский государственный университет**b.khuzhayorov@mail.ru*

**Аннотация.** В работе численно решена осесимметричная задача фильтрации суспензий с образованием кейк-слоя. Изучено влияние различных параметров модели на компрессионное давление и давление жидкости вдоль кейк-слоя, а также на рост его толщины.

**Ключевая слова:** кейк-слой, фильтрация, цилиндрический фильтр, суспензия.

**Keyk-qatlam hosil bo'ladigan holda suspenziyalar sizishining o'qqa simmetrik masalalarini sonli yechish**

**Annotatsiya.** Ishda keyk-qatlam hosil bo'ladigan holda suspenziyalar sizishining o'qqa nisbatan simmetrik masalasi sonli yechilgan. Modeldagi turli parametrlarning keyk-qatlam bo'ylab compression va suyuqlik bosimiga hamda keyk-qatlam qalinligining o'sishiga ta'siri o'rganilgan.

**Kalit so'zlar:** keyk-qatlam, sizish, silindrik filtr, suspenziya.

**Numerical solution of an axi-symmetric problem of suspensions filtration with forming a cake**

**Abstract.** In the paper an axi-symmetric problem of suspensions filtration with forming a cake is numerically solved. Influence of different model parameters on compression and fluid pressure across cake and growth of its thickness is studied.

**Key words:** cake, filtration, axi-symmetric filter, suspension.

Фильтрованием называют процессы разделения неоднородных систем при помощи пористой перегородки, которое задерживает одни фазы этих систем и пропускает другие. К этим процессам относится разделение суспензии на чистую жидкость и осадок. Разделение суспензии, в которой взвешены твердые частицы, производится при помощи фильтра. Процессы разделения суспензии встречаются в химической, нефтехимической, нефтеперерабатывающей, угольной, пищевой и некоторых других отраслях промышленности [1].

Важнейшей характеристикой суспензий, влияющей на вид и интенсивность фильтрования, является концентрация твердой фазы, выраженная в долях объема или массы. В зависимости от концентрации твердой фазы в суспензии различают виды фильтрования [1, 2, 3]: с образованием осадка, промежуточное, с закупориванием пор осадка, с постепенным, а также с полным закупориванием пор фильтровальной перегородки. Твердые частицы, содержащиеся в суспензии, задерживаются на поверхности перегородки и образуют слой осадка. Этот процесс называется фильтрованием с образованием осадка, т.е. «cake filtration».

Фильтрование с образованием кейк-слоя основывается на фундаментальные уравнения механики многокомпонентных сред и теории фильтрационной консолидации с учётом влияния гидродинамических и реологических факторов на закономерности процесса фильтрования [4, 5, 6].

В теории фильтрования основными осредненными характеристиками являются скорость фильтрования и давление. Процесс течения суспензии в пористой среде описывается законом Дарси. В [7-12] было приведено объемное осреднение уравнений механики двухфазных потоков и получены уравнения фильтрования. В [2, 4] динамические уравнения получены путем статистического осреднения уравнений механики двухфазных потоков, учитывающих инерционные эффекты при фильтровании. Дифференциальные уравнения фильтрования в [8-12] получены на основе уравнений механики двухфазных потоков и механики грунтов, учитывающих изменение фильтрационных параметров по толщине осадка и во времени.

Так как в процессе фильтрования граница раздела осадок-суспензия является подвижной, то модели обычно приводятся к задачам Стефана [2, 4, 5, 6], численное решение которых, как известно, имеет ряд специфических особенностей [13, 14].

В данной работе рассматривается осесимметричная задача фильтрации суспензии, учитывающая консолидацию кейк-слоя.

**1. Построение математической модели.** Рассмотрим процесс фильтрования суспензий через цилиндрический фильтр. Суспензия подается через внешнюю поверхность фильтра, имеющего радиус  $R$ , на которой образуется кейк-слой.

Основное уравнения фильтрования с образованием кейк - слоя в цилиндрических координатах имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\beta \varepsilon_s^0}{p_A} \left(1 + \frac{p_s}{p_A}\right)^{\beta-1} \frac{\partial p_s}{\partial t} = \frac{\varepsilon_s^0 k^0}{\mu} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \left(1 + \frac{p_s}{p_A}\right)^{\beta-\delta} r \frac{\partial p_s}{\partial r} \right) + \\ + \frac{\beta \varepsilon_s^0}{p_A} \left(1 + \frac{p_s}{p_A}\right)^{\beta-1} \frac{q_{\text{вых}}}{2\pi} \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial p_s}{\partial r}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $p_A$  - характерное давление,  $\varepsilon_s^0$ ,  $k^0$  - значения твердосодержимости  $\varepsilon_s$  и проницаемости  $k$  при  $p_s = 0$ , соответственно,  $\beta$ ,  $\delta$  - показатели, постоянные,  $\mu$  - вязкость,  $t$  - время,  $p_s$  - компрессионное давление,  $r$  - радиальная координата,  $q_{\text{вых}} = 2\pi r \frac{k^0}{\mu} \left(1 + \frac{p_s}{p_A}\right) \frac{\partial p_s}{\partial r} \Big|_{r=R}$  - поток фильтрата через фильтр.

Уравнение для подвижного радиуса  $R_L(t)$ , которое выражает толщину цилиндрического кейк - слоя, т.е. радиус границы между суспензией и кейк - слоем, записываем в следующем виде:

$$\frac{dR_L}{dt} = \frac{\varepsilon_s^0}{\varepsilon_s^0 - \varepsilon_{s_0}} \left[ \frac{k}{\mu} \frac{\partial p_s}{\partial r} \right]_{r=R_L} + \frac{1}{2\pi R_L} q_{\text{вых}}. \quad (2)$$

На поверхности  $r = R_L$  сжимающие частицы напряжения равны нулю, так что  $\varepsilon_s|_{R_L}$  можно принять равным  $\varepsilon_s^0$  - твердосодержимости при нулевом напряжении. С другой стороны  $\varepsilon_s|_{R_L}$  равно концентрации твердых частиц в суспензии  $\varepsilon_{s_0}$ .

Если процесс начинается в новом фильтре без предварительной прокачки жидкости, то можно принять начальное условие

$$R_L(0) = R. \quad (3)$$

Если процесс фильтрования начинается с внезапным приложением давления или заданием скорости потока начальное условие для  $p_s$  можно принять нулевым, т.е.

$$p_s(0, r) = 0. \quad (4)$$

Граничные условия для осесимметричной задачи

$$p_s = 0, \quad \text{при } r = R_L(t), \quad (5a)$$

$$-2\pi \left[ r \frac{k}{\mu} \frac{\partial p_s}{\partial r} \right]_{r=R} = \frac{p_0 - p_s}{\mu R_m} \Big|_{r=R} \quad \text{при } r = R. \quad (5b)$$

Уравнение (1) напомним в следующем виде

$$\frac{\partial p_s}{\partial t} = \frac{p_A k^0}{\beta \mu} \left(1 + \frac{p_s}{p_A}\right)^{1-\beta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \left(1 + \frac{p_s}{p_A}\right)^{\beta-\delta} r \frac{\partial p_s}{\partial r} \right) + \frac{q_{\text{вых}}}{2\pi} \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial p_s}{\partial r}. \quad (6)$$

Вводим следующие обозначения

$$\begin{aligned} a(p) = \frac{p_A k^0}{\beta \mu} \left(1 + \frac{p_s}{p_A}\right)^{1-\beta}, \quad b(p) = \left(1 + \frac{p_s}{p_A}\right)^{\beta-\delta}, \quad c(p) = \frac{\varepsilon_s^0}{\varepsilon_s^0 - \varepsilon_{s_0}} \frac{k^0}{\mu} \left(1 + \frac{p_s}{p_A}\right)^{-\delta}, \\ c^0(p) = \frac{k^0}{\mu} \left(1 + \frac{p_s}{p_A}\right)^{-\delta} \Big|_{r=R}. \end{aligned}$$

С учетом этих обозначений уравнение (6) преобразуется к следующему виду



$$\frac{\partial p_s}{\partial t} = a(p) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( b(p) r \frac{k}{\mu} \frac{\partial p_s}{\partial r} \right) - \frac{q_{\text{вбх}}}{2\pi} \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial p_s}{\partial r}. \quad (7)$$

Уравнение для подвижной границы  $R_L(t)$  - (2) приводится к виду

$$\frac{dR_L}{dt} = c(p) \left[ \frac{\partial p_\ell}{\partial r} \right]_{r=R_L} + \frac{1}{2\pi R_L} q_{\text{вбх}}, \quad (8)$$

где

$$q_{\text{вбх}} = \left[ -c^0(p) 2\pi \frac{\partial p_\ell}{\partial r} \right]_{r=R}.$$

**2. Численная реализация.** Для решения задачи (7) - (8) используем метод конечных разностей [13,14]. Введем равномерную сетку по  $t$  с шагом  $\tau$   $\overline{\omega}_\tau = \{t | t = t_j = j\tau, j = 0, 1, \dots, N, \tau N = T\}$ , а по координате  $r$  будем использовать неравномерную сетку

$$\overline{\omega}_h = \{r | r = r_i = r_{i-1} + h_i, i = 1, 2, \dots, N, r_N = R_{L-}\}$$

с переменным шагом  $h_i > 0$ . Следует выбирать шаг  $h_i$  из промежутка  $[r_i, r_{i+1}]$  так, чтобы подвижная граница сдвинулась ровно на один шаг по временной сетке. Этот подход известен как метод ловли фронта в узел сетки. Сеточную функцию, соответствующую  $p_s$  обозначим через  $\phi_i^{j+1}$ . Аппроксимируем уравнение (7) неявной разностной схемой, нелинейной относительно функции  $\phi_i^{j+1}$

$$\begin{aligned} \frac{\phi_i^{j+1} - \phi_i^j}{\tau} = & \frac{a(\phi_i^j)}{r_i} \frac{2}{h_i + h_{i+1}} \left\{ b(\phi_{i+1/2}^{j+1}) r_{i+1/2} \frac{\phi_{i+1}^{j+1} - \phi_i^{j+1}}{h_{i+1}} - \right. \\ & \left. - b(\phi_{i-1/2}^{j+1}) r_{i-1/2} \frac{\phi_i^{j+1} - \phi_{i-1}^{j+1}}{h_i} \right\} - (q_{\text{вбх}})_0^{j+1} \frac{1}{2\pi r_i} \frac{\phi_i^{j+1} - \phi_{i-1}^{j+1}}{h_i}, \\ & i = 1, \dots, N-1, \quad j = 0, 1, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} r_{i-1/2} = \frac{r_{i-1} + r_i}{2}, \quad r_{i+1/2} = \frac{r_i + r_{i+1}}{2}, \quad a(\phi_i^j) = \frac{p_A k^0}{\beta \mu} \left( 1 + \frac{\phi_i^j}{p_A} \right)^{1-\beta}, \quad b(\phi_{i+1/2}^{j+1}) = \frac{1}{2} \left[ \left( 1 + \frac{\phi_{i+1}^{j+1}}{p_A} \right)^{\beta-\delta} + \left( 1 + \frac{\phi_i^{j+1}}{p_A} \right)^{\beta-\delta} \right], \\ c^0(\phi_0^{j+1}) = \frac{k^0}{\mu} \left( 1 + \frac{\phi_0^{j+1}}{p_A} \right)^{-\delta}, \quad (q_{\text{вбх}})_0^{j+1} = -2\pi r_1 c^0(\phi_0^{j+1}) \left( \frac{\phi_1^{j+1} - \phi_0^{j+1}}{h_0} \right). \end{aligned}$$

Уравнение (8) с учетом  $\frac{dR_L}{dt} \approx \frac{h_{i+1}}{\tau}$  после аппроксимации приводится к виду

$$\frac{h_{i+1}}{\tau} = - \left[ c(\phi_{i-1/2}^j) \left( \frac{\phi_i^{j+1} - \phi_{i-1}^{j+1}}{h_{i+1}} \right) \right] - \frac{1}{2\pi r_i} (q_{\text{вбх}})_0^{j+1}, \quad (10)$$

где

$$c(\phi_{i-1/2}^j) = \frac{\varepsilon_s^0}{\varepsilon_s^0 - \varepsilon_{s_0}} \frac{k^0}{2\mu} \left[ \left( 1 + \frac{\phi_i^j}{p_A} \right)^{-\delta} + \left( 1 + \frac{\phi_{i-1}^j}{p_A} \right)^{-\delta} \right].$$

Аппроксимация начального (4) и граничных условий (5) дает

$$\begin{aligned} \phi_i^j = 0, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad j = 0, \\ -2\pi r_1 c^0(\phi_0^j) \frac{\phi_1^j - \phi_0^j}{h_1} = \frac{p_0 - \phi_0^{j+1}}{R_m}, \quad j = \overline{0, N}, \\ \phi_i^{j+1} = 0, \quad i = N+1, N+2, \dots, \quad j = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (11)$$

Полученная система уравнений является нелинейной, поэтому для ее решения воспользуемся методом простой итерации и перепишем систему (9) в виде

$$\frac{\phi_i^{\lambda+1,j+1} - \phi_i^j}{\tau} = \frac{a(\phi_i^j)}{r_i} \frac{2}{h_i + h_{i+1}} \left\{ b(\phi_{i+1/2}^{\lambda,j+1}) r_{i+1/2} \frac{\phi_{i+1}^{\lambda+1,j+1} - \phi_i^{\lambda+1,j+1}}{h_{i+1}} - \right. \\ \left. - b(\phi_{i-1/2}^{\lambda,j+1}) r_{i-1/2} \frac{\phi_i^{\lambda+1,j+1} - \phi_{i-1}^{\lambda+1,j+1}}{h_i} \right\} - \left( q_{\text{вых}}^{\lambda} \right)_0^{j+1} \frac{1}{2\pi_i} \frac{\phi_i^{\lambda+1,j+1} - \phi_{i-1}^{\lambda+1,j+1}}{h_i}, \\ i = 1, \dots, N-1, \quad j = 0, 1, \dots, N-1, \quad (12)$$

где

$$b\left(\phi_{i+1/2}^{\lambda,j+1}\right) = \frac{1}{2} \left[ \left( 1 + \frac{\phi_{i+1}^{\lambda,j+1}}{p_A} \right)^{\beta-\delta} + \left( 1 + \frac{\phi_i^{\lambda,j+1}}{p_A} \right)^{\beta-\delta} \right], \\ (q_{\text{вых}}^{\lambda})_0^{j+1} = 2\pi_1 c^0 \left( \phi_0^{\lambda,j+1} \right) \left( \frac{\phi_1^{\lambda,j+1} - \phi_0^{\lambda,j+1}}{h_0} \right),$$

$\lambda$  - номер итерации.

Видно, что система (12) уже является линейной относительно  $\phi_i^{(\lambda+1),j+1}$ , что позволяет использовать метод прогонки. В качестве условия остановки счета на данном временном слое можно использовать следующее

$$\max_i \left| \phi_i^{(\lambda+1),j+1} - \phi_i^{(\lambda),j+1} \right| \leq \delta, \quad (13)$$

где  $\delta$  – точность вычислений.

Когда условие (12) выполняется, то  $\phi_i^{(\lambda+1),j+1} = \phi_i^{j+1}$ . В качестве начального приближения можно взять  $\phi_i^{(\lambda=0),j+1} = \phi_i^j$ .

Уравнения (12) приводятся к системе линейных уравнений

$$A_i \phi_{i-1}^{(\lambda),j+1} - B_i \phi_i^{(\lambda),j+1} + C_i \phi_{i+1}^{(\lambda),j+1} = -F_i, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad (14)$$

где

$$A_i = \frac{a(\phi_i^j)}{r_i} \frac{2}{h_i + h_{i+1}} \frac{b(\phi_{i-1/2}^{\lambda,j+1})}{h_i} r_{i-1/2} + (q_{\text{вых}}^{\lambda})_0^{j+1} \frac{1}{2\pi_i h_i}, \\ B_i = \frac{1}{\tau} + \frac{a(\phi_i^j)}{r_i} \frac{2}{h_i + h_{i+1}} \left[ \frac{b(\phi_{i+1/2}^{\lambda,j+1})}{h_{i+1}} r_{i+1/2} + \frac{b(\phi_{i-1/2}^{\lambda,j+1})}{h_i} r_{i-1/2} \right] + (q_{\text{вых}}^{\lambda})_0^{j+1} \frac{1}{2\pi_i h_i}, \\ C_i = \frac{a(\phi_i^j)}{r_i} \frac{2}{h_i + h_{i+1}} \frac{b(\phi_{i+1/2}^{\lambda,j+1})}{h_{i+1}} r_{i+1/2}, \quad F_i = \frac{1}{\tau} \phi_i^j.$$

Соотношение (10) используется для определения шага по координате и его можно записать в виде

$$(h_{i+1})^2 - \frac{\tau}{2\pi_i} (q_{\text{вых}}^{\lambda})_0^{j+1} h_{i+1} - \pi (\phi_{i-1/2}^j) (\phi_i^{j+1} - \phi_{i-1}^{j+1}) = 0. \quad (15)$$

Решая это нелинейное уравнение на каждом временном слое определим  $h_{i+1}$ . Система уравнений (14) решается методом прогонки

$$\phi_i^{(j+1)} = \alpha_{i+1}^{(j+1)} \phi_{i+1}^{(j+1)} + \beta_{i+1}^{(j+1)}, \quad (16)$$

где

$$\alpha_{i+1}^{(j)} = \frac{C_i^{(j)}}{B_i - A_i \alpha_i^{(j)}}, \quad \beta_{i+1}^{(j)} = \frac{F_i + A_i \beta_i^{(j)}}{B_i - A_i \alpha_i^{(j)}}.$$

**3. Численные результаты.** Численные результаты решения задачи (14) - (15) получены при следующих значениях параметров:  $p_A = 10^4$  Па,  $p_0 = 10^5$  Па,  $R_m = 10^{12}$  1/м<sup>2</sup>,  $\mu = 10^{-3}$  Па·с,  $k^0 = 10^{-13}$  м<sup>2</sup>,  $\varepsilon_s^0 = 0.20$ ,  $\varepsilon_{s_0} = 0,0076$ ,  $\beta = 0,13$ ,  $\delta = 0,57$ . Некоторые результаты отражены на рис.1-3. Значение  $\varepsilon_s$  монотонно уменьшается от поверхности фильтра до общей границы кейк-слоя и суспензии (Рис.1). По мере роста толщины кейк-слоя с течением времени можно заметить продвижение профилей распределения  $\varepsilon_s$ . Аналогично можно построить профили  $\varepsilon$ , они имеют возрастающий характер по  $r$  в соответствии с соотношением  $\varepsilon + \varepsilon_s = 1$ .

Для заданного значения  $\delta$  распределение относительной проницаемости в кейк-слое показано на рис.2. Как видно из рисунка, по мере роста толщины кейк-слоя за счет уплотнения и переупаковки частиц и роста компрессионного давления проницаемость уменьшается, что можно характеризовать как рост его фильтрационного сопротивления.

Произведены расчеты характеристик фильтрования при различных значениях  $p_0$ . Некоторые результаты представлены на рис.3. Как видно из графиков, увеличение давления подачи суспензии приводит к интенсификации процесса фильтрования. Устанавливается распределение давлений  $p_\ell$  и  $p_s$  с более высокими значениями, при схожести самих профилей.

Таким образом, можно заключить, что представленная модель позволяет физически корректно, количественно оценить основные показатели фильтрации суспензий через цилиндрические фильтры, а также образования кейк-слоя.

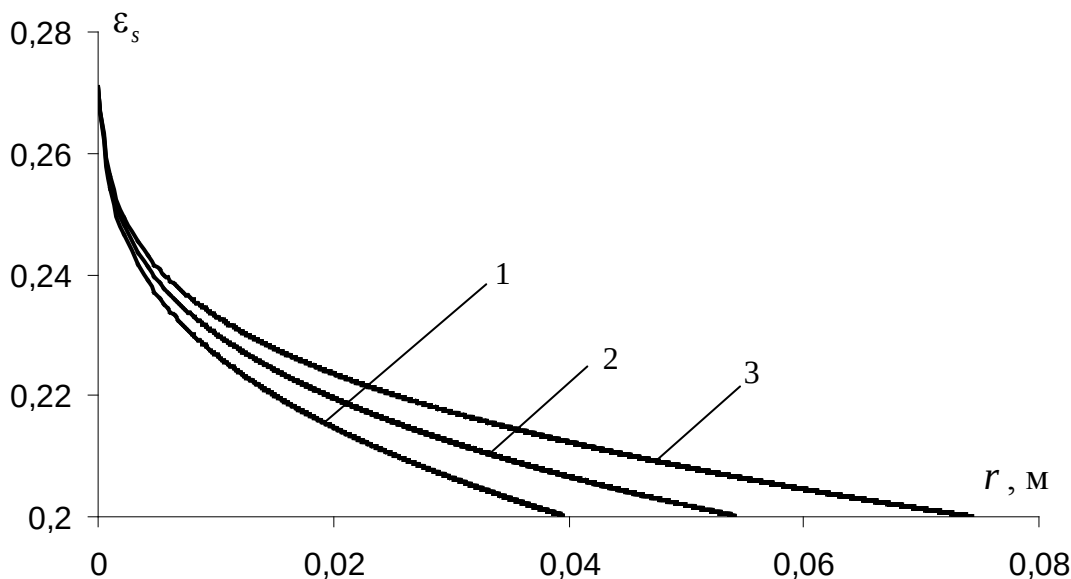


Рис.1. Изменение  $\varepsilon_s$  по толщине осадка при  $t = 450$  (1);  $900$  (2);  $1800$  (3) с. ( $r = R$  принято как начало отсчета расстояния).

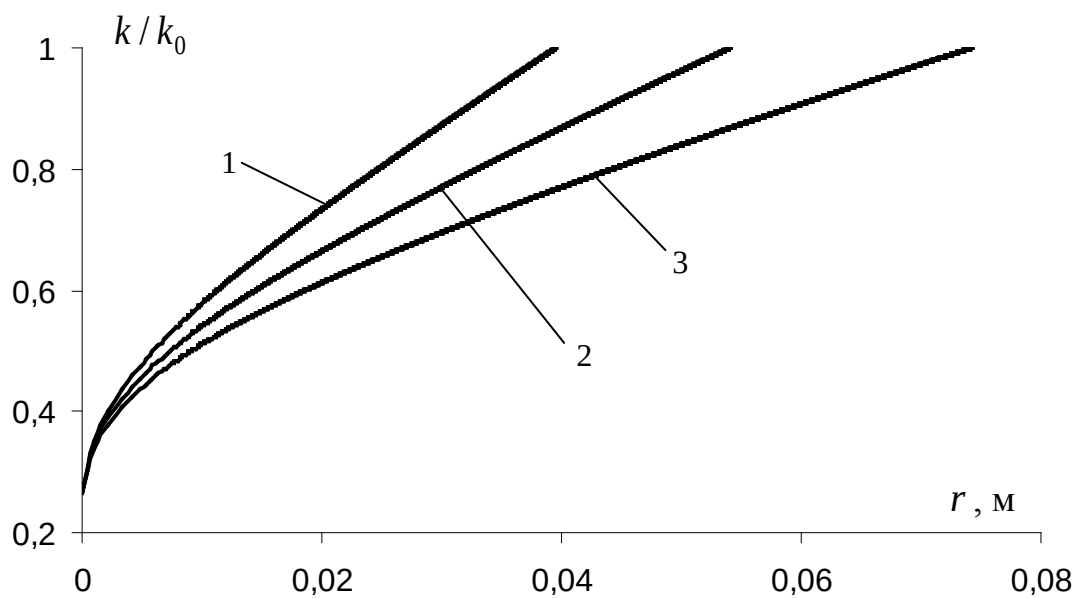
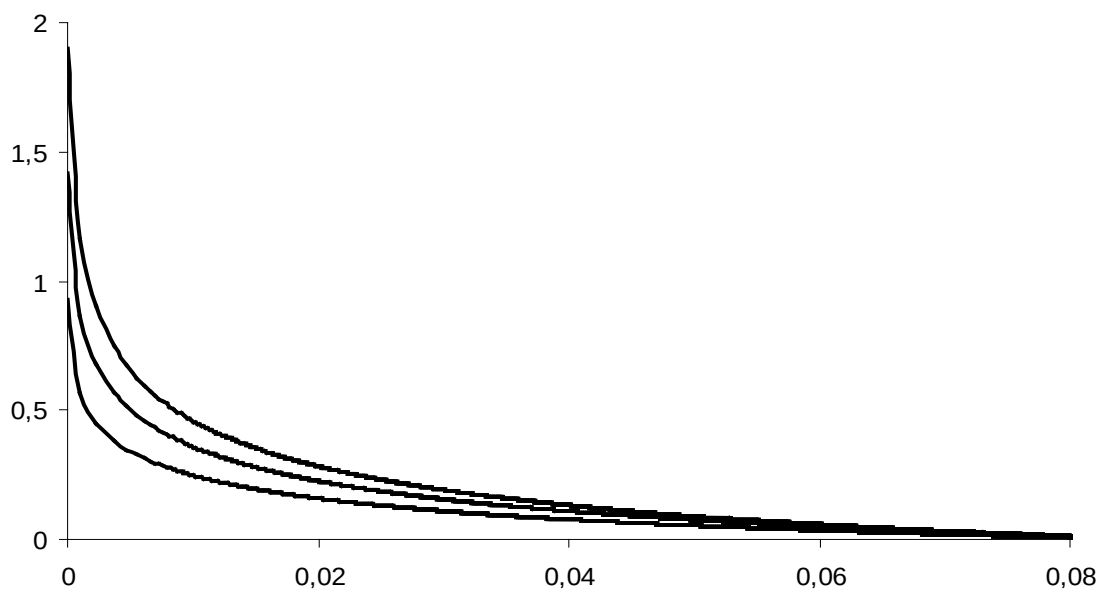


Рис.2. Изменение  $k/k_0$  по толщине осадка при  $t = 450$  (1);  $900$  (2);  $1800$  (3) с. ( $r = R$  принято как начало отсчета расстояния).



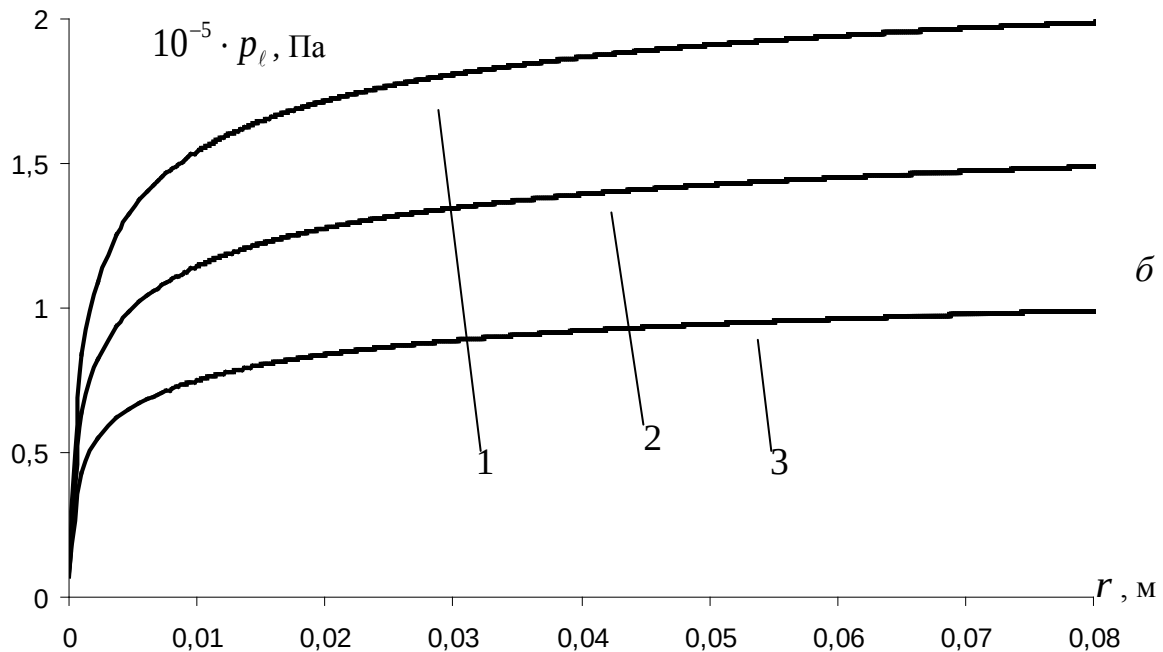


Рис. 3. Профили  $p_s$  (а),  $p_l$  (б) при  $p_0 = 1 \cdot 10^5$  (1),  $p_0 = 1,5 \cdot 10^5$  (2),  $p_0 = 2 \cdot 10^5$  (3) Па. при  $t = 1800$  с.

#### Литература

1. Tien C., Ramarao B.V. Granular Filtration of Aerosols and Hydrosols. Elsevier Science & Technology Books: Syracuse, New York, 2007. 522 p.
2. Tien C. Principles of filtration. Elsevier, The Netherlands. 2012.
3. Жужиков В.А. Фильтрование. Теория и практика разделения суспензий. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Химия, 1980. – 400 с.
4. Федоткин И.М., Воробьев Е.И., Вьюн В.И. Гидродинамическая теория фильтрования суспензией. Киев: Вища. шк., Головное изд-во. 1986. – 166 с.
5. Федоткин И.М. Математическое моделирование технологических процессов. Киев: Вища шк., Головные изд-во. 1988. – 415 с.
6. Atsumi K., Akiyama T. A study of cake filtration. Formulation as a Stefan problem// Chem. Techn. – 1979. – 31, №6. – P. 487-492.
7. Shirato M., Aragaki T. Verification of internal flow mechanism theory of cake filtration// Filtr. and Separ. – 1972. – №3. – P. 290-297.
8. Smiles D.E., Rosental M.G. The movement of water in swelling materials// Aust. J. Soil Res. – 1968. – №6. P. 237-248.
9. Smiles D.E., Poulos H.G. The One – dimensional consolidation of Columns of soil finite length// Aust. J. Soil Res. – 1969. – №7. – P. 285 – 291.
10. Smiles D.E. Steady flow experiments in saturated clays// Aust. J. Soil Res. – 1969. – №7. – P. 91-98.
11. Smiles D.E. A theory of Constant pressure filtration// Chem. Eng. Sci. – 1970. – 25, №6. – P. 985-996.
12. Wakeman R.G. A numerical integration of the differential equations describing the formation of and flaw in compressible filter cakes// Trans. Inst. Chem. Eng. – 1978. – 56, №4. – P. 258-265.
13. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Вычислительная теплопередача. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 784 с.
14. Caldwell J., Kwan Y.Y. Numerical methods for one-dimensional Stefan problems. Communications in Numerical Methods in Engineering, 2004; 20: 535–545.

УДК 621.01

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЕФОРМАЦИИ СДВИГА АМОРТИЗАТОРА-ВТУЛКИ СОСТАВНЫХ ЗУБЧАТЫХ КОЛЕС ПЕРЕДАЧИ

Л.Э.Бобомуродова<sup>1</sup>, А.Дж.Джураев<sup>2</sup><sup>1</sup>Самаркандский государственный университет,<sup>2</sup>Ташкентский институт текстильной и легкой промышленности  
latofat1983@mail.ru, anvardjuraev1948@mail.ru

**Аннотация.** В статье приводится новая схема и принцип работы зубчатой передачи с составными колесами включающие амортизаторы-втулки из резины. Аналитическим методом получены формулы для расчета угловых сдвигов (деформаций) амортизаторов-втулок с учетом их толщины, модуля сдвига и параметров передачи. На основе численного решения задачи построены графические зависимости изменения деформации - угловых сдвигов амортизаторов-втулок составных колес от вариации значений вращающихся моментов на валах и толщины резиновых втулок. На основе анализа построенных графических зависимостей обоснованы необходимые значения параметров зубчатой передачи. Предлагаемая зубчатая передача с составными колесами включающие амортизаторы-втулки рекомендуется использовать в приводах технологических машин.

**Ключевые слова:** зубчатая передача, амортизатор-втулка, сдвиг, момента, радиус, передаточное отношение.

**Tishli uzatma tarkibli g'ildiraklari amortizator-vtulkalarini burchak siljish deformatsiyasini aniqlash**

**Annotatsiya.** Maqolada qayishqoq elementli rezinadan tayyorlangan vtulkali g'ildiraklari bo'lgan tishli uzatmani sxemasi va ishlash prinsipi keltirilgan. Analitik usulda qayishqoq elementli vtulkalarni burchak siljishi (deformatsiya) aniqlovchi formulalar, siljish moduli va uzatma parametrlari olingan. Tishli g'ildiraklardagi aylantiruvchi momentlar va vtulkalarni qalinligiga bog'liq ravishda amortizatorlarni burchak siljishi grafiklari masalani sonli yechimi asosida qurilgan. Tahlillar asosida grafik bog'lanishlar qurilgan uzatmani parametrlari asoslangan. Tavsiya qilingan qayishqoq elementli tishli g'ildirakli uzatmani texnologik mashinalarning yuritmalarida qo'llash mumkin.

**Kalit so'zlar:** tishli uzatma, amortizatorli vtulka, siljish, moment, radius, uzatish nisbati.

**Analysis of deformation of shock-shifter shift shift of composite gear wheels of transmission**

**Abstract.** The article presents a new scheme and principle of operation of the gear train with compound wheels including shock absorbers-bushes made of rubber. The analytical method is used to obtain formulas for calculating the angular shifts (deformations) of the bush dampers, taking into account their thickness, shear modulus and transmission parameters. Based on the numerical solution of the problem, graphical dependences of the change in deformation-angular shifts of shock absorbers-bushings of composite wheels on the variation of the values of rotating moments on shafts and the thickness of rubber bushes are constructed. Based on the analysis of the constructed graphical dependencies, the necessary values of the gear parameters are justified. The proposed gearing with compound wheels including shock absorbers-bushings is recommended to be used in the drives of technological machines.

**Keywords:** gear train, shock absorber-bushing, shear, moment, radius, gear ratio.

Известно, что в приводах технологических машин широко используются зубчатые передачи [1]. Основным недостатком этих механизмов является жесткое взаимодействие зубьев колес при их зацеплении, и непосредственная передача изменений нагрузок на валы зубчатых колес. Это приводит к значительным износам зубьев колес, неравномерности вращения валов передачи, что отрицательно сказывается на технологический процесс в машине. Поэтому важным является совершенствование конструкции механизма, позволяющий снижение износа зубьев колес и увеличению равномерности их вращения.

С этой целью нами рекомендована новая схема зубчатой передачи (см. рис. 1), в которой зубчатое колесо 4 и шестерня 1 выполнены составными. Шестерня 1 установлена на

валу 2 посредством амортизатора - втулки 3, а зубчатое колесо 4 установлен на валу 5 посредством амортизатора - втулки 6. При этом толщин амортизаторов - втулок 3 и 6 выбраны соответственно передаточному отношению передачи:

$$\Delta_1 = \frac{d_1 - d'_1}{2}; \Delta_2 = \frac{d_2 - d'_2}{2};$$

$$\text{При этом } U_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{\Delta_2}{\Delta_1} \text{ или } \Delta_2 = U_{12} \Delta_1 \quad (1)$$

где,  $d_1, d'_1$  - наружный и внутренний диаметры амортизатора-втулки 3 шестерни 1;  $d_2, d'_2$  - наружный и внутренний диаметры амортизатора-втулки 6 колеса 4,  $R_1$  и  $R_2$  - радиусы основных окружностей шестерни 1 и колеса 4;  $\omega_1$  и  $\omega_2$  - угловые скорости шестерни 1 и колеса 4;  $U_{12}$  передаточное отношение передачи.

В процессе работы механизма за счет зацепления зубьев шестерни 1 и колеса 4 передается вращательное движение от вала 2 шестерни 1 к валу 5 колеса 4. При этом происходит некоторые деформации сдвига амортизаторов-втулок 3 и 6, которые в некоторой степени амортизируют нагрузки, происходит выравнивание движения шестерни 1 и колеса 4. Это приводит к необходимому протеканию технологии процесса в машине. Важным является угловые деформации амортизаторов-втулок 2,5. На рис.2 представлена схема для расчета деформации сдвига амортизатора-втулки.

При выводе зависимости угла поворота  $\varphi_1$  амортизатора-втулки от величины внешнего момента (движущего момента на валу и соответственно момента сопротивления от зубчатого колеса при их зацеплении) выделим во втулке тонкостенную трубку с толщиной стенки  $\Delta r$  и внутренним радиусом  $r$ . За счет деформации резины этой трубки наружная втулка арматуры амортизатора повернется на малый угол  $\Delta\varphi_1$ , а для угла сдвига  $\gamma$  резины трубки справедливо равенство [2]:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\Delta\varphi_1 r}{\Delta r} \quad (2)$$

При этом площадь поверхности сдвига резины выделенной трубки:

$$F = 2\pi r l \quad (3)$$

где,  $l$  - длина втулки (шестерни).

Окружные усилие сдвига, действующее в резине, равно:

$$Q = GF \operatorname{tg} \gamma = 2\pi r l G \frac{r \Delta\varphi_1}{\Delta r} \quad (4)$$

где  $G$  - модуль сдвига резины, Н/м<sup>2</sup>.

Величина внешнего вращающегося момента (от вала движущий и от колеса как момент сопротивления):

$$M_1 = Qr = 2\pi G l r \frac{3\Delta\varphi_1}{\Delta r} \quad (5)$$

Из (5) можно получить:

$$\Delta\varphi_1 = \frac{\Delta r M_1}{2\pi G l r^2} \quad (6)$$

Интегрируя (6) в пределах  $r'_1$  и  $r_1$  можно получить:

$$\varphi_1 = \frac{M_1}{2\pi G l} \int_{r'_1}^{r_1} \frac{dr}{r^2} = \frac{M}{2\pi G l} \left[ \frac{1}{2 (r'_1)^2} - \frac{1}{2 (r_1)^2} \right] \quad (7)$$

Подобным образом можно получить выражение и для определения  $\varphi_2$ :

$$\varphi_2 = \frac{M_2}{4\pi G l} \left( \frac{1}{r'^2_2} - \frac{1}{2r^2_2} \right) \quad (8)$$

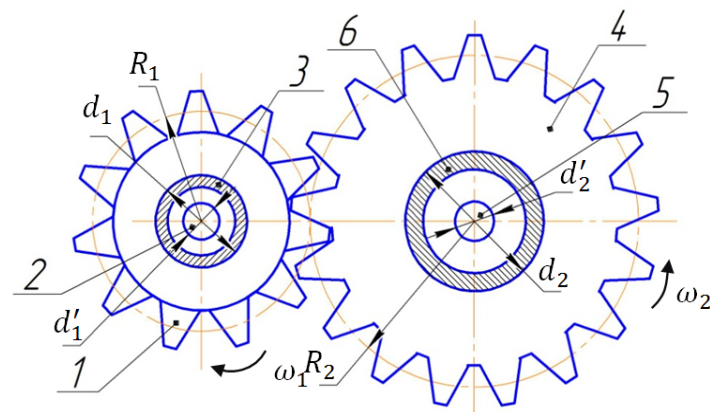


Рис. 1. Зубчатая передача с составными кольцами и шестерней, включающая амортизаторы втулки.

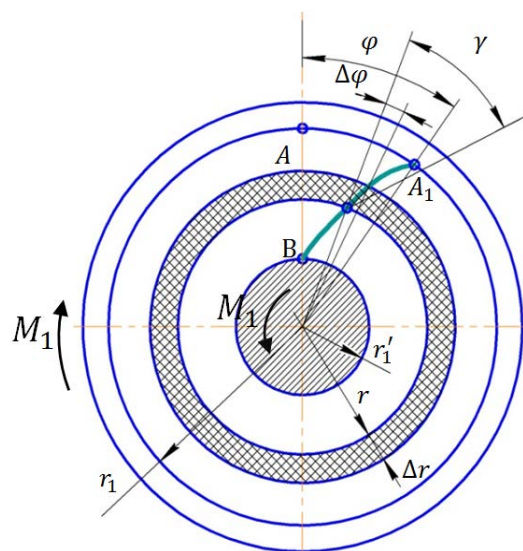
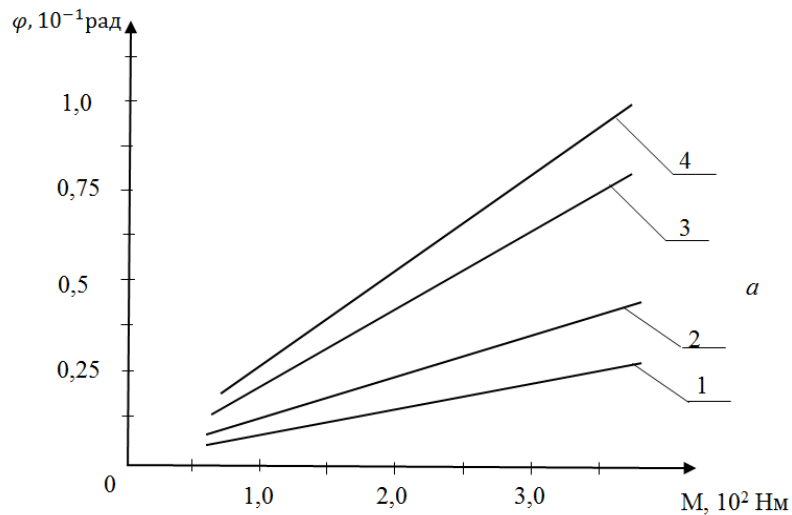


Рис. 2. Схема для расчета деформации сдвига амортизатора-втулки шестерни зубчатой передачи.

На основе численного решения (7) и (8) согласно следующих исходных данных,  $M_1 = 8,2 \text{ Нм}$  ; ,  $M_2 = 6,3 \text{ Нм}$  ;  $\pi = 3,14$  ;  $l$  ;  $r_1 = 3,8 \cdot 10^{-2} \text{ м}$  ;  $r_2 = 5,6 \cdot 10^{-2} \text{ м}$  ; построены графические зависимости изменения деформаций углового сдвига упругих резиновых втулок зубчатых колес передачи от вариации значений модуля сдвига резины и внешних крутящих моментов (см. рис. 3). Анализ полученных графических зависимостей показывает (см. рис. 3а), что с увеличением внешних моментов  $M_1$  и  $M_2$  возрастание деформаций угловых сдвигов резиновых втулок зубчатых колес  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  имеют линейный характер. Так, при увеличении  $M_1$  и  $M_2$  от  $0,062 \cdot 10^2 \text{ Нм}$  до  $0,37 \cdot 10^2 \text{ Нм}$   $\varphi_1$  возрастает от  $0,094 \cdot 10^{-1} \text{ рад}$  до  $0,24 \cdot 10^{-1} \text{ рад}$  при  $r_1 = 2,1 \cdot 10^{-2} \text{ м}$  ; а при  $r_1 = 3,2 \cdot 10^{-2} \text{ м}$  ; угловой сдвиг  $\varphi_1$  увеличивается до  $0,402 \cdot 10^{-1} \text{ рад}$ . Соответственно для упругой резиновой втулки зубчатого колеса  $\varphi_2$  возрастает до  $0,71 \cdot 10^{-1} \text{ рад}$  при  $r_2 = 3,8 \cdot 10^{-2} \text{ м}$  , а при  $r_2 = 5,0 \cdot 10^{-2} \text{ м}$  ,  $\varphi_2 = 1,03 \cdot 10^{-1} \text{ рад}$ .

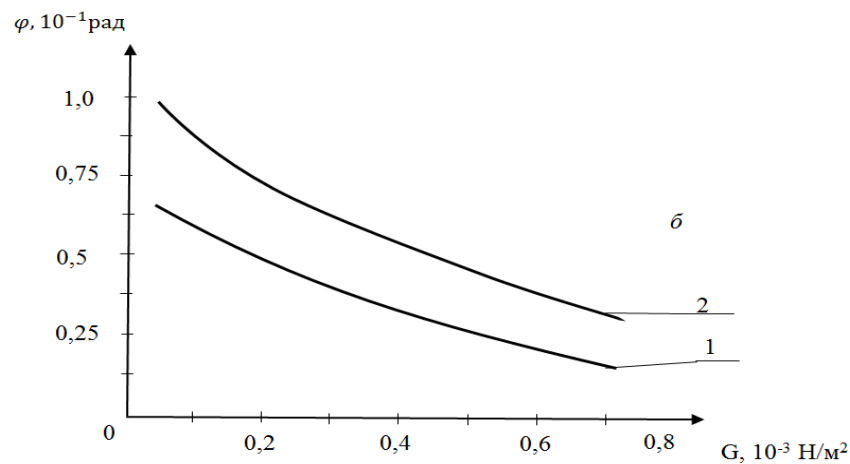




1,2- $\varphi_1 = f(M_1)$ ; 3,4- $\varphi_2 = f(M_2)$ ;

1-при  $r_1 = 2,1 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ ; 2-при  $r_1 = 3,2 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ ;

3-при  $r_2 = 3,8 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ ; 4-при  $r_2 = 5,0 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ ;



1- $\varphi_1 = f(G)$ ; 2- $\varphi_2 = f(G)$ ;

**Рис. 3.** Графические зависимости изменения деформаций угловых сдвигов амортизаторов – втулок шестерни и колеса передачи от вариации крутящих моментов на валах (а) и модуля сдвига (б).

Для снижения ударных взаимодействий зубьев при зацеплении из-за больших значений  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  приемлемыми значениями внешних моментов являются  $M_1 = (0,025 \dots 0,028) \cdot 10^2 \text{ Нм}$ ,  $M_2 = (0,03 \dots 0,036) \cdot 10^2 \text{ Нм}$ . Для уменьшения значений деформаций угловых сдвигов резиновых втулок целесообразным считается значения модуля сдвига  $(0,33 \dots 0,42) \cdot 10^{-3} \text{ Н/м}^2$  (см.рис.3б).

Выводы. Разработана новая схема зубчатой передачи с составными колесами с резиновыми втулками. Аналитическим методом получены выражения для расчета деформации угловых сдвигов резиновых втулок. Построены графические зависимости и обоснованы параметры передачи.

#### Литература

1. А.Джураев и др. Теория механизмов машин. – Т.: Изд. Г.Гулом, 2004. – С.582.
2. Е.Т.Григорьев. Расчет и конструирование резиновых амортизаторов. – М.: МашГИЗ, 1960. – с.157.

UDK: 534.0

**CHETLARI SHARNIRLI MAHKAMLANGAN ELASTIK PLASTINKANING SIMMETRIK  
TEBRANISHLARI****Z.Xudayberdiyev, Sh.Xudayberdiyeva, I.Amirov***Samarqand davlat universiteti**amirovikrom4@gmail.com*

**Annotatsiya.** Ishda chetlari sharnirli mahkamlangan uch qatlamli elastik plastinkaning tanlangan o'rta sirtidagi ko'chishlarining bosh qismlari izlanuvchi funksiyalar sifatida kiritilgan. Shunga ko'ra bir qancha matematik amallar bajarilib izlanuvchi funksiyalarga nisbatan amaliy masalalarni yechishda qo'llash mumkin bo'lgan beshinchi tartibli differensial tenglamalar sistemasini keltirib chiqarilgan va bu tenglamalar sistemasidan xususiy holda bir qatlamli elastik plastinka tebranish tenglamalari sistemasini olingan. Olingan tebranish tenglamalari sistemasini Maple 17 dasturi yordamida sonli yechilib, sharnirli mahkamlangan bir jinsli plastinka qatlamlarida yuzaga keladigan ko'chishlar va kuchlanishlarni aniqlash imkoniyati yaratilgan.

**Kalit so'zlar:** uch qatlamli plastinka, chegaraviy masala, tebranish tenglamalari, ko'ndalang va bo'yлама tebranishlar, ko'chish,

**Симметричные колебания упругой пластинки шарнирно опертой по контуру**

**Аннотация.** В работе рассмотрена задача вывода главную часть перемещений выбранной срединной поверхности сплошной пластинки из системы уравнений колебания трехслойной упругой пластины. С этой целью в выведении системы дифференциального уравнения в частных производных пятого порядка, описывающие колебания трехслойной упругой пластины, а затем, в частном случае для однослойной пластины получены уравнения продольных и поперечных колебаний сплошной пластины при отсутствии внешних нагрузок. Полученные системы уравнений численно решены с помощью программы Maple 17 и созданы возможности определения перемещений и напряжений в каждом слое шарнирно закрепленной однородной пластины.

**Ключевые слова:** трехслойная пластинка, краевая задача, продольная и поперечная волна, уравнения колебания, перемещения,

**Symmetric vibrations of an elastic plate articulated on a contour**

**Abstract.** In this work, we consider the problem of deriving the main part of the displacements of the selected middle surface of a continuous plate from a system; the vibrations of a three-layer elastic plate are equalized. To this end, the derivation of a system of a fifth-order partial differential equation describing the vibrations of a three-layer elastic plate, and then, in the particular case of a single-layer plate, we obtained the equations of longitudinal and transverse vibrations of a continuous plate without external loads. The resulting systems of equations are numerically solved using the Maple 17 program and the possibility of determining the displacements and stresses in each layer of a pivotally fixed homogeneous plate is created.

**Keywords:** Three-layer plate, boundary value problem, longitudinal and shear wave, equations of oscillation, displacement.

**Kirish.** O'tgan asrning o'ttizinchi yillaridan boshlab texnika va qurilishning turli sohalarida, ko'p qatlamli xususan, uch qatlamli plastinkalar keng qo'llanilishi boshlanishi bilan ularni hisoblash usullariga bo'lgan talab ham orta boshladi. Uch qatlamli plastinkalarni hisoblashda birinchilardan bo'lib S.G.Lexnitskiy [1] nazariyasi paydo bo'ldi. Undan so'ng 1958-yilda S.A.Ambarsumyan [2] nazariyasi, 1984-yilda E.Reyssner [3] nazariyasi kabi bir qancha nazariyalar paydo bo'ldi. Bunday ishlarni qatoriga ko'plab tadqiqot ishlarini kiritishimiz mumkin. Lekin tashqi dinamik yuklanishlar ta'siri ostidagi plastinkalarni hisoblashga bag'ishlangan ishlar nisbatan kamdir. Ko'pchilik ishlarda plastinkalarning dinamik hisobi klassik nazariyaga tayanilgan holda olib boriladi [4].

Keyingi yillarda aniq yechimlar usuliga asoslangan plastinkalar nazariyalari ishlab chiqilgan. Xususan, ushbu usul bilan professor I.G.Filippov [5] va uning o'quvchilari tomonidan simmetrik strukturaga ega bo'lgan uch qatlamli plastinkalar tebranish nazariyalari yaratilgan.

Ushbu maqolada uch qatlamli elastik plastinkaning simmetrik tebranish tenglamalari sistemasidan xususiy holda bir qatlamli bir jinsli plastinka simmetrik tebranish tenglamalari sistemasini olish masalasi qaralgan. Tebranish tenglamalari bilan bir qatorda plastinka ixtiyoriy kesimidagi ko'chish va kuchlanishlarni aniqlashga imkon beruvchi yechimlar olingan.

**Masalaning qo'yilishi.** Dekart koordinatalar sistemasida izotrop tekis deformatsiya holatidagi uch qatlamli plastinkani qaraymiz va uni  $Oxyz$  to'g'ri burchakli koordinatalarga tasvirlaymiz (1-Rasm). Bunda  $Ox$  o'qini ko'ndalang kesimning qatlamlar kontakt chizig'i bo'ylab,  $Oz$  - o'qini esa unga tik ravishda yuqoriga yo'naltiramiz. Qatlamlar materiallari uchun Lamé koeffitsiyentlari  $\lambda_m$  va  $\mu_m$ , qatlamlar qalinliklari  $h_m$ , hamda zichliklari  $\rho_m$  bo'lsinlar. Bunda  $m = 0,1,2$  - qatlamlar raqamlari ko'rsatkichi.

Qatlamlar nuqtalaridagi kuchlanishlar va deformatsiyalar orasidagi bog'lanishlarni izotrop muhit uchun Guk qonuni ko'rinishida olamiz.

Ko'ndalang va bo'ylama to'lqinlar potentsiallarini [6] tekis deformatsiya holida quyidagicha kiritamiz [7]:

$$\vec{U}^m = \text{grad} \varphi_m + \text{rot} \vec{\psi}_m. \quad (1)$$

Ushbu (1) ifodalarni harakat tenglamalariga qo'yib, ushbu

$$\Delta \varphi_m = \frac{1}{a_m^2} \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial t^2}; \quad \Delta \psi_m = \frac{1}{b_m^2} \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial t^2} \quad (2)$$

to'lqin tenglamalariga kelimiz, bu yerda  $\Delta$  - ikki o'lchovli Laplas differensial operatori.

Vaqtning  $t < 0$  paytlari uchun plastinka tinch holatda bo'lgan va  $t = 0$  paytda uning chegaraviy sirtlariga dinamik yuklar ta'sir qila boshlagan deb hisoblaymiz. U holda chegaraviy shartlar  $z = \pm h_m$  bo'lganda quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\sigma_{xz}^m = f_x^m(x, t); \quad \sigma_{zz}^m = f_z^m(x, t); \quad \sigma_{yz}^m = 0, \quad (m = 0,1,2). \quad (3)$$

Qatlamlarning urinish sirtida quyidagi kinematik shartlar o'rinli:

$$U_0(x, z, t)|_{z=h_0} = U_1(x, z, t)|_{z=h_0}; \quad W_0(x, z, t)|_{z=h_0} = W_1(x, z, t)|_{z=h_0}. \quad (4)$$

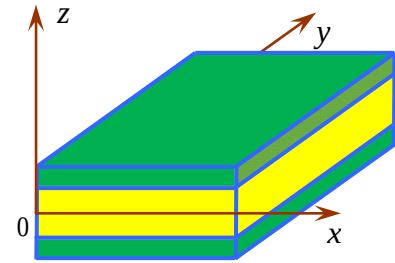
boshlang'ich shartlar nolga teng deb hisoblanadi, ya'ni  $t = 0$  bo'lganda

$$\varphi_m = \psi_m = 0; \quad \frac{\partial \varphi_m}{\partial t} = \frac{\partial \psi_m}{\partial t} = 0. \quad (5)$$

Shunday qilib, uch qatlamli plastinkaning simmetrik tebranishlari haqidagi masalani yechish (2) tenglamalar sistemasini (3), (4) chegaraviy shartlar va (5) boshlang'ich shartlarda integrallashga keltiriladi.

**Masalaning yechimi.** Masalani yechish uchun  $\psi_m$  va  $\varphi_m$  potentsial funksiyalarni [8] ishda keltirilgan ko'rinishda tanlaymiz va ularni (2) to'lqin tenglamalariga qo'yib simmetrik yuklanishlar ta'siri ostidagi plastinka bo'ylama tebranishlari uchun mos keladigan yechimlarni olamiz. Ko'chish va kuchlanishlarni potentsial funksiyalar yechimlari orqali tasvirlab, (3) chegaraviy va (4) kontakt shartlarga qo'yib, sistemalar hosil qilamiz. (4) kontakt shartdan hosil bo'lgan sistemalardan o'zgaruvchilarni topib olib, ularni kuchlanishlar ifodasiga qo'yib, ma'lum bir matematik amallarni bajarib, [8-10] ishlarda keltirib chiqarilgan quyidagi uch qatlamli plastinkaning simmetrik tebranishlari tenglamalari sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{aligned} & \left\{ A_{11} \frac{\partial^4}{\partial t^4} + A_{12} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial t^2} + A_{13} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + A_{14} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + A_{15} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + A_{16} \right\} \frac{\partial}{\partial x} W_0^{(0)} + \\ & + \left\{ B_{11} \frac{\partial^4}{\partial t^4} + B_{12} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial t^2} + B_{13} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + B_{14} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + B_{15} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right\} U_0^{(0)} = \\ & = \left\{ S_{11} \frac{\partial^4}{\partial t^4} + S_{12} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial t^2} + S_{13} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + S_{14} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + S_{15} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + S_{16} \right\} f_x^{(1)}(k, p); \end{aligned} \quad (6)$$



1-Rasm

$$\begin{aligned} & \left\{ A_{21} \frac{\partial^4}{\partial t^4} + A_{22} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial t^2} + A_{23} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + A_{24} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + A_{25} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + A_{26} \right\} W_0^{(0)} + \\ & + \left\{ B_{21} \frac{\partial^4}{\partial t^4} + B_{22} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial t^2} + B_{23} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + B_{24} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + B_{25} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + B_{26} \right\} \frac{\partial U_0^{(0)}}{\partial x} = \\ & = \left\{ S_{21} \frac{\partial^4}{\partial t^4} + S_{22} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial t^2} + S_{23} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + S_{24} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + S_{25} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + S_{26} \right\} f_z^{(2)}(k, p). \end{aligned}$$

bu yerda  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$ ,  $S_{ij}$  uch qatlamli plastinkaning qatlamlari materiallarining geometrik-fizik parametrlariga bog'liq bo'lgan koeffitsiyentlardir. Masalan,

$$\begin{aligned} A_{11} = & - \left( \frac{q_0}{a_1^2 b_1^2} + \frac{1-q_1}{a_0^2 a_1^2} \right) \frac{z_1 h_0^4}{12} - \left( \frac{2q_1}{a_1^2 b_0^2} + \frac{3(1+q_1-3q_0 q_1)}{a_1^2 b_1^2} + \frac{2q_0 q_1}{a_0^2 a_1^2} + \frac{3q_0(1-q_1)}{a_1^4} \right. \\ & \left. + \frac{1+q_1}{b_0^2 b_1^2} + \frac{q_0(1+q_1)}{a_0^2 b_1^2} \right) \frac{z_1^3 h_0^2}{36}; \end{aligned}$$

bunda  $z_1 = h_0 + h_1$ ;  $z_2 = h_0 + h_2$ ;  $q_m = 1 - \frac{\lambda_m}{\mu_m}$ ;  $a_m$  - plastinka materiallaridagi bo'ylama to'lqin

tarqalish tezligi va  $b_m$  - ko'ndalang to'lqin tarqalish tezligi;  $m$  - qatlamlar nomeri.

Xususiyl holda (6) tenglamalar sistemasida  $h_1 = 0$ ,  $h_2 = 0$ ,  $q_1 = q_2 = 0$  deb olsak, bir qatlamli plastinka tebranish tenglamalari sistemasini kelib chiqadi:

$$\begin{aligned} & \left( c_{11} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + c_{12} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial}{\partial x} W_0^{(0)} + \left( d_{11} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + d_{12} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) U_0^{(0)} = \mu_0^{-1} f_x(x, t); \\ & \left( c_{21} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + c_{22} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) W_0^{(0)} + d_{21} \frac{\partial}{\partial x} U_0^{(0)} = \mu_0^{-1} f_z(x, t). \end{aligned} \quad (7)$$

bu yerda

$$\begin{aligned} c_{11} = & -\frac{1}{\xi} \frac{2q_0}{a_0^2} \frac{h_0^3}{3}; \quad c_{12} = \frac{3+q_0}{\xi} \frac{h_0^3}{3}; \quad c_{21} = \frac{1}{\xi} \frac{1}{b_0^2} \frac{h_0}{3}; \quad c_{22} = -\frac{q_0}{\xi} \frac{h_0}{3}; \\ d_{11} = & -\frac{h_0}{b_0^2}; \quad d_{12} = 2h_0; \quad d_{21} = 2; \end{aligned}$$

Bu (7) tenglamalar sistemasini Maple 17 dasturi yordamida yechib tenglamalar sistemasini yechimlarini olish mumkin. Olingan yechimlarni ishonchligini ta'minlash maqsadida boshqa mualliflar tomonidan keltirilgan bir jinsli bir qatlamli plastinkalar simmetrik tebranishlari tenglamalari sistemasini yechimlari bilan taqqoslaymiz.

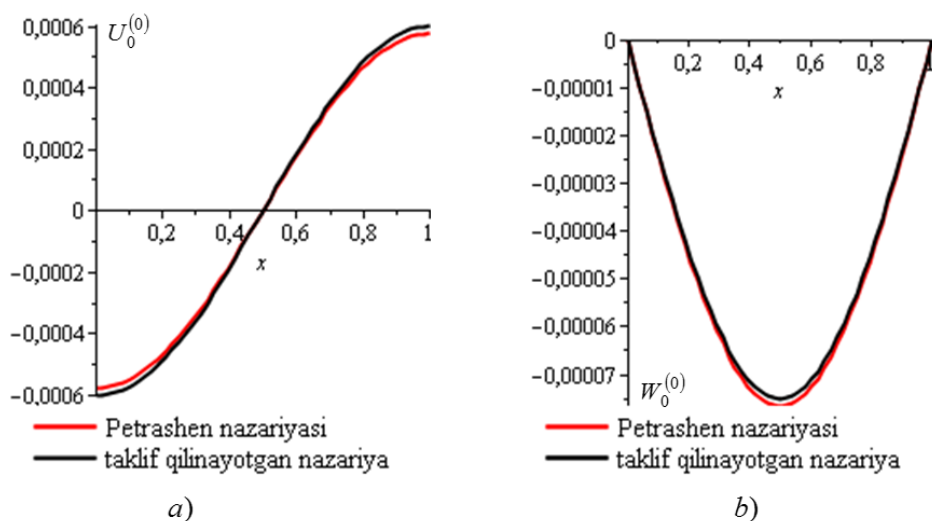
Bir jinsli bir qatlamli plastinkalar simmetrik tebranishlari tenglamalari sistemasini G.I.Petroshen va E.V.Xinen nazariyalari quyidagicha keltirilgan:

$$\begin{aligned} & 2 \left( a^2 \frac{\partial^3}{\partial t^2 \partial x} - \frac{\partial^3}{\partial x^3} \right) \chi + \left( 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - b^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \zeta = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{f_x^+(x, t)}{h}, \\ & \left( b^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \chi + 2 \frac{\partial}{\partial x} \zeta = \frac{1}{\mu} f_z^+(x, t). \end{aligned} \quad (8)$$

Endi (7) va (8) ko'rinishda keltirilgan bir jinsli bir qatlamli plastinkalar tebranish tenglamalari sistemasini Maple 17 dasturi yordamida yechamiz. Undan oldin (7) va (8) tenglamalar sistemasini sharnirli mahkamlanganlik shartidan va Furrye almashtirishlaridan foydalanib vaqtga bog'liq bir o'zgaruvchili differensial tenglamalar sistemasiga keltiramiz. Nolgga teng boshlang'ich shartlar bilan birgalikda bu tenglamalar sistemasini  $\xi = 0.3h_0$ ;  $l = 1m$ ;  $2h_0 = h = 0.1m$ ;

$\rho_{\text{alyu min}} = 2700 \text{ kg/m}^3$ ;  $E_{\text{alyu min}} = 7 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$ ;  $\nu_{\text{alyu min}} = 0.34$ ;  $f_x = 8.5 \text{ MPa}$ ;  $f_z = 0$

parametrlarda Maple 17 dasturi yordamida yechib, (7) tenglamalar sistemasidan  $U_0^{(0)}$  va  $W_0^{(0)}$  yechimlarni, (8) tenglamalar sistemasidan  $\chi$  va  $\zeta$  yechimlarni olamiz. Mos ravishda bu bir jinsli bir qatlamli plastinkalar tebranish tenglamalari sistemalari yechimlarini grafikda bir biri bilan taqqoslaymiz (2-rasm). Bunda 2,a-rasmda G.I.Petroshen va E.V.Xinen bir qatlamli plastinkalar tebranish tenglamalari sistemasi  $\chi$  yechimi bilan bizni uch qatlamli plastinka simmetrik tebranish tenglamalaridan xususiy holda olingan bir qatlamli plastinkalar tebranish tenglamalari sistemasi  $U_0^{(0)}$  yechim grafiklari taqqoslangan. 2,b-rasmda G.I.Petroshen va E.V.Xinen bir qatlamli plastinkalar tebranish tenglamalari sistemasi  $\zeta$  yechimi bilan uch qatlamli plastinka simmetrik tebranish tenglamalaridan xususiy holda olingan bir qatlamli plastinkalar tebranish tenglamalari sistemasi  $W_0^{(0)}$  yechim grafiklari taqqoslangan.



2-Rasm. Bo'ylama ko'chish  $U_0^{(0)}$  ning va ko'ndalang ko'chish  $W_0^{(0)}$  ning  $t = 0.6$  da turli nazariyalar bo'yicha taqqoslanishi;  $0 \leq x \leq 1$ .

**Olingan natijalar.** Rasmlardan ko'rinadiki, uch qatlamli elastik plastinka tebranish tenglamalari sistemasidan xususiy holda olingan (7) ko'rinishdagi bir qatlamli plastinkalar tebranish tenglamalari sistemasi yechimlari bilan G.I.Petroshen va E.V.Xinen bir qatlamli plastinkalar tebranish tenglamalari sistemasi yechimlari deyarli bir-biriga ustma-ust tushar ekan. Bu uch qatlamli elastik plastinka tebranish tenglamalari sistemasidan xususiy holda olingan (7) ko'rinishdagi bir qatlamli plastinkalar tebranish tenglamalari sistemasi ishonchli tenglama ekanligini ko'rsatadi. Bundan tashqari (7) tenglamalar sistemasi yechimlaridan foydalanib, keyinchalik plastinka ixtiyoriy nuqtasining ko'chish va kuchlanishlarini aniqlash imkoniyati paydo bo'ladi.

#### Adabiyotlar

1. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
2. Амбарцумян С.А. Теория изгиба анизотропных пластин // Известия АН СССР, Отд. техн. наук, 1958, №4.
3. Reissner E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates // ASME, Z. Appl. Mech. 12, 1945. – 69 – 76 pp.
4. Филиппов И.Г., Чебан В.Г. Математическая теория колебаний упругих и вязкоупругих пластин и стержней. – Кишинев: Штиинца, 1988. – 190 с.
5. Александров А.Я., Куршин Л.М. Трехслойные пластинки и оболочки // Прочность, устойчивость, колебания. т. 2. – М.: Машиностроение, 1968. – С.245-308.
6. Григолюк Э.И., Селезов И.Т. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек // Итоги науки и техники. Сер. Механика деформ. твердых тел. – Т. 5 – М.: ВИНТИ, 1973. – 272с.

7. Холмуродов Р.И., Худойназаров Х.Х., Худайбердиев З.Б. Свободные колебания упругой трёхслойной пластинки // Проблемы механики АН РУз 2017. Вып. 2-3. С. 46 – 52.
8. Халмуродов Р.И., Худойназаров Х., Худайбердиев З. Нестационарные колебания трёхслойной вязкоупругой пластинки // Журнал СамГУ «Научный вестник». – 2018, №1. – С.30-38.
9. Xudoyberdiyev Z., Isroilov Sh., Axatov X. Ikki qatlamli elastik plastinka simmetrik tebranishlari // Memorchilik va qurilish muammolari ilmiy-texnik jurnali. – 2019, №1. – 133-136 b.
10. Khudoynazarov Kh., Khudoyberdiyev Z., Khudoyberdiyeva Sh. Symmetrical Vibrations of a Three-Layer, Longitudinally Covered Plate // Int. Journal of Advanced Research in Science, Engineering and Technology. Vol. 5, Issue 10, March 2018. – P. 7116-7121. (05.00.00, №8.).

УДК 519.95.

## ОБ ОДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РАЗБУХАНИЯ ГЛИНИСТОГО СЛАНЦА ВОКРУГ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СКВАЖИНЫ

Б.Х. Имомназаров<sup>1</sup>, Х.Х.Имомназаров<sup>2</sup>, И.К. Хайдаров<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Новосибирский национальный исследовательский государственный Университет, Новосибирск, Россия.

<sup>2</sup>Учреждение Российской академии наук Институт Вычислительной Математики и Математической Геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия.

<sup>3</sup>Чирчикский государственный педагогический институт Ташкентский области, Узбекистан.

imom@omzg.sccc.ru, khaydarov\_iq@rambler.ru

**Аннотация.** Предложена термодинамически согласованная математическая модель линейной теории пороупругости для описания сланцевого разбухания с водным электролитом. При этом, предполагается, что сланец ведет себя как изотропная, идеальная ионная мембрана, и в этом случае разбухание зависит только от полного тензора напряжения и от химического потенциала воды в порах породы. Получено уравнение диффузии для давления из уравнения пороупругости, при наличии химических эффектов. Показано, что коэффициент диффузии обратно пропорционален пористости.

**Ключевые слова:** пористая среда, насыщающая жидкость, упругие параметры, тензор напряжений, парциальная плотность, закон Дарси, химический потенциал, коэффициент диффузии.

### Silindrik quduq atrofidagi qum slanesi shishishining matematik modeli haqida

**Annotatsiya.** Suvli elektrolit bilan slanesli shishishni izohlash uchun chiziqli g'ovak-elastiklik nazariyasining termodinamik matematik modeli taklif etilgan. Bunda slanes o'zini izotrop sifatida tutadi, ideal ion membrana deb faraz qilinadi, bu holda shishish faqat to'liq kuchlanish tenzoriga va jinslarning g'ovaklaridagi suvning kimyoviy potensialiga bog'liq bo'ladi. G'ovak-elastiklik tenglamasidan kimyoviy ta'sirlardagi bosim uchun diffuziya tenglamasi olingan. Diffuziya koeffitsiyenti g'ovaklikka teskari proporsional ekanligi ko'rsatilgan.

**Kalit so'zlar:** g'ovakli muhit, to'ldiruvchi suyuqlik, elastiklik parametrlari, kuchlanish tenzori, qisman zichlik, Darsi qonuni, kimyoviy potensial, diffuziya koeffitsiyenti.

### About one mathematical model of swelling of the clay shay around cylindrical well

**Abstract.** A thermodynamically mathematically matched model of the linear theory of poroelasticity is proposed for describing shale swelling with an aqueous electrolyte. In this case, it is assumed that shale behaves as an isotropic, ideal ionic membrane, and in this case, the swelling depends only on the full stress tensor and on the chemical potential of water in the pores of the rock. The diffusion equation for pressure was obtained from the equation of poroelasticity, in the presence of chemical effects. It is shown that the diffusion coefficient is inversely proportional to the porosity.

**Keywords:** porous medium, saturating fluid, elasticity parameters, stress tensor, partial density, Darcy's law, chemical potential, diffusion coefficient.

### Введение

В настоящее время в почвоведении и агрофизике активно развивается структурно-функциональное направление изучения почв и ее компонентов на ионно-молекулярном уровне. Для прогноза сорбционного поведения почв (сорбция влаги, загрязняющих веществ, тяжелых металлов в том числе) наиболее продуктивным подходом, как показали работы А.Д. Воронина, А.М. Глобуса, Б.В. Дерягина, Н.В. Чураева, А.А. Роде, Г.В. Добровольского, Е.Д. Никитина, В.В. Добровольского, Т.А. Соколовой, J.H. Fink, R.D. Jackson, J.R. Philip, G. Sposito, A. Manseau, R. Dähn, M.L. Schlegel, S.I. Tsipursky, V.A. Drits и др., является системное изучение сорбционных центров поверхности твердой фазы почв, ее отдельных наиболее активных компонентов, а именно глинистых минералов, которые входят в состав илистой фракции. Межфазные взаимодействия, происходящие на границе раздела твердой фазы почв и почвенной влаги, а также почвенного воздуха, определяют большинство почвенных процессов и формируют на молекулярном уровне функции почв в биосфере.

В [1] показано, что изменение гидрофизических свойств глинистых минералов при действии растворимых солей связано не только с гидрофильностью соли, но с изменением структурной организации частиц глинистых минералов в результате воздействия растворимых солей. Впервые для глинистых минералов установлено образование глинисто-солевых микроагрегатов в результате воздействия растворимых солей и их частичная устойчивость к диализу. Образование глинисто-солевых микроагрегатов происходит за счет внешне- и внутрисферных комплексов катионов металла и минеральной матрицы.

В данной работе получено уравнение диффузии для давления из уравнения поропругости, при наличии химических эффектов. Анализ предсказывает, что деформация зависит от изменений в химических потенциалах, как воды, так и ионов, присутствующих в жидкости пор. При этом коэффициент диффузии является функцией пористости, в отличие ранее предложенных моделей [2, 3]. Хорошо известно, что реальный глинистый сланец находится где-то между границей между соответствующей химически инертной породы и породы с полным исключением ионов. Предложенная математическая модель применена для предсказания разбухания сланца вокруг ствола скважины.

### Разбухание глинистого сланца вокруг цилиндрической скважины

В цилиндрических координатах  $(r, \varphi, z)$  в момент времени  $t = 0$  вокруг сланца оси  $Z$  имеется скважина радиусом  $b$ . Предположим, что напряжение в сланце до бурения равномерно, с компонентами  $\sigma_{zz} = \sigma_{zz}^{\infty}$  и  $\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{rr}^{\infty}$ , и исходный химический потенциал воды в сланце повсюду  $\mu_w = \mu_w^{\infty}$ . После бурения граничные условия в стволе скважины будут

$$\sigma_{rr} = -p_{mud}, \quad \mu_w = \mu_w^{mud}, \quad r = b,$$

где  $p_{mud}$  - давление бурового раствора, и

$$\mu_w^{mud} = V_w p_{mud} + RT \ln a_w^{mud} + M_w g z$$

является химическим потенциалом воды в буровом растворе. Граничные условия на бесконечности

$$\sigma_{rr} \rightarrow \sigma_{rr}^{\infty}, \quad \sigma_{\theta\theta} \rightarrow \sigma_{\theta\theta}^{\infty}, \quad \sigma_{zz} \rightarrow \sigma_{zz}^{\infty}, \quad \mu_w \rightarrow \mu_w^{\infty}, \quad \text{при } r \rightarrow \infty.$$

Берем в качестве нашего начального состояния состояние горной породы до бурения скважины. Таким образом, все напряжения будут относиться к напряжению на бесконечности, а химический потенциал  $\mu_w$  будет измерен относительно  $\mu_w^{\infty}$ .

Напряжения и химический потенциал на стенке ствола скважины при  $r = b$  принимает вид

$$\sigma_{rr}^w = -p_{mud} - \sigma_{rr}^{\infty}, \\ \mu_{wb} = \mu_w^{mud} - \mu_w^{\infty}.$$

Изменения  $\mu_{wb}$  с глубиной  $Z$  считаются пренебрежимо малыми, а деформация породы вокруг ствола скважины считается плоской деформацией и  $e_{zz} = 0$ . Непосредственное изменение напряжения, вызванное созданием ствола скважины, является

$$\sigma_{rr} = -\sigma_{\theta\theta} = \frac{b^2}{r^2} \sigma_{rr}^w.$$

Последующая деформация контролируется диффузией воды в сланцы. Положим

$$\Phi = \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz} + \frac{3\mu_w}{BV_w}.$$

Как показано в [4] функция  $\Phi$  удовлетворяет уравнению диффузии

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = D \Delta \Phi. \quad (1)$$

Далее предположим также как в [4] функция  $\Phi$  удовлетворяет нулевому начальному условию.

После преобразование Лапласа по времени

$$\bar{\Phi} = \int_0^\infty e^{-st} \Phi dt,$$

к обеим частям уравнения (1) получим

$$D \nabla^2 \bar{\Phi} = s \bar{\Phi}, \quad (2)$$

Уравнение (2) имеет решение

$$\bar{\Phi} = A(s) I_0(qr) + B(s) K_0(qr), \quad (3)$$

где  $q = \sqrt{\frac{s}{D}}$ ,

$$D = \frac{1}{\varpi (\rho_{l,0}^f)^2 d_0} \left[ \frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu} \right] \left[ \frac{B^2 (1+\nu_u)^2 (1-2\nu)}{9(1-\nu_u)(\nu_u-\nu)} \right],$$

$\rho_0 = \rho_{0,l} + \rho_{0,s}$ ,  $\rho_{0,s}$  - парциальная плотность пористого тела,  $\rho_{0,l}$  - парциальная плотность насыщающей жидкости,  $\rho_{0,s} = \rho_{0,s}^f (1-d_0)$ ,  $\rho_{0,l} = \rho_{0,l}^f d_0$ ,  $\rho_{0,s}^f$  и  $\rho_{0,l}^f$  - физические плотности упругого пористого тела и жидкости соответственно,  $d_0$  - пористость,  $G$  - модуль сдвига,  $B$  - параметр Скемптона,  $\nu$  - коэффициент Пуассона упругого материала,  $\nu_u$  - коэффициент Пуассона пористого материала насыщенного флюидом,  $\varpi = \chi \rho$ ,  $\chi$  - коэффициент трения и  $I_0(r)$ ,  $K_0(r)$  - модифицированные функции Бесселя нулевого порядка.

Из ограниченности решения, при  $r \rightarrow \infty$  следует, что  $A(s) = 0$ .

Из уравнения равновесия напряжений [4, 5] следует, что

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[ \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz} + \frac{6(\nu_u - \nu)\mu_w}{BV_w(1-\nu)(1+\nu_u)} \right] = \frac{C_1}{r}. \quad (4)$$

Так как радиальное смещение  $u_r = u(r, t)$  удовлетворяет соотношениям

$$e_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad e_{\theta\theta} = \frac{u}{r},$$

и используя соотношения

$$\frac{\partial e_{zz}}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0$$

получим из (4), что постоянная  $C_1 = 0$ .

Далее используя уравнения (3) и (4), получим



$$\frac{3(1-\nu_u)(1+\nu)\bar{\mu}_w}{BV_w(1-\nu)(1+\nu_u)} = B(s)K_0(qr),$$

и из граничного условия  $\mu_w = \mu_{wb}$  при  $r = b$  вытекает [4]

$$B(s) = \frac{3(1-\nu_u)(1+\nu)\mu_{wb}}{BV_w(1-\nu)(1+\nu_u)K_0(qb)s}.$$

Далее используем формулы, полученные в [4] для определения тензора напряжений

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{rr} &= \frac{b^2}{sr^2}\sigma_{rr}^w + \frac{2\eta\mu_{wb}}{V_ws} \left[ \frac{K_1(qr)}{rK_0(qb)} - \frac{bK_1(qb)}{r^2K_0(qb)} \right], \\ \bar{\sigma}_{\theta\theta} &= -\frac{b^2}{sr^2}\sigma_{rr}^w + \frac{2\eta\mu_{wb}}{V_ws} \left[ \frac{K_1(qb)}{r^2qK_0(qb)} - \frac{bK_1(qr)}{rqK_0(qb)} - \frac{K_0(qr)}{K_0(qb)} \right].\end{aligned}$$

Из этих формул получим

$$\bar{\sigma}_{rr} - \bar{\sigma}_{\theta\theta} = \frac{2b^2}{sr^2}\sigma_{rr}^w + \frac{2\eta\mu_{wb}}{V_ws} \left[ \frac{2K_1(qr)}{rqK_0(qb)} - \frac{2bK_1(qb)}{r^2qK_0(qb)} + \frac{K_0(qr)}{K_0(qb)} \right].$$

а осевое напряжение определяется формулой

$$\begin{aligned}\sigma_{zz} &= \frac{\nu}{1+\nu}\Phi + \frac{3\nu_u\mu_w}{BV_w(1+\nu_u)}, \\ \bar{\sigma}_{zz} &= -\frac{2\eta\mu_{wb}K_0(qr)}{V_wsK_0(qb)}.\end{aligned}$$

В случае, когда  $\sigma_{rr}^w = 0$ , используя асимптотические результаты [6], получим выражения для радиального смещения и напряжений  $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}$  следующие выражения:

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} u &= \frac{\eta\mu_{wb}}{2GV_w} \left( r - \frac{b^2}{r} \right), \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \sigma_{rr} &= -\frac{\eta\mu_{wb}}{V_w} \left( 1 - \frac{b^2}{r^2} \right), \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \sigma_{\theta\theta} &= -\frac{\eta\mu_{wb}}{V_w} \left( 1 + \frac{b^2}{r^2} \right).\end{aligned}$$

На рис. 1 представлен график коэффициента диффузии как функции пористости при следующих значениях параметра среды:  $\nu = 0$ ,  $\nu_u = 0.5$ ,  $B = 1$ ,  $G = 0.6$  ГПа,  $\rho_s^f = 2.6$  г/см<sup>3</sup>,  $\rho_l^f = 0.9$  г/см<sup>3</sup>,  $\varpi = 1$  Гц.

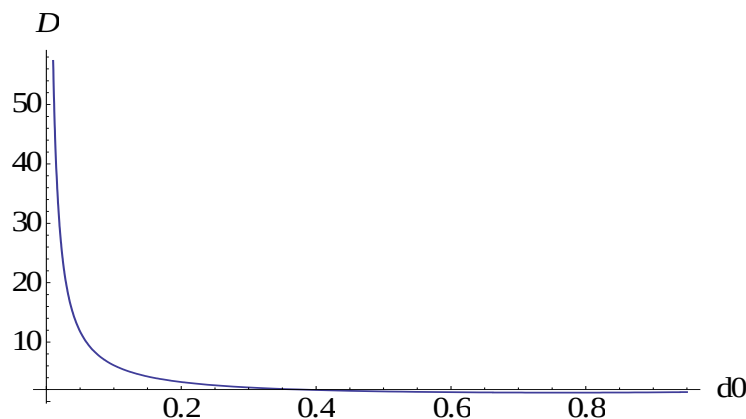


Рис 1. Зависимость коэффициента диффузии  $D$  от пористости.

**Заклучение**

Таким образом, построена термодинамически согласованная математическая модель линейной теории пороупругости для описания сланцевого разбухания с водным электролитом. Получено уравнение диффузии для давления из уравнения пороупругости, при наличии химических эффектов. Показано, что коэффициент диффузии обратно пропорционален пористости.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 18-31-00120).

**Литература**

1. Харитонов Г.В., Манучаров А.С., Черноморченко Н.И., Землянухин В.Н. Влияние обменных катионов Na и Mg на поверхностные свойства глинистых // Почвоведение. 2002. № 1. С. 87-92.
2. Rice J.R., Cleary M.P. Some basic stress diffusion solutions for fluid-saturated elastic porous media with compressible constituents // Rev. Geophys. Space Phys., 1976, v. 14, pp. 227-241.
3. Sherwood J.D. Biotporoelasticity of a chemically active shale // Proc. R. Soc. Lond., 1993, A 440, pp. 365-377.
4. Sherwood J.D., Bailey L. Swelling of a shale around a cylindrical wellbore // Proc Royal Soc Lond A., 1994, v. 444, pp. 161-184.
5. Imomnazarov B., Imomnazarov Kh. Poroelasticity theory of chemically active clay shales // Bull. Nov. Comp. Center, Math. Model. in Geoph., 2017, No. 20., pp. 11-17.
6. Detournay E., Cheng A.H.-D. Poroelastic response of a borehole in a non-hydrostatic stress field // Int. J. Rock Mech. Min. Sci. Geomech. Abstr., 1988, Vol. 25, No. 3, pp. 171-182.

**УДК 539.3****КОЛЕБАНИЯ ПОДЗЕМНОГО ТРУБОПРОВОДА ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОМ НАПРАВЛЕНИИ СЕЙСМИЧЕСКОГО НАГРУЖЕНИЯ**

**Д.А.Бекмирзаев<sup>1</sup>, Н.Ш.Мансурова<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Институт механики и сейсмостойкости сооружений им. М.Т.Уразбева АН РУз

<sup>2</sup>Наманганский инженерно-строительный институт

E-mail: [diyorbek\\_84@mail.ru](mailto:diyorbek_84@mail.ru)

**Аннотация.** В статье рассматривается напряженно-деформированное состояние подземных трубопроводов при действии произвольной сейсмической нагрузки в виде затухающей синусоиды. Результаты представлены в виде графиков изменения значений нормального и касательного напряжений. Проведены многовариантные вычислительные работы для различных углов падения сейсмической волны.

**Ключевые слова:** подземный трубопровод, колебание, сейсмическое воздействие, метод конечных разностей.

**Ixtiyoriy yo‘nalgan seysmik yuklamalar ta’siridagi yer osti quvurining tebranishlari**

**Annotatsiya.** Maqolada ixtiyoriy yo‘nalgan so‘nunchi sinusoidal seysmik kuchlar ta’siridagi yer osti quvurining kuchlanganlik-deformatsiyalanganlik holati qaralgan. Normal va urinma kuchlanishlarning qiymatini o‘zgarishi natijalari grafik ko‘rinishda keltirilgan. Turli burchaklar ostidagi seysmik to‘lqinlar ta’sirida ko‘plab hisoblash ishlari o‘tkazilgan.

**Kalit so‘zlar:** yer osti quvuri, tebranish, seysmik ta’sirlar, chekli ayirmalar usuli.

**Underground pipeline oscillations with arbitrary direction of seismic loading**

**Abstract.** The article considers the stress-strain state of underground pipelines under the action of an arbitrary seismic load in the form of a damped sinusoid. The results are presented in the form of graphs of changes in the values of normal and shear stresses. Multivariate computational work was carried out for various angles of incidence of the seismic wave.

**Keywords:** underground pipeline, oscillation, seismic impact, finite difference method.

### Введение

В настоящее время транспортировка энергоресурсов является одной из важнейших отраслей экономики многих развитых стран мира. Бесспорно, развитие урбанизированных территорий в городах и селах требует увеличения подземного строительства [1-5].

Как известно, в настоящее время более половины населения земного шара проживает в городах и крупных мегаполисах. Отсюда можно сделать вывод о том, насколько важны условия обеспечения водо-, газоснабжением, канализацией и другими подземными сооружениями, что требует глубокого теоретического и практического исследования их поведения при сейсмическом воздействии.

К настоящему времени в отечественной и зарубежной науке имеются экспериментальные исследования и упрощенные методы определения напряженно-деформированного состояния (НДС) подземных трубопроводов, взаимодействующих с окружающим грунтом при сейсмических воздействиях.

В нашей стране рядом ученых проведены научно-исследовательские работы по развитию повышения сейсмической прочности подземных трубопроводов, в том числе, академиком Т.Р.Рашидовым разработана динамическая теория сейсмостойкости сложных систем подземных сооружений [1]. Как известно, трубопроводные системы жизнеобеспечения состоят из прямолинейных трубопроводов, присоединенных к узлам и состыкованных между собой ортогонально и неортогонально. Сейсмическая волна, возникшая при землетрясении, будет воздействовать на такую систему трубопроводов при произвольном угле атаки в пространстве. Для подземной системы произвольно расположенных трубопроводов при произвольном угле атаки сейсмического воздействия в пространстве требуется разработать новые расчетные математические модели и программные средства определения напряженно – деформированного состояния.

### Постановка задачи

Для изучения совместных продольных, поперечных колебаний подземных сооружений типа трубопроводов при произвольном направлении сейсмического нагружения применим прикладную теорию колебаний стержней.

На основе допущений, приведенных в работе [2-5], трубопровод моделируется в виде стержня (рис.1),  $\alpha$  – угол падения сейсмической волны.

Вариационный принцип Гамильтона–Остроградского [2-5] для подземного трубопровода имеет вид

$$\int_t (\delta T - \delta \Pi + \delta A) dt = 0, \quad (1)$$

где  $\delta T$ ,  $\delta \Pi$  – вариации кинетической и потенциальной энергий;  $\delta A$  – вариация работы внешних сил;  $t$  – время.

Трубопровод моделируется в виде стержня (рис.1). Перемещения определяются следующим образом [2]:

$$u_1 = u - y\alpha_1, \quad u_2 = v, \quad (2)$$

где компоненты  $u_1$ ,  $u_2$  – перемещения точки трубопровода;  $u$ ,  $v$  – продольные и поперечные горизонтальные перемещения оси трубопровода;  $\alpha_1$  – углы поворота оси трубы при чистом изгибе.

Вариация кинетической энергии стержня определяется следующим образом:

$$\int_t \delta T dt = \int_t \int_V \left[ \rho \frac{\partial u_1}{\partial t} \delta \frac{\partial u_1}{\partial t} + \rho \frac{\partial u_2}{\partial t} \delta \frac{\partial u_2}{\partial t} \right] dV dt. \quad (3)$$

Вариацию потенциальной энергии так же рассмотрим для стержня:

$$\int_t \delta \Pi dt = \int_t \int_V (\sigma_{11} \delta \varepsilon_{11} + \sigma_{12} \delta \varepsilon_{12}) dV dt. \quad (4)$$

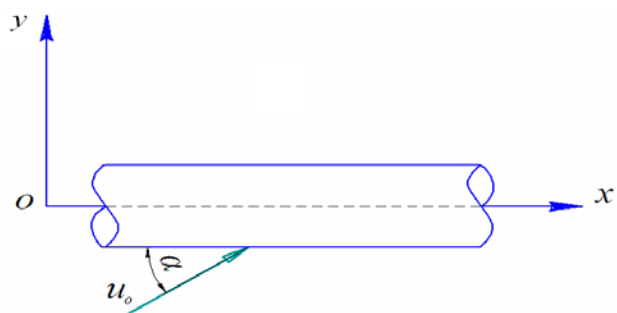


Рисунок 1 – Схема подземного трубопровода при произвольном направлении сейсмического воздействия на горизонтальной плоскости

Принимаем, что трубопровод деформируется в пределах упругости, поэтому для материала трубопровода рассматривается закон Гука

$$\sigma_{11} = E\varepsilon_{11}, \quad \sigma_{12} = G\varepsilon_{12}, \quad (5)$$

где  $\varepsilon_{ij}$  – соотношения Коши, имеющие вид

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial \alpha_1}{\partial x}, \quad \varepsilon_{12} = \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} - \alpha_1. \quad (6)$$

Если учитываем соотношения Коши (6), то вариация потенциальной энергии (4) получает вид:

$$\int_t \delta \Pi dt = \int_t \int_V \left[ \sigma_{11} \delta \frac{\partial u}{\partial x} - y \sigma_{11} \delta \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} + \sigma_{12} \delta \frac{\partial v}{\partial x} - \sigma_{12} \delta \alpha_1 \right] dV dt. \quad (7)$$

Вариация работы внешних сил стержня представляется так

$$\int_t \delta A dt = \int_t \int_V [P_1 \delta u_1 + P_2 \delta u_2] dV dt + \int_t \int_S [q_1 \delta u_1 + q_2 \delta u_2] dS dt + \int_t \int_{S_1} [\varphi_1 \delta u_1 + \varphi_2 \delta u_2] dS_1 dt \Big|_x. \quad (8)$$

где  $P_1, P_2$  – объемные силы;  $q_1, q_2$  – поверхностные силы;  $\varphi_1, \varphi_2$  – торцевые силы, действующие на трубопровод.

Выражения вариаций кинетической, потенциальной энергий и работы внешних сил трубопровода подставляем в вариационный принцип Гамильтона – Остроградского (1), тогда из вариационного уравнения подземного трубопровода получаем следующую систему уравнений с начальными и граничными условиями

$$\begin{cases} -\rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EF \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + N_x(P_1) + N_x(q_1) = 0, \\ -\rho I_z \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial t^2} + EI_z \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial x^2} + GF \frac{\partial v}{\partial x} - GF \alpha_1 - (M_z(P_1) + M_z(q_1)) = 0, \\ -\rho F \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + GF \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - GF \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} + (Q_{12}(P_2) + Q_{12}(q_2)) = 0. \end{cases} \quad (9)$$

$N_x(q_1), M_z(q_1), Q_{12}(q_2)$  – силы взаимодействия трубопровода с грунтом, определяемые экспериментально [6].

Естественные граничные условия подземного трубопровода:

$$\left[ -EF \frac{\partial u}{\partial x} + N_x(\varphi_1) \right] \delta u \Big|_x = 0, \quad \left[ -EI_z \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} - M_z(\varphi_1) \right] \delta \alpha_1 \Big|_x = 0, \quad \left[ -GF \frac{\partial v}{\partial x} + GF \alpha_1 + Q_{12}(\varphi_2) \right] \delta v \Big|_x = 0, \quad (10)$$

Естественные начальные условия подземного трубопровода:

$$\rho F \frac{\partial u}{\partial t} \delta u \Big|_t = 0, \quad \rho I_z \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} \delta \alpha_1 \Big|_t = 0, \quad \rho F \frac{\partial v}{\partial t} \delta v \Big|_t = 0. \quad (11)$$

Для вывода системы дифференциальных уравнений движения (9) с граничными (10) и начальными (11) условиями использовали вариационный принцип Гамильтона – Остроградского (1).

При этом получим систему дифференциальных уравнений и естественные граничные и начальные условия в векторном виде

$$M \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + A \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + B \frac{\partial V}{\partial x} + C(V - V_0) = 0 \quad (13)$$

где  $V_0$  – воздействие сейсмической волны, действующей в произвольном направлении по периметру сечения трубы, равномерно распределяясь по всей его поверхности, беря свое начало с левого торца трубопровода.

$$\left[ D \frac{\partial V}{\partial x} + FV \right] \delta V \Big|_x = 0, \quad (14)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} \delta V \Big|_t = 0, \quad (15)$$

где  $M, A, B, C, D, F$  – матрицы третьего порядка.

Векторное уравнение (13) с учетом граничных условий (14) и начальных условий (15) решается методом конечных разностей второго порядка точности.

$$\frac{M}{\tau^2}(V_{i,j+1} - 2V_{i,j} + V_{i,j-1}) + \frac{A}{h^2}(V_{i+1,j} - 2V_{i,j} + V_{i-1,j}) + \frac{B}{2h}(V_{i+1,j} - V_{i-1,j}) + C(V_{i,j} - V_{0,i,j}) = 0.$$

Векторное уравнение решаем относительно искомой функции  $V_{i,j+1}$

$$V_{i,j+1} = -M^{-1}\tau^2 Q V_{i-1,j} + P V_{i,j} - M^{-1}\tau^2 Z V_{i+1,j} - V_{i,j-1} + C M^{-1}\tau^2 V_{0,i,j}. \quad (16)$$

где  $Q = \left( \frac{2A}{h^2} - \frac{B}{2h} \right)$ ,  $P = \left( 2E + 2 \frac{A M^{-1} \tau^2}{h^2} - C M^{-1} \tau^2 \right)$ ,  $Z = \left( \frac{A}{h^2} + \frac{B}{2h} \right)$ .

#### Анализ результатов численных исследований

Разработаны алгоритм и программа расчета подземных трубопроводов также в случае падения сейсмической волны под углом к оси трубопровода, что соответствует произвольному сейсмическому нагружению. В качестве примера рассмотрим следующие задачи.

**Задача.** Рассмотрим стальной подземный трубопровод с заземленными концами. На основе алгоритма компьютерной реализации решается поставленная задача. Механические и геометрические параметры имеют следующие значения:  $E=2 \cdot 10^5$  МПа;  $\rho=7.8 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>;  $l=100$  м;  $k_x=3 \cdot 10^4$  кН/м<sup>3</sup>;  $u_0=a_0 \cdot e^{-ct} \cdot \sin \omega(t-x \cdot \cos \alpha / C_p) \cdot H(t-x \cdot \cos \alpha / C_p)$ ;  $u_{0x}=u_0 \cdot \cos \alpha$ ;  $u_{0y}=u_0 \cdot \sin \alpha$ ;  $\varepsilon=0.3$ ;  $a_0=0.002$  м;  $\omega=2\pi/T$ ;  $T=0.3$  с;  $C_p=1600$  м/с;  $\mu_{грунт}=0.2$ ;  $\mu_{труба}=0.3$ ;  $D_H=0.4$  м;  $D_B=0.392$  м.

Для получения численных результатов разработаны алгоритм и программа расчета подземных трубопроводов в случае падения сейсмической волны под углом к оси трубопровода, что соответствует произвольному сейсмическому нагружению. Результаты решения задач приводятся в виде графиков и таблиц.

На рисунке 1, представлены изменения значений нормального и касательного напряжений по времени в заданных сечениях подземного трубопровода.

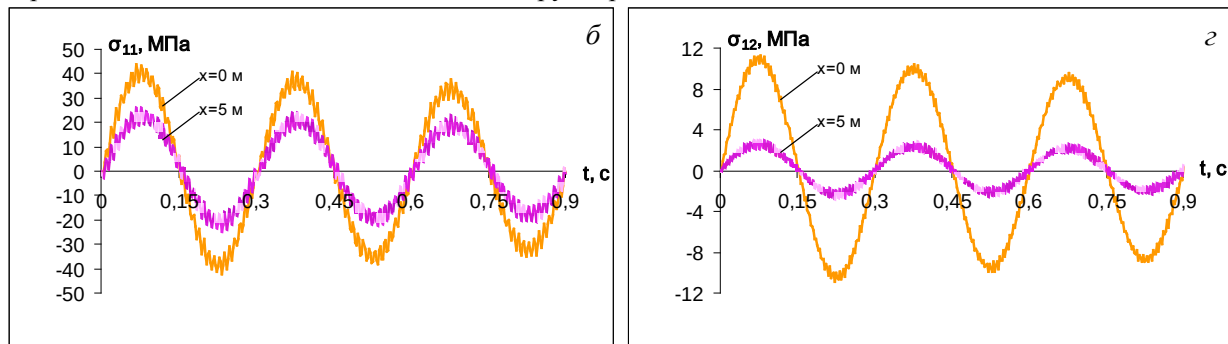


Рис.1. Изменения значений нормального (а) и касательного (б) напряжений по времени в заданных сечениях подземного трубопровода

Изменения значения нормального и касательного напряжений по времени в заданных сечениях трубопровода носят гармонический характер: фазы колебания в разных сечениях совпадают, но отличаются амплитудами колебания в разных сечениях трубопровода (рис.1).

Все эти процессы дают основание полагать, что опасной зоной нагружения подземного трубопровода является около границы, и здесь появляется возможность оценки результатов при таких нагружениях.

В табл.1 приведены значения продольного и поперечного перемещений в середине трубопровода при разных углах падения сейсмической нагрузки  $\alpha=0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$  в заданные моменты времени.

Таблица 1

#### Значения продольного и поперечного перемещений трубопровода

| t, (с) | u (м),<br>x=50 м, $\alpha=0^\circ$ | u (м),<br>x=50 м, $\alpha=60^\circ$ | v (м),<br>x=50 м, $\alpha=30^\circ$ | v (м),<br>x=50 м, $\alpha=90^\circ$ |
|--------|------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 0.1    | 0.0022967672                       | 0.0011483836                        | 0.0016260320                        | 0.0032520641                        |
| 0.2    | -0.0012991638                      | -0.0006495819                       | -0.0000559787                       | -0.0001119574                       |

|     |               |               |               |               |
|-----|---------------|---------------|---------------|---------------|
| 0.3 | -0.0019557870 | -0.0009778935 | 0.0000524770  | 0.0001049540  |
| 0.4 | 0.0010671389  | 0.0005335695  | 0.0007667490  | 0.0015334981  |
| 0.5 | 0.0003661392  | 0.0001830696  | 0.0000767852  | 0.0001535703  |
| 0.6 | 0.0003339712  | 0.0001669856  | -0.0006541175 | -0.0013082350 |
| 0.7 | 0.0012480336  | 0.0006240168  | 0.0006364255  | 0.0012728510  |
| 0.8 | -0.0017080689 | -0.0008540344 | -0.0006922960 | -0.0013845919 |
| 0.9 | -0.0017267303 | -0.0008633651 | -0.0006217896 | -0.0012435792 |
| 1   | 0.0008199660  | 0.0004099830  | -0.0003383376 | -0.0006766751 |

В табл.2 приведены значения нормального  $\sigma_{11}$  и касательного  $\sigma_{12}$  напряжений на левом конце трубопровода в заданные моменты времени при  $\alpha=0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ .

Таблица 2

Значения нормального и касательного напряжений трубопровода

| t, (с) | $\sigma_{11}$ (МПа),<br>$\alpha=0^\circ, x=0$ м | $\sigma_{11}$ (МПа),<br>$\alpha=60^\circ, x=0$ м | $\sigma_{12}$ (МПа),<br>$\alpha=30^\circ, x=0$ м | $\sigma_{12}$ (МПа),<br>$\alpha=90^\circ, x=0$ м |
|--------|-------------------------------------------------|--------------------------------------------------|--------------------------------------------------|--------------------------------------------------|
| 0.1    | 40.72615459                                     | 19.84727664                                      | 18.83015257                                      | 37.66030515                                      |
| 0.2    | -43.21924457                                    | -22.24292167                                     | -14.42392374                                     | -28.84784749                                     |
| 0.3    | -17.08079556                                    | -7.85916668                                      | -3.21644727                                      | -6.43289455                                      |
| 0.4    | 26.43132172                                     | 12.94067971                                      | 17.37844259                                      | 34.75688519                                      |
| 0.5    | -23.49841221                                    | -12.10504284                                     | -11.21341653                                     | -22.42683307                                     |
| 0.6    | -15.31450530                                    | -7.06285639                                      | -5.35043232                                      | -10.70086464                                     |
| 0.7    | 28.28298246                                     | 14.06856565                                      | 11.84429033                                      | 23.68858067                                      |
| 0.8    | -34.07343878                                    | -17.13572064                                     | -13.02077623                                     | -26.04155247                                     |
| 0.9    | -16.22256812                                    | -7.50608640                                      | -4.19390355                                      | -8.38780711                                      |
| 1      | 18.47144297                                     | 9.33160397                                       | 11.12095245                                      | 22.24190490                                      |

Анализ полученных результатов показывают, что с увеличением угла падения сейсмической нагрузки значения продольного перемещения и нормального напряжения уменьшаются (таблица 1, 2), а значения поперечного перемещения и касательного напряжения (таблица 1, 2) увеличиваются.

При разных значениях времени и углах падения сейсмической нагрузки с увеличением силы землетрясения значения продольного и поперечного перемещений увеличиваются, а увеличение скорости продольной волны приводит к уменьшению значений продольного и поперечного перемещений (рис.2, а, б).

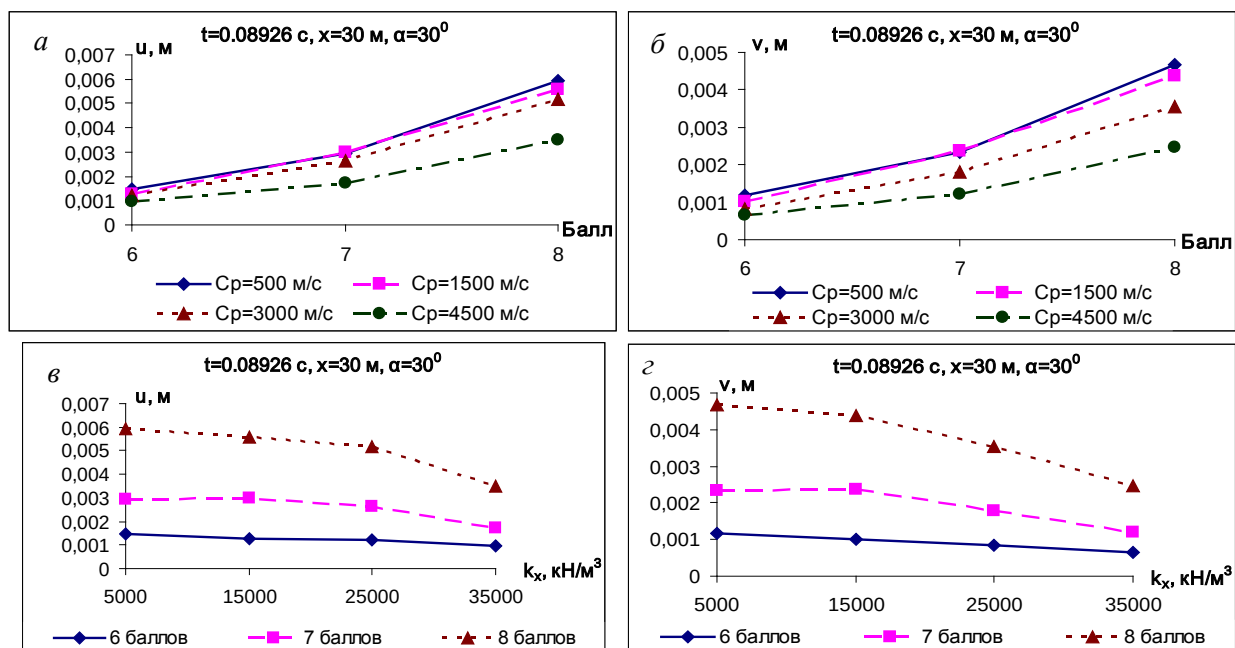


Рис.3.14. Изменение значений продольных (а, в) и поперечных (б, г) перемещений при изменении балльности землетрясений и параметра  $k_x$  при заданном времени

Увеличение параметра  $k_x$  приводит к уменьшению значений продольных и поперечных смещений, а увеличение балльности землетрясения – к увеличению значений продольных и поперечных смещений (рис.2, в, г).

### Выводы

Выведена система уравнений движения прямолинейного трубопровода, взаимодействующего с окружающей средой, на основе вариационного принципа Гамильтона – Остроградского при произвольном направлении сейсмического нагружения в плоскости.

Напряженно-деформированное состояние подземных сетей существенно зависит от угла падения сейсмического воздействия. При малых углах падения сейсмической волны значения продольного перемещения и нормального напряжения являются значительными и при увеличении угла падения их значения уменьшаются. А значения поперечного перемещения и касательного напряжения при малых углах падения являются малыми и при увеличении угла падения возрастают до максимальных значений, что может вызвать в узлах закрепления труб повреждения и разрушения.

### Литература

1. Рашидов Т.Р. Динамическая теория сейсмостойкости сложных систем подземных сооружений. – Ташкент: Фан, 1973. – 180 с.
2. Rashidov T.R and Bekmirzaev D.A. Seismodynamics of Pipelines Interacting with the Soil // Soil Mechanics and Foundation Engineering. New York. July 2015, Volume 52, Issue 3, pp 149-154.
3. Bekmirzaev D.A and Rashidov T.R. Mathematical Simulation and Solution of the Problem of Seismo–Dynamics of Underground Pipelines // Journal of Siberian Federal University. Engineering & Technologies 2015 8. Issue 8. 1046-1055.
4. Rashidov T.R., Yuldashev T., Bekmirzaev D.A. Seismodynamics of underground pipelines with arbitrary direction of seismic loading // Soil Mechanics and Foundation Engineering. Vol. 55. New York. 2018. Pp. 243-248.
5. Кабулов В.К. Алгоритмизация в теории упругости и деформационной теории пластичности. – Т.: Фан, 1966. –394 с.
6. Рашидов Т.Р., Хожметов Г.Х. Сейсмостойкость подземных трубопроводов. – Ташкент: Фан, 1985. – 153 с.

UDK 003.26

## STEGANOGRAFIYA USULLARINI TASNIFLASHDAGI YANGI YONDASHUV

G.M.Porsayev<sup>1</sup>, U.X. Narzullayev<sup>2</sup>, N.R.Zaynalov<sup>2</sup><sup>1</sup>Samarqand davlat universiteti<sup>2</sup>Muhammad al-Xorazmiy nomidagi Toshkent axborot texnologiyalari universiteti Samarqand filiali

E-mail: porsaev@rambler.ru

**Annotatsiya.** Hozirgi kunda shiddat bilan rivojlanayotgan axborot tizimlari va texnologiyalari sohasida mavjud axborot xavfsizligi sohasiga mansub bo'lgan steganografiya usullari tahlili va ularni qo'llash yo'llari yoritilgan. Shulardan kelib chiqqan holda yangi tasniflash yondashuvi taklif etilgan.

**Kalit so'zlar:** ma'lumotlarni yashirish, steganografiya, matnli steganografiya.

**Новый подход в классификации методов стеганографий**

**Аннотация.** Современное состояние и развитие информационных систем и технологий требует обеспечения информационной безопасности, исходя из этого в данной работе рассмотрены методы стеганографий и даётся новая классификация.

**Ключевые слова:** скрывание информации, стеганография, текстовая стеганография.

**A new approach to the classification of steganography methods**

**Abstract.** The analysis and application of steganography methods belonging to the existing field of information security in the field of Information Systems and technologies, which is currently developing rapidly, is highlighted..

**Keywords:** information hiding, steganography, text steganography.

**Kirish.** Ma'lumotlarni yashirish ("information hiding" yoki "data hiding") qadimdan foydalanilib kelingan va dolzarb bo'lgan soha sanalgan. Ma'lumotlarni yashirish deganda kontent (rasmlar, qo'shiqlar, videolar va b.) ichida kerakli ma'lumotlarni yashirish tushuniladi. Bu yerda, yashirish tushunchasi, ma'lumotni sezilmaydigan ko'rinishda keltirish yoki ma'lumot maxfiyligining mavjudligini saqlash uchun foydalaniladi. Qadimda turli ma'lumotlarni yashirish usullaridan foydalanilgan holda, ma'lum doiradagi odamlar orasida ma'lumotlar almashinilgan.

Axborot xavfsizligini ta'minlash qadimdan muhim masala hisoblanib kelingan [1], shu o'rinda kriptografiya va steganografiya usullari ishlab chiqilgan. Hozirgi kungacha bu soha ko'p olimlarning diqqatini jalb qilib kelmoqda. Ma'lumotlarni yashirish sohasi steganografiya nomi bilan yuritiladi.

Bu so'z yunoncha Steganos (maxfiy, sir) va Graphy (yozuv) so'zlaridan kelib chiqqan va «sirli yozuv» degan ma'noni bildiradi. Steganografiya usullari, ehtimol, yozuv paydo bo'lishidan oldin paydo bo'lgan (dastlab shartli belgi va belgilashlar qo'llanilgan) [2,3]. Steganografiyaning kriptografiyadan boshqa yana o'zgacha masalasi ham bor, ya'ni uning maqsadi - maxfiy xabarni o'zining mavjudligini ham yashirish. Bu ikkala usul birlashtirilishi ham mumkin va natijada axborotni himoyalash samaradorligini oshirish uchun ishlatilishi imkoniyat paydo bo'ladi (masalan, kriptografik kalitlarni uzatish uchun). Steganografiya usullarida yashiriladigan ma'lumotlar bevosita diqqatni jalb qilmaydigan obyektga joylashtiriladi va u konteyner deb nomlanadi.

Kompyuter texnologiyalarining keskin rivojlanishi ushbu sohaga qo'shimcha imkoniyatlar yaratib bermoqda. Bularga aydio fayllar, raqamli rasmlar, matnlar va bajariladigan dasturlar misol bo'la oladi. Steganografiya orqali yashirilgan ma'lumotlarni maxsus algoritmlar orqali xabarlarni qabul qiluvchi aniqlash imkoniga ega bo'ladi [4]. Agar ma'lumotlar shifrlangan bo'lsa, unda qandaydir xabar borligi ayon bo'ladi va yovuz niyatli shaxslar tomonidan hujum uyushtirilishi mumkin [5].

Steganografiyaning klassik usullari asosan quyidagicha tasniflangan:

- Konteyner faylining formatlar oralig'ida ma'lumotlarni yashirish. Bunda ma'lumotlar fayl-konteynerning o'qilmaydigan joylarida yoziladi, masalan, faylning oxirida, ya'ni EOF maxsus belgisidan keyin qo'yiladi.

- Niqoblash orqali yashirish – bunda konteynerning fayl sifatidagi bo'sh bo'lgan xizmat vazifacini bajarishga mo'ljallangan hududlarda joylashtiriladi. Masalan, faylning kelgusidagi imkoniyatlarini kengaytirishga qaratilgan bo'sh joylari misol bo'la oladi.



Shu bilan birga fayllarning formatining maxsus xossalaridan foydalanish mumkin, masalan:

- binar bajariladigan fayllarda maxsus ajratilgan va ammo ishlatilmaydigan maydonlar;
- fayldagi matnni maxsus formatlash, masalan, soʻzlar orasini siljitish;
- faylni identifikasiyalovchi sarlavhani oʻchirish.

Matnli steganografiya belgilarning xossalaridan foydalanib maʼlumotlarni yashirish nazarda tutiladi. Matnli formatdagi fayl katta hajm talab etmagan va unda ishlash uslubi sodda boʻlganligi sababli ushbu yoʻnalish keng imkoniyatlarga ega boʻlmoqda. Masalan, kichik hajmdagi matnli faylda katta hajmdagi maʼlumotlarni yashirish.

Ushbu maqolada matnli steganografiyaga mansub usullar tasnifi tushunarli va soddalashtirilgan shaklda ishlab chiqilgan va bunda baʼzi-bir usullarga toʻxtalib oʻtilgan.

**Mavjud yondashuvlar.** Matnli steganografiya usullarining xilma-xilligi va ularning keng rivojlanishi bevosita ushbu usullarni tizimli oʻrganishni talab qiladi. Ushbu sohada ilk qadamlar bajarilgan, masala [6,7]. Albatta, tasniflash maʼlum bir alomatlar boʻyicha obyektlarni tartibga solish tushuniladi. Masalan, yashiriladigan axborotning hajmi boʻyicha tasniflash [7] keltirilgan. Shundan kelib chiqqan holda steganografiya uchta toifaga boʻlingan: 1) belgilar bilan kiritish, 2) bitlar bilan kiritish va 3) aralash holda kiritish. Bundan tashqari [8] maqolada tasniflash bevosita usullarning mohiyatidan kelib chiqqan holda bajarilgan va misollar bilan tasdiqlangan.

Maʼlumotlarni yashirin joʻnatishda oddiy gazetalardan foydalanish hollari tarixda uchray turgan. Masalan, Angliyadagi gazetalardan birida harflar ostiga sezilar-sezilmas nuqtalar qoʻyilgan. Ushbu harflar birlashtirilganda esa yashirin yozuv hosil boʻladi. Ushbu gʻoyadan foydalanib Word muhitida maʼlumotlarni yashirish mumkinligi mualliflar tomonidan koʻrib chilgan [8]. umumiy holda ushbu usulni “Index” deb nomlash mumkin boʻladi. Quyidagi misolda Hofiz Sheroziyning buyuk misralarda axborotni yashirish yoʻlini keltiramiz:

Агар кўнглимни шод этса ўшал Шероз жонони,

Қаро холига бахш этгум Самарқанду Бухорони.

Ushbu matnga “амир жахон” xabarini joylashtirish uchun Word muhitida mavjud “Предметный указатель” texnologiyasidan foydalanilsa, unda quyidagi hosil boʻladi.:

Ага:XE:"a":р:кўнглим:XE:"м":ни:XE:"и":шод:этса:ўшал:Шер:XE:"р":оз:ж:XE:"ж":онони.  
Ка:XE:"а":ро:х:XE:"х":о:XE:"о":лига:бахш:этгум:Самарқанду:Бухорон:XE:"н":и.

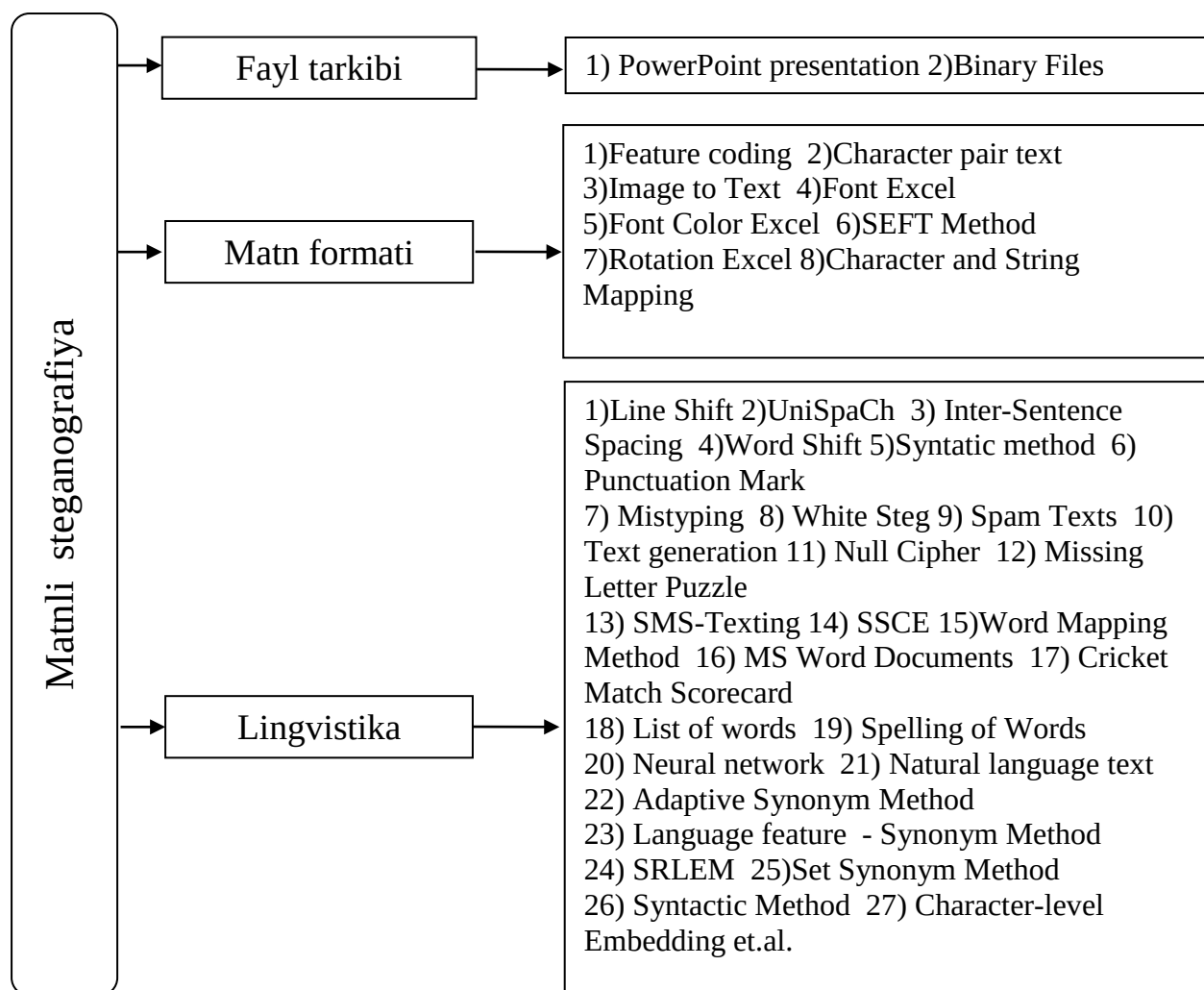
Ushbu belgilarni “Alt+X” tugmalari orqali ham shakllantirish mumkin. Agar ushbu rejim yopilsa, oddiy matn rejimiga oʻtiladi va yozuvdagi yashirin xabar koʻrinmas holatga oʻtkaziladi. Shu bois ushbu usul “Index” deb nomlanildi.

**Taklif etiladigan yechim.** Oldingi boʻlimda koʻrib chiqilgan tasniflash jarayoni juda kuchli vosita hisoblanib, jarayonni, hodisani va obyektlarni oʻrganishda va tahlil qilishda muhim hisoblanadi. Obyektning xossalarini oʻrganishga ulardagi umumiylikni asos qilib olish mumkin. Masalan, obyekt sifatida fayllarni oladigan boʻlsak, ularni bevosita matnli yoki binarli fayllarga taqsimlash mumkin. Taklif etiladigan usulda tasniflash obyektlari sifatida quyidagilar qabul qilingan: Fayl tarkibi, Matn formati va Lingvistika. Ushbu yashirin maʼlumotlarni shakllantirishda mavjud usullarni ushbu xossalar boʻyicha ajratib olamiz (1-rasm). Faylning formati bu maʼlumotlarning tarkibiy tuzilishi boʻyicha kelishuv boʻlib, uning identifikatori sifatida fayl kengaytmasi qabul qilingan. Ushbu identifikator orqali amaliy va tizimli dasturlar fayllarni qayta ishlashga asos boʻlib xizmat qiladi. Ushbu format bevosita faylning oʻzida ham kiritilgan boʻladi. Masalan, “doc” formati bevosita Word 97-2003 ning hujjati boʻlib, umumiy holda binar faylda saqlanadi, shu bilan birga “docx” formatli fayl ham Word dasturining hujjati hisoblanadi, ammo faylning formati XML ga asoslangan. Shu bois Word hujjati umumiy holda murakkab obyektlardan iborat boʻladi va tarkiblangan mohiyatiga asoslanib tashkillashtiriladi.

Xuddi shunday Excel 2007 tizimida ham XML formati qoʻllanilgan va barcha obyektlar (kitob, varaq, shablon va b.) ushbu formatda shakllantirilgan. Shu bilan birga ushbu obyektlar ZIP arxivlarda saqlanadi.

Shunday qilib, matnli steganografiyada mavjud usullarni tasniflashda fayllarning yuqoridagi sifatlari ham eʼtiborga olinadi. Shu bilan birga baʼzi-bir usullar haqida qisqa maʼlumotlar berilgan.

Ushbu tasnif doirasida mavjud usullarning taqqoslash va rivojlanish yo'nalishlarini belgilab beradi va yaratilgan algoritmlarni ilmiy izlanishlarda va tijorat masalalarida qo'llash paydo bo'ladi.



1-rasm. Matnli steganografiya usullarining tasnifi.

Ushbu chizmada keltirilgan matnli steganografiya usullari [7] keltirilgan bo'lib, ularning ba'zilarida to'xtalib o'tamiz.

### 3.1 PowerPoint Presentation

Ushbu usulda PowerPoint fayli asos qilib olingan bo'lib, uning keng tarmoqli tarkibiy qismidan foydalaniladi. Ushbu usul mualliflari [9] PowerPoint dasturida yaratilgan faylning tarkibida ko'p bo'sh joylar borligini tahlil qilib aniqlashgan. Umumiy holda PowerPoint fayli bevosita sarlavha va tartiblangan konteynerlardan iborat bo'ladi. Ushbu konteynerlar ma'lumotlarni yashirish uchun juda qulay vosita bo'lib xizmat qiladi.

### 3.2 Feature coding

Ushbu usulga mansub ko'p ishlanmalar mavjud bo'lib, asosiy g'oya sifatida belgilarning xossalari hisoblanadi. Masalan, [10] keltirilgan usulda shriftlar ustida o'zgarishlarni amalga oshirish orqali (shrift o'lchami, yozilish stili va b.) ko'p hajmda ma'lumotlarni joylashtirish mumkinligi ko'rsatilgan. Ba'zi-bir ishlanmalarda faqatgina ASCII kodiga mos kelgan belgilar doirasida emas, balkim maxsus belgilardan foydalanish mumkinligi ko'rsatilgan, masalan, Space, Enter, LR va b. Ushbu usullar bo'yicha keltirilgan ma'lumotlar boshqa nom bilan ham uchraydi, masalan, Character Marking [7].

### 3.3 Line Shift

Ushbu usul klassik usullardan biri bo'lib, so'zlar orasida Space belgisini kiritish orqali amalga oshiriladi. Bu yerda belgilarni faqatgina gorizontaal bo'yicha siljitish bilan birga, vertikal siljitish

algoritmami ham ishlab chiqilgan [6, 11]. To'liq qatorlar orasidagi masofani o'zgartirish orqali ma'lumotlarni yashirish esa [12] keltirilgan.

**Olingan natijalar.** Ishlab chiqilgan matnli steganografiya usullarining tasnifi asosan ma'lumotlar formatining maxsus xossaligidan foydalanishga qaratilganligi aniqlanildi. Umumam olganda ushbu yo'nalishda kelgusida yanada ko'p ilmiy izlanishlarni kutish mumkin, chunki amaliy dasturlarning har bir keyingi varianti kengroq imkoniyatlarga ega bo'ladi. Shu qatorda, matndagi yozuvning lingvistik tamoyillari bevosita har xil tillarni qamrab olishi mumkin, ya'ni keltirilgan usulni boshqa tillarda ham qo'llash mumkin. Ammo fayllarning tarkibini chuqur o'rganish va unda ma'lumotlarni yashirishga qaratilgan ilmiy ishlanmalar ozligi bevosita ushbu sohada yaratilishi mumkin bo'lgan usullarni kutish mumkin.

Tasniflash doirasida olib borilgan izlanishlar natijasida bulutli texnologiyalarga e'tibordan chetda qolmoqda. Ammo [13] keltirilgan izlanishlar bu sohada ham steganografiya usullarini ishlab chiqish mumkinligidan dalolat beradi. Umumam olganda, bulutli texnologiyalarni steganografiyada qo'llash bo'yicha alohida ilmiy izlanishlar olib borish zarur.

**Xulosa.** Keyingi yillarda mamlakatimizda olib borilayotgan ijtimoiy-iqtisodiy va ijtimoiy-siyosiy islohotlarning samaradorligini oshirishning muhim sharti sifatida davlat va jamiyat boshqaruvi sohasiga zamonaviy axborot-kommunikatsiya tizimlarini joriy etishga muhim e'tibor qaratib kelinmoqda.

Afsuski, bugungi kunda axborot xavfsizligi uchun yuz foizlik natijani ta'minlaydigan profilaktik muhofaza qilish tizimi mavjud emas. Shuning uchun hujumlarni aniqlash va ularga to'g'ri baho berish masalasi axborot xavfsizligi muammolarini hal qilishda birinchi o'ringa chiqadi. Shu bois matnli steganografiya usullarini chuqur o'rganish va ularni iqtisodiy masalalarda vujudga keladigan axborotlarni himoyalashda kriptografiya usullari bilan birgalikda foydalanish yuqori ahamiyatga egadir.

Shunday qilib, steganografiya usullarining rivojlanishi bevosita kompyuterda fayllarni saqlashdagi yangi texnologiyalarning rivojlanishi bilan chambarchas bog'liq bo'lib, kelgusida axborotlarni yashirish va ularni uzatishda keng imkoniyatlar vujudga keladi.

### Adabiyotlar

1. Zaynalov N.R., Muhamadiev A.N., Kiyamov J. Kriptografiya usullariga doir oddiy misollar// Fizika, matematika va informatika jurnali, 2019, № 2, 26-34 b.
2. Fabien A.P. Petitcolas, Ross J.Anderson, Markus G.Kuhn. (1999). Information hiding—a survey. In: Proc IEEE 87(7): pp.1062-1078.
3. Por LY, Ang TF, Delina B (2008) WhiteSteg-a new scheme in information hiding using text steganography. WSEAS Trans Comput 7(6): pp.735-745.
4. Changder S, Ghosh D, Debnath N.C. (2010). Linguistic approach for text steganography through Indian text. In: 2010 2nd international conference on computer technology and development, pp. 318-322
5. Ross J.Anderson, Fabien A.P. Petitcolas. (1998). On the limits of steganography. IEEE J Sel Areas Commun 16(4): pp.474-481.
6. Hassan Shirali-Shahreza M., Mohammad Shirali-Shahreza (2006) A new approach to persian/arabic text steganography. In: 5th IEEE/ACIS international conference on computer and information science and 1st IEEE/ACIS international workshop on component-based software engineering, software architecture and reuse, pp 310-315.
7. Bala Krishnan R., Prasanth Kumar Thandra, M. Sai Baba. An overview of text steganography. 4th International Conference on Signal Processing, Communications and Networking (ICSCN -2017), March 16 - 18, 2017, Chennai, INDIA .
8. Zaynalov N.R., Narzullaev U.Kh., Muhamadiev A.N., Bekmurodov U.B., Mavlonov O.N. Features of using Invisible Signs in the Word Environment for Hiding Data. 2019. International Journal of Innovative Technology and Exploring Engineering (IJITEE) ISSN: 2278-3075, Volume-8, Issue-9S3, July 2019. pp.1377-1379.
9. Tiwari R.K., Sahoo G. Microsoft power point files: A secure steganographic carrier. 2011. International Journal of Digital Crime and Forensics. 3(4), pp. 16-28.

10. Shut'ko N. P. The algorithms of realization of text steganography methods based on the modification of the geometric and color text parameters. Belarusian State Technological University. BGTU. № 6 2016, pp.160-165.

11. Hassan Shirali-Shahreza M., Mohammad Shirali-Shahreza (2008) A new dynonym text steganography. In: International conference on intelligent information hiding and multimedia signal processing, pp. 1524-1526.

12. Blinova E. A. Steganographic method based on the line-shift coding method on non-displayed symbols of the electronic text document. Belarusian State Technological University. BGTU. № 6 2016, pp.166-169.

13. Islomov S.Z., Mavlonov O.N., Muhamadiev A.N., Shodmonov D.A., Djumaev S.N. New authentication scheme for cloud computing. 2018. Journal of Advanced Research in Dynamical and Control Systems. 10(10), c. 2316-2319.

UDK: 004.45

### SKREMBLERNING TURINI ANIQLASH ALGORITMI

G.Yuldashev<sup>1</sup>, M.O.Shamiyev<sup>2</sup>

<sup>1</sup>O'zbekiston Respublikasi Mudofaa Vazirligi

<sup>2</sup>Toshkent axborot texnologiyalari universiteti Samarqand filiali  
[Nurshod86@mail.ru](mailto:Nurshod86@mail.ru)

**Annotatsiya.** Chiqish signaliga asoslangan uzatuvchi tomonga tadbqiq qilinadigan skrembler turini aniqlash masalasi ko'rilgan. Bunday turdagi masalalar radiomonitoring tizimi va qabul qilishning kognitiv tizimini yaratish, raqamli signalni qayta ishlash uchun aktual hisoblanadi. Tizimlarni additiv, shuningdek multiplikativ skrembler ko'rinishida identifikatsiyalashga imkon beruvchi texnik yechimlar ma'lum. Lekin skrembler turini avtomatik aniqlaydigan algoritmlar keltirilgan maqolalar mavjud emas. Ushbu maqolada bu muammo qisman to'ldirilgan. Yuqoridagi masalani yechishga imkon beruvchi algoritmi va uni modellashtirish natijalari keltirilgan.

**Kalit so'zlar:** skrembler, identifikatsiya, radiomonitoring.

#### Algorithm of determination of skrembler's turn

**Abstract.** The article describes algorithm that allows determining scrambler type based on the signal from its output. The task of this kind is relevant for radio monitoring systems and when creating cognitive systems for digital signal receiving and processing. The identification algorithm determines the form of the scrambler both multiplicative and additive. It provides a formal statement of the problem, an identification algorithm and simulation results.

**Key words:** scrambler, identification, radiomonitoring.

#### Алгоритм определения типа скремблера

**Аннотация.** Рассмотрена задача определения вида скремблера, примененного на передающей стороне, на основании сигнала с его выхода. Задача такого рода является актуальной для систем радиомониторинга и при создании когнитивных систем приема и обработки цифрового сигнала. Приведен алгоритм, обеспечивающий решение указанной задачи, и результаты его моделирования.

**Ключевые слова:** скремблер, идентификация, радиомониторинг

Hozirda raqamli radioaloqa tizimlari keng qo'llanilmoqda. Ushbu tizimlarga hos bo'lgan radio signallarni aniqlash, qayta ishlash va shakllantirish uchun algoritmlar ishlab chiqish zarurati muhim sanaladi. Ushbu yo'nalishlardan biri skremblerdir. Skremblerning ikki xil ko'rinishi mavjud: additiv va multiplikativ. Ushbu maqolada skrembler turini aniqlash, signallarni tahlil qilish algoritmlari ko'rib chiqilgan.

Bugungi kunda skremblerning identifikatsion tuzilishi haqida ko'plab maqolalar chop qilingan. Skrembirlash ma'nosi ma'lum bir ketma-ketlikni hosil qilishdan iborat, bunda nollar va birlarning paydo bo'lishi statistikasi tasodifiy voqeaga yaqinlashadi, u berilgan chastotalar sohasida yig'ilgan uzatilayotgan signalning quvvatining o'zgarmas spektral quvvati va taktli chastotasini

ishonchli ajratish talablarini qondirish imkonini beradi. Shuni ta'kidlash lozimki skrembirlash signalning statistik xususiyatlarini yaxshilash uchun aloqa tizimlarining ko'p turlarida keng ishlatiladi. Skrembirlash odatda bevosita modulyatsiyadan oldin amalga oshiriladi. Skrembler - qurilma yordamida uzatuvchi tomonida amalga oshiriladi, u qabul qiluvchi tomonida teskari operatsiya - diskrembirlash diskrembler nomli qurilma yordamida bajariladi. Diskrembler qabul qilinayotgan ketma-ketlikdan dastlabkisi ajratib oladi. Skremblerning asosiy qismi soxta tasodifli ketma-ketlik generatori bo'lib (STK), u  $2n-1$  maksimal uzunlikdagi ketma-ketlikni shakllantiruvchi teskari aloqali  $n$ -kaskadli liniyaviy registr ko'rinishida bajariladi. Skrembler va deskrembler o'rtasida sinxronlash yo'qolganda sinxronlashni tiklash vaqti skrembler registri yacheykalarining soniga teng bo'ladi.

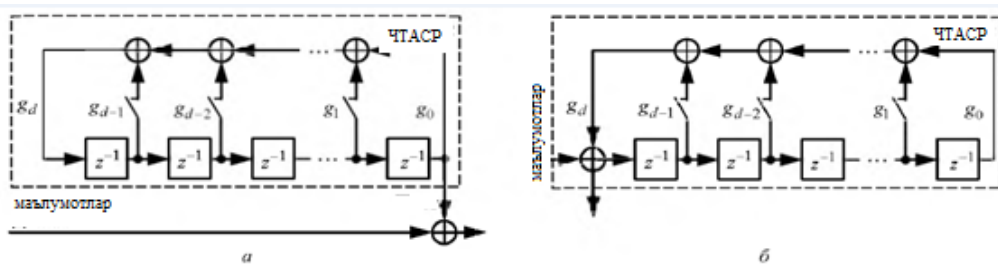
**Qisqacha nazariy ma'lumotlar.** Eng birinchi signallarning harakteristikalarini bilan tanishib olamiz. Agar signal  $\Delta t = t_2 - t_1$  oraliqda mavjud bo'lsa, u holda

1. Signalning o'rtacha qiymati  $s(t) = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_1}^{t_2} s(t) dt$
2. Signalning oniy qiymati  $p(t) = s(t)s^*(t) = |s(t)|^2$
3. Signalning energiyasi  $E = \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} s(t)s^*(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} |s(t)|^2 dt$
4. Signalning o'rtacha quvvati  $P_{\text{yp}} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_1}^{t_2} |s(t)|^2 dt$

Skremblerlarning ikkala turi ham chiziqli teskari aloqali siljish regestriga kiritilgan (CHTASR). Buni quyidagi ko'phad orqali ko'rishimiz mumkin:

$$G(x) = \sum_{i=0}^d g_i x^i$$

bu yerda  $d$ -CHTASR xotirasi  $g_i \in GF$ , agar  $g_i \neq 0$  bo'lsa u holda CHTASR yopiq kalit asosida bo'ladi.



1- rasm.

Agar ma'lumotli signal  $N$  bitdan iborat bo'lsa, u holda skremblerning ko'phad shaklida quyidagicha yozish mumkin:

$$D(x) = \sum_{i=0}^{N-1} D_i x^i$$

bu yerda  $D_i$  ( $N-1-i$ )-bitga mos keladi va unga  $S_{\text{mul}}(x)$  ko'phad mos keladi. Umumiy jihatda multiplikativ skrembler uchun mos keladigan ko'phadni quyidagicha yozamiz:

$$S_{\text{mul}}(x) = D(x)/G(x) \quad (1)$$

Agar additiv signal bo'lsa, u holda ko'phadning umumiy ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$S_{\text{ad}}(x) = I(x) x^N / G(x) + D(x) \quad (2)$$

bu yerda  $I(x)$  CHTSAR ning ichki holatini anglatadi, bu yerda bundan tashqari  $G(x)$  ko'phadning darajasi kamroq hisoblanadi.

Multiplikativ desklemberni ko'phad ko'rinishini quyidagicha aniqlaymiz:

$$D(x) = S_{\text{mul}}(x)G(x) \quad (3)$$

**Ma'lumotlarning berilishi va masalaning qo'yilishi.** Skremblerning identifikatsiya ko'rinish modelini shakllantirishda quyidagi rasm muhim hisoblanadi.



2- rasm.

Ikkilik ma'lumotlar generatori ma'lumotlarni simulyatsiya qiladi hamda radio tizimlarda uzatiladi. Berilgan ehtimoliy birliklar bilan ikkilik oqimni birgalikda generatsiya qiladi. Buni quyidagicha ko'rish mumkin:

$$P(D_i=1) = 0.5 - \tau, \tau \in (0, 0.5).$$

Skembler generatordan keladigan ma'lumotlarni additiv yoki multiplikativ sxemalarini skremblerlaydi. Masalani yechishda skremblerlangan signal va yuqoridagi ko'phad  $G(x)$  muhim hisoblanadi. Shuningdek  $N \gg d$  ni e'tiborga olish talab etiladi.

**Algoritm tavsifi.** Tahlil qilinayotgan signallarni multiplikativ deskremblerlashda identifikatsiyalash algoritmi deskremblerlar yordamida amalga oshiriladi va  $G(x)$  va  $G^{2^m}(x)$  ko'phadlar bu jarayonda muhim sanaladi, bu yerda  $m$ -algoritm parametri. (3) ifodaga binoan bu holat  $s(x)$  skremblerlashda noma'lum bo'lgan signalni ifodalaydigan ko'phadni mos ravishda  $G(x)$  va  $G^{2^m}(x)$  ko'phadlarni ko'paytirishga ekvivalentdir. Agar skremblerlanadigan signal additiv bo'lsa, u holda quyidagi ko'phadga ega bo'lamiz.

$$A(x) = S(x)G(x) = \left[ \frac{I(x)x^N}{G(x)} + D(x) \right] G(x) = I(x)x^N + D(x)G(x) \quad (4)$$

$$B(x) = S(x)G^{2^m}(x) = -I(x)x^N G^{2^m-1}(x) + D(x)G^{2^m}(x) \quad (5)$$

Agar skremblerlanadigan signal multiplikativ bo'lsa, u holda (1) ko'phadni quyidagicha yozishimiz mumkin:

$$V(x) = S(x)G(x) = D(x) \quad (6)$$

$$F(x) = S(x)G^{2^m}(x) = D(x)G^{2^m-1}(x) \quad (7)$$

Nolga teng bo'lmagan bitlarning ehtimoliy kelib chiqishini quyidagicha baholash mumkin:

$$P(A_i=1) = \frac{1 - [1 - 2P(D_i=1)]^t}{2} \quad (8)$$

bu yerda  $A_i$   $A(x)$  ko'phadning  $i$ -hadi hisoblanadi.

(8) tenglikni o'ng tomonini  $\tau$  bilan ifodalasak, quyidagiga ega bo'lamiz

$$\tau_1 = |0.5 - P(A_i=1)| = (2\tau)^{1/2} \quad (9)$$

Yuqoridagi jarayonlardan ko'rinadiki,  $G^{2^m-1}(x)$  ning nol bo'lmagan koeffitsiyentlari  $G(x)$  ning nol bo'lmagan koeffitsiyentlariga teng bo'ladi. Bundan

$$\tau_2 = \tau_1 \quad (10)$$

(6) va (7) ifodalarga qaraymiz. Multiplikativ deskrembler multiplikativ skrembler signallar (6) ifodaga ko'ra deskremblerdan chiqishda ma'lumotli signallar paydo bo'ladi.

Bundan

$$\tau_3 = \tau \quad (11)$$

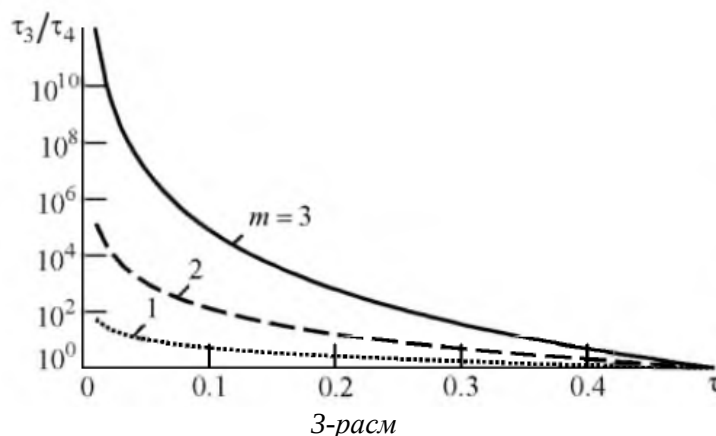
ga erishamiz. Deskremblerlashda  $G^{2^m-1}(x)$  ko'phaddan foydalanganimizda ketma-ketlik hosil bo'ladi. (7) tenglikdan og'ish ehtimolligi  $P(F_i=1)$  dan 0.5 gacha o'zgaradi. Bu yerda  $F_i$   $F(x)$  ko'phadning  $i$ -koeffitsiyenti hisoblanadi, bundan quyidagi aniqlanadi:

$$\tau_4 = |0.5 - P(F_i=1)| = (2\tau)^{1/2} \quad (12)$$

bu yerda  $r$  -  $G^{2^m-1}(x)$  ko'phadning noldan farqli koeffitsiyentlar soni.

Yuqoridagi tengliklardan ko'rinadiki  $G(x)$  va  $G^{2^m}(x)$  ko'phadlarning og'ish ehtimolligi bir xil.

**Modellashtirish natijalari tahlili.** Baholash farqi ehtimolligini to'g'ridan-to'g'ri taqqoslaganda noldan farqli bo'lgan deskremblerlangan  $\tau_a$  va  $\tau_v$  signallar mavhum bo'lmaydi.



Buning sababi shundaki, olingan natijalar to'plami tahlil qilinayotgan ma'lumotlar hajmiga bog'liq. Umuman olganda empirik tanlashni bir-biridan ajratishda zarur bo'lgan axborot umumiy

holda mavjud emas. Eng yomon identifikatsiyalash shartlarida  $\tau_a$  va  $\tau_v$  baholarning bir-biridan farqini aniqlaymiz. Shunday shartlardan biri  $\tau$  kattalikning ekstremal qiymatlaridir. Zamonaviy aloqa tizimlarida bu parametr qiymati 0,01 va 0,4 oraliqda bo'ladi. 3-rasmda  $\tau_3/\tau_4$  nisbatning  $\tau$  kattalikdan m parametrning har xil qiymatlaridagi bog'lanishlar keltirilgan. Rasmdan ko'rinib turibdiki,  $\tau=0,01$  va  $m=1$  bo'lganda baholarning minimal nisbati 50 ga teng. m ning katta qiymatlarida bu farq bir necha darajada ortadi.

Maqolada keltirilgan ma'lumotlar asosida radiomonitoring avtomatlashtirilgan tizimlarida skremlarning ko'rinishini aniqlashda ushbu algoritmdan foydalanish mumkin.

#### Adabiyotlar

1. Canteaut A., Filiol E. Ciphertext only Reconstruction of Stream Ciphers Based on Combination Generators. Berlin: Springer, 2001. 16 p.
2. Скляр Б. Цифровая Связь. Теоретические основы и практическое применение: пер. с англ. 2-е изд. – М.: Издательский дом "Вильямс", 2003. – 1104с
3. М.Х.Нуруллаева, Н.А.Зайнутдинова, Н.С.Ходжаев, И.А.Султанов. Рақамли коммутация тизимлари. – Фарғона, 2014.

UDK: 535.36:535.557

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИНАМИКИ НАНОСТРУКТУРНЫХ ЯВЛЕНИЙ В ЖИДКОСТЯХ МЕТОДОМ ДИНАМИЧЕСКОГО РАССЕЯНИЯ СВЕТА****Л.М.Сабиров<sup>1</sup>, Л.Л.Чайков<sup>2</sup>, М.Н.Кириченко<sup>2</sup>, Ш.Э.Каршибоев<sup>1</sup>**<sup>1</sup>Самаркандский государственный университет.<sup>2</sup>Физический институт им. П.Н.Лебедева РАН, Россия.

leonard.sabirov@gmail.com

**Аннотация.** В работе описаны принципы корреляционной спектроскопии рассеянного света и способ определения размеров частиц, взвешенных в жидкости, с помощью такой спектроскопии – метод динамического рассеяния света (ДРС). Рассматриваются некоторые особенности применения метода ДРС.

**Ключевые слова:** динамическое рассеяние света, корреляционная функция, коэффициент диффузии, гидродинамический радиус, время релаксаций, интенсивность.

**Yorug'likning dinamik sochilishi metodi orqali suyuqliklardagi nanostrukturaviy jarayonlarni o'rganish bo'yicha uslubiy ko'rsatmalar**

**Annotatsiya.** Maqolada yorug'likning dinamik sochilishi metodini qo'llash orqali ba'zi xususiyatlar qarab chiqilgan ya'ni yorug'likning dinamik sochilishi (YoDS)- spektroskopiyaning bunday metodi yordamida suyuqliklardagi zarralarning muallaqlik holati, zarralarning o'lchamlari aniqlash usullari va yoru'glik sochilishining korrelatsion spektroskopiyasi prinsiplari bayon etilgan.

**Kalit so'zlar:** yorug'likning dinamik sochilishi, korrelatsion funksiya, diffuziya koeffitsienti, gidrodinamik radius, relaksatsiya vaqti, intensivlik.

**Guidelines for studying the dynamics of nanostructural phenomena in liquids by dynamic light scattering**

**Abstract.** The paper describes the principles of correlation spectroscopy of scattered light and a method for determining the size of particles suspended in a liquid using such spectroscopy - the method of dynamic light scattering (DLS). Some features of the application of the DLS method are considered.

**Keywords:** dynamic light scattering, correlation function, diffusion coefficient, hydrodynamic radius, relaxation time, intensity.

Динамическое рассеяние света (ДРС) используется в лазерной корреляционной спектроскопии для определения размеров частиц в суспензии. Размеры измеряемых частиц могут быть от единиц нанометров до нескольких микрон. При прохождении пучка света через суспензию происходит его упругое (рэлеевское) рассеяние. В случае ДРС используют лазерное излучение, которое является когерентным и монохроматическим. Измеряемой величиной служит автокорреляционная функция интенсивности (АКФ), определяемая формулой

$$G(t_d) = \frac{1}{N} \sum_i I(t_i)(t_i - t_d) = \langle I(t)I(t - t_d) \rangle \quad (1)$$

где  $G(t_d)$  - автокорреляционная функция,  $N$  - число измерений, выполняемых в моменты времени  $t_i$ ,  $I(t_i - t_d)$  - интенсивность рассеяния света после определенного периода времени задержки  $t_d$ . Метод ДРС позволяет определить коэффициент диффузии дисперсных частиц в жидкости путем анализа корреляционной функции флуктуаций интенсивности рассеянного света. Далее, из коэффициента диффузии рассчитывается радиус наночастиц.



Основные идеи метода динамического рассеяния света

**Броуновское движение** дисперсных частиц или макромолекул в жидкости приводит к флуктуациям локальной концентрации частиц. Результатом этого являются локальные неоднородности показателя преломления и соответственно - флуктуации интенсивности рассеянного света при прохождении лазерного луча через такую среду.

**Коэффициент диффузии** частиц обратно пропорционален характерному времени релаксации флуктуаций интенсивности рассеянного света. Это характерное время, в свою очередь, есть время затухания экспоненциальной временной корреляционной функции рассеянного света, которая измеряется с помощью цифрового коррелятора.

**Размер частиц** (гидродинамический радиус) рассчитывается по формуле Стокса-Эйнштейна, которая связывает размер частиц с их коэффициентом диффузии и вязкостью жидкости.

Метод динамического рассеяния света используется также для измерения скоростей потоков жидкостей и газов. Традиционно, этот вариант метода носит название лазерной доплеровской анемометрии (ЛДА). В частности, данная конфигурация метода ДРС используется для измерения электрофоретической подвижности наночастиц, откуда рассчитывается их дзета-потенциал.

В качестве примера рассмотрим диффузию монодисперсных наночастиц, диспергированных в жидкости. Хаотическое броуновское движение дисперсных частиц приводит к микроскопическим флуктуациям их локальной концентрации и соответствующим локальным неоднородностям показателя преломления среды.

### Методика измерений

Метод исследований основан на измерении корреляционной функции флуктуаций интенсивности рассеянного света, анализ которой позволяет получить распределение характерных времен релаксации флуктуаций концентрации частиц и, соответственно, коэффициентов диффузии разных размерных фракций и распределение частиц по размерам, коэффициент трансляционной диффузии и молекулярный вес полимеров. Исследования проводятся на установке PhotoCor Complex (Фотокор, Россия). Рассеянный свет принимается фотоприемником, после чего обрабатывается цифровым коррелятором. Из полученной автокорреляционной функции программа "DynaLS" вычисляет характерные времена релаксации флуктуаций, средний размер или распределение дисперсных частиц по размерам, точнее, распределение интенсивности рассеяния света по размерам частиц, на которых происходит это рассеяние.

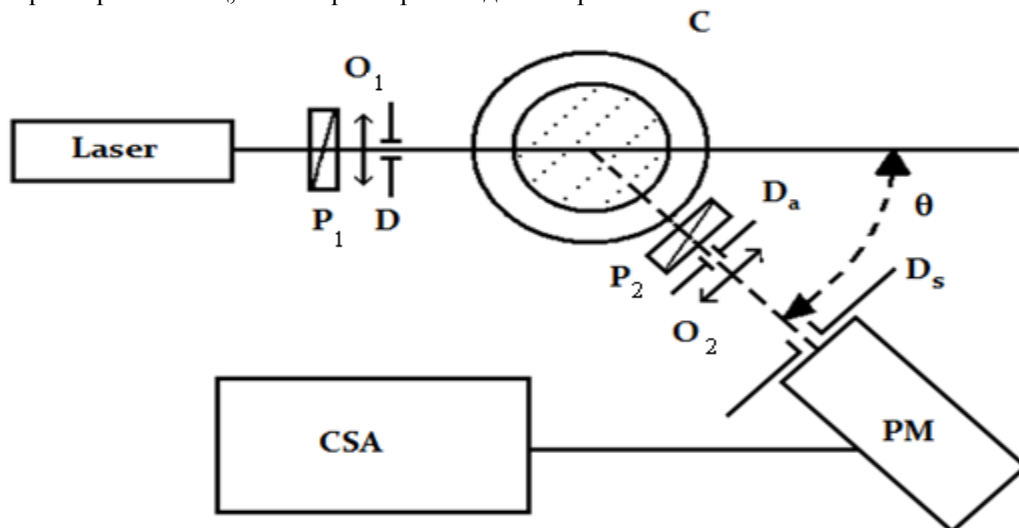


Схема экспериментальной установки: Laser – He-Ne лазер; P – поляризаторы; O – объективы или линзы; C – кювета;  $\theta$  – угол рассеяния;  $D_a$  – апертурная диафрагма; PM – фотоприёмник; CSA – коррелятор;  $D_s$  – диафрагма перед фотоприёмником (катодная).

Апертурная диафрагма  $D_a$  и катодная диафрагма  $D_s$  позволяют обеспечить пространственную когерентность рассеянного света. Они выделяют площадь когерентности на фотокатод, т.е. такую площадь, внутри которой разность хода света, рассеянного в разных точках площади боковой проекции объёма рассеяния, составляет менее  $\lambda/2$ . Прибор позволяет исследовать растворы полимеров, биополимеров и коллоидные системы. Измерение размеров частиц возможно

в диапазоне от 0.5 нм (размер молекулы воды) до 6 мкм. Источником излучения служит термостабилизированный диодный лазер с длиной волны 654 или 445 нм (мощностью 25 мВт). Необходимый для исследования объем образца – от 0.2 до 10 мл. Прибор позволяет также исследовать угловые зависимости интенсивности светорассеяния в диапазоне от 10° до 150°. Температура термостатирования устанавливается от 15°C до 105°C, возможно исследование температурных зависимостей размеров частиц в данном диапазоне температур. Прибор также позволяет исследовать временные зависимости размеров частиц при их агрегации. Для растворов и коллоидов, содержащих как отдельные частицы, так и агрегаты из них, возможно исследование фрактальной размерности агрегатов.

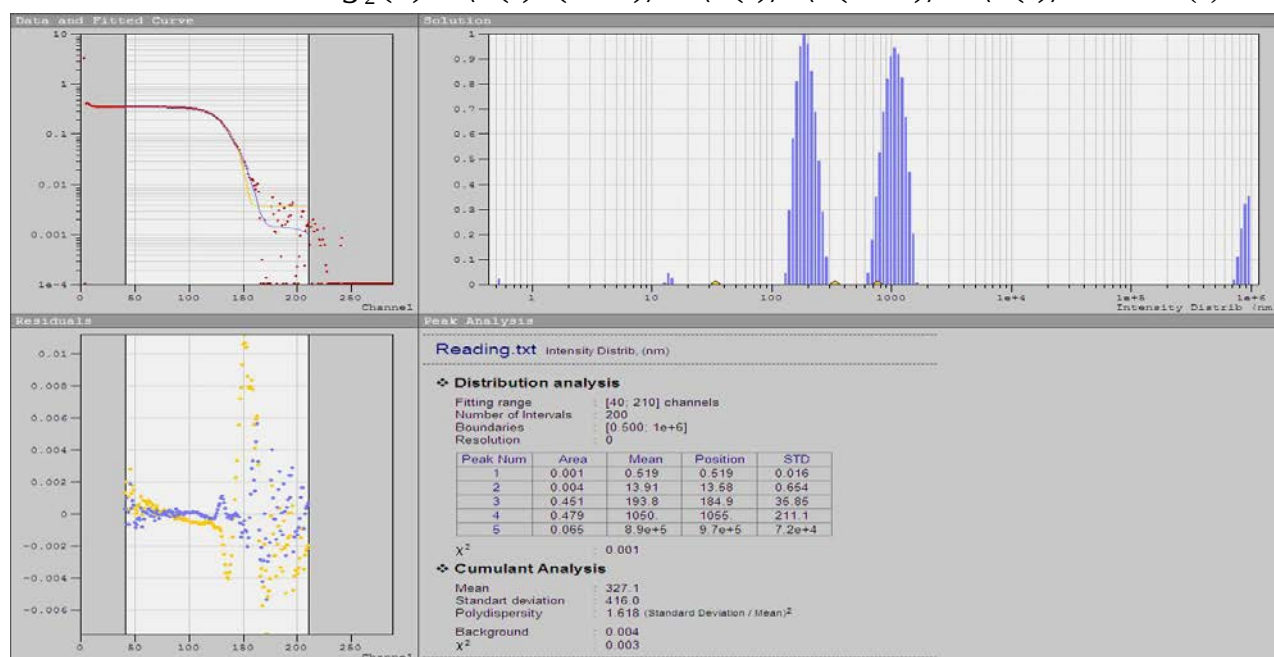
Для измерения электрофоретической подвижности наночастиц в суспензию вводится два электрода, к которым прикладывается напряжение, а в лазерный луч перед линзой  $O_1$  вводится раздвоитель пучка. Направление раздвоителя должно совпадать с направлением поля. Тогда объем рассеяния освещается двумя лучами, сходящимися под малым углом  $\phi \approx d/f$ , где  $d$  – расстояние между параллельными пучками на выходе раздвоителя, а  $f$  – фокус линзы  $O_1$ . Интерференция этих лучей дает в направлении поля распределение интенсивности  $I \sim \sin(2\pi x/\Lambda)$ ,  $\Lambda = \lambda/(2\sin(\phi/2))$ , и при движении частиц через такую решётку со скоростью  $V$  в АКФ появляется множитель  $\cos((2\pi V/\Lambda)\tau)$ . Зная напряжённость поля, радиус и скорость частиц нетрудно определить их заряд и дзета-потенциал.

Хаотическое броуновское движение дисперсных частиц приводит к микроскопическим флуктуациям их локальной концентрации и соответствующим локальным неоднородностям показателя преломления среды. При прохождении лазерного луча через такую среду часть света будет рассеяна на этих неоднородностях. Флуктуации интенсивности рассеянного света будут соответствовать флуктуациям локальной концентрации дисперсных частиц. Информация о коэффициенте диффузии частиц содержится в зависящей от времени корреляционной функции флуктуаций интенсивности. Временная автокорреляционная функция согласно определению имеет следующий вид:

$$g_2(\tau) = \langle I(t)I(t+\tau) \rangle = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} I(t)I(t+\tau) dt \quad (2)$$

где интенсивность  $I$  имеет различные значения во время  $t$  и  $(t + \tau)$ ,  $\Delta t$  – время интегрирования (время накопления корреляционной функции). При  $\tau = 0$ , автокорреляционная функция равна среднеквадратичной интенсивности рассеяния  $\langle I^2(t) \rangle$ . Для бесконечного времени  $\tau$  корреляция отсутствует, и автокорреляционная функция равна квадрату средней интенсивности рассеяния:

$$g_2(\tau) = \langle I(t)I(t+\tau) \rangle = \langle I(t) \rangle \cdot \langle I(t+\tau) \rangle = \langle I(t) \rangle^2 \quad (3)$$



Photocor Runtime Report: Wed Jun 05 18:37:33 2019

| Constants                         | Correlator specific parameters         |
|-----------------------------------|----------------------------------------|
| Temperature, C : 23.2999992       | Sample time, s : 2.e-008               |
| Solvent : Water(11)               | Dust cutoff : 8193                     |
| Viscosity, cP : 0.931420017       | Number of channels : 288               |
| Refractive index : 1.33258375     | Accumulation time,s : 152.478515       |
| Scatteting angle, deg : 45.       | Mean signal intensity, Hz : 271769.313 |
| Laser wavelength, ang: 6327.99988 | $C_w = 2 \cdot 10^{-4}$                |
| $I_l = 34.5$ ; $I_e = 28$         |                                        |

В этой таблице справа представлены параметры для режима работы коррелятора «Multiple tau», т.е. для представления функции в логарифмическом по времени виде. Время выборки (Sample time) через каждые 8 каналов умножается на 2, т.е. например между каналами 136 и 137 будет уже 0.01 секунды (см. таблицу соответствия).

ТАБЛИЦА СООТВЕТСТВИЯ

| 4πn/λ       | 263982.301  |             |            |             |            |
|-------------|-------------|-------------|------------|-------------|------------|
| q(30°)=     | 68318.6195  | q(60°)=     | 131991.2   | q(90°)=     | 263982.3   |
| r=A*τ*n, A= | 1.077E-03   | r=A*τ*n, A= | 0.004018   | r=A*τ*n, A= | 0.008099   |
| A*τ=        | 2.1531E-11  | A*τ=        | 8.04E-11   | A*τ=        | 1.62E-10   |
| № channel   | Arg[a]=b, b | b*τ, mcs    | r(30°), nm | r(60°), nm  | r(90°), nm |
| 24          | 32          | 6.40E-07    | 0.007      | 0.026       | 0.052      |
| 32          | 64          | 1.28E-06    | 0.014      | 0.051       | 0.104      |
| 40          | 128         | 2.56E-06    | 0.028      | 0.103       | 0.207      |
| 48          | 256         | 5.12E-06    | 0.055      | 0.206       | 0.415      |
| 56          | 512         | 1.02E-05    | 0.110      | 0.411       | 0.829      |
| 64          | 1024        | 2.05E-05    | 0.220      | 0.823       | 1.659      |
| 72          | 2048        | 4.10E-05    | 0.441      | 1.646       | 3.317      |
| 80          | 4096        | 8.19E-05    | 0.882      | 3.292       | 6.635      |
| 88          | 8192        | 1.64E-04    | 1.764      | 6.584       | 13.269     |
| 96          | 16384       | 3.28E-04    | 3.528      | 13.167      | 26.538     |
| 104         | 3.28E+04    | 6.55E-04    | 7.055      | 26.335      | 53.076     |
| 112         | 6.55E+04    | 1.31E-03    | 14.11      | 52.67       | 106.15     |
| 120         | 1.31E+05    | 2.62E-03    | 28.22      | 105.34      | 212.31     |
| 128         | 2.62E+05    | 5.24E-03    | 56.44      | 210.68      | 424.61     |
| 136         | 5.24E+05    | 0.01        | 112.89     | 421.36      | 849.22     |
| 144         | 1.05E+06    | 0.02        | 225.77     | 842.72      | 1698.44    |
| 152         | 2.10E+06    | 0.04        | 451.54     | 1685.43     | 3396.89    |
| 160         | 4.19E+06    | 0.08        | 903.09     | 3370.87     | 6793.77    |
| 168         | 8.39E+06    | 0.17        | 1 806.18   | 6 741.73    | 13 587.54  |
| 176         | 1.68E+07    | 0.34        | 3 612.35   | 13 483.47   | 27 175.08  |
| 184         | 3.36E+07    | 0.67        | 7 224.70   | 26 966.93   | 54 350.17  |
| 192         | 6.71E+07    | 1.34        | 14 449.41  | 53 933.87   | 1.09E+05   |
| 200         | 1.34E+08    | 2.68        | 2.89E+04   | 1.08E+05    | 2.17E+05   |
| 208         | 2.68E+08    | 5.37        | 5.78E+04   | 2.16E+05    | 4.35E+05   |
| 216         | 5.37E+08    | 10.74       | 1.16E+05   | 4.31E+05    | 8.70E+05   |
| 224         | 1.07E+09    | 21.47       | 2.31E+05   | 8.63E+05    | 1.74E+06   |
| 232         | 2.15E+09    | 42.95       | 4.62E+05   | 1.73E+06    | 3.48E+06   |
| 240         | 4.29E+09    | 85.90       | 9.25E+05   | 3.45E+06    | 6.96E+06   |
| 248         | 8.59E+09    | 171.80      | 1.85E+06   | 6.90E+06    | 1.39E+07   |
| 256         | 1.72E+10    | 343.60      | 3.70E+06   | 1.38E+07    | 2.78E+07   |
| 264         | 3.44E+10    | 687.19      | 7.40E+06   | 2.76E+07    | 5.57E+07   |
| 272         | 6.87E+10    | 1.37E+03    | 1.48E+07   | 5.52E+07    | 1.11E+08   |
| 280         | 1.37E+11    | 2.75E+03    | 2.96E+07   | 1.10E+08    | 2.23E+08   |
| 288         | 2.75E+11    | 5.50E+03    | 5.92E+07   | 2.21E+08    | 4.45E+08   |

## Электронно-схематический вид спектра

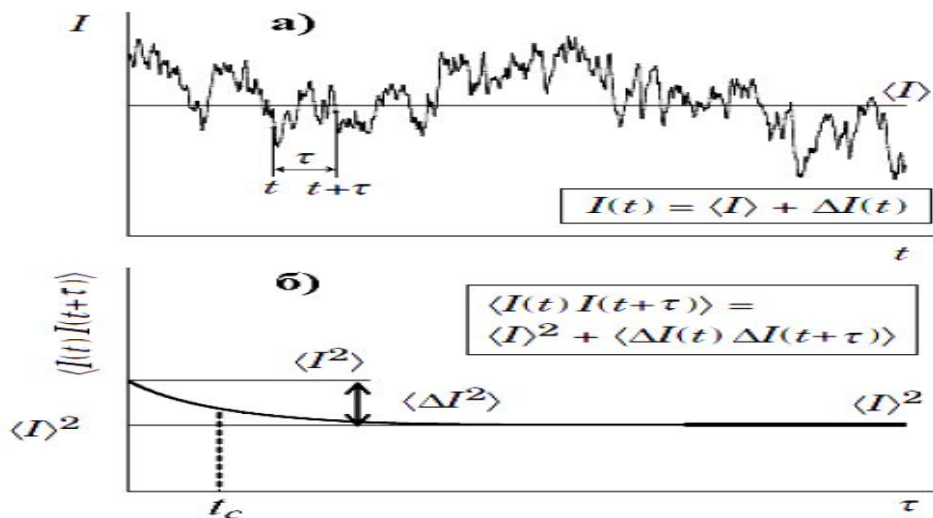


Рис. 1. Изменение интенсивности рассеянного света во времени (а) и соответствующая автокорреляционная функция (б)

Автокорреляционная функция электрического поля, называемая корреляционной функцией первого порядка (в отличие от корреляционной функции второго порядка – для интенсивности поля), вводится аналогично:

$$g_1(\tau) = \langle E^*(t)E(t+\tau) \rangle \quad (4)$$

где  $E^*$  – комплексно-сопряженная величина.

Лазерное излучение характеризуется высокой степенью когерентности. Поэтому происходит интерференция света, переизлученного различными частицами образца. Результирующее электрическое поле на фотодетекторе зависит от относительного расположения и ориентации частиц в рассеивающем объеме. Броуновское движение частиц образца приводит к флуктуациям концентрации частиц и к амплитудной модуляции поля рассеянной волны на фотодетекторе. Электрическое поле как падающей, так и рассеянной волн, линейно поляризовано

$$E(t) = E \cdot \vec{e}_z \quad (5)$$

поэтому рассмотрим только z-компоненту поля. Электрическое поле световой волны, рассеянной на флуктуациях показателя преломления среды в направлении вектора  $k'$ , можно представить в виде

$$E(t) = \delta E(t) \cdot e^{-i\omega_0 t} \quad (6)$$

Медленно меняющаяся со временем амплитуда поля  $\delta E(t)$  пропорциональна пространственной Фурье-компоненте флуктуаций концентрации рассеивающих частиц с волновым вектором  $q$ :

$$\vec{q} \delta c_q(\vec{r}, t) = \delta A_q(t) \cdot \sin(\vec{q} \cdot \vec{r}) \quad (7)$$

ответственным за рассеяние согласно условию Брэгга:

$$\delta E(t) = A \delta c_q(\vec{r}, t) \quad (8)$$

В соответствии с гипотезой Онзагера, релаксация микроскопических флуктуаций концентрации к равновесному состоянию может быть описана первым законом Фика (уравнением диффузии):

$$\frac{\partial c(\vec{r}, t)}{\partial t} = -D \nabla^2 c(\vec{r}, t) \quad (9)$$

где  $c(\vec{r}, t)$  – концентрация и  $D$  – коэффициент диффузии частиц.

В соответствии с гипотезой Онзагера, релаксация микроскопических флуктуаций концентрации к равновесному состоянию может быть описана уравнением диффузии: Согласно этому уравнению флуктуации концентрации с волновым вектором  $\vec{q}$  затухают (релаксируют) со временем  $\tau$  как

$$\delta c_q(\vec{r}, t) = \delta c_q(\vec{r}, 0) \cdot e^{-Dq^2\tau} = \delta c_q(\vec{r}, 0) \cdot e^{-\frac{\tau}{t_c}} \quad (10)$$

Причем величина, обратная времени жизни такой флуктуации, равна:

$$\frac{1}{t_c} = Dq^2 \quad (11)$$

Напомним, что модуль волнового вектора флуктуаций концентрации  $q$  определяется вектором рассеяния  $\vec{q}$

который в случае квазиупругого рассеяния описывается формулой:

$$q = \frac{4\pi n_0}{\lambda_0} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (12)$$

Можно показать, что в такой системе автокорреляционная функция электрического поля рассеянного излучения затухает также по экспоненциальному закону с тем же характерным временем  $t_c$  (время корреляции), определяемым диффузией исследуемых частиц:

$$g_1(\tau) = P \cdot e^{-\frac{\tau}{t_c}} \quad (13)$$

где величина  $p$  определяет вклад в рассеяние частиц того или иного размера. Фотоэлектронные приемники регистрируют сигнал, пропорциональный интенсивности электромагнитной волны, т.е. квадрату модуля напряженности электрического поля. Поскольку напряженность электрического поля и интенсивность электро-магнитного излучения связаны друг с другом, соответствующие им корреляционные функции  $g_1(\tau)$  и  $g_2(\tau)$  также связаны друг с другом – соотношением Зигерта:

$$g_2(\tau) = \langle I \rangle^2 \left( 1 + \beta \left| g_1(\tau) \right|^2 = B_l + A e^{-\frac{2\tau}{t_c}} \right) \quad (14)$$

где  $B_l$  – базовая линия,  $A$  – амплитуда сигнала.

Таким образом, по результатам аппроксимации автокорреляционной функции интенсивности рассеянного света можно определить коэффициент диффузии частиц. Гидродинамический радиус  $R_h$  рассчитывается согласно соотношению Стокса–Эйнштейна.

$$R_h = \frac{kT}{6\pi\eta D_0} \quad (15)$$

где  $k$  – постоянная Больцмана,  $T$  – абсолютная температура,  $\eta$  – сдвиговая вязкость растворителя,  $D_0 = \lim_{c \rightarrow 0} D$ . Гидродинамический радиус (или стоксовский радиус) – размер объекта, который

рассчитывается, исходя из предположения о его сферической форме, по величине коэффициента диффузии в жидкости. Для жестких сферических частиц, таких как золи и латексы, реальный размер практически совпадает с гидродинамическим радиусом. Для полимерных клубков, которые не имеют сферической формы и могут быть частично протекаемы для растворителя, гидродинамический радиус является условным (или эффективным) параметром. Следует отметить, что гидродинамический радиус в общем случае может превышать размеры, получаемые микроскопическими методами, такими как просвечивающая электронная микроскопия, например, из-за формирования сольватной оболочки вокруг исследуемой частицы (молекулы). Оболочка может образоваться вследствие поляризации ближайшего окружения частицы.

Почему же всё-таки при ширине спектра лазера (в одной продольной моде) порядка 1 МГц с помощью корреляционного метода удаётся измерять ширины линий от 1 Гц до десятков кГц?

Вспомним, что функция корреляции поля (а не интенсивности) считается следующим образом:

$$g_E(\tau) = \langle E_1(t)E_1(t+\tau) \rangle = e^{-i\omega\tau} \sum_k A_k A_k^* \exp[iq(\vec{r}_k(t) - \vec{r}_k(t+\tau))] \quad (16)$$

Где  $A_k$  – амплитуда рассеяния  $k$ -ой частицы,  $\mathbf{q}$  – вектор рассеяния, см. выше,  $\mathbf{r}_k(t)$  – положение частицы в момент  $t$ . Такую сумму посчитать конечно нельзя, но при большом числе частиц можно перейти к интегралу с функцией распределения частиц по времени и смещению (функции Смолуховского) Тогда, переходя к интегралу,

$$g_E(\tau) = \int d(\vec{r}_1 - \vec{r}_0) \exp[i\vec{q}(\vec{r}_1 - \vec{r}_0)] P_s(\vec{r}_1 - \vec{r}_0, \tau) = \exp(-Dq^2\tau) \quad (17)$$

Здесь  $\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1$  – положение частицы в моменты  $t$  и  $t+\tau$ .

Получаем ту самую экспоненту, а флуктуации фазы лазерного излучения (которые и дают 1 МГц) оказываются одинаковы для всех частиц, и в (16), при умножении  $E$  на  $E^*$ , просто взаимно уничтожаются в экспоненте.

Это верно, пока нет пространственной зависимости  $A_k$ , но она есть! И тогда нам нужен гибрид:

$$g_E(\tau) = \kappa \int d\vec{r}_1 \int d\vec{r} U(\vec{r}_1) P_s(\vec{r}_1 - \vec{r}_0, \tau) U(\vec{r}_0) \exp[i\vec{q}(\vec{r}_1 - \vec{r}_0)] \quad (18)$$

В этом случае при большом количестве частиц в объеме рассеяния ( $N > 500$ ) АКФ сохраняет свой обычный вид (13, 14), но при малом числе частиц приобретает сложную форму, приведённую в [4, 5], и в распределении интенсивности по размерам частиц появляется дополнительный артефактный пик, соответствующий размерам частиц  $10^5 - 10^6$  нм ( $0.1 - 1$  мкм), который нужно просто игнорировать при обработке результатов.

## ВЫВОДЫ

С помощью метода ДРС на основе корреляционной спектроскопии возможно измерение ширин спектральных линий рассеянного света в диапазоне от долей герца до нескольких десятков килогерц и определение, по ширинам этих линий, размеров частиц в суспензиях в диапазоне от нанометра до нескольких микрон.

Кроме того, используя метод динамического рассеяния света можно показать, что при малых концентрациях частиц взвеси (нарушении гауссовости статистики интенсивности рассеянного излучения) учет неоднородности распределения интенсивности излучения в объеме рассеяния приводит к возникновению в распределении интенсивности рассеяния по размерам частиц артефактной моды, характерное время корреляции которой превышает на несколько порядков время корреляции диффузионной моды.

*Настоящая работа выполнена на основании договора №10-525. 15.02.2019 о научном сотрудничестве между ФИАН РФ и Самаркандским государственным университетом.*

## Литературы

1. Камминс Г., Пайк Э. Спектроскопия оптического смещения и корреляция фотонов. – М.: Мир, 1978.
2. Цветков В.Н., Эскин В.Е., Френкель С.Я. Структура макромолекул в растворах. – М.: Наука, 1964.
3. Эскин В. Е. Рассеяние света растворами полимеров и свойства макромолекул. – Л.: Наука, 1986.
4. Бункин Н.Ф., Шкирин А.В., Бурханов И.С., Чайков Л.Л., Ломкова А.К. *Квантовая электроника*, **44** (11), 1022 (2014) [*Quantum Electron.* **44** (11), 1022 (2014)].
5. Кириченко М.Н., Саноева А.Т., Чайков Л.Л. *Кр. сообщ. физ. ФИАН*, **43** (8), 32 (2016).
6. Кириченко М.Н., Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. – Москва, 2015.
7. Анализаторы размеров частиц серии Photocor. Руководство пользователя. ООО "Фотокор". Веб-сайт: [www.photocor.ru](http://www.photocor.ru). Программа обработки данных фотонной корреляционной спектроскопии DYNALS: <http://www.softscientific.com/science/WhitePapers/dynals1/dynals100.htm>

УДК 534.28

## ЗАТУХАНИЕ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН В КРИСТАЛЛАХ ГЕРМАНАТА ВИСМУТА

Ф.Р.Ахмеджанов<sup>1,2</sup>, Э.Н.Курталиев<sup>1</sup>, Ж.О.Курбанов<sup>2</sup>, Т.Ш.Мустафаев<sup>1,2</sup><sup>1</sup>Самаркандский государственный университет<sup>2</sup>Институт ионно-плазменных и лазерных технологий АН РУз  
akhmedzhanov.f@gmail.com

**Аннотация.** Исследована анизотропия затухания акустических волн в кубических кристаллах германата висмута методом Брэгговской дифракции света в диапазоне частот 0.4 – 1.6 ГГц. Определены эффективные мнимые упругие константы для акустических волн вдоль кристаллографических осей симметрии. Показано, что наибольшая анизотропия затухания наблюдается для пьезоактивных акустических волн в плоскости (001).

**Ключевые слова:** анизотропия затухания, акустическая волна, кристаллы германата висмута, мнимые упругие константы.

**Vismut germanati kristallarda akustik to'liqlarning sunishi**

**Annotatsiya.** Vismut germanati kubik kristallarda yorigliq Bragg diffraktsiyasi metodi bilan 0.4 - 1.6 GHz chastotaviy diapazonida akustik to'liqlarning sunish anizotropiyasi tadqiqot qilingan. Ushbu kristallarda kristallografik simmetriya o'qlar bo'yicha tarqalayotgan akustik to'liqlar uchun mavhum effektiv elastik konstantalar aniqlandi. Eng katta sunish koeffitsiyentining anizotropiyasi (001) tekislikda tarqalayotgan piezoaktiv akustik to'liqlar uchun kuzatishi ko'rsatildi.

**Kalit so'zlar:** sunish anizotropiyasi, akustik to'liq, vismut germanati kristallar, mavhum elastic konstantalar.

**Attenuation of acoustic waves in bismuth germanate crystals**

**Abstract.** The anisotropy of attenuation of acoustic waves in cubic bismuth germanate crystals has been investigated by Bragg diffraction of light method in frequency range 0.4 - 1.6 GHz. The effective imaginary elastic constants for acoustic waves along the crystallographic axes of symmetry are determined. It is shown that the highest anisotropy of attenuation is observed for piezoelectric acoustic waves in plane (001).

**Keywords:** anisotropy of attenuation, acoustic wave, bismuth germanate crystals, imaginary elastic constants.

**Введение.** Кубические кристаллы германата висмута ( $\text{Bi}_{12}\text{GeO}_{20}$ ) относятся к точечной группе симметрии 23, прозрачны в видимой области спектра и обладают большим коэффициентом электромеханической связи [1,2]. Согласно работе [3], в пьезоэлектрических кристаллах, могут наблюдаться дисперсия скорости распространения звука и вклад диэлектрических потерь в затухание акустических волн. Упругие свойства этих кристаллов, включая скорость акустических волн и упругие постоянные, достаточно хорошо исследованы. Однако до настоящего времени мало внимания уделяется анизотропии затухания акустических волн в кристаллах германата висмута, знание которой представляется важной в интересах задач акустооптики и нелинейной акустики. В связи с этим, нами исследовано затухание высокочастотных акустических волн в широком диапазоне частот и впервые определен параметр упругой анизотропии по мнимым упругим модулям для пьезоэлектрических кристаллов германата висмута.

**Методика эксперимента**

Исследованные образцы кристаллов германата висмута имели форму параллелепипеда и были ориентированы длинной стороной вдоль кристаллографических направлений [100], [110] и [111] с точностью до  $1^\circ$ . Средние размеры образцов были  $4 \times 4 \times 12$  мм. Все грани параллелепипедов обрабатывались с помощью механической шлифовки и полировки по 14 классу точности. Угол непараллельности противоположных граней образцов не превышал  $10''$  и контролировался с помощью индикатора часового типа.

Характеристики распространения акустических волн определялись при комнатной температуре в частотном диапазоне 0.4 - 1.6 ГГц с помощью Брэгговской дифракции света на акустических волнах [3,4]. Для возбуждения продольных и поперечных акустических волн использовались пьезоэлектрические преобразователи из кварца, соответственно, X- или Y- среза.

Измерения проводились на акустооптической установке в импульсном режиме. Источником света служил лазер ЛГ-38 с длиной волны  $\lambda=632.8$  нм. В качестве измерительного преобразователя для определения интенсивности дифрагированного света использовался фотоэлектронный умножитель ФЭУ-79. Скорость акустических волн  $V$  определялась по углу Брэгговской дифракции света на звуке с точностью 0.2% из соотношения [3,4]:

$$V = \frac{\lambda \cdot \nu}{2 \sin \theta}, \quad (1)$$

где  $\nu$  - линейная частота упругой волны,  $\theta$  – внешний Брэгговский угол.

Интенсивность света, дифрагированного на прямой акустической волне ( $I_1$ ) и дифрагированного на отраженной от свободного торца образца волне ( $I_2$ ) измерялись в одной и той же точке образца вдоль направления распространения волн.

Измерялись также соответствующие расстояния и промежуток времени  $\Delta t$  между указанными сигналами. На основе этих данных коэффициент затухания акустической волны рассчитывался по формуле [3,4]:

$$\alpha = \frac{10 \lg(I_1/I_2)}{\Delta t}, \quad (2)$$

Точность определения коэффициента затухания акустической волны акустооптическим методом составляла примерно 5%.

### Результаты эксперимента и их обсуждение

Как известно упругие свойства материалов характеризуются комплексным тензором упругости, который записывается через действительные и мнимые компоненты [6-8]:

$$C_{ijkl} = C'_{ijkl} + iC''_{ijkl}, \quad (3)$$

Эти компоненты входят в выражение для эффективных упругих констант  $C_{эфф}$ , которые для любых направлений в кристалле легко определяются с помощью с помощью независимых упругих констант из соотношений:

$$C_{эфф} = C'_{эфф} + iC''_{эфф} = C'_{ijkl} \kappa_j \kappa_l \gamma_i \gamma_k + iC''_{ijkl} \kappa_j \kappa_l \gamma_i \gamma_k, \quad (4)$$

где  $\kappa_j$  и  $\gamma_i$  -направляющие косинусы волнового вектора и вектора смещений. При таком подходе затухание вдоль произвольного направления определяется из соотношения [3]:

$$\alpha = \frac{1}{2} \omega \frac{C''_{эфф}}{\rho V^2}, \quad (5)$$

где  $\rho$  - плотность,  $V$  и  $\omega$  - соответственно, скорость и круговая частота акустической волны.

Как и все кристаллы кубической симметрии, кристаллы германата висмута имеют три независимых действительных упругих модуля  $C'_{11}$ ,  $C'_{44}$ ,  $C'_{12}$  и три независимых мнимых упругих модуля  $C''_{11}$ ,  $C''_{44}$ ,  $C''_{12}$ , которые определяются из данных по скорости и затуханию акустических волн вдоль осей симметрии [5, 8]. Так, например, используя значения скорости и затухания продольных ( $V_L$ ,  $\alpha_L$ ) и поперечных ( $V_S$ ,  $\alpha_S$ ) волн вдоль направления  $\langle 100 \rangle$ , можно определить действительные и мнимые константы  $C'_{11}$ ,  $C''_{11}$ ,  $C'_{44}$  и  $C''_{44}$ , которые являются эффективными упругими модулями для этого направления.

В итоге, на основе измеренных значений скорости и затухания акустических волн вдоль кристаллографических направлений  $\langle 100 \rangle$ ,  $\langle 110 \rangle$  и  $\langle 111 \rangle$  были определены все независимые действительные и мнимые компоненты комплексного тензора упругих постоянных этих кристаллов с учетом справочных данных по диэлектрическим и пьезоэлектрическим коэффициентам [2]. Полученные значения всех независимых упругих констант были использованы для определения скорости, и затухания акустических волн в кристаллах германата висмута вдоль любых других направлений в кристаллографической плоскости (001). Выражения для проведения таких расчетов и результаты измерений коэффициента затухания акустических волн на частоте 1 ГГц представлены в таблице 1. В ней  $q$  и  $\gamma$  – соответственно волновой вектор и поляризация акустической волны. Как видно из таблицы 1, с помощью мнимых компонент тензора упругости можно расчетным путем определить значения коэффициента затухания акустических волн вдоль любых кристаллографических направлений.



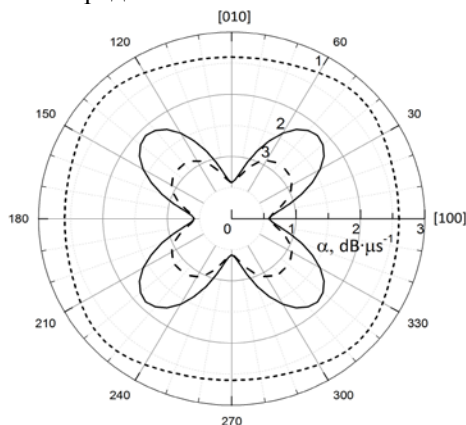
Для пьезоактивных поперечных волн вдоль оси  $\langle 110 \rangle$  пьезоэффект «ужесточает» как действительную  $c'_{44}$ , так и мнимую  $c''_{44}$  упругие константы. В выражение для этих «ужесточенных» констант входят пьезоэлектрический модуль  $e_{14}$ , диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$ , и тангенс угла диэлектрических потерь  $\tan \delta$ .

Таблица 1.

Эффективные мнимые упругие константы и затухание акустических волн в кристаллах  $\text{Bi}_{12}\text{GeO}_{20}$  ( $\nu=1$  ГГц)

| $\varphi$ | $\gamma$ | Выражение $c''_{\text{эфф}}$                                                                              | $c''_{\text{эфф}}, 10^7, \text{Н} \cdot \text{м}^{-2}$ | $\alpha, \text{дБ} \cdot \text{мкс}^{-1}$ |
|-----------|----------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|-------------------------------------------|
| [100]     | [100]    | $c''_{11}$                                                                                                | 2.43                                                   | 2.60                                      |
|           | [001]    | $c''_{44}$                                                                                                | 0.113                                                  | 0.60                                      |
| [110]     | [110]    | $\frac{c''_{11} + c''_{12} + 2c''_{44}}{2}$                                                               | 2.14                                                   | 2.80                                      |
|           | [110]    | $\frac{c''_{11} - c''_{12}}{2}$                                                                           | 0.426                                                  | 1.17                                      |
|           | [001]    | $c''_{44} + \frac{e_{14}^2}{\epsilon_0 \epsilon} \tan \delta^*$                                           | 0.398                                                  | 1.90                                      |
| [111]     | [111]    | $\frac{c''_{11} + 2c''_{12} + 4c''_{44}}{3} + \frac{4e_{14}^2}{3\epsilon_0 \epsilon} \cdot \tan \delta^*$ | 2.03                                                   | 3.02                                      |
|           | [110]    | $\frac{c''_{11} - c''_{12} + c''_{44}}{3}$                                                                | 0.32                                                   | 1,05                                      |

На основе полученных значений действительных и мнимых упругих констант и величин диэлектрической и пьезоэлектрической постоянных кристаллов  $\text{Bi}_{12}\text{GeO}_{20}$  [6, 7], были рассчитаны ориентационные зависимости затухания продольных и поперечных акустических волн в плоскостях симметрии (001) и (1-10). На рис. 1. представлена такая зависимость в плоскости куба (001).



**Рис. 1.** Анизотропия затухания продольных (1), поперечных (3) и пьезоактивных поперечных (2) акустических волн в кристаллах  $\text{Bi}_{12}\text{GeO}_{20}$  в плоскости (001)

Из рисунка видно, что пьезоэлектрический эффект, характерный для нецентросимметричных кристаллов, не меняет качественной картины анизотропии затухания акустических волн. Количественно влияние пьезоэффекта сказывается только на заметном усилении анизотропии затухания пьезоактивных поперечных акустических волн, по сравнению с непьезоактивными волнами, что соответствует формулам, представленным в таблице 1.

**Заключение.** Результаты исследования показали хорошее совпадение экспериментальных значений коэффициента затухания акустических волн вдоль особых направлений [100], [001] и [110] с рассчитанными значениями через эффективные мнимые упругие константы, несмотря на

относительно большую погрешность определения коэффициента затухания, и соответственно мнимого параметра упругости. Такой подход позволит описывать анизотропию скорости распространения и коэффициента затухания акустических волн в кубических кристаллах любой симметрии.

Для установления обобщающих закономерностей для всего класса кубических кристаллов необходимо провести аналогичные исследования в нецентросимметричных кристаллах с положительным параметром анизотропии упругих свойств. Полученные результаты могут быть полезны для предсказания общего характера анизотропии затухания акустических волн как в центросимметричных, так и в нецентросимметричных кубических кристаллах.

#### Литература

1. Ganeev R.A., Rysanyansky A.I., Tugushev R.I. et al., Study of nonlinear-optical characteristics of photorefractive BSO and BGO crystals. Quantum Electronics. 2004. 34. P. 156-160.
2. Акустические кристаллы. Справочник. Под ред. Шаскольской М.П. М.: Наука, 1982. 632 с.
3. Дьелесан Э.Д., Руайе Д. Упругие волны в твердых телах. Применение для обработки сигналов. – М.: Наука, 1982. – 342 с.
4. Лямов В.Е. Поляризационные эффекты и анизотропия взаимодействия акустических волн в кристаллах. – М.: МГУ, 1983. – 224 с.
5. Ахмеджанов Ф.Р., Леманов В.В., Насыров А.Н. Поверхности акустического затухания в кристаллах. Письма в ЖТФ. 1980. 6 № 10, С. 589-592.
6. Bajac I.L., McNab A., Richter J., Wilkinson C.D.W. Attenuation of acoustic waves in lithium niobate. J. Acoust. Soc. Am. 1981. V.69. №3. – P. 689-695.
7. Wenhua Jiang and Wenwu Cao. High-frequency dispersion of ultrasonic velocity and attenuation of single crystal  $0.72 \text{ Pb}(\text{Mg}_{1/3}\text{Nb}_{2/3})\text{O}_3 - 0.28 \text{ PbTiO}_3$  with engineered domain structures. Appl. Phys. Lett. 2002. V.80. –P. 2466-2468.
8. Сиротин Ю.Г., Шаскольская М.П. Основы кристаллофизики. М.: Наука, 1979. 680 с.

UDK. 544.77

#### KOBALT FERRIT ASOSIDAGI MAGNITLI SUYUQLIKNING MAGNITLANISHI

O.Q.Quvondiqov, Sh.J.Quvondiqov, X.A.Qayumov

*Samarqand davlat universiteti*

**Annotatsiya** Ushbu ishda kimyoviy kondensatsiya usulida kobalt ferrit kolloid zarrachalari sintez qilindi va bu asosida magnitli suyuqlik olindi. Rentgen tuzilish tahlili asosida zarrachalar kristall o'lchamining o'rtacha qiymati va panjara doimiysi aniqlandi. Kobalt ferrit zarrachalarining o'lchami va morfologiyasi elektron mikroskopda tekshirildi. Zarrachalarning kimyoviy tarkibi energiya-dispers rentgen nurlari spektroskopiyasi usulida tekshirildi. Kobalt ferrit zarrachalari va suyuqlik solishtirma magnitlanishining magnit maydonga bog'liqligi tebranishli magnetometrda o'rganildi.

**Kalit so'zlar:** magnitli suyuqlik, rentgen tuzilishli tahlil, elektron mikroskop, tebranishli magnetometr, induktiv g'altak, to'yinish magnitlanish, qoldiq magnitlanish, koersitiv kuch, solishtirma magnitlanish.

#### Намагниченность магнитных жидкостей на основе феррита кобальта

**Аннотация** В работе коллоидные частицы феррита кобальта синтезированы методом химической конденсации и на основе этого получена магнитная жидкость. На основе рентгеноструктурного анализа был определен средний размер кристаллов и постоянная решетки частицы. Размер и морфология частицы феррита кобальта изучена просвечивающего электронного микроскопа (ПЭМ). С помощью энергодисперсионного рентгеновского спектроскопии исследован химический состав коллоидные частицы. Удельная намагниченность частицы феррита кобальта и жидкости, зависимость от магнитного поля были изучен вибрационного магнитометра.

**Ключевые слова:** магнитная жидкость, рентгеноструктурный анализ вибрационный магнитометр, индуктивная катушка, намагниченность насыщения, остаточная намагниченность, коэрцитивная сила, удельная намагниченность.

### Magnetization of magnetic fluid based on cobalt ferrite

**Abstract** In this work colloidal particles of cobalt ferrite have been synthesized by the chemical condensation method and on the basis of this, magnetic fluid was obtained. On the basis X-ray diffraction analysis, the average size of crystal and the lattice constant of the particles have been determined. The size and morphology of cobalt ferrite particles were examined by the transmission electron microscope (TEM). Using energy-dispersive X-ray spectroscopy (EDX), the chemical composition of the particles investigated. The specific magnetization of the cobalt ferrite particles and liquid, the dependence on the magnetic field has been studied by vibration magnetometer.

**Key words:** magnetic fluid, X-ray analysis, vibration magnetometer, inductive coil, saturation magnetization, remanent magnetization, coercive force, specific magnetization.

### Kirish

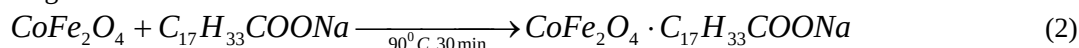
Nanotexnologiyani rivojlanishi natijasida ko'pgina yangi turdagi magnit materiallar sintez qilinmoqda. Bular qatorida magnitli suyuqliklar, fizik va kimyoviy xossalari hamda qo'llanilish sohasi kengligi bilan asosiy o'rinni egallab kelmoqda [1,2]. Magnitli suyuqlik – bu suyuq muhitda turg'unlashgan ferro yoki ferrimagnetik nanozarrachalardan tashkil topgan kolloid eritma. Ma'lumki, kolloid eritmalarining suyuq muhiti "dispers muhit" kolloid zarrachalari esa "dispers faza" deyiladi. Magnitli suyuqliklar uch qismdan tarkib topgan bo'ladi. Bular: 1) dispers faza (kolloid ferrozarrachalar), 2) dispers muhit (kolloid zarrachalar barqarorlashgan suyuq muhit), 3) yuza faol modda. Odatda magnitli suyuqliklarning kolloid zarrachalarining o'lchami 5 – 30 nm atrofida bo'ladi. Bunday o'lchamdagi zarrachalarni olishning ko'plab usullari mavjud [2,3]. Ammo hozirda, mavjud bo'lgan usullardan eng samaralisi kimyoviy kondensatsiya usuli hisoblanadi [4]. Mazkur ishda ham kobalt ferrit kolloid zarrachalarni sintez qilish uchun shu usuldan foydalanildi. Dispers muhit sifatida distillangan suv ishlatildi. Kobalt ferrit kolloid zarrachalarni suvda turg'unlashtirish uchun yuza faol modda (oleat natriy) ishlatildi. Ko'pgina yuza faol moddalar molekulalarida qutbli "bosh" va qutbsiz "dum" (yoki aksincha) qismlari mavjud. Bu qismlardan biri zarrachaga adsorbsiyalanadi, ikkinchisi zarrachaning atrofida oddiy yoki teskari mitsela hosil qilib, suyuqlik molekulalariga birikadi. Bu esa o'z navbatida zarrachalarning Van – Der – Vals va magnit kuchlari tufayli bir – biriga yopishib qolishini, hamda og'irlik kuchi ta'sirida cho'kma hosil bo'lishini oldini oladi [5]. 3d – metallari asosidagi magnitli suyuqliklarning fizik – kimyoviy xossalari ko'ra, ularning qo'llanilish sohasi ham xilma – xildir. Xususan, magnetit asosli magnit suyuqliklar hozirgi kunda mashinasozlikda amortizator va dempfirli sistemalarda ishchi modda sifatida [2] va tog' – kon sanoatida nomagnit moddalarni ajratib olishda [3] ishlatilmoqda. Nikel ferrit asosli magnitli suyuqliklar elektronkada xotira elementlari va yuqori kuchlanishli yog'li transformatorlarning sistemasini sovutish uchun foydalanilmoqda [1]. Kobalt ferrit asosli suyuqliklar esa tibbiyotda rentgenologik tekshirishlarni, qon aylanish tezligini, va mikrosirkulyatsiyani aniqlash, dorilarni isonning kerakli tana a'zolariga yetkazishda, hamda zararli to'qimalarni gipertermiya usuli bilan olib tashlashda [6,11,7], ultratovushli defektoskopiya tekshiruvlarda ishchi modda sifatida qo'llanilmoqda. Qo'llanilish sohasi kengligiga qaramasdan kobalt ferrit asosidagi magnitli suyuqliklarning magnit xossalari hozirgacha to'liq o'rganilib chiqilmagan. Shuning uchun, mazkur ishda kobalt ferrit asosidagi magnitli suyuqlikning magnit xossalarini o'rganish maqsad qilib qo'yilgan.

### Na'munalarni tayyorlash va tajriba o'tkazish usuli

Kobalt ferrit nanozarrachalarni sintez qilishda temir uch nitrat ( $\text{Fe}(\text{NO}_3)_3 \cdot 9\text{H}_2\text{O}$ ), kobalt ikki nitrat ( $\text{Co}(\text{NO}_3)_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$ ), natriy gidroksid ( $\text{NaOH}$ ), oleat natriy ( $\text{C}_{17}\text{H}_{33}\text{COONa}$ ) kimyoviy reaktivlar, va distillangan suvdan foydalanildi. Dastlab 100 ml distillangan suvda 0,5M temir nitrat va 0,25M kobalt nitrat tuzlari alohida idishda yaxshilab eritildi. Keyin bu eritmalar filtr qog'ozdan o'tkazildi va ikkalasi ham bitta idishga solindi hamda 1 soat yaxshilab aralashtirildi. So'ngra bu eritmaga 5M natriy gidroksid eritmasi tomchilatib qo'shildi. Hosil bo'lgan eritma 100 °C temperaturada 1 soat aralashtirildi. Zarrachalarning ferritlanishi 100 °C temperaturada amalga oshdi va idish tubiga cho'kdi. Tajribaning reaksiya tenglamasi quyida ko'rsatilgan:



Reaksiyada ko'rinib turibdiki, kobalt ferrit zarrachalarni olishda temir va kobalt ionlarining mol nisbati  $\text{Fe}^{3+}/\text{Co}^{2+} = 2/1$  ga teng bo'lishi kerak. Hosil bo'lgan cho'kmani distillangan suv bilan, eritmaning pH qiymati neytral bo'lgunga qadar yaxshilab yuvildi. So'ngra cho'kma filtr qog'ozda ajratib olindi va unga 2 gr oleat natriy qo'shib 90°C temperaturada 30 min qizdirildi. Tajriba borishining reaksiya tenglamasi quyida ko'rsatilgan:



(2) reaksiya natijasida hosil bo'lgan modda distillangan suvda eritildi va 80°C temperaturada 1 soat yaxshilab aralashtirildi hamda yarim soat ultratovush bilan ta'sir ettirildi. Olingan magnitli suyuqlik dispers fazasining hajmiy konsentratsiyasini qiymatini bilish juda muhim. Bu konsentratsiyani aniqlash tenglamasini quyidagicha aniqlaymiz:

Magnitli suyuqlikning umumiy massasi distillangan suv, kobalt ferrit zarrachalari va oleat natriyning massalari yig'indisiga teng, ya'ni:

$$m = m_0 + m_{k.f} + m_{Ol.Na} \quad (3)$$

Ma'lumki, eritmaning hajmiy konsentratsiyasi, erigan modda hajmining, eritma hajmiga nisbati bilan aniqlanadi, ya'ni  $\varphi_x = V_x / V$ . Agar  $m = \rho \cdot V$  va  $V_x = \varphi_x \cdot V$  ekanligini hisobga olsak, (3) tenglikni quyidagicha yozish mumkin:

$$\rho \cdot V = \rho_0 \cdot \varphi_0 \cdot V + \rho_{k.f} \varphi_{k.f} \cdot V + \rho_{Ol.Na} \cdot \varphi_{Ol.Na} \cdot V \quad (4)$$

Bu yerda  $\rho, V$  – magnitli suyuqlikning umumiy zichligi va hajmi,  $\rho_0, \rho_{k.f}, \rho_{Ol.Na}$  – mos ravishda, distillangan suv, kobalt ferrit zarrachalari va oleat natriyning zichliklari,  $V_0, V_{k.f}, V_{Ol.Na}$  va  $\varphi_0, \varphi_{k.f}, \varphi_{Ol.Na}$  mos ravishda ularning hajmlari va hajmiy konsentratsiyalari. Ma'lumki, oleat natriy bilan distillangan suv zichliklarining qiymati bir – biriga yaqin. Shuning uchun, oleat natriy zichligini  $\rho_{Ol.Na} \approx \rho_0$  va uning hajmiy ulushini  $\varphi_{Ol.Na} = 1 - (\varphi_0 + \varphi_{k.f})$  deb olsak, (4) tenglik quyidagi ko'rinishga keladi:

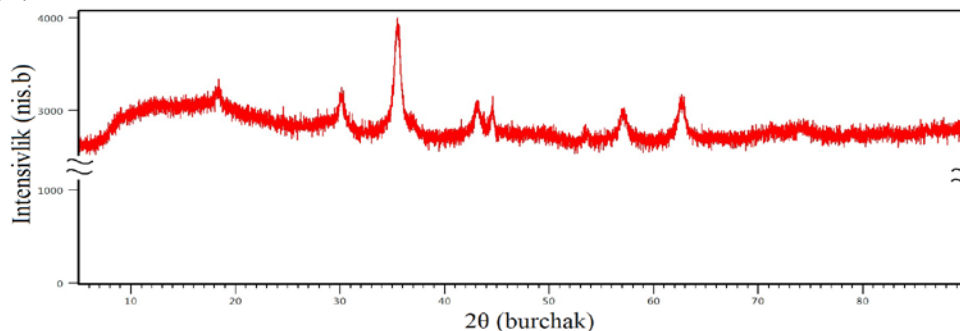
$$\rho = \rho_0 \cdot \varphi_0 + \rho_{k.f} \varphi_{k.f} + \rho_0 \cdot (1 - (\varphi_0 + \varphi_{k.f}))$$

$$\varphi_{k.f} = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_{k.f} - \rho_0} \quad (5)$$

Demak, magnitli suyuqlik, distillangan suv va kobalt ferrit zarrachalarning zichligini o'lchash orqali, (5) tenglamadan kolloid zarrachalarning hajmiy konsentratsiyasini aniqlash mumkin bo'ladi [1]. Magnitli suyuqlikning zichligi piknometr usulida aniqlandi. Kukunsimon kobalt ferrit na'munasining rentgen tuzilish tahlili "XRD Empyrean panalytical" rusumli defroktometrda va uning kimyoviy tarkibi "X-ACT Silicon Drift Detector" rusumli defroktometrda, Toshkent shahridagi Ilg'or texnologiyalar markazida tekshirildi. Suyuqlik tarkibidagi zarrachalarning o'lchami va morfologiyasi A.Arifov nomidagi Ion – plazma va lazer texnologiyalari institutida, "TEM LEO 912 AB" rusumli elektron mikroskopda tekshirildi. Magnitli suyuqlik solishtirma magnitlanishining magnit maydonga bog'liqligi SamDU fizika fakulteti "Magnitezm va magnit materiallar" laboratoriyasidagi tebranishli magnetometr qurilmasida o'lchandi.

#### Tajriba natijalari va ularning muhokamasi

Qattiq jismlarning kristall tuzilishini rentgen nurlar yordamida tekshirishda Debay va Sherrer taklif etgan "kukun difraksiyasi" usuli hozirda keng foydalanilmoqda. Bunda na'muna kukun holatda maxsus kyuvetaga joylashtiriladi va uning sirtiga monoxromatik rentgen nurlari ma'lum bir burchak ostida tushiriladi. Natijada kukunning mikrokristallari butunlay tartibsiz joylashganligi uchun Rentgen nurlari Bregg-Vulf shartini qanoatlantiruvchi burchak ostida joylashgan kristallchalarda sochiladi. Sochilgan nurlarning interferensiyalanishi natijasida turli intensevlikda nurlar hosil bo'ladi. Kobalt ferrit zarrachalarining kristall tuzilishi mazkur usulda tekshirildi. Olingan spektrdan difraksiya burchagini aniqlab, namunaning kristall panjara doimiysi hamda kristal o'lchamining o'rtacha qiymati aniqlandi va [8,10] adabiyotlardagi natijalar bilan solishtirildi. Olingan tajriba natijalari 1 – rasmda va 1-jadvalda ko'rsatilgan.



1-rasm. Kukunsimon kobalt ferrit ( $\text{CoFe}_2\text{O}_4$ ) na'munasining rentgen spektri

1-rasmdan  $2\theta = 18^0, 30.1^0, 35.47^0, 43.1^0, 44.5^0, 53.6^0, 57^0, 62.6^0$  burchaklarda cho‘qqilarning hosil bo‘lishini ko‘rish mumkin. Zarrachalarning kristall panjara doimiysi quyidagi formuladan aniqlandi:

$$a = d_{h,k,l} \cdot \sqrt{h^2 + k^2 + l^2} \quad (6)$$

Bu yerda  $d_{h,k,l}$  – parallel tekisliklar orasidagi masofa,  $h, k, l$  – Miller indeksleri.

Zarrachalar kristall o‘lchamining o‘rtacha qiymati Sherrer formulasidan[10] aniqlandi:

$$D = \frac{0,89\lambda}{\beta \cdot \cos \theta} \quad (7)$$

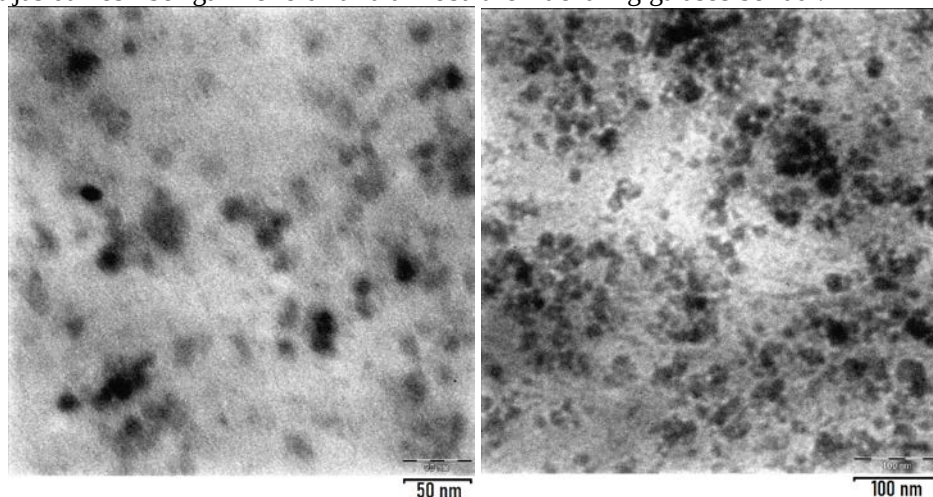
Bu yerda  $\lambda = 0,154$  nm – rentgen nurlar to‘lqin uzunligi,  $\beta$  – spektrdagi cho‘qqining yarim kengligi,  $\theta$  – cho‘qqi hosil bo‘lgan burchak.

1 – jadval. Kobalt ferrit zarrachalari kristall o‘lchamining o‘rtacha qiymati va panjara doimiysi

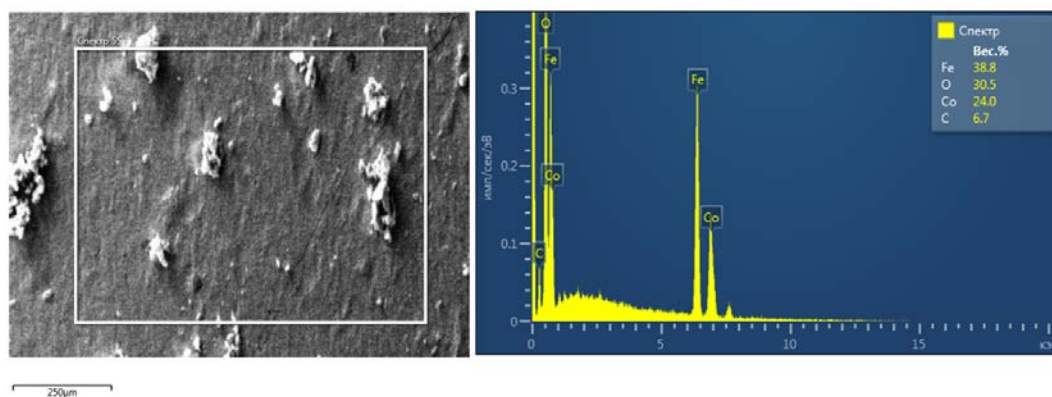
| $h, k, l$ | $(h^2 + k^2 + l^2)^{1/2}$ | $2\theta$<br>(gradus) | $d_{hkl}$<br>(nm) | $a$<br>(nm) | $\beta$<br>(radian) | $D$<br>(nm) | $D_{o'rt}$<br>(nm) |
|-----------|---------------------------|-----------------------|-------------------|-------------|---------------------|-------------|--------------------|
| 111       | 1,73                      | 18                    | 0,492368          | 0,851       | 0,0282              | 4,97        | 14,43              |
| 220       | 2,83                      | 30,1                  | 0,296724          | 0,839       | 0,0122              | 11,71       |                    |
| 311       | 3,32                      | 35,47                 | 0,252853          | 0,837       | 0,0132              | 11          |                    |
| 400       | 4                         | 43,1                  | 0,209617          | 0,839       | 0,0146              | 10,1        |                    |
| 331       | 4,36                      | 44,5                  | 0,192660          | 0,841       | 0,0066              | 22,7        |                    |
| 422       | 4,9                       | 53,6                  | 0,170932          | 0,837       | 0,0039              | 35,1        |                    |
| 511       | 5,2                       | 57                    | 0,161340          | 0,838       | 0,0164              | 9           |                    |
| 440       | 5,65                      | 62,6                  | 0,148223          | 0,837       | 0,0148              | 10,9        |                    |

Magnitli suyuqlik tarkibidagi kobalt ferrit nanozarrachalarning o‘lchami va morfologiyasi elektron mirooskopda tekshirildi. Olingan natijalar 2 – rasmda, 50 va 100 nm masshtabda ko‘rsatilgan. Rasmdan zarrachalarning o‘lchami 7 – 30 nm oraliqda va sferik shaklda ekanligini ko‘rish mumkin.

Kobalt ferrit zarrachalarning kimyoviy tarkibini aniqlash maqsadida element miqdor tahlili o‘tkazildi. Buning uchun kukun holatdagi na‘munaning ma‘lum bir yuzasi rentgen nurlari bilan nurlantirildi va bu yuza skanerlovchi elektron mirooskopda rasmga olindi. Shundan so‘ng, har bir element atomlari xarakteristik rentgen nurlarini chiqaradi. Nurlanish spektridan, na‘munada mavjud elementlar aniqlanadi. 3 – rasmda kukunsimon kobalt ferrit na‘munasining energo-dispers rentgen nurlanish spektri va elektron mirooskopda olingan rasmi ko‘rsatilgan. Rasmdan ko‘rish mumkinki, kobalt, temir va kislorodning massa ulushlari mos ravishda Co – 24%, Fe – 38,8%, O – 30,5% ga teng. Olingan natijalar asoslangan holda kukunning kimyoviy formulasini  $\text{CoFe}_{1,72}\text{O}_{4,75}$  ko‘rinishda yozish mumkin, bu esa (1) tenglamadagi reaksiya natijasida hosil bo‘lgan kolloid zarralar kobalt ferrit ekanligiga asos bo‘ladi.

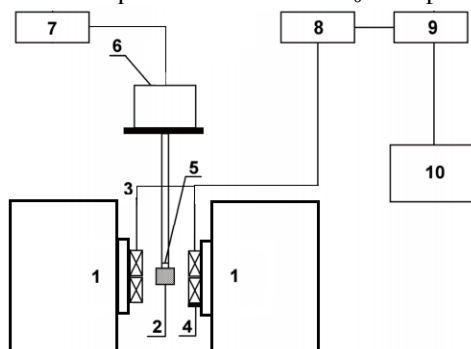


2-rasm. Kobalt ferrit nanozarrachalarning elektron mirooskop(TEM)da olingan surati.



3-rasm. Kobalt ferrit kukunining rentgen nurlanish spektri.

Kobalt ferrit asosidagi magnitli suyuqlik magnitlanishining magnit maydonga bog‘liqligi tebranishli magnetometrda o‘lchandi Qurilmaning ishlash prinsipi elektromagnit induksiya qonuniga asoslanadi [9]. 4 – rasmda tajriba qurilmasining umumiy sxemasi keltirilgan. FL-1 rusumli (1) elektromagnit qutblari orasiga (3) to‘rtta induktiv g‘altak va (4) Xoll datchigi o‘rnatilgan. (2) na’muna (5) kvars sterjenga mahkamlanib, induktiv g‘altaklar orasiga joylashtiriladi. Sterjen esa (6) tebratgichga mahkamlanadi va (7) tovush generatori orqali  $\omega$  – chastota va  $u_0$  – amplitudali tebranish hosil qilinadi.



4-rasm. Modda magnitlanishning magnit maydonga bo‘liqligini o‘rganish qurilmasining umumiy sxemasi. 1 – elektromagnit, 2 – na’muna, 3 – induktiv datchik, 4 – Xoll datchigi, 5 – kvars sterjen, 6 – tebratgich, 7 – tovush generatori, 8 – kuchaytirgich, 9 – to‘g‘irlagich, 10 – ikki koordinatali O‘YQ

Natijada induktiv g‘altaklarda quyidagi formula bilan aniqlanadigan induksion EYuK hosil bo‘ladi:

$$E = n \cdot k \cdot M \cdot u_0 \cdot \omega \quad (8)$$

Bu yerda  $k$  va  $n$  – induktiv g‘altakning geometrik o‘lchamlariga bog‘liq bo‘lgan koeffitsient, va o‘ramlar soni,  $M$  – na‘munaning magnit momenti,  $u_0$  – tebranish amplitudasi,  $\omega$  – tebranish chastotasi.

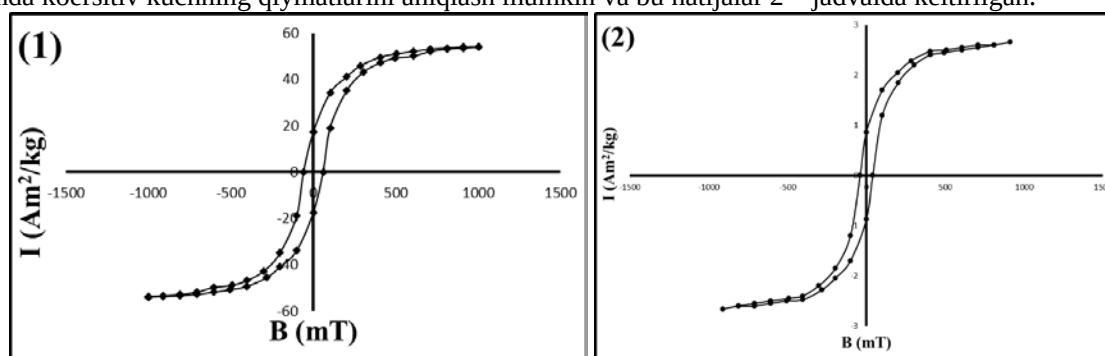
Bu signal U-2-6 yoki U-2-8 rusumli kuchaytirgich bilan kuchaytiriladi va to‘g‘irlagich orqali o‘ziyozar ikki koordinatali potensiometrning Y o‘qiga beriladi. Shu potensiometrning X o‘qiga Xoll datchigidan kelayotgan magnit maydon kuchlanganligiga proporsional bo‘lgan Xoll EYuK signali beriladi. Tajriba natijalari ikki koordinatali o‘ziyozar potensiometrda keltirilgan masshtabda magnitlanishning tashqi magnit maydoniga bog‘lanish grafigi hosil qilinadi. Dastlab tajriba xona temperaturasida etalon sifatida olingan nikelda, so‘ngra na‘munada o‘tkaziladi. Bir xil sharoitda olingan etalon va namunadagi signallar solishtiriladi va quyidagi formula yordamida na‘munaning solishtirma magnitlanishi aniqlanadi:

$$I = I_0 \frac{U}{U_0} \cdot \frac{m_0}{m} \quad (9)$$

Bu yerda  $I_0$  – etalonning solishtirma magnitlanishi,  $U$  va  $U_0$  – na‘muna va etalon hosil qilgan induksion EYuKning amplituda qiymati,  $m$  va  $m_0$  – na‘muna va etalonning massasi.

Olingan tajriba natijalari 4 – rasmning chap tomonida kukunsimon kobalt ferrit na‘munasi uchun, o‘ng tomonda shu zarrachalarning 3 % li konsentratsiyada tayyorlangan magnitli suyuqlik uchun grafik ko‘rinishida tasvirlangan. 4 – rasmdan ko‘rish mumkinki, na‘munalar superparamagnit xossaga ega va kukun holatdagi to‘yinish magnitlanishi, eritma holatdagidan katta. Demak, eritmaning to‘yinish magnitlanishi, zarrachalarning hajmiy konsentratsiyasiga bog‘liq[8]. Shuningdek, zarrachalarni suvda cho‘kmasligi uchun yuza faol modda ishlatilgan. Bu esa suyuqlikning magnit xossasiga sezilarli ta’sir qilar

ekan. 5 – rasmda Kobalt ferrit kukunining va magnitli suyuqlikning qoldiq va to‘yinish magnitlanishini hamda koersitiv kuchning qiymatlarini aniqlash mumkin va bu natijalar 2 – jadvalda keltirilgan.



5-rasm. (1) – Kukunsimon kobalt ferrit na‘munasining va (2) – shu zarrachalar asosida olingan magnitli suyuqlik solishtirma magnitlanishining magnit maydonga bog‘liqligi.

2-jadval. Kukunsimon kobalt ferrit na‘munasi va shu zarralar asosidagi magnitli suyuqlikning qoldiq va to‘yinish magnitlanishi hamda koersitiv kuchning qiymatlari

| Na‘muna | Kobalt ferritning hajmiy ulushi (%) | $I_{Qol,m}$ ( $A \cdot m^2/kg$ ) | $I_{To'y,m}$ ( $A \cdot m^2/kg$ ) | $H_K$ (kA/m) |
|---------|-------------------------------------|----------------------------------|-----------------------------------|--------------|
| Kukun   | 100                                 | 17,3                             | 53,9                              | 47,86        |
| M.s     | 3                                   | 0,9                              | 2,7                               | 2,5          |

**Xulosa.** Kimyoviy kondensatsiya usulida olingan zarrachalar kobalt ferrit ( $CoFe_{1,72}O_{4,75}$ ) moddasi ekanligi aniqlandi. Bu zarrachalar sferik shaklda bo‘lib, o‘lchami 7 – 30 nm oraliqdaligi tekshirildi. Zarrachalar kristall o‘lchamining o‘rtacha qiymati va panjara doimiysi mos ravishda 14,43nm, 0,835 nm. Kobalt ferrit asosidagi magnitli suyuqlik superparamagnit xossaga ega va uning solishtirma magnitlanishi zarrachalarning hajmiy konsentratsiyasi bog‘liq.

### Adabiyotlar

1. S. D. Kemkar, Milind Vaidya, Dipak Pinjari, Sammit Karekar, Sanjana Kemkar, Siddhesh Nanaware, Sanjukta Kemkar. Application of mixed colloidal magnetic fluid of single domain  $Fe_3O_4$  and  $NiFe_2O_4$  ferrite nanoparticles in audio speaker. *Int. Journal of Engineering Research and Application.*// ISSN : 2248-9622, Vol. 7, Issue 1, ( Part -3) January 2017, pp. 11-18.
2. C. Scherer and A. M. Figueiredo Neto. Ferrofluids: Properties and Applications.// *Brazilian Journal of Physics*, vol. 35, no. 3A, September, 2005, pp. 718-727.
3. Р.Розенцвейг. Фиррогидродинамика. пер. с англ. –Москва: Мир – 1989. – С. 55 – 76.
4. S.A. Novopashin, M.A. Serebryakova, and S.Ya. Khmel. Methods of magnetic fluid synthesis (review). *Thermophysics and Aeromechanics*, 2015, Vol. 22, No. 4. pp. 397-412.
5. Н.В.Веролайнин, О.Е.Журавлев, Л.И.Ворончихина. Роль поверхностно – активных веществ в синтезе и стабилизации магнитной жидкости на водной основе. *Вестник ТвГУ. Серия "Химия".* 2012. Выпуск 14. С. 86 – 97.
6. B.B. Lahiri, Surojit Ranoo, John Philip. Infrared thermography based magnetic hyperthermia study in  $Fe_3O_4$  based magnetic fluids. *Infrared Physics & Technology*. 78. (2016), pp. 173–184.
7. Andrew J. Giustini, Alicia A. Petryk, Shiraz M. Cassim, Jennifer A. Tate, Ian Baker, P. Jack Hoopes. Magnetic nanoparticle hyperthermia in cancer treatment. Published in final edited form as: *Nano Life*. 2010;1(01n02),pp. 1-23.
8. Ahmad Amirabadizadeh, Zohre Salighe, Reza Sarhaddi, Zahra Lotfollahi. Synthesis of ferrofluids based on cobalt ferrite nanoparticles: Influence of reaction time on structural, morphological and magnetic properties. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. 434. (2017),pp. 78–85.
9. Великанов.Д.А. Высококчувствительные методы исследования магнитных свойств кристаллических и плёночных магнитных систем. Диссертация на соискание ученой степени доктора физико – математических наук. – Красноярск, 2017. – С. 109 – 137.



10.B. Jansi Rani, M. Ravina, B. Saravanakumar, G. Ravi, V. Ganesh, S. Ravichandran, R. Yuvakkumar. Ferrimagnetism in cobalt ferrite ( $\text{CoFe}_2\text{O}_4$ ) nanoparticles. Nano-Structures & Nano-Objects.14,(2018),pp. 84–91.

11.Pradip Das, Miriam Colombo, Davide Prosperi. Recent advances in magnetic fluid hyperthermia for cancer therapy. Colloids and Surfaces B: Biointerfaces. 174,(2019),pp. 42–55.

УДК 539.1.07, 539.1.05

### ВЛИЯНИЕ ЦЕНТРАЛЬНОСТИ СТОЛКНОВЕНИЙ К ОБРАЗОВАНИЮ ЗАРЯЖЕННЫХ ПИОНОВ И ПРОТОНОВ В DC- ВЗАИМОДЕЙСТВИЯХ ПРИ ИМПУЛЬСЕ 4,2 ГЭВ/С

Султанов М.У., Усаров А.А., Тухтаев У.У., Кодиров А.А., Яхшибоев К.Х., Нурмуродов Л.Т.

Самаркандский государственный университет

amattou@rambler.ru

**Аннотация.** В данной работе представлены экспериментальные данные по неупругим dC-соударениям и изучена влияние центральности столкновений к множественностям вторичных  $\pi^\pm$ -мезонов и протонов. Получены новые экспериментальные данные. В качестве степени центральности соударения принят параметр Q, равный разности положительно и отрицательно заряженных частиц. Свойства образования пионов и протонов проанализированы в разных интервалах импульсов. Экспериментальные результаты сравнены с теоретическими расчетами модели FRITIOF. Показано, что расчеты по FRITIOF удовлетворительно согласуются с результатами эксперимента.

**Ключевые слова:** столкновение, протон, пион, импульс, центральность, модель, испарение, фрагментация, неупругий.

#### 4,2 ГэВ/с импульсаги dC- и $\alpha$ C-тўқнашувларда зарядланган пионлар ва протонлар ҳосил бўлишига тўқнашувлар марказийлигининг таъсири

**Аннотация.** Мазкур ишда 2-метрли пропанли пуфакчали камерада олинган тажриба маълумотларига кўра dC- ноэластик тўқнашувларда ҳосил бўлган  $\pi^\pm$ -мезонлар ва протонлар кўпламчилигига тўқнашув марказийлигининг таъсири ўрганилиб, янги маълумотлар келтирилган. Тўқнашувлар марказийлигининг критерияси сифатида мусбат ва манфий зарядланган зарралар фаркига тенг бўлган Q параметр олинган. Зарядланган пионлар ва протонларнинг ҳосил бўлишининг хусусиятлари ҳар хил импульслар интервалида таҳлил қилинган. Тажриба натижалари FRITIOF модели назарий ҳисоблари билан солиштирилган. FRITIOF модели ҳисоблари тажриба натижаларини қониқарли даражада ифодалай олиши кўрсатилган.

**Калит сўзлар:** тўқнашув, протон, пион, импульс, марказий, модель, буғланиш, фрагментация, ноэластик.

#### Influence of intractions' centrality to producing charged pions and protons in dC interactions at the momentum 4.2 GeV/c

**Abstract.** In this work experimental data on inelastic dC interactions is presented and influence of the centrality of interactions to multiplicities of  $\pi^\pm$  and protons was investigated. Parameter Q, which is a difference between multiplicities of positive and negative charged particles, is taken as a criteria of centrality collision. properties of charged pions and protons in different intervals of momentum were analysed. Experimental data are compared with theoretical calculate of FRITIOF model. It was shown that FRITIOF model calculation is good description of experimental data.

**Keywords:** interaction, proton, pion, momentum, centrality, model, evaporation, fragmentation, inelastic.

#### Введение

Особенности ядро-ядерных взаимодействий можно увидеть при изучении механизма этих взаимодействий в зависимости от степени центральности рассматриваемых событий. Первые работы по исследованию характеристик вторичных частиц в центральных ядро-ядерных взаимодействиях было начато ещё в работах [1-3]. В этих работах за степень центральности CC – взаимодействий принято число протонов  $n_p$ , учувствовавших во взаимодействии. Продолжением исследований по этой направлению является работы [4-5]. Для определения степени центральности столкновений взять «net» заряд  $Q = n_{+} - n_{-} - n_p^s - n_t^s$ , где  $n_{+}$  и  $n_{-}$  - число однозарядных положительных



и отрицательных частиц в событии,  $n_p^s$  и  $n_p^t$  – число протонов стриппингов из ядра снаряда и из ядра мишени, соответственно. Для  $n_p^s$  принято частицы-спектатор с  $P > 3$  ГэВ/с и углом вылета  $\theta < 4^\circ$ . Спектаторные протоны из ядра-мишени считались протоны с  $P < 0,3$  ГэВ/с. Экспериментальные данные сравнены с предсказаниями ДКМ. Показано, что в СС – взаимодействиях наблюдается заметное различие в средних значениях кинематических характеристики протонов к величине параметра удара.

Взаимодействие ядер высоких энергий с ядром-мишенью позволяют осуществлять многонуклонные столкновения.

Изменяя атомные веса сталкивающихся ядер, можно в широком интервале варьировать число участвующих во взаимодействии нуклонов. Другим методом получения больше множественности вторичных частиц в событии является способ уменьшения прицельного параметра столкновения **b**. В экспериментах определить **b** практически невозможно. Поэтому разработана много способов для уменьшения **b**, пользуясь, коррелированность прицельного параметра от число разных вторичных частиц. Это связано, прежде всего, с поиском эффектов многонуклонных взаимодействий, коллективных свойств ядерной материи, проявлений кварковых степеней свободы и т.д. Экспериментальное обнаружение подобного рода эффектов невозможно без детального изучения характеристик вторичных частиц во взаимодействиях. Особенный интерес представляет вторичные протоны и  $\pi^\pm$  - мезоны, которые характеризуют динамику процесса столкновения ядер высоких энергий.

По мере уменьшения параметра удара возрастает число вторичных частиц и число каскадных взаимодействий в ядрах-остатках. Поэтому можно ожидать преимущественное рождение нуклонов в областях фрагментации ядер. В центральных соударениях из-за большого числа первичных взаимодействий выход нуклонов в областях фрагментации ядер должен быть минимальным. То есть, согласно ДКМ должно происходить изменение формы спектров нуклонов в областях фрагментации ядер.

Настоящая работа является продолжением анализа экспериментальных данных о взаимодействиях легких ядер (d, He, C) с ядрами углерода при импульсе 4,2 ГэВ/с на нуклон в рамках модели FRITIOF [4-5], адаптированный к энергиям ниже 10 ГэВ. В качестве отбора центральных событий с различными прицельными параметрами использовалось «net» заряд Q. При расчетах Q для определение число стриппинговых протонов из ядра-снаряда  $n_p^s$  взять условия  $P > 3$  ГэВ/с и  $\theta \leq 3^\circ$ , обоснованная по методике. Расчеты сделаны по количеству, последним экспериментальной статистике, записанной на ленте суммарных данных (DST).

#### Методика получение и анализ экспериментальных данных

Для обработки использован материал, полученный на двухметровой пропановой пузырьковой камере ЛВЭ ОИЯИ, помещенной в магнитное поле с напряженностью 1,5 Тл и облученной в пучке ядер дейтрона, гелия и углерода с импульсом 4,2 А ГэВ/с на синхрофазотроне ОИЯИ. Выделение событий неупругого взаимодействия налетающих ядер с ядром углерода, а также введение поправок на число вторичных частиц и их импульсные и угловые характеристики подробно описаны в [6]. Все отрицательные частицы с импульсом  $P > 70$  МэВ/с, за исключением идентифицированных электронов, считались  $\pi^-$  - мезонами. Примесь не идентифицированных электронов практически отсутствует, а примесь отрицательных странных частиц не превышает 1%.

Протоны с  $P \leq 500$  МэВ/с идентифицировались по плотности ионизации треков. Для выделение протонов с  $P > 500$  МэВ/с из спектров всех положительных частиц вычитался спектр  $\pi^-$  - мезонов с  $P > 0,5$  ГэВ/с. Фрагмент ионизации, а аналогичные фрагменты мишени в основном имеют пробеги меньше 3 мм и не регистрируются в камере.

Для получения правильных физических характеристик частиц в изучаемых нами взаимодействиях были введены разные поправки [6]. 70% взаимодействий на углеродной мишени от ожидаемого числа выделялось по пяти признаком однозначно [6]. Оставшиеся события разделялись по мишени углерод или протон с помощью введения статистических весов. Эти веса вводились таким образом, чтобы суммарные числа событий на водороде и на углероде соответствовали числам, которые ожидалось известных сечений неупругих взаимодействий, найденных электронной методикой. Введение весов на пропущенные частицы, неизмеримые треки и на природу ядра-мишени завершило решение длительной методической проблемы, как надежно работать с мишенью из разных ядер, которые входят в состав пропана.

Среди существующих теоретических моделей наиболее апробированным считается приближение Глаубера-Ситенко [7], которое позволяет рассчитывать полное, упругое и неупругое

сечения. Его трактовка в рамках реджеонного подхода, иногда называемая приближением Глаубера-Грибова, позволяет находить сечения взаимодействий с различным числом внутриядерных нуклонов. Поэтому модель, используемая для анализа экспериментальных данных, должна включать глауберовское приближение. Кроме того модель должна допускать широкую вариацию предполагаемой физической картины взаимодействий. Этим требованиям удовлетворяет модель FRITIOF [8-10].

Модель FRITIOF учитывает глауберовские приближение. В использованном нами варианте программы FRITIOF корректно учитываются ферми-движение нуклонов в ядрах и особенности двух частичных распадов возбужденных нуклонов, что позволяет снизить порог ее применимости до энергии 4 ГэВ на нуклон. При исследовании ядро - ядерных взаимодействий весьма полезной характеристикой оказывается нетто-заряд («net»-заряд)  $Q$  вторичных частиц. В однонуклонных взаимодействиях пределы изменения  $Q$  строго фиксировано. В случае ядерной мишени, все события, имеющие значения  $Q$  вне разрешенной области для однонуклонных соударений, будут соответствовать таким случаям, когда во взаимодействии участвуют два, и более нуклонов ядра, т.е. многонуклонные взаимодействия. В дополнение, среди событий с  $0 \leq Q \leq 2$  или  $-2 \leq Q \leq 0$  имеется примесь от многонуклонных взаимодействий, которые можно исключить, требуя, чтобы в событии имеется только один идентифицированный протон, вылетающий в любом направлении (вследствие ферми-движения). Надо отметить, что доля однонуклонных соударений не зависит от первичной энергии.

Протоны с импульсом  $p > 1,4$  ГэВ/с называется лидирующими протонами, и они в основном протоны ядра снаряда, участвующих в столкновениях. Граница  $p > 1,4$  ГэВ/с выбран с помощью модели FRITIOF, учитывающий  $\Delta$ -изобар. По модели определены спектры, сохраняющиеся протонов и ядерные фрагменты ядра углерода. По ним выбран оптимальная граница  $P = 1,4$  GeV/c и средняя множественность лидирующих протонов:  $\langle n_p^{lid} \rangle = 0,10$ . Средняя множественность лидирующих протонов из ядра мишени:  $\langle n_p^{nsh} \rangle = 0,09$ . В интервал импульсов от 0,3 до 1 ГэВ/с в основном попадает протоны из ядра мишени. В интервале импульсов  $1,0 < P < 1,8$  ГэВ/с, попадет протоны из мишени и сохраняющийся протоны. Определение множественности и кинематических характеристик лидирующих протонов с импульсом  $p > 1,4$  ГэВ/с, позволяет оценить способность торможение ядра углерода.

Число dC-событий характеризуется средним числом протонов-участников:  $\langle n_p(уч) \rangle = 1,11 \pm 0,01$ . Причины этого является малости число не периферических столкновений. Средняя множественность заряженных пионов почти одинаково (Табл.1) и это свойственно симметричности ядра мишени  $^{12}\text{C}$ .

**Таблица 1.** Зависимость средней множественности заряженных пионов и протонов в dC-взаимодействиях от степени центральности (нижняя строка расчеты FRITIOF).

| Q                                                          | 1                      | 2                      | 3                      | 4                      | 5                      | 6                      | 7                      | Все события            |
|------------------------------------------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| $N_{\text{сoб}}$                                           | 1797<br>2684           | 2030<br>2836           | 1394<br>1821           | 811<br>1292            | 407<br>798             | 193<br>442             | 60<br>127              | 7070<br>10000          |
| $\langle n_{\pm} \rangle$                                  | 1.43±0.01<br>1.46±0.01 | 2.32±0.05<br>2.39±0.05 | 3.53±0.06<br>3.64±0.06 | 5.01±0.03<br>5.21±0.03 | 6.02±0.02<br>6.14±0.02 | 7.2±0.02<br>7.6±0.02   | 8.43±0.01<br>8.65±0.01 | 3.36±0.02<br>3.48±0.02 |
| $\langle n_{\pi^-} \rangle$                                | 0.49±0.02<br>0.52±0.02 | 0.50±0.02<br>0.58±0.02 | 0.85±0.01<br>0.94±0.01 | 0.91±0.01<br>0.99±0.01 | 1.11±0.01<br>1.20±0.01 | 1.21±0.01<br>1.33±0.01 | 1.39±0.01<br>1.47±0.01 | 0.63±0.01<br>0.69±0.01 |
| $\langle n_{\pi^+} \rangle$                                | 0.55±0.02<br>0.58±0.02 | 0.58±0.02<br>0.62±0.02 | 1.61±0.02<br>1.68±0.02 | 1.88±0.01<br>1.97±0.01 | 2.09±0.01<br>2.18±0.01 | 2.15±0.01<br>2.38±0.01 | 2.26±0.01<br>2.38±0.01 | 0.64±0.01<br>0.74±0.01 |
| $\langle n_p(уч) \rangle$                                  | 0.32±0.02<br>0.38±0.02 | 0.83±0.01<br>0.93±0.01 | 1.39±0.01<br>1.44±0.01 | 2.01±0.01<br>2.09±0.01 | 2.56±0.01<br>2.64±0.01 | 2.99±0.01<br>3.12±0.01 | 3.90±0.01<br>3.96±0.01 | 1.12±0.01<br>1.19±0.01 |
| $\langle n_p(уч) \rangle$<br>$0,3 < p \leq 0,75$<br>ГэВ/с  | 0.26±0.01<br>0.38±0.01 | 0.54±0.01<br>0.66±0.01 | 0.88±0.01<br>0.98±0.01 | 1.34±0.01<br>1.44±0.01 | 1.68±0.01<br>1.87±0.01 | 1.93±0.01<br>2.15±0.01 | 2.84±0.01<br>3.12±0.01 | 0.74±0.01<br>0.90±0.01 |
| $\langle n_p(уч) \rangle$<br>$P > 1,4$<br>ГэВ/с            | 0.54±0.02<br>0.61±0.02 | 0.48±0.02<br>0.55±0.02 | 0.53±0.02<br>0.63±0.02 | 0.58±0.02<br>0.64±0.02 | 0.52±0.02<br>0.62±0.02 | 0.67±0.02<br>0.75±0.02 | 0.49±0.02<br>0.58±0.02 | 0.55±0.02<br>0.67±0.02 |
| $\langle n_p(исп) \rangle$<br>$0,15 < p \leq 0,3$<br>ГэВ/с | 0.21±0.02<br>0.24±0.02 | 0.41±0.02<br>0.51±0.02 | 0.66±0.02<br>0.72±0.02 | 0.99±0.01<br>0.92±0.01 | 1.17±0.01<br>1.13±0.01 | 1.52±0.01<br>1.60±0.01 | 1.26±0.01<br>1.34±0.01 | 0.55±0.02<br>0.62±0.02 |
| $\langle n_p(исп) \rangle$                                 | 3.72±0.03              | 2.26±0.02              | 1.05±0.02              | 0.23±0.02              | 0.16±0.02              | 0.09±0.01              | 0.06±0.02              | 0.01±0.004             |

|                  |                 |                 |                 |                 |                 |                 |                 |                  |
|------------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|------------------|
| $p < 0,15$ ГэВ/с | $3.88 \pm 0.03$ | $2.34 \pm 0.02$ | $1.16 \pm 0.02$ | $0.30 \pm 0.02$ | $0.21 \pm 0.02$ | $0.13 \pm 0.02$ | $0.11 \pm 0.02$ | $0.02 \pm 0.004$ |
|------------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|------------------|

Средняя множественность протонов-участников почти на 25% превышает средней множественности протонов с импульсом  $P > 1,4$  ГэВ/с. Это свидетельствует об относительно меньшем образовании  $\Delta$ -изобаров в dC-взаимодействиях [11].

Из Q зависимости средних множественностей можно видеть, что при переходе от периферических взаимодействий к центральным, значительно возрастают средние множественности всех рассматриваемых вторичных заряженных частиц (табл.1). Особенно, множественное образование  $\pi^-$ -мезонов существенно чувствителен к величине степени центральности. Средние множественности положительных и отрицательных пионов для всех dC-событий почти одинаковы:  $\langle n_{\pi^-} \rangle = 0,63 \pm 0,01$  и  $\langle n_{\pi^+} \rangle = 0,64 \pm 0,01$ . Для событий с  $Q \geq 3$  множественное образование  $\pi^+$ -мезонов, в пределах ошибок, постоянно. Разницу в множественностях  $\pi^+$  и  $\pi^-$ -мезонов с увеличением степени центральности можно объяснить если учитывать, что сечение реакции  $pp \rightarrow p\pi^+ \sigma_1$  при импульсе 4,2 ГэВ/с превышает сечение реакции  $pn \rightarrow p\pi^- \sigma_2$  в три раза. Дейтрон можно рассматривать как очень слабо связанное протон-нейтронную систему (удельная энергия связи 1,11 МэВ) относительно энергии взаимодействия. Поэтому можно предполагать, что каждый нуклон дейтрона в отдельности взаимодействует с ядром углерода. С уменьшением импульса первичного протона в ходе взаимодействия с ядром углерода эти превышения увеличивается ( $\sigma_1$  существенно возрастает, а  $\sigma_2$  медленно убывает). Таким образом, может быть объяснена различная зависимость  $\langle n_{\pi^-} \rangle$  и  $\langle n_{\pi^+} \rangle$  от Q.

Рассмотрим влияние степени центральности dC-взаимодействий на средние множественности медленных протонов-фрагментов мишени ( $0,3 \leq P \leq 0,75$  ГэВ/с). При этом наименьшее значение  $\langle n_p \rangle$  наблюдается в событиях  $Q=1$  (табл.1), которые как указывалось выше, в основном представляет собой результат взаимодействия протона из снаряда с нейтроном ядра углерода. По мере увеличения Q множественность мишенных протонов возрастает, т.е. все больше число нуклонов ядра углерода вовлекается в процесс взаимодействия. При этом, естественно, уменьшается множественность испарительных протонов, в частности, множественность протонов с импульсом  $P < 0,15$  ГэВ/с сильно падает. Множественность мишенных протонов с  $P < 0,75$  ГэВ/с, число которых определяется из соотношения  $\langle n_p \rangle (уч) - \langle n_p \rangle (уч) 0,3 < p \leq 0,75 > - \langle n_p \rangle (уч) (P > 1,4) >$  тоже возрастает с увеличением Q. Это происходит благодаря увеличению доли мишенных протонов, получивших большую передачу импульса при соударении с налетающим протоном. Средняя множественность лидирующих протонов около  $0,40 \pm 0,01$ .

#### Заключение

В периферических dC-взаимодействиях ( $Q=1$  и 2) происходит возбуждение ядро-мишени, в результате которого испускаются медленные протоны с импульсом до 0,3 ГэВ/с. С увеличением степени центральности существенно возрастает полная множественность заряженных частиц за счет увеличения множественности  $\pi^-$ -мезонов и протонов-участников из ядра-мишени. Наблюдается резкое уменьшение средней множественности испарительных протонов с импульсом  $P < 0,15$  ГэВ/с. По мере перехода от периферических взаимодействий к центральным событиям среднее число отрицательных пионов, приходящихся на один протон-участник ( $P < 0,75$  ГэВ/с) уменьшается до 60%. Это является результатом уменьшения прицельного параметра неупругих dC-соударений. Из табл.1 видно, что полученные данные по модели FRITIOF превышает экспериментальных данных (табл.1). Небольшая разница экспериментальных и теоретических расчетов, возможно, связано с методикой эксперимента при введении весов к потерянными частицам.

#### Литература

1. Агакишиев Г.Н. и др. ЯФ, 1987, т.45, с.1373
2. Simic L. et al. –Phys. Rev. D, 1986, v.34, P.692
3. Simic L. et al. –Phys. Rev. C, 1988, v.37, P.2064
4. Uzhinskii V.V. Preprint IINR E2-96-192. Dubna. 1996
5. R.T.Gluber, in Lectures in Theoretical Physics. Ed.W.E.Brittin et al, v.1 (Interscience Publishes, N.Y.,1959)
6. Галоян А.С., Кладницкая Е.Н. и др. Характеристики pC-взаимодействий при импульсе 4,2 ГэВ/с в зависимости от степени центральности соударения протона с ядром углерода. Множественность вторичных частиц. ОИЯИ, P1-2002-54, Дубна, 2002г. Стр.1-10

7. Олимов К., Бекмирзаев Р.Н., Петров В.И., Худайбердыев Г.У., Султанов М.У. Образование  $\pi^-$ -мезонов в пС-взаимодействиях при 4,2 ГэВ/с. Доклады Академии наук Республики Узбекистан. 4-2011, с.29-33.

8. Бекмирзаев Р.Н., Беляков В.А., Олимов К., Султанов М.У., Нодиров Г.Ю.. Нуклоны-спектаторы в СС-соударениях при 4,2 А ГэВ/с. Доклады Академии наук Республики Узбекистан. 6-2011, с.36-38.

9. Бекмирзаев Р.Н., Беляков В.А., Олимов К., Султанов М.У., Нодиров Г.Ю. Теоретический расчет кинематических характеристик нуклонов-спектаторов из возбужденного ядра-мишени углерода. Доклады Академии наук Республики Узбекистан. 3-2012, с.27-31.

10. Sultanov M.U., Daminov F., Aliqulov S.S., Bekmirzaev R.N., ekmirzaevaX., Xolbutaev Sh. Dependence of formation of secondary protons and  $\pi^-$ -mesons in dC,  $\alpha$ C and CC interactions at 4.2 A-GeV/c on the degree of centrality. International Conference Nuclear Science and its application Samarkand, Uzbekistan, September 24-28, 2012. p.131-132

11. M.U.Sultanov, U.U.To'xtayev, Sh.X.Xushmurodov, S.Yuldashev, A.A.O'sarov. 4,2 GeV/c impulsli pC-, dC-,  $\alpha$ C- va CC-yadroviy reaksiyalarda hosil bo'lgan ikkilamchi zarralar xususiyatlari. SamDU ilmiy axborotnomasi. 2015, №5(93), 52-56 betlar.

UDK: 523.84

# **QISQA DAVRLI PULSATSİYALANUVCHI 2MASS\_22472590+5407249 VA 2MASS\_22431277+5439408 O'ZGARUVCHAN YULDUZLARINI FOTOMETRIK TADQIQI**

**F.Xamrakulov<sup>1</sup>, E.Lapukhin<sup>2</sup>, T.Alimov<sup>1</sup>, A.Kulmuradov<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>*Samarqand davlat universiteti*

<sup>2</sup>*Sibir fan va texnologiyalar universiteti*  
*x-farxodjon@mail.ru*

**Annotatsiya.** Ushbu maqolada tanlangan ikki yulduzning kuzatuv natijalari VAST dasturi bilan fotometrik tahlil qilinib, davri, vaqtga bog'liq bo'lgan yorqinlik egri chizig'ini o'zgarishi va chastotalar bo'yicha tahlili WinEff dasturi yordamida bajarildi. Aniqlikni oshirish maqsadida natijalar qaytadan L-K period dasturi tahlil qilinib taqqoslandi.

**Kalit so'zlar:**  Scuti yulduzlari, sefeyid o'zgaruvchilar, qisqa davrli pulsatsiyalanuvchilar, chastota tahlili.

## **Фотометрические исследование коротко периодической пульсирующей 2MASS\_22472590+5407249 и 2MASS\_22431277+5439408 переменных звезды**

**Аннотация.** В данной статье на основе VAST программ были фотометрически проанализированы результаты наблюдений двух выбранных в качестве объектов звезд, а также используя программу WinEff определены период, зависимость кривой блеска от времени и проведен частотный анализ. Для повышения точности исследований прежние результаты сопоставлены с результатами анализа программы L-K period.

**Ключевые слова:**  Scuti, переменные цефеиды, коротко периодические пульсирующие, частотные анализы.

## **Photometric investigation of 2MASS\_22472590+5407249 and 2MASS\_22431277+5439408 short-period pulsating variable stars**

**Abstract.** The observations of the two stars selected in this article were photometrically analyzed by the VAST program, and the time-dependent period of the light curve variation and frequency analysis were determined by WinEff software. In order to increase of accuracy using L-K period software the results were obtained and compared.

**Keywords:**  Scuti stars, cepheid variables, short period pulsators, frequency analyses.

Pulsatsiyalanuvchi yulduzlar - davriy hamda nodavriy ravishda sirt qatlamlarida kengayish va qisqarish jarayonlari yuz beruvchi yulduzlardir. Pulsatsiya jarayonlari radial va noradial ravishda bo'lishi mumkin. Radial pulsatsiyalanish jarayonida yulduz sferik shaklida saqlanib qolib, noradial

pulsatsiyalanishda yulduz shakli vaqti vaqti bilan sferik shakildan chetlashib hatto uning yuzasini boshqa tomonlarida ham qarama-qarshi pulsatsiya fazalari bo'lib yulduz sirtining turli sohalarida turlicha tartibsiz kengayish va siqilishlar namoyon bo'ladi [1, 2].

Pulsatsiyalanuvchi o'zgaruvchan yulduzlar qisqa va uzun davrli guruhlariga bo'lingan holda tadqiq qilinadi. Ushbu ikki guruhdagi yulduzlarini ham o'z navbatida noto'g'ri va to'g'ri pulsatsiyalanuvchi guruh osti sinflarga ajratish mumkin.

Yulduzlarning pulsatsiyalanish davrini qiymatiga, pulsatsiyalanish jarayonlari darajasiga, massasi va evolyutsiya bosqichiga ko'ra quyidagi (ACYG, B CEP, BCEPS, BLBOO, CEP, CEP(B), CW, CWA, CWB, DCEP, DCEPS, DSCT, DSCTC, GDOR, L, LB, LPB, M, PVTEL, RPHS, RR, RR(B), RRAB, RRC, RV, RVA, RVB, SR, SRA, SRB, SRC, SRD, SRS, SXPHE, ZZ, ZZA, ZZB, ZZO) pulsatsiyalanuvchi sinflarga ajratish mumkin [1].

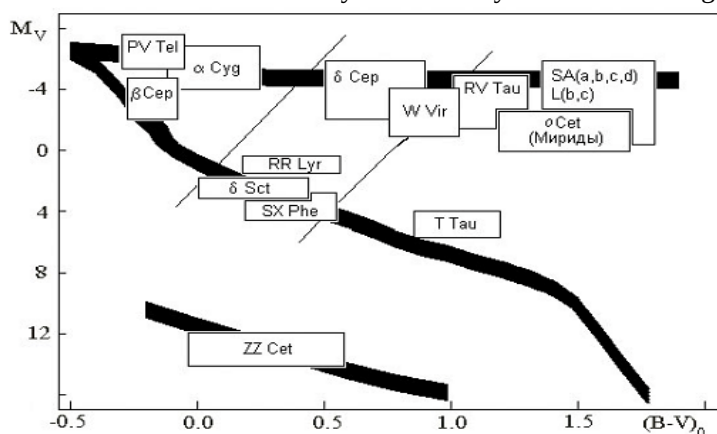
**Kirish.**  $\delta$  Scuti ("qalqon" yulduz turkumi) tipdagi yulduzlar spektral sinfi A0 - F5 pulsatsiyalanuvchi o'zgaruvchan, yorqinlik sinfi esa III dan V gacha temperaturasi 7000 – 8500 K bo'lgan yulduzlardir [3, 4]. Ushbu tipdagi yulduzlarda radial va noradial bo'lgan pulsatsiyalanishlar aniqlangan. Pulsatsiya davrlari extimoliy ravishda 30 minutdan 8 soatgacha bo'lishi mumkin. Fotometrik amplitudasi yorqinligini o'zgarishi esa odatda 1 yulduz kattaligidan kichikroq ( $0.^m003$  dan  $0.^m9$  gacha) bo'ladi [3].  $\delta$  Scuti tipdagi yulduzlar pulsatsiyalanuvchi yulduzlar ichida bizning galaktikamizda ZZ Ceti ("Ceti yani kit" yulduz turkumi) tipdagi oq karlik o'zgaruvchan yulduzlardan keyin ikkinchi o'rinda turadi.

$\delta$  Scuti tipdagi yulduzlar o'zgaruvchanligi va radial tezliklari haqida birinchi marotaba 1900 yilda aytilgan [2]. U vaqtlarda davri aniqlanib  $\beta$  Canis major ("Canis major yani katta it" yulduz turkumi) tipdagi o'zgaruvchan yulduzlar guruhiga kiritilgan. Keyinchalik olib borilgan tadqiqotlarni ko'rsatishicha  $\delta$  Scuti tipdagi yulduzlar  $\beta$  Canis major tipdagi yulduzlarga emas, balki sefeid o'zgaruvchan yulduzlar o'xshashligi kelib chiqdi. 1956 yilda astrofiziklar alohida yangi o'zgaruvchan tip mavjudligiga ishora qildi [3, 11].

Kashf etilgan birinchi  $\delta$  Scuti tipdagi yulduzlar fotometrik amplitudalari katta bo'lganligi uchun sefeid o'zgaruvchan yulduzlar tipiga nisbatan noodatiy ko'rindi.

1965 yildan keyin fotoelektrik o'lchashlar yordamida  $\delta$  Scuti tipdagi yulduzlarni millimagnitudali (milli yani juda kichik yulduz kattalikdagi o'zgarishi) o'lchashlarni amalga oshirila boshlangan. Astronomlar uchun kashf etilgan yangi  $\delta$  Scuti tipdagi yulduzlarni 1960 yillarni oxiri va 1970 yillarni boshlaridan yuqori aniqlik bilan o'rganib muntazam ravishda qidirish ishlari amalga oshirilgan [11].

Astronomlar 1970 yilda Gidra yulduz turkumidagi 9 ta kichik amplitudali  $\delta$  Scuti tipdagi



yulduzlarning tadqiq qilib barchasi 0.2 kundan kichik davr bo'lganligi uchun ultra-qisqa davrli sefeidlar deb atashgan [2].

Ushbu tipdagi yulduzlar asosan bir necha multi-davrli hisoblanib yorqinlik egri chiziqlarida kichik amplitudali xususiyatlarini va pulsatsiyalanishda turli chastotalarni (bir sutkadagi pulsatsiyalanishlar soni) namoyon qiladi. Lekin astroseismologik usul yordamida bunday tipdagi yulduzlarda multi-davrlarini bir – biri bilan taqqoslab ularni ichki tuzilishini

nazariy hisoblash mumkin [5].

**1-rasm.** O'zgaruvchan yulduzlarni Gersthrung-Rassel diagrammasida o'rni va bosh ketma-ketlikni noturg'unlik sohasi bilan kesishmasi.

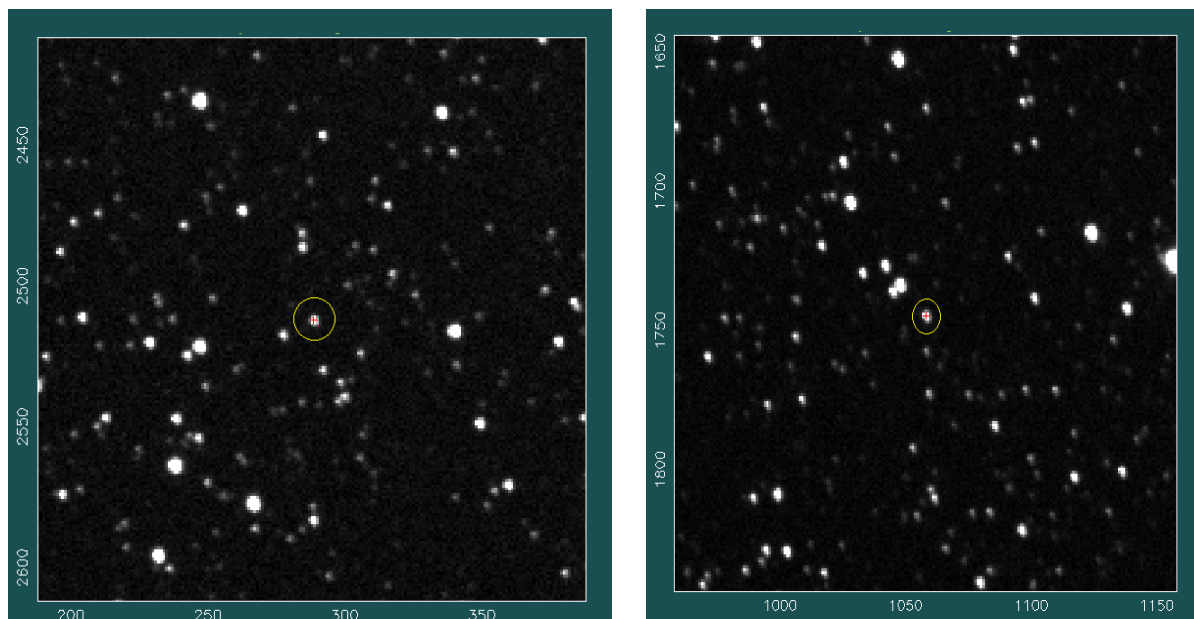
$\delta$  Scuti tipdagi yulduzlar Gersthrung-Rassel diagrammasidagi asosiy bosh ketma – ketlikning birinchi avlod (populyatsiya) yulduzlaridir. Gersthrung-Rassel diagrammasida 1-rasmda keltirilgan bir-biriga paralel ravishda joylashgan ikki chiziq [3] noto'rg'unlik chiziqlari sohasidir. Bazi yulduzlar evolyutsiyasi davomida ushbu sohaga kelganida tebranishlar barqarorligi yo'qoladi.

$\delta$  Scuti tipdagi yulduzlar massasi  $1,5 M_{\odot}$  dan  $2,1 M_{\odot}$  gacha bo'lgan kimyoviy tarkibi bo'yicha metalli yulduzlar safiga kiruvchi, atmosferasini tarkibida og'ir elementlar mavjud bo'lgan yulduzlardir [6].

**Asosiy qism.** Kuzatuv materiallari 2018 yil avgust oyida Rossiya federatsiyasi Krasnoyarsk sahaxridagi Sibir fan va texnologiyalar universiteti observatoriyasida (observatoriyaning koordinatasi kenglamasi  $56^{\circ} 00' 43''$  uzunlamasi esa  $92^{\circ} 58' 29''$  ga teng bo'lib dengiz sathidan balandligi 160 metrga teng) olib borilgan. Kuzatuv teleskopi Gamilton sistemasiga ega ( $D = 400$  mm,  $F = 915$  mm) CCD kuzatuv kamerasi FLI ML9000 chipli ( $3056 \times 3056$  pixels, pixel o'lchami  $12 \mu\text{m}$ ). Tasvirlar o'lchami  $2,^{\circ}3 \times 2,^{\circ}3$  ga teng.

Har ikkala yulduz kuzatuv natijalari VAST [7] dasturi yordamida fotometriya qilinib chastotalar tahlili, yorqinlik yorqinlik egri chiziqlari vaqtga bog'liq grafigi va pulsatsiyalanish davrlari Lafler-Kingman metodi yordamida WinEff [8] hamda L-K period [9] dasturlari orqali aniqlanib taqqoslandi.

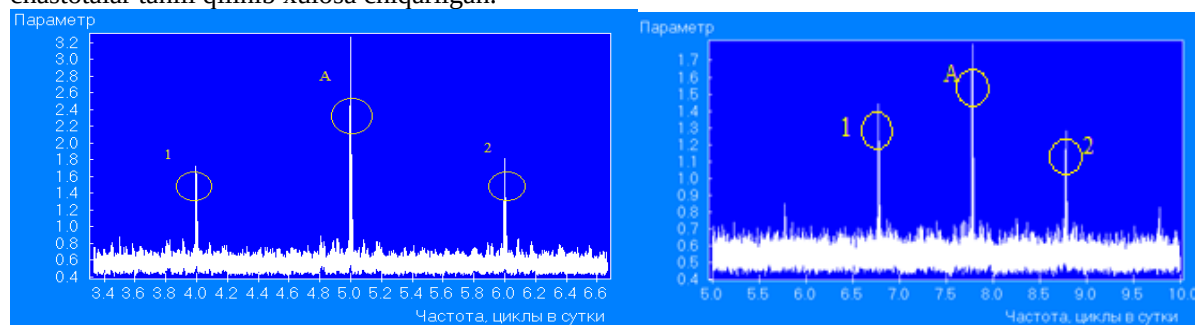
**Olingan natijalar.** Tanlangan obyektlar bo'yicha E.Lapukhin va boshqalar "New variable stars in Lacerta: area of  $2,^{\circ}3 \times 2,^{\circ}3$ , center  $\alpha=22^{\text{h}}00^{\text{m}}$ ,  $\delta=54^{\circ}00'$  maqolasida bazi bir fizik parametrlarni keltirib o'tgan va o'zgaruvchanlik tipini aniqlagan [10].



2-rasm. a) 2MASS\_22472590+5407249 yulduzining tebranish chastotalar

b) 2MASS\_22472590+5407249 yulduzining teleskop orqali olingan tasviri

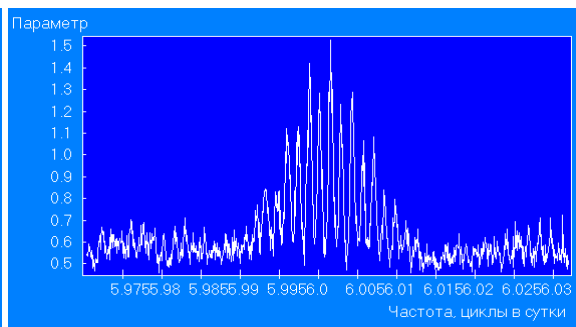
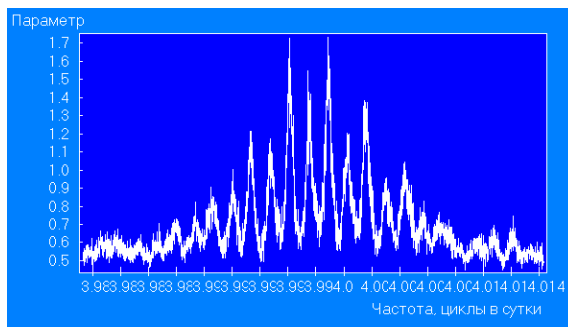
2MASS\_22472590+5407249 yulduzi 2MASS (ingiliz tilida Two Micron All-Sky Survey) gatalogida 22472590+5407249 raqami bilan belgilangan yulduzning koordinatalari to'g'ri chiqishi  $\alpha=22:47:25,89$  og'ishi  $\delta=+54:07:25,0$  kuzatuv nuqtalar soni 257 ta, expozetsiya vaqti 30 sekundga teng. Yulduz uchta oberton bo'yicha (2-a rasm) tebranmoqda, tebranishlarning har bir oberton bo'yicha chastotalar tahlil qilinib xulosa chiqarilgan.



3-rasm. a) yuqoridagi yulduzning birinchi obertonidagi chastota tahlili

b) yuqoridagi yulduzning birinchi obertoni bo'yicha yorqinlik egri chizig'i

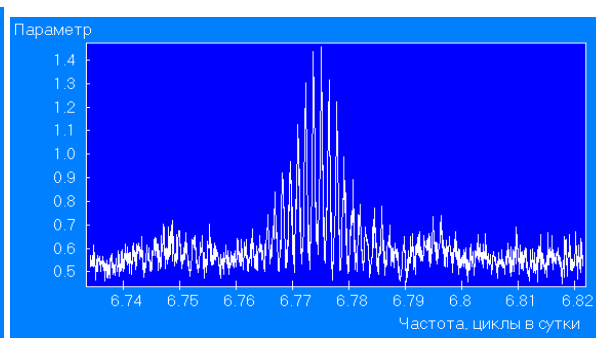
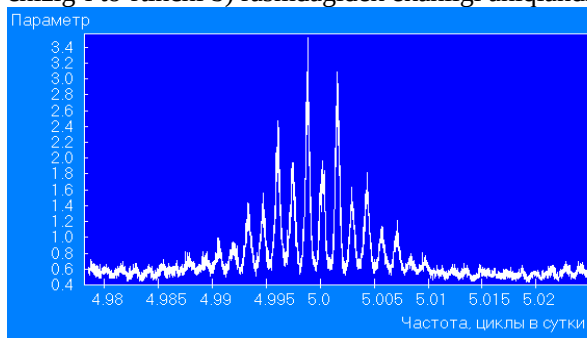
Birinchi obertondagi chastota tahlil qilinib pulsatsiyalanish davri  $P=0.2502378$  va chastotasi  $f_1=3.9962$  ga teng bo'lib yulduz kattaligi o'zgarishi  $m_v=13.14$  dan  $m_v=13.27$  ga teng ekanligi aniqlanib yorqinlik egri chizig'i uchunchi b) rasimdagidek ekanligi aniqlandi.



**4-rasm. a)** yuqoridagi yulduzning ikkinchi obertonidagi chastota tahlili

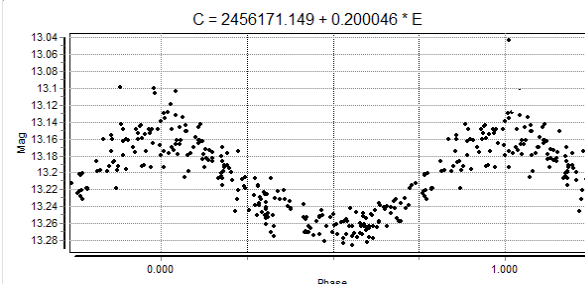
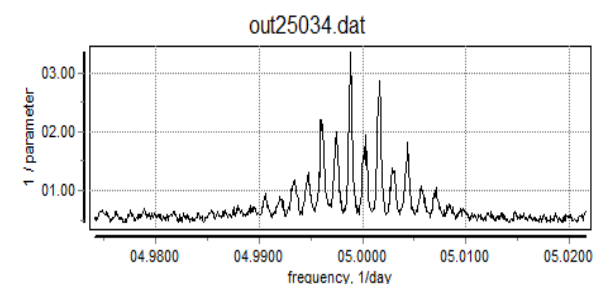
**b)** yuqoridagi yulduzning ikkinchi obertoni bo'yicha yorqinlik egri chizig'i

Ikkinchi obertonidagi chastota tahlil qilinib pulsatsiyalanish davri  $P=0.1666218$  va chastotasi  $f_2=6.0016$  ga teng bo'lib yulduz kattaligi o'zgarmsdan avvalgidek qolgani aniqlanib yorqinlik egri chizig'i to'rtinchi b) rasmdagidek ekanligi aniqlandi.



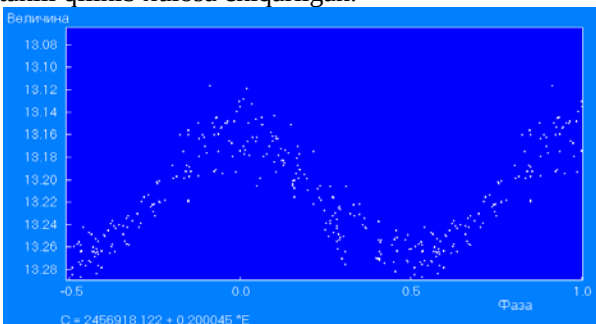
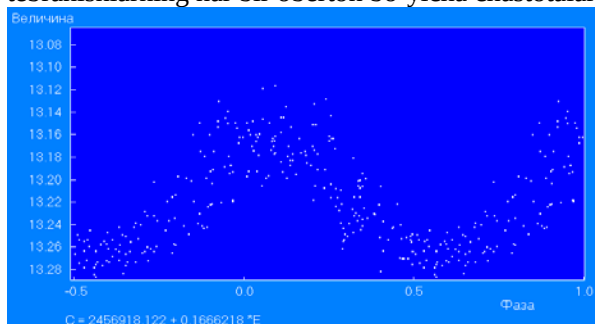
**5-rasm. a)** yuqoridagi yulduzni asosiy obertonidagi chastota tahlili

**b)** yuqoridagi yulduzni asosiy obertoni bo'yicha yorqinlik egri chizig'i



Asosiy obertonidagi chastota tahlil qilinib shunga ko'ra yulduzning pulsatsiyalanish davri aniqlanadi. Yulduzning asosiy pulsatsiyalanish davri  $P=0.200045$  (4,8 soat yani 288 minut) va chastotasi  $f_A=4.99887$  ga teng bo'lib yulduz kattaligi o'zgarmsdan avvalgidek qolgani aniqlanib vaqtga bog'liqlik yorqinlik egri chizig'i grafigi beshinchi b) rasmda keltirildi.

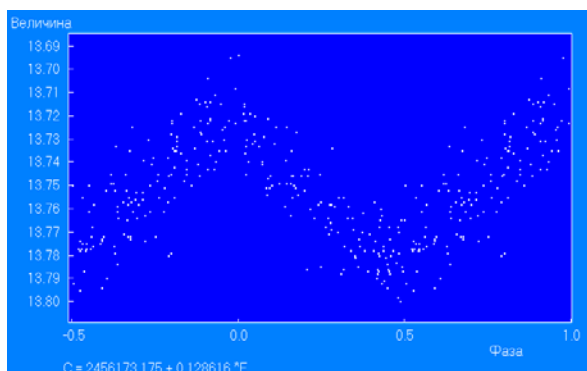
**2MASS\_22431277+5439408** yulduzi 2MASS gatalogida 22431277+5439408 raqami bilan qayd etilgan yulduzning koordinatalari to'g'ri chiqishi  $\alpha=22:43:12,79$  og'ishi  $\delta=+54:39:40,9$  kuzatuv nuqtalar soni 273 ta, expozetsiya vaqti 30 sekundga teng. Yulduz uchta oberton bo'cha tebranmoqda, tebranishlarning har bir oberton bo'yicha chastotalar tahlil qilinib xulosa chiqarilgan.



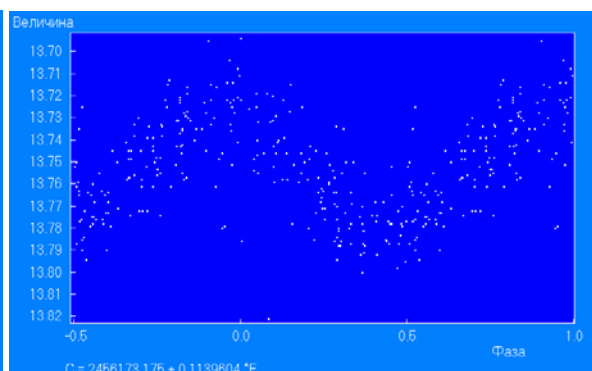
**6-rasm. a)** 2MASS\_22431277+5439408 yulduzning teleskop orqali olingan tasviri

**b)** 2MASS\_22431277+5439408 yulduzning tebranish chastotalar



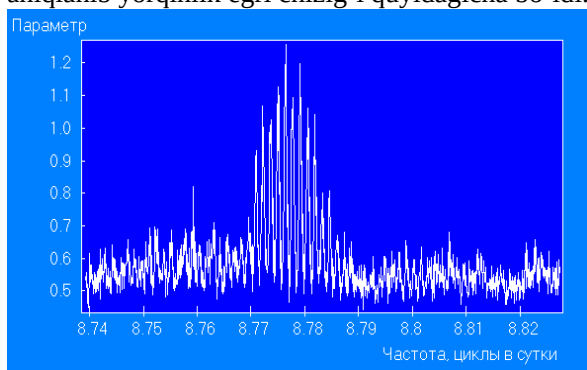


**7-rasm. a)** yuqoridagi ikkinchi yulduzning birinchi obertonidagi chastota tahlili

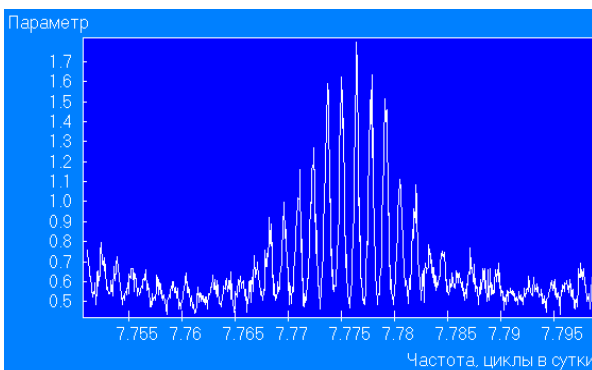


**b)** yuqoridagi ikkinchi yulduzning birinchi obertoni bo'yicha yorqinlik egri chizig'i

Birinchi obertondagi chastota tahlil qilinib pulsatsiyalanish davri  $P=0.1476275$  va chastotasi  $f_1=6.7738026$  ga teng bo'lib yulduz kattaligi o'zgarishi  $m_v=13.71$  dan  $m_v=13.78$  ga teng ekanligi aniqlanib yorqinlik egri chizig'i quyidagicha bo'ldi.

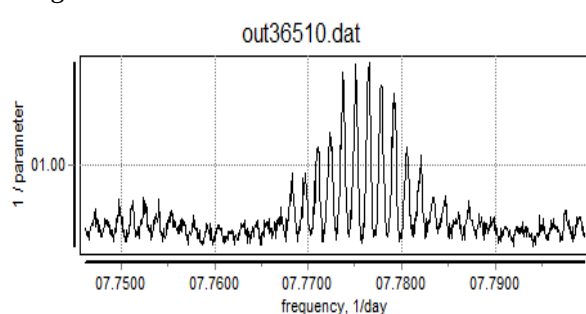


**8-rasm. a)** yuqoridagi ikkinchi yulduzning ikkinchi obertonidagi chastota tahlili

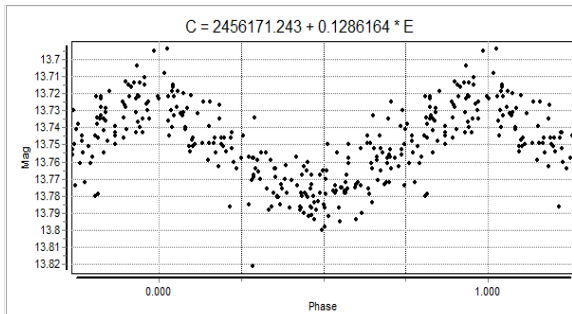


**b)** yuqoridagi ikkinchi yulduzning ikkinchi obertoni bo'yicha yorqinlik egri chizig'i

Ikkinchi obertondagi chastota tahlil qilinib pulsatsiyalanish davri  $P=0.1139604$  va chastotasi  $f_2=8.7738096$  ga teng bo'lib yulduz kattaligi o'zgarishidan avvalgidek qolgani aniqlanib yorqinlik egri chizig'i 8-b rasmda keltirildi.



**9-rasm. a)** yuqoridagi ikkinchi yulduzning asosiy obertonidagi chastota tahlili



**b)** yuqoridagi ikkinchi yulduzning asosiy obertoni bo'yicha yorqinlik egri chizig'i

Asosiy obertondagi chastota tahlil qilinib shunga ko'ra asosiy fizik ko'rsatgichlar aniqlanadi. Yulduzning asosiy pulsatsiyalanish davri  $P=0.128616$  (3,08 soat yoki 185 minut) va chastotasi  $f_A=7.75081$  ga teng bo'lib yulduz kattaligi o'zgarishidan avvalgidek qolgani aniqlanib vaqtga bog'liqlik yorqinlik egri chizig'i grafigi quyidagicha bo'ldi. Yuqoridagi har ikkala yulduzni tahlil natijalari WinEff dasturi asosida olingan bo'lib aniqlikni oshirish maqsadida asosiy obertondagi chastotasi L-K period dasturi yordamida ham tahlil qilinib taqqoslandi. Har ikkala yulduzni taqqoslash natijalari shuni ko'rsatdiki chastota va davrlari orasidagi xatolik  $\pm 0.008$  ga tengligi kuzatildi.

**Xulosalar.** 2MASS 22472590+5407249 va 2MASS 22431277+5439408 yulduzlari fotometrik tadqiq qilinib ba'zi fizik parametrlari aniqlanib jadvalda keltirildi

**1-jadval.**

| Belgilanishi<br>(Other) | Coord (J2000) | Tipi<br>(type) | $m_v$<br>max | $m_v$<br>min | Davri<br>(period) | $f_A$<br>[1/sutka] | $f_1$ dagi<br>davri | $f_2$ dagi<br>davri |
|-------------------------|---------------|----------------|--------------|--------------|-------------------|--------------------|---------------------|---------------------|
|-------------------------|---------------|----------------|--------------|--------------|-------------------|--------------------|---------------------|---------------------|



|                           |                                              |          |           |           |                    |         |                                  |                                  |
|---------------------------|----------------------------------------------|----------|-----------|-----------|--------------------|---------|----------------------------------|----------------------------------|
| 2MASS224725<br>90+5407249 | $\alpha=22:47:25,89$<br>$\delta=+54:07:25,0$ | DSC<br>T | 13.1<br>4 | 13.2<br>7 | $P_A=0.200$<br>045 | 4.99887 | 3.9962<br>$P_1=0.2502$<br>378    | 6.0016<br>$P_2=0.166$<br>6218    |
| 2MASS224312<br>77+5439408 | $\alpha=22:43:12,79$<br>$\delta=+54:39:40,9$ | DSC<br>T | 13.7<br>1 | 13.7<br>8 | $P_A=0.128$<br>616 | 7.75081 | 6.7738026<br>$P_1=0.1476$<br>275 | 8.7738096<br>$P_2=0.113$<br>9604 |

Ushbu har ikkala yulduz ham qisqa davrli pulsatsiyalanuvchi  $\delta$  Scuti tipidagi o'zgaruvchilar ekanligi hamda fotometrik tahlildan aniqlandiki har ikki yulduzlar vaqtga bog'liq yorqinlik egri chizig'idagi asosiy bosh minimum va maksimum orasidagi farq juda kichikligidan past amplitudali sinfiga tegishli yulduzlar ekanligi yana bir bor o'z isbotini topdi.

#### Adabiyotlar

1. <http://www.sai.msu.su/gcvs/gcvs/> General catalouge of variable stars "Variability types and Distribution statistics of designated variable stars according to their types of variability" 2020
2. Gerry A. Good "Observing variable stars" Springer-Verlag London Limited 2003 Printed in Great Britain, page 74-76
3. A.B.Локтин, B.A.Марсаков. Лекции по звёздной астрономии. Учебно-научная монография, 2009. – Стр. 70-75
4. M6rcio Catelan and Horace A. Smith "Pulsating Stars" 2015 Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Boschstr. 12, 69469 Weinheim, Germany
5. John R. Percy "Understanding Variable Stars" Published in the United States of America by Cambridge University Press, New York, First published in print format 2007, page 182-186
6. Б.В.Кукаркин. Пульсирующие звезды. – М.: издательство «Наука», 1970.
7. VAST- VaST [Variability Search Toolkit] is a software for *variable star* detection on a series of astronomical images dasturi
8. WinEff – Виталий Горанский, ст.н.с. ГАИШ, Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова dasturi
9. L – K Period – Lafler J., Kinman T.D. *Astrophys. Journal, Supplement* 11, 216L (1998). Dasturi
10. E.G.Lapukhin, A.M.Zubareva, E.A.Kryukova "New variable stars in Lacerta: area of  $2,^03 \times 2,^03$ , center  $\alpha=22h00m$ ,  $\delta=54^000'$  (2000.0)" part I. *Journal Variable Stars* vol. 18, N 2 (2018)
11. A.Baglin, M.Breger, C.Chevalier and all "Delta Scuti Stars" *Astron.&Astrophys.* 23,221 – 240 (1973)

UDK: 539.1

#### YADRO REAKTORLARI – YADRO ENERGETIKASI MANBAYI

R.M.Eshbo'riyev, M.U.Sultanov, R.Sayfinov

Samarqand davlat universiteti

r-eshburiyev@mail.ru

**Annotatsiya.** Ushbu maqolada yadro reaktorlarining nazariy asoslari va tajribada olingan xarakteristikalarini keltirilgan. Zanjir reaksiyada energiya ajralishi mexanizmi bayon etilgan. Hozirgi zamon reaktorlari ishlash tamoyilining asosiy tugunlari hamda reaktorlar yordamida yadro energiyasini hosil qilish jarayoni keltirilgan. Yadro reaktorlari himoya qobig'ida ishlatiluvchi ba'zi elementlarning tez neytronlar bilan ta'sirlashuvi bo'yicha tajriba ma'lumotlari berilgan.

**Kalit so'zlar:** atom, reaktor, neytron, kesim, energiya, quvvat, izotop, radiatsiya, gomogen, geterogen, reaksiya, makroskopik, reaktivlik, yemirilish.

#### Ядерные реакторы – источник ядерной энергии

**Аннотация.** Представлены теоретические основы и экспериментальные характеристики ядерных реакторов. Описаны механизм выделения ядерной энергии в цепных реакциях. Рассмотрены основные детали принципа работы современных реакторов и получение ядерной энергии с помощью реакторов. Приведены экспериментальные данные по взаимодействиям быстрых нейтронов с элементами, используемые в защитных слоях реакторах.

**Ключевые слова:** атом, реактор, нейтрон, сечение, энергия, мощность, изотоп, радиация, гомоген, гетероген, реакция, макроскопический, реактив, распад.

### Nuclear reactors-the source of nuclear energy

**Abstract.** Theoretical bases and experimental characteristics of Nuclear Reactors are given. Mechanism of energy dissipation in chain reaction is explained. Basic working tendency of current reactors and process of taking energy with reactors are given. Experimental data are given about influencing fast neutrons with elements which are used in a protective shell of Nuclear Reactors.

**Key words:** Atom, reactor, neutron, section, energy, power, isotop, radiation, homogen, heterogen, reaction, macroscopic, reactivity, depletion.

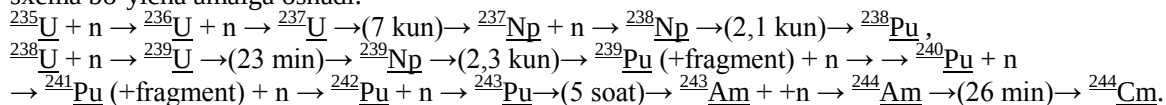
### Kirish

Hozirgi kunda insoniyatning energiyaga, uning qay turda bo'lishiga qaramasdan, ehtiyoji juda tez suratlarda oshib borayotganligi hech kimga sir emas. Ammo jamiyat uchun bugungi kunda ham uch omil muhimdir: olinayotgan energiya tannarxi va energiya manbaining atrof-muhit ekologiyasi uchun zararsizligi, energiya manbaining xavfsizligi va qanchalik samarali ekanligi, energiya ta'minotining uzluksizligi va davomiyligi. Yadro energetikasi bu uch omilga ham qoniqli tarzda javob bera oladi. Masalan, AES ishlab turganda atmosferaga chiqariluvchi uglerod miqdori boshqa energiya manbalariga (ko'mir yoki gazda ishlovchi) nisbatan olganda juda kam. Atrof-muhitga tarqalayotgan radioaktiv izotoplar miqdori, radioaktiv chiqindilar xalqaro yangi texnologiyalar yordamida ruxsat etilgan darajada kamaytiriladi. Xomashyo vaznining kichikligi atom elektrostansiyasi ishlab chiqaruvchi energiya tannarxini bir necha o'n yillar davomida, mutanosib tarzda, deyarli bir xil ushlab turish imkonini beradi. Shu jihatdan yadro energetikasi kelajakda insoniyatning elektr energiyasiga bo'lgan talabini qondiruvchi yagona energiya manbai bo'lib qoladi.

### Energiya ajralishi mexanizmi

Bir moddaning energiya ajralishi tufayli boshqa moddaga aylanishi modddaning zaxira energiyasi bo'lgandagina sodir bo'ladi. Bu shuni anglatadiki, mikrozarrachalar tinch energetik holatda boshqa mumkin bo'lgan energetik holatlarga nisbatan ko'proq energiyaga ega bo'ladi. Tinch holatga o'z-o'zidan o'tishda doimo energetik to'siq mavjud. Bu to'siqni yengib o'tish uchun zarrachaga (yadroga) tashqaridan energiya berish zarur. Bu energiya uyg'otish energiyasidir. Bunday uyg'otishdan so'ng yadroning boshqa yadro yoki yadrolarga aylanishida ajralib chiqayotgan energiya uni uyg'otish uchun sarflangan energiyadan katta bo'lsa, bunday holda ekzoenergetik reaksiya yuz beradi. Energetik to'siqni yengib o'tishning ikki yo'li bor: to'qnashuvchi zarralarning kinetik energiyasi hisobiga yoki birikuvchi zarrachalarning bog'lanish energiyasi hisobiga. Agar energiya makroskopik masshtablarda ajralishi nazarda tutilsa, u holda reaksiyani yuzaga keltirish uchun moddaning barcha zarrachalari yoki, hech bo'lmaganda ma'lum bir qismi kinetik energiyaga ega bo'lishi lozim. Bunday holda muhitning temperaturasi issiqlik harakati temperaturasi energetik bo'sag'a kattaligiga, ya'ni jarayon ketishini chegaralovchi temperaturaga qadar oshirish lozim. Molekulalar darajasidagi almashishda, ya'ni kimyoviy reaksiyalarda temperaturaning bir necha yuz kelvinga oshishi yetarli bo'lsa, yadroviy reaksiyalarda, to'qnashuvchi yadrolar kulon to'sig'ining yuqoriligi sababli, kamida o'n million Kelvin atrofida bo'ladi. Bunday reaksiyalar termoyadroviy reaksiyalardir.

O'zaro bog'lanib turgan yuzlab zarrachalardan iborat bo'lgan kvantomexanik sistema – og'ir yadrolarni uyg'otish uchun katta kinetik energiyani talab etmaydi, ya'ni muhitning temperaturasi bog'liq bo'lmaydi. Maqsad makroskopik kattalikdagi energiyaga ega bo'lish bo'lsa, bunga faqat yadroviy zanjir reaksiyasini amalga oshirish bilan erishish mumkin. Zanjir reaksiyani amalga oshirish uchun u neytron (elektr zaryadiga ega bo'lmagan og'ir elementar zarra) bilan to'qnashishi zarur va buning natijasida nisbatan engil yadro bo'laklari hamda yangi neytronlar hosil bo'ladi. Yadro zanjir reaksiyalari quyidagi sxema bo'yicha amalga oshadi:



Qavs ichida elementlarning yarim yemirilish davrlari keltirilgan.

Yangi neytronlar zanjir reaksiyaning uzluksizligini ta'minlaydi va har bir bo'linishda ma'lum issiqlik energiyasi ajralib chiqadi. Boshqariluvchi yadro zanjir reaksiyasi yadro reaktorlarida amalga oshiriladi. Zanjir reaksiyasining turlariga ko'ra yadro reaktorlari sekin, oraliq va tez neytronlarda ishlovchi reaktorlarga ajratiladi.

**Yadro reaktorlarining tuzilishi va ishlash tamoyili**

Har qanday reaktorning tarkibiy qismi: a) neytron qaytargichlar bilan o'ralgan faol hududdan; b) issiqlik tashuvchi moddadan; v) boshqarish tizimidan; g) radiatsion himoya qatlamidan; d) konstruktiv elementlardan; e) masofadan boshqarish pultidan iborat bo'ladi.

Reaktorning ishlashida ushbu jarayonlar sodir bo'ladi: a) bo'linish reaksiyasining ekzotermikligi hisobiga issiqlik ajralib chiqadi; yonilg'ining yonishi va qayta hosil bo'lishi; v) faol hududning yonilg'i yadrosining, neytronlarni kuchli yutishi mumkin bo'lgan, radioaktiv bo'lgan bo'lakchalari bilan to'lishi; g) himoya va konstruktiv materiallarning neytronlar bilan zaharlanishi, ya'ni ularning ikkilamchi radioaktiv modda bo'lib qolishiga hamda kimyoviy xususiyatlarining o'zgarishiga olib keluvchi jarayon. Reaktorlarning ikki turi mavjud: geterogen va gomogen. **Geterogen** reaktorlarda yonilg'i faol hududda bloklar ko'rinishida diskret tarzda joylashtiriladi. **Gomogen** reaktorlarda yonilg'i va sekinlashtiruvchi modda bir jinsli aralashma holida bo'ladi.

Reaktorning asosiy xarakteristikasi uning quvvati, ya'ni vaqt birligi ichida ajralib chiquvchi energiyadir. Reaktorning quvvati megavatlarda ( $1 \text{ MVt} = 10^6 \text{ Vt}$ ) va gigavatlarda ( $1 \text{ GVT} = 10^9 \text{ Vt}$ ) o'lchanadi.  $1 \text{ MVt}$  quvvat bir sekunda  $3 \cdot 10^{16}$  bo'linish aktiga to'g'ri keladi.

Reaktorning asosiy qismi, zanjir reaksiyani amalga oshuruvchi va bu bilan energiya ajralib chiquvchi faol hududdir. Issiqlik va oraliq neytronlarda ishlovchi faol hudud yonilg'idan (ko'p hollarda, bo'linmaydigan uran-238 izotopi bilan aralashtirilgan) va neytronlarni sekinlashtiruvchi moddadan iborat bo'ladi. Tez neytronlarda ishlovchi reaktorlarda neytronlarni sekinlashtiruvchi modda bo'lmaydi.

Faol hududning hajmi bir necha o'n litrdan, katta issiqlik reaktorlarida bir necha o'n kubometrni tashkil etadi. Neytronlar chiqib ketishini kamaytirish uchun faol hududga sferik yoki shunga yaqin bo'lgan shakl beriladi.

Yonilg'i va sekinlashtiruvchining bir - biriga nisbatan joylashishiga qarab, reaktorlar gomogen va geterogen reaktorlarga ajraladi. Gomogen faol hudud sifatida oddiy yoki og'ir suvdagi uranilsulfid ( $\text{U}_2\text{SO}_4$ ) aralashmasi xizmat qilishi mumkin. Keng tarqalgan geterogen reaktorlarning faol hududi yonilg'i kassetalari joylashtirilgan sekinlashtiruvchidan iborat bo'ladi. Reaksiya energiyasi aynan shu kassetalarda ajralib chiqadi va ularni issiqlik ajratuvchi elementlar deyiladi. Qaytaruvchiga ega bo'lgan faol hududlar po'lat qoplamalar bilan o'raladi. Issiq neytronli reaktorlarning faol hududi yaxshi qaytargich bilan o'raladi. Tez neytronlar bilan ishlovchi reaktorlarda qaytargichga issiqlik neytronlari bilan ta'sirlashuvda bo'linmaydigan, ammo  $^{238}\text{U}$  yoki  $^{232}\text{Th}$  izotoplarini hosil qiluvchi og'ir yadrolar ko'p miqdorda kiritiladi. Bu og'ir yadrolar qaytargichning albedosini kamaytirsada, uning samaradorligini oshiradi.

Faol hududdan issiqlikni olish issiqlik tashuvchilar orqali bajariladi. Energetik reaktorlarda issiqlik tashuvchilar faol hududdan issiqlikni intensiv tashishi bilan birgalikda ularni elektr energiyasi ishlab chiqaruvchi qurilmaga eng kam yo'qotish bilan etkazishi zarur. Issiqlik tashuvchilarga katta issiqlik sig'imiga ega bo'lish, neytronlarni sust yutish, kimyoviy faolliги past bo'lishi kabi talablar qo'yiladi. Afsuski, bu talablarni to'la qondiruvchi moddalar yo'q. Issiq neytronlarda ishlovchi reaktorlarda hosil qilingan o'ta katta issiqlik oqimlari uchun suv, suv bug'i, havo, azot, karbonat angidrid va boshqalardan foydalaniladi. Suv yaxshi konveksion issiqlik o'tkazuvchanlikka ega va neytronlarni sust yutadi. Lekin suvni katta quvvatli reaktorlarda ishlatib bo'lmaydi. Chunki yuqori temperaturada suv kimyoviy faol bo'lib qoladi. Gaz issiqlik tashuvchilarning asosiy kamchiligi shundaki, ularni nihoyatda katta tezlikda va bosimda haydashga to'g'ri keladi, aks holda issiqlikni tashish samaradorligi juda kamayib ketadi. Shu sababli gaz issiqlik tashuvchilar nisbatan past solishtirma energiya ajratuvchi reaktorlarda ishlatiladi.

Energiya ajratish juda katta bo'lgan tez neytronlarda ishlovchi reaktorlarda ( $1 \text{ m}^3$  hajmda  $5,5 \text{ KVt}$ ) issiqlikni tashish yanada murakkab bo'ladi. Chunki bunda issiqlik tashuvchilarga, yuqoridagi talablardan tashqari neytronlarni sekinlashtirish talabi ham qo'yiladi. Shuning uchun tez neytronli reaktorlarda, suvga nisbatan kuchli kimyoviy aktivlikka va zararli xususiyatga hamda neytronlar ta'sirida ikkilamchi radioaktivlikka ega bo'lishiga qaramasdan, suyuq natriy ishlatiladi. Zanjir reaksiyasi neytronlarni kuchli yutuvchi materiallardan tayyorlangan moslashtirib turuvchi sterjenlar orqali boshqarib turiladi. Bu sterjenlar faol hududga to'liq yoki qisman kiritiladi. Bunda ularning parametrlari shunday hisoblanadiki, lozim bo'lganda reaksiyani to'xtatish imkonini beradi. Sterjenni chiqarib olish jarayonida faol hududda neytronlarning ko'payish koeffitsienti  $k$  oshib boradi va  $k=1$  qiymatga etganida reaktor ishlay boshlaydi. Ish jarayonida  $k$  koeffitsient faol hududning yadro bo'laklarining ko'payib borishi sababli kamaya boradi. Koeffitsiyentning kamayib borishini sterjenlarni siljitib turish bilan muvozanatlashtiriladi. Reaksiya intensivligining birdan oshib ketishi holi sodir bo'lib qolmasligi uchun qo'shimcha avariya sterjenlari bo'lib, ular reaksiyani shu onda to'xtatishga imkon beradi. Bunday sterjenlar kadmiy, bor karbidi va boshqa moddalardan tayyorlanadi. Neytronlarning yutilishi asosan kadmiyning  $^{113}\text{Cd}$  va borning  $^{10}\text{B}$  izotoplarida sodir bo'ladi. Ularda issiq neytronlar yutilishining kesimi, mos holda,  $2 \cdot 10^4$  va  $4 \cdot 10^3$  barnni

tashkil etadi. Tez neytronlar sterjenlarda sust yutiladi. Shuning uchun kichik o'lchamdagi tez neytronlarda ishlovchi reaktorlarni boshqarib turish uchun qaytaruvchilarni faol hududdan uzoqlashtirib va yaqinlashtirib turiladi.

Reaktorning faol hududidan sanitariya normalari ruxsat etganga qaraganda  $10^{11}$  marta katta nurlanishdagi neytronlar oqimi chiqadi.  $\beta$  - yemirilish tufayli paydo bo'lgan  $\gamma$  -nurlar intensivligi ham shu darajada. Himoya qobig'i ikkala oqimni ham etarli darajada zaiflashtirishi lozim. Neytronlardan himoyalaniish uchun ularni effektiv sekinlashtiruvchi materiallardan foydalanish lozim. Bunda sekinlashtiruvchi sifatida himoya moddasida yengil elementlardan hamda neytronlarning intensiv noelastik sochilishi kechadigan moddalar (temir, qo'rg'oshin va b.q.) dan foydalaniladi.  $\gamma$  -nurlardan himoyalaniish uchun tartib raqami Z katta bo'lgan elementlardan foydalaniladi. Chunki  $\gamma$  -nurlarning moddalar bilan ta'sirlashuv kesimi element tartib raqamining 5-darajasiga mutanosib. 1-jadvalda reaktorlar himoya qobig'i uchun tanlangan asosiy elementlarning neytronlar bilan ta'sirlashuv makroskopik kesimlari keltirilgan.

1-jadval.

| Material         | Zichlik, g/sm <sup>3</sup> | Yutilishning makroskopik kesimi $\sigma$ , barn. |                               |
|------------------|----------------------------|--------------------------------------------------|-------------------------------|
|                  |                            | Issiq neytronlar                                 | Bo'linish spektri neytronlari |
| Alyuminiy        | 2,7                        | 1,3                                              | $2,5 \cdot 10^{-3}$           |
| Magniy           | 1,74                       | 0,14                                             | $3 \cdot 10^{-3}$             |
| Sirkoniya        | 6,4                        | 0,76                                             | $4 \cdot 10^{-2}$             |
| Zanglamas po'lat | 8,0                        | 24,7                                             | $1 \cdot 10^{-1}$             |

Reaktor himoyasini qurishda yadroda sodir bo'luvchi (n, $\gamma$ ) reaksiyalarda katta energiyali  $\gamma$  - kvantlar chiqishi mumkinligini hisobga olish lozim. Shuning uchun neytronlardan va  $\gamma$  -kvantlardan eng yaxshi va arzon himoya temir aralashtirilgan beton hisoblanadi. Reaktor qurilish materiallariga radiatsiyaga mustahkam, neytronlar ta'siriga qaramasdan o'zining fizik va kimyoviy xususiyatlarini uzoq saqlab qoluvchi materiallar tanlab olinishi zarur. Reaktor materiallari uchun zanglash va mexanik mustahkamlikning pasayib ketishi juda xavflidir. Masalan, issiqlik ajralib chiquvchi va issiqlik tashuvchi moddalar qobig'ining zanglashi germetiklikning buzilishiga va natijada halokatga olib kelishi mumkin. Shuning uchun reaktor qurilish materiallarini tanlashda, fizikaviy va kimyoviy xossalari talablarga mos keluvchi, alyuminiy, uning magniy va berilliy bilan qotishmasi, zanglamaydigan po'lat, grafit, niobiy, molibden, nikel qoplamlaridan foydalanish maqsadga muvofiq bo'ladi.

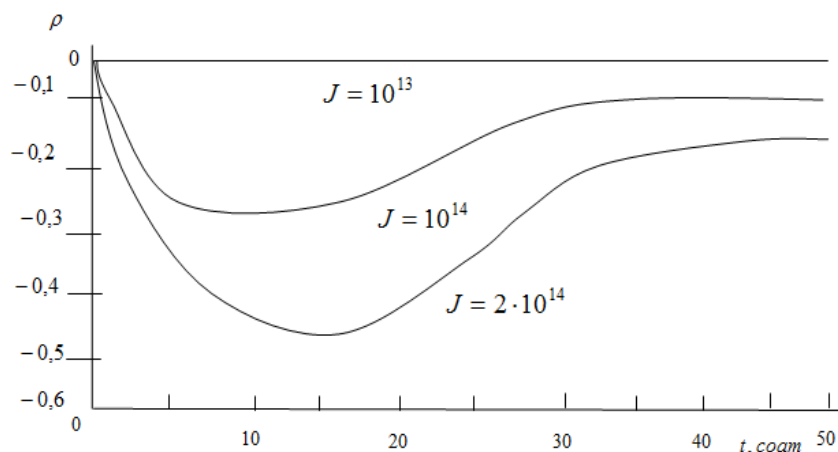
Ishchi reaktorning holati koeffitsiyent bilan aniqlanishini yuqorida aytgan edik. Reaktorning ish faoliyatini baholash uchun aksariyat hollarda reaktivlik deb ataluvchi  $\rho$  kattalikdan foydalaniladi va u neytronlarning ko'payish koeffitsiyenti k bilan quyidagicha bog'lanishga ega:

$$\rho = (k-1)/k$$

bundan ko'rinadiki  $\rho < 0$  bo'lganda reaksiya to'xtaydi,  $\rho = 0$  bo'lganda reaksiya turg'un tarzda davom etadi va  $\rho > 0$  bo'lganda reaksiya intensivligi oshib ketadi. Reaktorning turg'un ish faoliyati davomida faol hududda bo'linish fragmentlari ko'payib borishi sababli reaktivlik pasayib boradi. Bo'linish fragmentlaridan neytronlarni kuchli yutuvchi  $^{135}\text{Xe}$  hamda  $^{149}\text{Sm}$  izotoplari zararlidir. Shu sababli, reaktorning yoqilg'ini almashtirmasdan uzoq vaqt uzluksiz ishlashi uchun, har bir reaktor zahira reaktivlikka ega bo'lishi lozim. Zahira reaktivlik deganda boshqaruvchi sterjenlar to'la chiqarib tashlangan holatdagi reaktivlik tushiniladi.

Reaktorning normal ishlashi uchun uning reaktivligi qiymatini, reaktor turidan bog'liq holda,  $10^{-7}$  -  $10^{-5}$  aniqlik darajasida ushlab turish kerak. Bunda reaktivlik reaktor quvvatidan, ya'ni zanjir reaksiya kechishining intensivligidan bog'liq ekanligini e'tiborga olish lozim. Intensivlikning reaktivlikdan bog'liqligi sababli bu bog'lanish teskari xarakteriga ega. Bu teskari bog'lanish ko'pgina sabablar orqali aniqlanadi va manfiy ham, musbat ham bo'lishi mumkin. Reaktordan foydalanish uchun teskari bog'liqlikning manfiy bo'lgani qulay. Bunda reaktor quvvatining tasodifan oshib ketishi reaktivlikni kamaytiradi va quvvatning turg'un holatga qaytishini ta'minlaydi. Musbat teskari bog'lanishda esa reaktorning birlamchi va keyingi ishlash quvvatlarini muntazam (vaqt bo'yicha uzluksiz) kuzatib turish kerak bo'ladi.

Katta oqimdagi issiqlik neytronlariga ega bo'luvchi reaktorlarda (bir sekundda  $10^{13}/\text{sm}^2$ ) reaktor to'xtatilgandan so'ng sezilarli darajada tushib ketadi va bir necha o'n soatlardan keyingina o'z holiga qaytadi. Rasmda reaktor to'xtatilganidan so'ng issiq neytronlarining bir necha oqimlari uchun reaktivlikning vaqtdan bog'liqligi ko'rsatilgan. Bu hodisa «yod o'rasi» deyiladi. Yod o'rasi mexanizmi quyidagicha:  $^{235}\text{U}$  yoki  $^{239}\text{Pu}$  sekin neytronlar ta'sirida parchalanganda 6% ehtimoliyat bilan  $^{135}\text{Te}$  (tellur) fragmenti hosil bo'ladi va u yarim minutdan so'ng  $\beta$ -yemirilish orqali  $^{135}\text{I}$  (iod) izotopiga aylanadi. Bu izotop ham  $\beta$ -radioaktivlikka ega, lekin uning yarim yemirilish davri 6,7 soat.



1-rasm. Neytronlar oqimi  $J$  uchun reaktor reaktivligi  $\rho$  ning vaqtdan bog'liqligi.

$^{135}\text{I}$  izotopi  $\beta$ -yemirilishining mahsuloti esa issiq neytronlarni kuchli yutuvchi ksenon-135 izotopi bo'ladi. Ksenon -  $^{135}\text{Xe}$  izotopi ham o'z navbatida 9,2 soat davrlari  $\beta$ -yemirilish berib, seziyning deyarli turg'un bo'lgan  $^{135}\text{Cs}$  izotopiga aylanadi.  $^{135}\text{Cs}$  izotopining yarim yemirilish davri ikki million yil. Va nihoyat, doimiy quvvatda ishlovchi reaktorda  $^{135}\text{Xe}$  yadrolari konsentratsiyasining aniq bir muvozanati qaror topadi. Yutilishning intensivligi neytronlar oqimiga mutanosibdir. Reaktor to'xtatilganda yutilish ham to'xtaydi, ammo reaktorda to'plangan  $^{135}\text{I}$  yemirilishda davom etadi va natijada  $^{135}\text{Xe}$  izotopining miqdori iodning sezilarli qismi yemirilmaguncha ortib boraveradi. Bu esa reaktor reaktivligining vaqtinchalik pasayishiga olib keladi. Reaktivlikning chegaralangan zahirasida yod o'rasi tufayli reaktorni, u to'xtatildandan so'ng, tezda ishga tushirib bo'lmaydi.

Reaktorlar, ulardan ko'zlangan maqsadga qarab, quyidagi turlarga bo'linadi:

**Energetik reaktorlar.** Bu turdagi reaktorlardan elektr toki va issiqlik energiyasi olish hamda dengiz suvini chuchuk (ichimlik) suvga aylantirishda foydalaniladi. Bunday reaktorlar AESlarda ishlatiladi.

**Transport reaktorlari.** Bu turdagi reaktorlar transport vositalarini energiya bilan ta'minlash uchun mo'ljallangan. Ulardan suv usti va suv osti kemalarida hamda kosmik texnikada foydalaniladi.

**Tajriba reaktorlari.** Bu reaktorlar kam quvvatli bo'lib, ulardan yangi yadro reaktorlarini loyihalashtirish va ularni ishga tushirishda zarur bo'lgan ko'pgina fizik kattaliklarni o'rganish uchun ishlatiladi.

**Tadqiqot reaktorlari.** Bu reaktorlardan faol hududida hosil qilingan neytronlar va gamma-kvantlar oqimi yadro fizikasi, qattiq jismlar fizikasi, radiatsion kimyo, biologiya sohalarida, intensiv neytronlar oqimida ishlatiluvchi materiallarni sinovdan o'tkazishda, radioaktiv izotoplar ishlab chiqarishda foydalaniladi. Tadqiqot reaktorlarining quvvati 100 MVt dan oshmaydi.

**Sanoat reaktorlari.** Bu reaktorlar ko'p sohalar kabi ishlatiluvchi izotoplarni, yadroviy qurollarni, sho'r suvni ichimlik suviga aylantirish maqsadlarda ishlatiladi.

Har bir real reaktor yonilg'i turi, sekinlashtiruvchi, faol hududning tuzilishi (gomogen yoki geterogen), issiqlik tashuvchi, uzluksizligi yoki impulsli, qurilish konstruksiyasi bilan xarakterlanadi. Shuning uchun hozirgi paytda reaktorlarning juda ko'p turi mavjud.

**Xulosa.** Energetik reaktorlarning hozirgi paytdagi asosiy turlari suv-suv, gaz-grafit, suv-grafitli (bunda birinchisi issiqlik tashuvchi, ikkinchisi – neytronlarni sekinlashtiruvchi) reaktorlar hisoblanadi va atrof-muhit ekologiyasi uchun xavfsizligi boshqa energiya manbalariga nisbatan juda katta va iqtisodiy samaradorligi ham yuqori. Kelajakda yadro reaktorlari insoniyat uchun asosiy energiya ta'minotchisi bo'lib qoladi.

#### Adabiyotlar

1. Грешилов А. А., Егупов Н. Д., Матущенко А. М. Ядерный щит. – М.: Логос, 2008.
2. Круглов А. К. Как создавалась атомная промышленность в СССР. – М.: ЦНИИатоминформ, 1995.
3. Дементьев Б. А. Ядерные энергетические реакторы. – М.: Энергоатомиздат, 1990.
4. Алхутов М. С. Основы теории и методы расчёта ядерных энергетических реакторов / Под ред. Г. А. Батя. – М.: Энергоиздат, 1982. – С. 31. – 511 с.
5. Angelo, Joseph A. Nuclear technology. — USA: Greenwood Press, 2004. — P. 275—276. — 647 p. — (Sourcebooks in modern technology).

6. Андрушечко С. А., Афоров А. М., Васильев Б. Ю., Генералов В. Н., Косоуров К. Б., Семченков Ю. М., Украинцев В. Ф. АЭС с реактором типа ВВЭР-1000. От физических основ эксплуатации до эволюции проекта. – М.: Логос, 2010.
7. Кириллов П. Л., Богословская Г. П. Тепло-массообмен в ядерных энергетических установках. – М.: Энергоатомиздат, 2000.
8. Овчинников Ф. Я., Семёнов В. В. Эксплуатационные режимы водо-водяных энергетических реакторов. – 3 изд., пер. и доп. – М.: Энергоатомиздат, 1988. – 359 с. – 3400 экз. .
9. Сидоренко В. А. Вопросы безопасной работы реакторов ВВЭР. – М.: Атомиздат, 1977.

UDK: 523.84

## ПРИЧИНА СМЕНЫ ВРЕМЕН ГОДА А ТАКЖЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ ТЕПЛОВЫХ И ХОЛОДНЫХ ПОЯСОВ НА ЗЕМЛЕ

Б.Жураев<sup>1</sup>, Р.Турниязов<sup>1</sup>, А.Ажабов<sup>2</sup>, Н.Одилова<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Самаркандский государственный университет

<sup>2</sup>Каршинский государственный университет  
jimtoga@mail.ru

**Аннотация.** В работе приведены причины смены времен года на Земле а также общая картина изменения суточного пути Солнца на протяжении года. Приведены данные об изменении условий освещения и обогрева Земли на разных географических широтах.

**Ключевые слова:** времена года, теплый пояс, холодный пояс, Солнце, небесная сфера, географическая широта.

### Yil fasllari almashishining, Yerda issiq va sovuq mintaqalar mavjudligining sabablari

**Annotatsiya.** Ushbu maqolada Yer sayyorasida yil fasllari almashinuvi hamda Quyoshning yil davomidagi sutkalik harakati o'zgarishlarining umumiy sabablari keltirilgan. Turli jug'rofiy kengliklarda Quyoshning isitish va yoritish sharoitlari o'zgarib turishi haqidagi ma'lumotlar yoritilgan.

**Kalit so'zlar:** fasllar, issiq mintaq, sovuq mintaq, Quyosh, osmon sferasi, geografik kenglik.

### The reason for the change of seasons and the existence of thermal and cold zones on the earth

**Abstract.** In the article the reasons of year on the Earth as well as general depicts of daily changing direction of the Sun during a year are given. The facts given about changing the conditions of heating and lightening the Earth from different geographical latitudes are also considered.

**Keywords:** seasons, thermal zones, cold zones, The Sun, celestial sphere, latitude.

Как известно, регулярная смена времен года на Земле является следствием трех причин: годового обращения Земли вокруг Солнца, наклона земной оси к плоскости земной орбиты (к плоскости эклиптики) и сохранения земной осью своего направления в пространстве на протяжении длительных промежутков времени. Благодаря совместному действию трех указанных причин происходит видимое годовое движение Солнца по эклиптике, наклоненной к небесному экватору, и поэтому положение суточного пути Солнца над горизонтом в различных местах земной поверхности на протяжении года изменяется условия их освещения и обогрева Солнцем.

Изменение суточного пути Солнца в течение года на разных географических широтах хорошо прослеживается на модели небесной сферы. Прежде всего следует твердо усвоить, что соседние точки эклиптики лежат на разных небесных параллелях, и поэтому имеют различное склонение, а каждая пересекающая эклиптику небесная параллель проходит через две точки эклиптики с одинаковым склонением, равным склонению данной небесной параллели. Все без исключения точки эклиптики участвуют в суточном вращении небесной сферы, двигаясь по соответствующим небесным параллелям, и дважды в сутки пересекают небесный меридиан (верхняя и нижняя кульминации). Высота разных точек эклиптики в верхней и нижней кульминации различна, зависит от их склонения и определяется по тем же формулам, по которым вычисляется высота кульминирующих небесных светил.

В процессе суточного вращения небесной сферы положение эклиптики относительно истинного горизонта непрерывно изменяется, причем самое высокое и низкое положение эклиптики занимает в моменты восхода и захода ее равноденственных точек. Полосы эклиптики отстоят от

соответствующих полюсов мира на угловом расстоянии  $\varepsilon$  и в течение суток движутся по небесным параллелям со склонением:

$$\delta = \pm(90^\circ - \varepsilon). \quad (1)$$

Вследствие годового движения Солнца по эклиптике его склонение непрерывно меняется, т.е. строго говоря, Солнце непрерывно переходит с одной небесной параллели на другую. Для уяснения же общей картины изменения суточного пути Солнца на протяжении года в первом приближении можно полагать, что Солнце в каждый день года находится на определенной небесной параллели, склонение которой равняется склонению Солнца в данный день. Поэтому в суточном вращении небесной сферы Солнце движется по этой небесной параллели, восходя и заходя в точках ее пересечения с истинным горизонтом и кульминируя в точках ее пересечения с небесным меридианом. Угол наклона плоскостей небесных параллелей к плоскости истинного горизонта зависит от географической широты места, и поэтому на разных географических широтах азимуты точек пересечения одних и тех же небесных параллелей с истинным горизонтом и высота точек их пересечения с небесным меридианом имеют различные значения. Этим и объясняются различные пределы годичного изменения азимутов точек восхода и захода Солнца, его полуденной высоты и продолжительности дня и ночи на разных географических широтах, что ведет к неодинаковому обогреванию мест земной поверхности с разной географической широтой и является причиной смены времен года и существования тепловых поясов на Земле.

Устанавливая модель небесной сферы на различную географическую широту, перемещая, каждый раз насадку Солнца по эклиптике модели против часовой стрелке и вращая модель вокруг ее оси по часовой стрелке, можно изучить положение суточного пути Солнца на небе в разные дни года и составить правильное представление об изменении этого пути на протяжении года в местах земной поверхности с различной географической широтой.

Неодинаковое обогревание Солнцем областей земной поверхности с различной географической широтой  $\varphi$  (или тех же областей в разные времена года) легко выясняется простым подсчетом. Обозначим через  $E_0$  количество тепла, передаваемого единице площади земной поверхности отвесно падающими солнечными лучами (Солнце в зените). Тогда при другом зенитном расстоянии Солнца  $z$  та же единица площади получит количество тепла:

$$E = E_0 \cdot \cos z \quad (2)$$

Подставляя в формулу (2) значения  $z$  Солнца в истинный полдень разных дней года и деля полученные равенства друг на друга, найдем отношение количества тепла, получаемого от Солнца в полдень в эти дни года.

*Моменты времени восхода и захода Солнца на разных географических широтах в различные дни года приведены в соответствующих таблицах астрономических календарей.*

Причины смены времен года и существования тепловых поясов на Земле особенно наглядно уясняются при одновременном использовании модели небесной сферы и теллурия, который состоит из небольшого глобуса, обращающегося на рейке вокруг электрической лампочки, изображающей Солнце. Пользоваться теллурием лучше всего в затемненном помещении, чтобы на глобусе четко была видна граница света и тени, отделяющая дневное (освещенное) полушарие Земли от ночного (неосвещенного) полушария и называемая терминатором. Вследствие большого удаления Земли от Солнца ( $149,6 \cdot 10^6$  км) можно считать плоскость терминатора перпендикулярной к солнечным лучам, которые падают на Землю параллельным пучком. В светлом помещении терминатор на глобусе виден нечетко и, чтобы судить о его положении, на глобус надевается терминаторное кольцо, плоскость которого при обращении глобуса поворачивается и всегда перпендикулярна к направлению на лампочку. В этом случае направление солнечных лучей показывается указателем, который имеет возможность перемещаться по вертикальной стойке и демонстрировать падение солнечных лучей на различные области земного шара, от его полюсов до экватора.

На теллурии можно проследить за изменением наклона солнечных лучей и продолжительностью дня и ночи на протяжении года в разных местах земной поверхности, уяснить причину равенства продолжительности дня и ночи на всей Земле в дни равноденствий, проследить за изменением размеров областей полярного дня и полярной ночи вблизи географических полюсов Земли, выяснить причины существования тепловых поясов и приблизительное расположение их границ на земной поверхности. Точное положение границ тепловых поясов вычисляется по астрономическим признакам, из условий суточного пути Солнца над горизонтом. Так как склонение Солнца  $\delta_\odot$  на протяжении года изменяется в строго определенных пределах, то Солнце может



кульминировать в зените не на всех географических широтах, а только в определенном поясе земной поверхности, называемом жарким поясом, границами которого являются тропики – северный (в северном полушарии Земли) и южный (в южном полушарии Земли).

Географическая широта тропиков вычисляется из условия прохождения Солнца через зенит, а суточный путь Солнца на тропиках в разные времена года уясняется на модели небесной сферы (рис. 1) ☉ - положение точки летнего солнцестояния в момент ее верхней кульминации, ♄ - положение точки зимнего солнцестояния в момент ее нижней кульминации, ● – Солнце в день летнего солнцестояния, ⊗ - Солнце в дни равноденствий, ○ – Солнце в день зимнего солнцестояния).

Холодными поясами земной поверхности называются прилегающие к географическим полюсам области, в местах которых Солнце в определенные дни года является незаходящим и невосходящим светилом, т.е. такие области, в пределах которых существуют полярные ночи. Продолжительность полярных дней и полярных ночей в разных местах холодных поясов различна и зависит от их географической широты. Теоретические границы холодных поясов называются полярными кругами, географическая широта которых вычисляется из условия незаходящих и невосходящих светил при наибольшем и наименьшем значении склонения Солнца. Суточный путь Солнца на полярных кругах также может быть изучен на модели небесной сферы (рис. 2) ☉ - положение точки летнего солнцестояния в момент ее нижней кульминации, ♄ - положение точки зимнего солнцестояния в момент ее верхней кульминации, ● – Солнце в день летнего солнцестояния, ⊗ - Солнце в дни равноденствий, ○ – Солнце в день зимнего солнцестояния).

Действительные границы полярного дня и полярной ночи не совпадают с полярными кругами. Это совпадение имело бы только в случае отсутствия у Солнца видимого диска (точечный вид Солнца) и отсутствия преломления и рассеяния света в земной атмосфере (рефракция, сумерки). В действительности же верхний край солнечного диска появляется над горизонтом раньше его центра, для которого даются координаты Солнца, и, кроме того, преломление света в земной атмосфере (рефракция) приподнимает видимое положение Солнца над горизонтом, а рассеяние света в земной атмосфере вызывает сумерки, т.е. наступление рассвета до восхода Солнца и наступление темного времени суток спустя некоторое время после его захода. В результате граница полярного дня смещается примерно на  $2^\circ$  в сторону экватора, а граница полярной ночи – на  $2^\circ$  в сторону географических полюсов Земли.

Аналогичным образом, исходя из условий незаходящих светил, можно вычислить значения склонения Солнца  $\delta_\odot$  - при которых оно становится незаходящим или невосходящим на заданной географической широте  $\varphi$ , найти по солнечной эфемериде Астрономического календаря-ежегодника по две даты  $p_1$  и  $p_2$ , соответствующие каждому вычисленному значению склонения  $\delta_\odot$ , и по ним определить теоретическую продолжительность полярного дня  $T_d$  и полярной ночи  $T_n$  на данной географической широте.

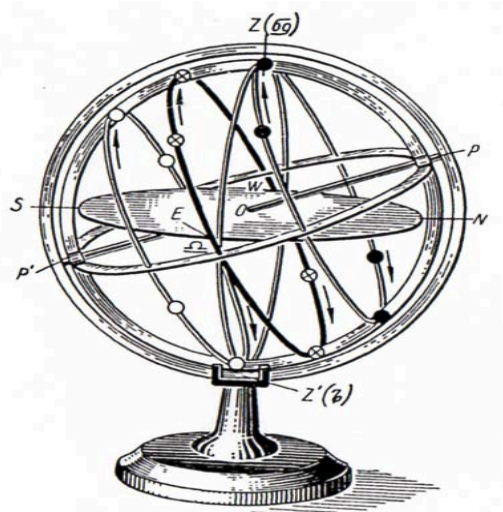


Рис. 1

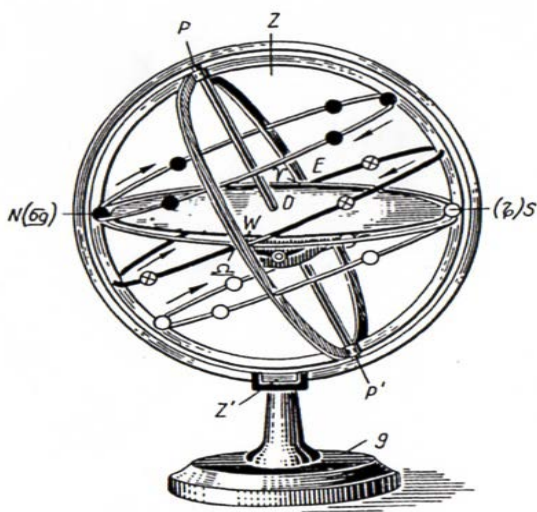


Рис. 2



Зная причины смены времен года и принципы проведения границ тепловых поясов на Земле, можно решить те же вопросы и для других планет. В этом случае термин “географическая широта” заменяется термином “планетографическая широта”.

#### Литература

1. Астрономический календарь – постоянная часть.
2. Астрономический календарь – ежегодник.
3. Куликовский П.Г. Справочник любителя астрономии. – М.: Изд. “Наука”, 1971.
4. Бакулин П.И., Канонович Э.В., Мороз В.И. Курс общей астрономии. – М.: Изд. “Наука”, 1977.
5. Mamadazimov M. Astronomiya. –Т.: “O‘qituvchi” NMIU, 2008.

УДК: 543.42:544.8:620.181

### ВЫСОКОЧУСТВИТЕЛЬНАЯ ЛАЗЕРНАЯ СПЕКТРОСКОПИЯ УЛЬТРАМАЛЫХ КОНЦЕНТРАЦИЙ АТОМОВ И АЭРОЗОЛЕЙ В РАЗЛИЧНЫХ ФАЗОВЫХ СОСТОЯНИЯХ ВЕЩЕСТВА

А.Т.Халманов

*Самаркандский архитектурно-строительный институт  
xolmonov@rambler.ru, a-xalmanov@mail.ru*

**Аннотация.** В данной статье приведены результаты исследования динамики и типов физических процессов с возбужденными атомами и молекулами в атомизаторе «Графитовая печь». Показан физический механизм увеличения атомно-ионизационного сигнала для двухступенчатой схемы возбуждения. Показано, что максимальный сигнал наблюдается для атомов In при переходе  $5p^2P_{3/2} \rightarrow 6s^2S_{3/2} \rightarrow 8p^2P_{1/2}$  и для атомов Li, Na, Ag, Au, Pt при переходе  $(n)s \rightarrow (m)p \rightarrow (k)d$  соответственно (где n, k, m и f главные квантовые числа уровней). В результате эксперимента разработаны фотоионизационный и столкновительный механизмы ионизации. Полученные результаты показывают, что столкновительный механизм ионизации является доминирующим процессом. В работе использованы различные атомизаторы типа «пламя», «стержень-пламя» и «лазерная атомизация». Впервые выявлены новые параметры аэрозолей по физико-химическим свойствам аэрозольных факелов от твердых поверхностей и аэрозолей соли металлом и органических аэрозолей.

**Ключевые слова:** атом, ионизационный сигнал, прозрачные аэрозоли, время затухания, оптический резонатор

### Моддаларнинг турли фазовий ҳолатларида ультра кичик концентрацияли атомлар ва аэрозолларнинг ўта сезгир лазер спектроскопияси

**Annotatsiya.** Ушбу ишда уйғонган атом ва молекулалар билан физикавий жараёнлар турлари ва динамикасини ўрганиш “Графитли-печь” атомизаторида келтирилган. Икки босқичли уйғотиш схемалари учун атом –ионизацион сигналнинг ошиш физикавий механизми кўрсатилган.  $(n)s \rightarrow (m)p \rightarrow (k)d$  ўтишда Li, Na, Ag, Au, Pt атомлар учун,  $5p^2P_{3/2} \rightarrow 6s^2S_{3/2} \rightarrow 8p^2P_{1/2}$  ўтишда In атоми учун максимал сигналлар кўзатилиши мос равишда кўрсатиб ўтилган (бу ерда n, k, m ва f – сатҳларнинг бош квант сонлари). Тадқиқот натижасида ионизациянинг тўқнашув ва фотоионизацион механизмлари ишлаб чиқилган. Олинган натижалар шуни кўрсатадики, ионизациянинг тўқнашув механизми доминант (асосий) жараён ҳисобланади. Мақолада турли хил яъни «аланга», «стержень-аланга» ва «лазерли атомизатор» каби атомизаторлар атом ва аэрозоль заррачалари учун қўлланилган. Илк бор органик аэрозоллар, металл тузлари аэрозоллари ва металл юзасидаги аэрозоль факелларнинг физик-химёвий хусусиятлари бўйича аэрозолларни қайд қилишнинг янги параметрлари ишлаб чиқилган.

**Калит сўзлар:** атом, ионизацион сигнал, шафоф аэрозоллар, сўниш вақти, оптик резонатор

**High-sensitivity laser spectroscopy of ultra small concentration of atoms and aerosols in various phase states of substance**

**Abstract.** In this work it is given studying of dynamics and types of physical processes with excited atoms and molecules in atomizer of "graphite furnace". Physical mechanism of increasing atomic-ionization signal for two stepwise excitation schemes was shown.

It is shown that the maximum signal is observed for In atoms at the transition  $5p^2P_{3/2} \rightarrow 6s^2S_{3/2} \rightarrow 8p^2P_{1/2}$  and for Li, Na, Ag, Au, Pt atoms at the transition  $(n)s \rightarrow (m)p \rightarrow (k)d$  respectively (where n, k, m and f principal quantum numbers of states). In the result in the experiment photoionization collisional ionization and mechanisms were developed. The results are shown that the collisional ionization process is the dominant mechanism. In the work were used different atomizers, as «flame», «rod-flame» and «laser atomizer». For the first time new parameters of aerosols on physical and chemical properties of aerosol plumes from solid surfaces and aerosols of salt of metals and organic aerosols are revealed.

**Keywords:** atom, ionization signal, non-absorbing aerosols, ringdown time, optical resonator.

**Введение.** В современном мире разработка новых аналитических методов определения ультранизких содержаний элементов в различных веществах играет важную роль для многих направлений современной науки и техники. В этом аспекте для решения большого числа задач на современных достижениях необходим контроль содержания определенных элементов в веществе на уровне  $10^{-8}$ – $10^{-11}\%$ .

В настоящее время исследования высоковозбужденных состояний многоэлектронных атомов и оптических свойств различных аэрозолей дают возможность разработки универсального лазерного фотоионизационного спектрометра. В этом отношении актуальность и востребованность темы данной работы определяется целенаправленными научными исследованиями, а именно: разработка новых фотоионизационных и столкновительных схем возбуждения известных состояний исследуемых атомов; проведение теоретических расчетов и получение экспериментальных спектров для тяжёлых атомов; выявление эффективной динамики и типов физических процессов возбужденных атомов и молекул; изучение кинетики сигналов в зависимости от технических характеристик экспериментальной установки и параметров атомов и молекул; установление новых закономерностей морфологических и оптических свойств аэрозольных частиц, не имеющих квантовых состояний; определение ультрамалых концентраций атомов и аэрозолей имеет важное значение. Среди них наиболее перспективным и разработанным для практических применений являются лазерная резонансно-ионизационная спектроскопия (ЛРИС) в вакууме, атомно-ионизационная спектроскопия (АИС) в пламени и внутрирезонаторная лазерно-абсорбционная спектроскопия (ВРЛАС). Ведущие ученые мировых научно-исследовательских центров и университетов, в частности Национальное бюро стандартов, Университет штата Флорида (США), Московский государственный университет, Институт геохимии и аналитической химии имени В.И.Вернадского РАН, Институт Спектроскопии РАН (Россия), Technion-Israel Institute of Technology (Израиль), Advanced Photonics Research Institute, APRI (Южная Корея) и Чалмерский технологический университет (Швеция), Самаркандский государственный университет и Самаркандский архитектурно-строительный институт (Узбекистан) проводят исследования природы процессов возбуждения и ионизации атомов методом резонансной лазерной спектроскопии и взаимодействия перестраиваемых лазерных излучений с частицами аэрозоля внутри резонатора. Методы ЛРИС и АИС отличаются высокой чувствительностью в связи с эффективным подавлением потерь, связанных с влиянием рассеяния лазерного излучения и излучением атомизатора [1-16].

Для многих элементов уже реализованы одноступенчатые, двухступенчатые и трехступенчатые схемы возбуждения через S и P состояния атомов. Для многих атомов спектроскопические данные о ридберговских состояниях ( $n \geq 4$ ) лежащих в области 0,9–1,5 эВ ниже границы ионизации плохо изучены или в литературе отсутствуют. Фотоионизационные и столкновительные схемы возбуждения исследуемых атомов с высокими потенциалами ионизации в различных атомизаторах мало изучены. Большой фундаментальный и практический интерес представляют для многих элементов реализовать двухступенчатые и трехступенчатые схемы возбуждения через  $s \rightarrow p \rightarrow d$  состояния. Это исследование приведет к увеличению ионного сигнала в определенных ридберговских состояниях ( $E_n$ ) и главных квантовых числах (n) которые расположены ниже границе ионизации.

Исследование ридберговских состояний атомов в вакууме. Атомизация пробы в графитовом электротермическом атомизаторе. При таком способе испаряемые при высокой температуре атомы и молекулы пробы формируются в узкий направленный пучок

и попадают в облучаемую зону, где происходит их селективная ионизация. Результаты исследования методом РИС приведены в таблице 1.1.

Таблица 1.1.

Результаты исследования методом РИС

| Атом | Граница Ионизации<br>$E_i$ , (эВ) | Длина волны возбуждения<br>(нм) |             |             | Интервал<br>главного<br>квантового<br>числа, n | Спектр-е<br>параметры<br>$\Delta, \sigma(\text{см}^2)$ ,<br>$E_i(\text{см}^{-1})$ , | Система<br>лазеров |
|------|-----------------------------------|---------------------------------|-------------|-------------|------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------|
|      |                                   | $\lambda_1$                     | $\lambda_2$ | $\lambda_3$ |                                                |                                                                                     |                    |
| Na   | 5,14                              | 589,6                           | 414÷421     |             | 13÷18                                          | $\sigma=0,7 \cdot 10^{-14}$                                                         | $N_2$ -лазер       |
| In   | 5,78                              | 410,2                           | 448÷480     |             | 17÷53                                          | $\Delta=2,417$<br>$E_i=46671$                                                       | $N_2$ -лазер       |
| Al   | 5,98                              | 396,1                           | 450÷515     |             | 15÷30                                          | $\Delta=1,34$                                                                       | $N_2$ -лазер       |
|      |                                   | 396,1                           | 430÷510     |             | 7÷50                                           | $E_i=48278,2$                                                                       | $N_2$ -лазер       |
|      |                                   | 308,2                           | 630÷670     |             | 11÷55                                          | $E_i=48278,4$                                                                       | $N_2$ -лазер       |
|      |                                   | 309,2                           | 630÷670     |             | 11÷55                                          | $E_i=48278,4$                                                                       | $N_2$ -лазер       |
| Ga   | 5,99                              | 417,2                           | 420÷440     |             | 14÷70                                          | $\Delta=2,15$                                                                       | $N_2$ -лазер       |
|      |                                   | 403,3                           | 424÷440     |             | 12÷28                                          | $\sigma=3 \cdot 10^{-17}$                                                           | $N_2$ -лазер       |
| Ca   | 6,11                              | 414                             | 406÷414     | ДФВ         | 13÷45                                          | $E_i=49306$                                                                         | $N_2$ -лазер       |
| Tl   | 6,11                              | 377,5                           | 440÷465     |             | 7÷40                                           | $E_i=49266,7$                                                                       | $N_2$ -лазер       |
| Cd   | 8,99                              | 326,1                           | 479,9       | 490÷475     | 17÷50                                          | $\Delta=3,1$<br>$E_i=72570,3$                                                       | $N_2$ -лазер       |
| Zn   | 9,39                              | 307,5                           | 472,2       | 490÷475     | 17÷60                                          | $\Delta=2,2$<br>$E_i=75766,9$                                                       | $N_2$ -лазер       |
| Hg   | 10,4                              | 253                             | 435,8       | 470÷455     | 18÷60                                          | $\Delta=4,21$<br>$E_i=84185,1$                                                      | $N_2$ -лазер       |
| Ag   | 7,57                              | 338,3                           | 766,8       | 580÷630     | 5÷70                                           | $E_A=58504$<br>$E_A=60529$                                                          | $N_2$ -лазер       |
| Au   | 9,22                              | 267,5                           | 583,7       | 440÷520     | 16÷75                                          | $\Delta=4,02$<br>$E_i=74410,8$                                                      | $N_2$ -лазер       |
| Yb   | 6,25                              | 555,6                           | 452,8       | 410÷710     | АИ                                             |                                                                                     | $N_2$ -лазер       |
| Cd   | 8,99                              | 326,1                           | 479,9       | 475÷562     | 7÷50                                           | $\Delta=3,16$                                                                       | Nd:YAG             |
| Zn   | 9,39                              | 307,5                           | 472,2       | 493÷452     | 10÷40                                          | $\Delta=2,2$<br>$E_i=75766,9$                                                       | $N_2$ -лазер       |
| Hg   | 10,4                              | 253                             | 224÷223     | 470÷455     | 22÷52                                          | $\Delta=3,081$<br>$E_i=84184,1$                                                     | Nd:YAG             |

Настоящая работа посвящена систематическому исследованию процесса детектирования ультрамалых концентраций атомов и аэрозолей методами высокочувствительной лазерной спектроскопии. Это направление актуально при исследовании морфологических и оптических свойств аэрозолей на примере аэрозольных факелов от чистых металлов, аэрозолей соли металлов и органических красителей. Объектом исследования являются водные стандартные растворы, алюминиевые сплавы, кристаллы ( $\text{NH}_4\text{F}$ ,  $\text{NaF}$ ), полупроводниковые материалы ( $\text{GaAs}$ ,  $\text{Si}$ ) и различные аэрозоли солей металлов ( $\text{NaCl}$ ,  $\text{CsCl}$ ,  $\text{NaI}$ ,  $\text{NaF}$ ,  $\text{KCl}$ ,  $\text{AgNO}_3$ ), органических красителей (родаминовые красители), сплавы, почвы и горные породы.

Метод был применен для исследования ридберговских состояний атомов Na, In, Al, Ga, Ca, Tl, Cd, Zn, Hg, Ag, Au, [7,8].

#### Экспериментальная часть.

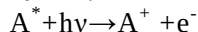
Метод основан на эффекте увеличения степени ионизации определяющих атомов при их взаимодействии с лазерным излучением. Идея метода (рис.1.) состоит в том, что полученные каким-либо образом свободные атомы определяемого элемента селективно возбуждаются в высоколежащие электронные состояния излучением одного или нескольких /ступенчатое возбуждение через промежуточные уровни/ лазеров. Возбуждённые атомы ионизируются различными способами с последующей регистрацией образующихся заряженных частиц.

Поглощение атомами или молекулами монохроматического резонансного излучения лазера приводит к заселению их возбужденных состояний:  $A+h\nu \rightarrow A^*$ .

Ионизация селективно возбужденных атомов может осуществляться несколькими путями, среди которых:

1. Ионизация импульсным электрическим полем. Поле прикладывается сразу после окончания лазерного импульса. Такой способ ионизации возможен благодаря большим временам жизни Ридберговских состояний.

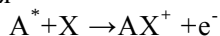
2. Фотоионизация. При этом способе ионизация происходит за счет радиационного возбуждения атомов в непрерывный спектр или дискретные автоионизационные состояния с энергией выше потенциала ионизации атома. В обоих этих случаях столкновения определяемых атомов с посторонними частицами не нужны, а при ионизации полем даже нежелательны из-за возможного увеличения скорости релаксации Ридберговских состояний. Поэтому и ионизацию атомов такими способами проводят обычно в ячейках низкого давления или в атомных пучках в вакууме, где столкновительные процессы несущественны.



3. Столкновительная ионизация. Среди различных столкновительных процессов, дающих вклад в наблюдаемый ионизационный сигнал, основную роль играет столкновительная ионизация возбужденных атомов  $A^*$  определяемого элемента с атомами и молекулами  $X$  буферного газа или матрицы [1-6]:

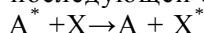


4. Ассоциативная ионизация



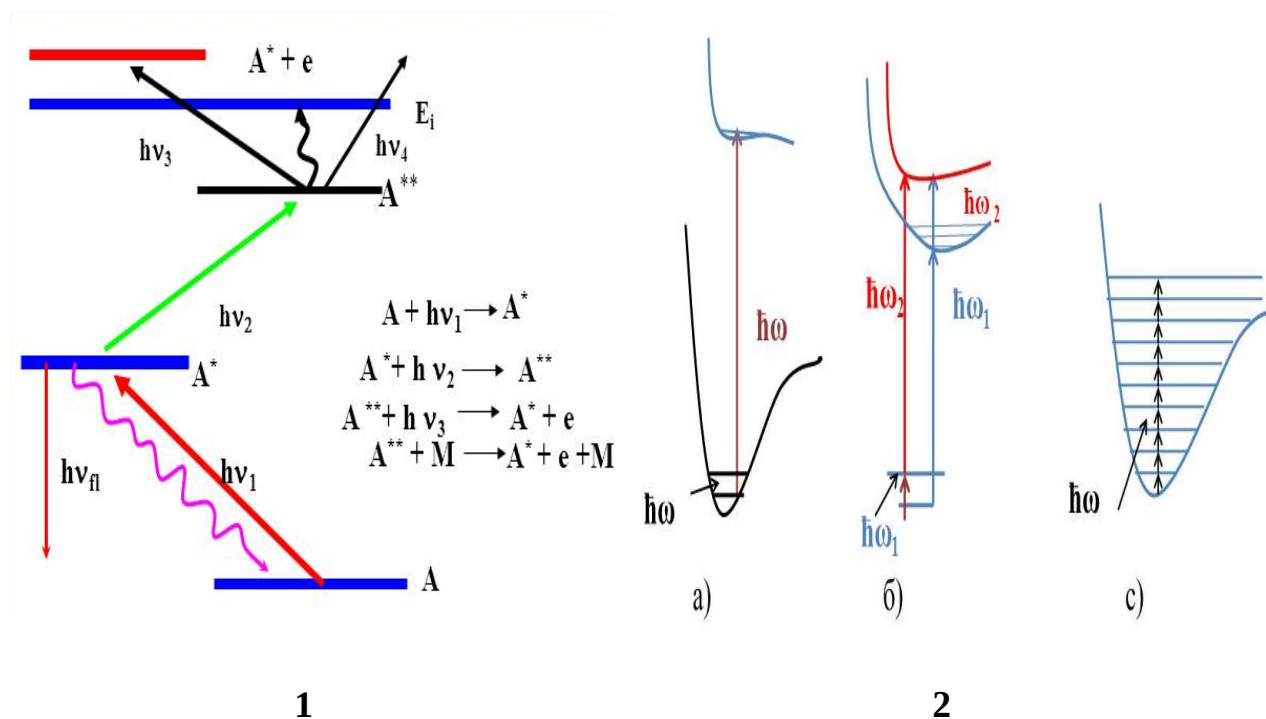
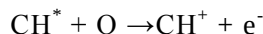
При ионизации щелочноземельных атомов существенную роль может играть процесс ассоциативной ионизации, особенно в случае одноступенчатых схем возбуждения, когда энергия возбуждения элементов невелика и процесс столкновительной ионизации идет неэффективно. Например,  $Ba + OH \rightarrow BaOH^+ + e^-$

5. Передача энергии другой частице с последующей ее ионизацией

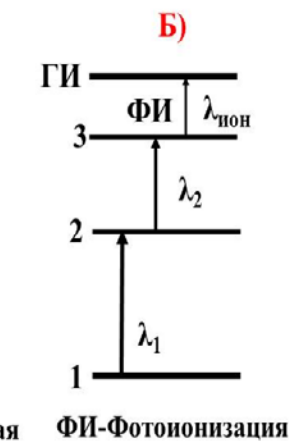
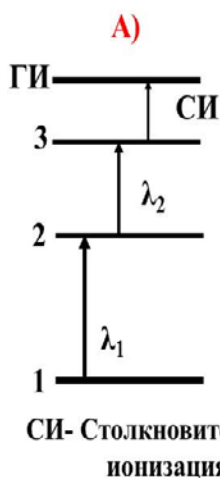


где  $X$  – любая частица в пламени.

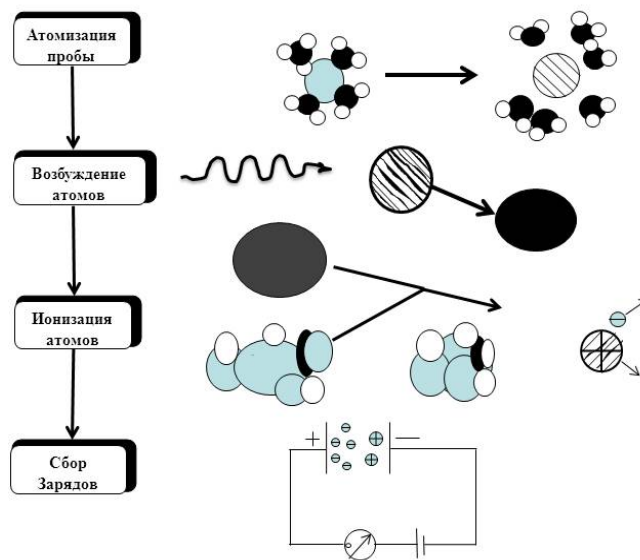
В этом случае возможны процессы ионизации за счет передачи энергии возбужденных атомов другим частицам, когда аналитические атомы прямо не участвуют в процессе возбуждения, например:



## АИС в пламени ЛРИС в вакууме



3



4

Рис.1. Идея метода резонансно-ионизационной спектроскопии (1; общая схема возбуждения атомов, 2; общая схема возбуждения молекул, а) одноступенчатое возбуждение электронного или колебательного состояния; б) двухступенчатое возбуждение электронного состояния через промежуточное колебательное или электронное состояние; в) многофотонное возбуждение колебаний инфракрасным излучением 3; виды каналов ионизации: А) столкновительная ионизация, Б) фотоионизация, 4; сбор зарядов )

Экспериментально такие исследования проводят в пламенах или разрядах при атмосферном давлении. Различные способы ионизации возбужденных лазерами атомов обусловлены обычно различными способами атомизации пробы, среди которых: термическое, лазерное, ионное или электронное-лучевое испарение в вакууме или в буферном газе, а также пламена, плазма газового разряда, ИСП, дуга, искра и другие.

Исследование ридберговских состояний атомов в вакууме. Атомизация пробы в графитовом электротермическом атомизаторе. При таком способе испаряемые при высокой температуре атомы и молекулы пробы формируются в узкий направленный пучок и попадают в облучаемую зону, где происходит их селективная ионизация. Результаты исследования методом РИС приведены в таблице 1.

Принципиальная оптическая схема экспериментальной установки для исследования локального распределения примесей щелочных металлов в алюминиевых сплавах и различных каналов ионизации атомов методами высокочувствительной лазерной спектроскопии приведена в работах [13-16]. Спектрометр работает следующим образом. Излучение двухобъемного лазера на молекуле азота ( $\lambda=337,1\text{ нм}$ ,  $\tau=8\text{ нс}$ ,  $E=10\text{ мДж}$ ) использовалось для накачки перестраиваемых лазеров на красителях. Энергия импульсов лазеров на красителях на первой и второй ступенях составляла около  $10\text{--}100\text{ МкДж}$  и ширина линии генерации –  $1\text{ см}^{-1}$ . В вакуумной камере располагались атомизатор и вторично-электронный умножитель (ВЭУ). Пересечение атомного пучка с лазерными лучами происходило в центре вакуумной камеры в области между двумя электродами, на которые подавался высоковольтный ионизирующий электрический импульс. Фотоионный сигнал после ВЭУ и предусилителя поступал на вход стробинтегратора и от него на самописец. Одновременно на пламя направлялись лазерные лучи, и осуществлялось селективное ступенчатое возбуждение. Далее возбужденные атомы ионизируются при столкновении с частицами пламени. Образовавшиеся ионы собирались в коллекторе и после усиления подавались на стробинтегратор и регистрировались цифровым вольтметром. В качестве атомизатора использовалась щелевая горелка. Спектр ионизационного сигнала, возбуждаемый импульсным источником излучения, измерялся методом стробирования импульса. Принципиальная оптическая схема экспериментальной установки приведена в работах [13-16]. Комбинированный атомно-ионизационный спектрометр, работающий в режиме «стержень-пламя» и «графитовая печь», состоит из 3-х перестраиваемых лазеров на красителях, накачиваемых эксимерным лазером на  $\text{XeCl}$  ( $\lambda=308\text{ нм}$ ,  $\tau=10\text{ нс}$ ,  $E=70\text{ мДж}$ ),

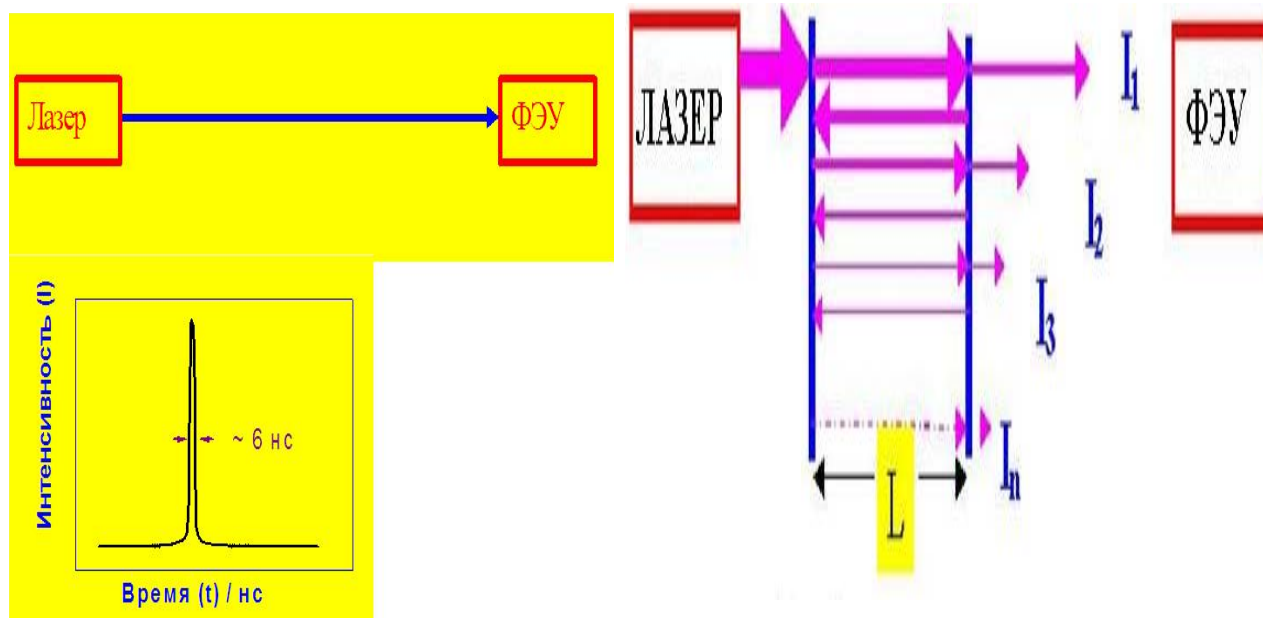
атомизатора-ионизатора «стержень-пламя» и «графитовой печи» и системы регистрации. Лазер на красителях собраны по схеме со скользящим падением луча на дифракционную решетку. Они обеспечивают энергию в импульсе до 2 мДж в видимом и до 200 мкДж в ультрафиолетовом диапазоне, ширину линии генерации  $0,2 \text{ см}^{-1}$ .

Атомизаторами служили двухщелевая горелка длиной 20 мм, стержень из пирографита длиной 28 мм, диаметром 4 мм и графитовая трубка диаметром 8 мм и длиной 28 мм, нагреваемая с помощью программируемого блока с системой стабилизации мощности, коллектор для сбора заряженных частиц. Внутри графитовой трубки расположена платформа. Исследуемый образец вводится через дозировочное отверстие в центре трубки в виде раствора или порошка массой 1-20 мг.

В конце 80-х годов американскими учеными О'Кифом и Дьяконом (O'Keefe и Deacon) был изобретен новый метод лазерной спектроскопии внутрирезонаторного затухания (ЛСВРЗ) для исследования металла кластеров, диагностики пламени и молекулы газов. Принцип работы и многократного прохода лазерного излучения внутрирезонаторной лазерной спектроскопии представлен на рисунке 2.

Принципиальная оптическая схема экспериментальной установки для измерения экстинкции света частицами аэрозоля приведена в работах [16]. В спектрометре для образования аэрозольных частиц были использованы мощное лазерное излучение и пневматические распылители. В экспериментальной установке использовали два варианта формирования лазерных импульсов испарения и накачки лазера на красителях: одним и двумя Nd: YAG лазерами. Первый вариант – Nd: YAG лазер запускается от формирователя двойных импульсов генератора DG535. Вторая установка была основана на применении двух лазеров; первой Nd: YAG лазер использован для накачки лазера на красителях; второй Nd: YAG лазер использовался для образования плазмы.

Спектрометр состоит из генератора DG535, линзы ( $F=50\text{мм}$ ), двух высокоотражательных вогнутых зеркал ( $R>99.97\%$ ,  $r=100\text{см}$ ), трубки из нержавеющей стали, резонатора длиной 75см, фотоумножителя и цифрового осциллографа (LeCroy 9362), электростатического классификатора и счётчика конденсации частицы.



1

2



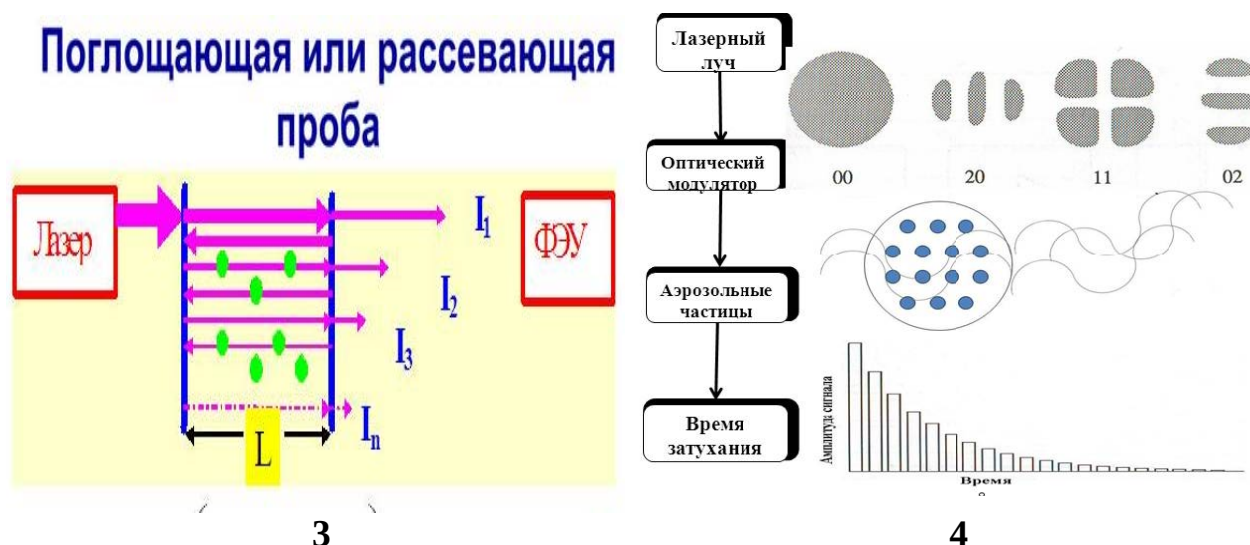


Рис.2. Оптическая схема многократного прохода лазерного излучения внутрирезонаторной лазерной спектроскопии (1; лазерный импульс без внутри резонаторного эффекта, 2; пустой резонатор, 3; оптический резонатор с пробой, 4; регистрации сигнала затухания)

Экспериментальная установка для исследования характеристики поглощения и рассеяния прозрачных аэрозольных частиц состоит из пневматического распылителя, трубки из нержавеющей стали резонатора с диаметром  $d=10\text{ см}$  и длиной  $85\text{ см}$ . Для сушки аэрозоля использована кварцевая труба длиной  $80\text{ см}$  и диаметром  $10\text{ см}$ , заполненная силикагелем (molecularsieves 4A). Вогнутые зеркала ( $R>99.97\%$ ,  $r=100\text{ см}$ ), оптимизированные на длину волны  $575\text{--}670\text{ нм}$ , были точно расположены в концах трубки из нержавеющей стали резонатора с диаметром  $d=10\text{ см}$  и длиной  $85\text{ см}$ .

Экспериментальная установка для измерения коэффициента экстинкции различных аэрозольных частиц состоит из нескольких компонентов: система лазеров, система блоков для чистого воздуха, аэрозоля и газоразрядной лампы с полым катодом, система регистрации. Внутрирезонаторные зеркала были расположены в концах трубки из нержавеющей стали резонатора длиной  $65\text{ см}$ . Сигнал затухания был измерен с помощью фотоумножителя (PhotosensorModule H6780-04). Сигнал фотоумножителя был переведен в цифровую форму с помощью осциллографа (Tektronix TDS3032B) и затем подавался на персональный компьютер.

Экспериментальная установка для измерения коэффициента экстинкции атмосферных аэрозольных частиц (рис.3) работает следующим образом. Излучение двух объемного лазера на молекула азота 1 ( $\lambda=337,1\text{ нм}$ ,  $\tau=8\text{ нс}$ ,  $E=10\text{ мДж}$ ), использовалось для накачки лазера на красителях. Для регистрации сигнала затухания были использованы фотоумножитель ФЭУ-79, выпрямитель стабилизированный ВС-22, осциллограф С1-70, цифровой осциллограф TDS 2022B, генератор чистого воздуха и персональный компьютер.



Рис.3. Блок-схема экспериментальной установки

Запуск развертки осциллографа осуществляется сигналом с фотодиода, на который отводится часть излучения азотного лазера. Внутрирезонаторные зеркала были расположены в концах трубки из медного резонатора с длиной  $65\text{ см}$ . Сигнал с фотоумножителя подавался на цифровой осциллограф (Tektronix TDS 2022B) и персональный компьютер.

**Результаты и обсуждение.** Приведены данные исследования высоковозбужденных состояний s(Na, Ca), p(Al, In), d(Cr, Mn, Fe, Co, Ni, Ag, Au, Pt, Hg, Cd, Zn), f(Yb, Eu) элементов в различных атомизаторах. Универсальный лазерный фотоионизационный спектрометр использован для определения локального распределения атомов Na, Ca в алюминиевых сплавах, работающий с термической атомизацией вещества в вакууме и атомизацией пробы в пламени. Были реализованы двухступенчатые схемы возбуждения для атомов Ca ( $\lambda_1=422,67\text{нм}$ ,  $\lambda_2=399, 2\text{нм}$  для вакуума,  $\lambda_2=518,9\text{нм}$  для пламени) и Na ( $\lambda_1=589,9\text{нм}$ ,  $\lambda_2=418,7\text{нм}$  для вакуума,  $\lambda_2=568,8\text{нм}$  для пламени). Для исследования пробы применены стандартные методики.

Запись фотоионных сигналов с выхода ВЭУ приведена на рис. 4. Для проверки правильности полученных результатов синхронно проведены эксперименты по определению концентрации Ca и Na в водных стандартных растворах описанным выше способом в режиме пламенной атомизации пробы. Ионизационный сигнал при исследовании натрия в пламени пропан-бутан достигает максимального значения при соотношении газ-окислитель 1:8,5. Ионизационный сигнал для кальция при изменении расхода ацетилен-воздух сильно не меняется. Уровень содержания Ca и Na в используемых химических реактивах, а также чистота посуды во время эксперимента контролировались. Таким образом, методом «введено-найденно» установлено, что при массовом отношении основа/определяемый элемент 10мкг/мл: 0,1мкг/мл обнаружено подавление сигналов Ca и Na в растворе алюминия. Здесь подавление исчезает лишь при разбавлении растворов алюминия более чем в 100 раз.

Проведено около 60 анализов на 11 образцах различных поверхностей и глубин геометрии. Экспериментальные результаты показывают, что распределение примесей натрия по объему образца примерно одинаково, около  $10^{-3}\%$ . Но распределение примесей кальция оказалось неравномерным. Причем, в отдельных участках образца концентрация достигала до  $10^{-2}\%$  и более.

Были реализованы трехступенчатые схемы возбуждения для атомов Hg, Cd, Zn. Исследование высоковозбужденных ридберговских состояний атомов Hg, Cd, Zn проводилось в вакууме с использованием электротермического атомизатора.

По результатам обработки полученных ионизационных спектров были определены значения энергии ( $E_n$ ), квантовые дефекты ( $\Delta$ ), и тонкие структуры ( $\Delta E$ ) ридберговских состояний главных серий у атомов ртути вплоть до  $n=18\div 60$ , у атомов цинка  $n=17\div 55$  и у атомов кадмия  $n=17\div 50$ .

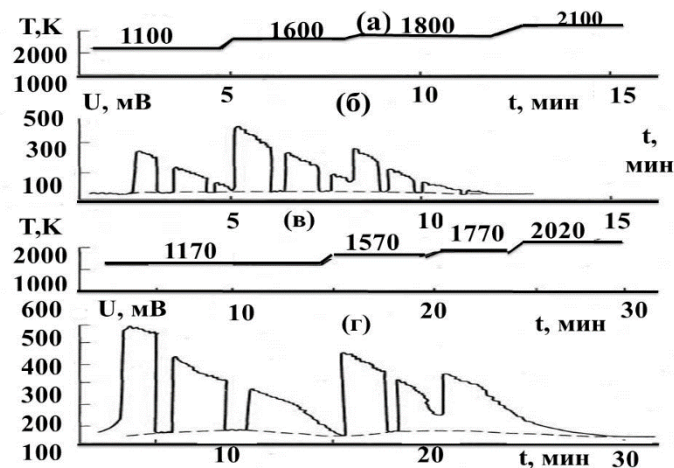
Приведены результаты численного расчета значения энергии ( $E_n$ ) ридберговских состояний для  $n\leq 50$ . Полученные экспериментальные данные сравнивали с известными литературными данными. Результаты анализа показывают, что относительная ошибка расчета составляет  $\leq 4\%$ .

В предыдущей работе [13-15], мы исследовали одноступенчатый и двухступенчатый схемы возбуждения из основного  $3d^5 4s^1 {}^7S_3$  состояния на септитные состояния  $3d^5 4p {}^7P_{2,3,4}$ ,  $3d^4 4s 4p {}^7P_{2,3,4}$  атомов хрома в атомизаторе «стержень-пламя». Для дальнейшего улучшения процесса испарения, атомизации и уменьшения пределов обнаружения в методе атомной ионизации нами был использован электротермический атомизатор «графитовая печь». Для изучения характеристик электротермического атомизатора-ионизатора использовались водные растворы исследуемых элементов. Реализованы двухступенчатые и трехступенчатые схемы возбуждения исследуемых атомов в атомизаторе «графитовая печь». Впервые реализованы двухступенчатые столкновительные схемы возбуждения атомов In, Li, Au, Ag, Pt, Yb в атомизаторе «графитовая печь», состоящей из графитовой трубки, платформы и охлаждаемого коллектора, в которой получена чувствительность элементов в водных модельных растворах в 100 и 10 раз лучше по сравнению с атомизаторами «пламя» и «стержень-пламя» соответственно. Показано, что максимальный сигнал наблюдается для атомов In при переходе  $5p^2 P_{3/2} \rightarrow 6s^2 S_{3/2} \rightarrow 8p^2 P_{1/2}$  и для атомов Li, Na, Ag, Au, Pt при переходе  $(n)s \rightarrow (m)p \rightarrow (k)d$  соответственно (рис. 5). Это, по-видимому, связано с изменением орбитального момента  $\ell$  от 0 до 2, а также ширина линии данного квантового перехода в 10 раз больше чем другой квантовый переход. В результате эксперимента разработаны фотоионизационный и столкновительный механизмы ионизации.

Результаты исследования Au, Yb, Li, Ag, Pt и In в водных растворах приведены в таблице 2. Полученные результаты показывают, что столкновительный механизм ионизации является доминирующим процессом. Для многих элементов в графитовых печах чувствительность в 100–1000 раз выше, чем в пламени. Причина тому – более длительное время пребывания атомов в исследуемом объеме и возможность достижения больших температур атомизации.

В этой главе также представлены результаты исследования различных каналов ионизации атомов Na, Ca, Cs, Al, In, Cr, Mn, Fe, Ni, Co, Pt, Au, Yb, Eu из различных состояний.





а) (Ca), в) (Na) - последовательность поэтапного повышения температуры атомизатора, б) зависимость ионного сигнала Ca от времени в образце ( $M=1\text{мг}$ ), г) зависимость ионного сигнала Na от времени в образце ( $M=2\text{мг}$ )

Рис. 4. Зависимость ионных сигналов Ca и Na от времени и температуры испарения

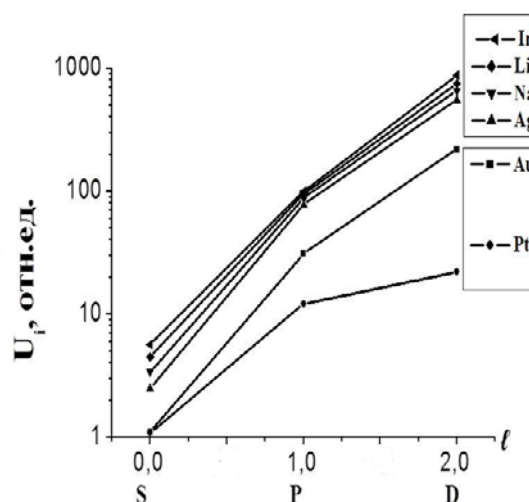


Рис. 5. Зависимость интенсивности ионизационных сигналов ( $U_i$ ) от орбитального момента ( $l$ )

Таблица 2

Результаты определения Li, In, Au, Ag, Pt, Yb в водных растворах с использованием системы «графитовая печь»

| Элемент | $\lambda_{\text{возб}}, (\text{нм})$ |             |             | $t_{\text{графит атомизатор}} (^\circ\text{C})$ | $\Delta E = E_i - E_j,$    |                       | $C_{\text{min}}, \text{пг/мл}$ |       |
|---------|--------------------------------------|-------------|-------------|-------------------------------------------------|----------------------------|-----------------------|--------------------------------|-------|
|         | $\lambda_1$                          | $\lambda_2$ | $\lambda_3$ |                                                 | $\Delta E, \text{см}^{-1}$ | $\Delta E, \text{эВ}$ | ЭР                             | ТР    |
| Li      | 670                                  | 610         |             | 2300                                            | 12204                      | 1,49                  | 0,006                          | 0,002 |
| In      | 451                                  | 571         |             | 2400                                            | 4802                       | 0,59                  | 0,008                          | 0,03  |
| Au      | 267                                  | 294         |             | 2400                                            | 3046                       | 0,42                  | 5                              | 0,05  |
|         | 267                                  | 306.5       |             | 2400                                            | 4439                       | 0,66                  | 5                              | 0,05  |
|         | 267                                  | 406.7       | 643.1       | 2400                                            |                            | AC                    | 10                             | 0,05  |
| Ag      | 328                                  | 282         |             | 2300                                            |                            | AC                    | 0.20                           | 0,03  |
| Pt      | 266                                  | 292         |             | 2400                                            | 587                        | 0,06                  | 50                             | 0,04  |
| Yb      | 555                                  | 581         | 581         | 2700                                            |                            | AC                    | 10                             | 0,03  |

**Фотоионизационный механизм ионизации.** Идея метода заключается в ступенчатом возбуждении атомов в высоколежащих электронных состояниях, из которых они ионизируются либо столкновительно, либо с помощью дополнительного излучения.

Сравнение сигналов, измеренных для этих двух случаев, позволяет определить параметры, характеризующие столкновительную ионизацию. Сравнение сигналов, измеренных для этих двух случаев, позволяет определить параметры, характеризующие столкновительную ионизацию. Выход ионизации связан с коэффициентом увеличения сигнала за счет фотоионизации  $K$  и эффективности столкновительной ионизации  $\beta$  следующими простыми соотношениями

$$Y = K^{-1}; \quad \beta = \left( 1 - \frac{g_b}{\sum g_i} + \frac{g_b}{\sum g_i} K \right)^{-1}, \quad (1)$$

где  $g_b$  – статистический вес верхнего возбужденного уровня,  $\sum g_k$  – сумма статистических весов всех участвующих в возбуждении уровней. Экспериментально получены выход ионизации ( $Y$ ) и эффективность столкновительной ионизации ( $\beta$ ) для атомов Au, Ag, Fe, In (0.11, 0.1, 0.08, 0.06 и

0.59, 0.15, 0.25, 0.087) соответственно. Полученные значения показывают, что столкновительная ионизация для всех уровней идёт неэффективно. Это обусловлено большим значением разности потенциала ионизации и энергии возбуждения ( $\Delta E = 1,5 \text{ эВ} \div 3,87 \text{ эВ}$ ), что почти в  $8 \div 38$  раз больше  $kT$  (для пламени ацетилен-воздух  $kT = 0,217 \text{ эВ}$ ). Был разработан фотоионизационный метод определения коэффициента атомизации  $K_{ат}$  определяемых элементов, Au, Ag, In, Fe в атомизаторах «пламя» и «стержень-пламя». В ограниченном объеме пламени проводится ступенчатая фотоионизация выбранных атомов в режиме насыщения оптических переходов. В результате все атомы из основного состояния переводятся в ионы, а величина регистрируемого при этом ионизационного сигнала  $U_i^{макс.}$  связана с коэффициентом атомизации  $K_{ат}$  простым соотношением:

$$K_{ат} = \frac{C_0 U_i^{макс.}}{e K_y V n_0} \quad (2),$$

где  $C_0$  – ёмкость коллектор-горелки, определяемая экспериментально,  $e$  – заряд электрона,  $K_y$  – коэффициент усиления системы регистрации,  $V$  – облучаемый объем,  $n_0$  – общая концентрация элемента в пламени. В оптимальных условиях мы экспериментально получили коэффициенты атомизации  $K_{ат}$  для атомов Au, Ag, In, Fe (0.3, 0.2, 0.5 и 0.2) соответственно.

Для атомов Ag характерна длина волны 272.0 нм и 282.0 нм, от  $5p^2P_{3/2}$  состояния дали два сильных автоионизационных состояния. Были реализованы трехступенчатые фотоионизационные схемы возбуждения для атомов Eu ( $\lambda_1 = 601.815 \text{ нм}$ ,  $\lambda_2 = 540.533 \text{ нм}$ ,  $\lambda_3 = 618.203 \text{ нм}$ ) в универсальном лазерном фотоионизационном спектрометре. Предел обнаружения в водных стандартных растворах составил  $10^{-8}\%$  при относительном стандартном отклонении  $S_r = 0.1$ .

Фотоионизационные схемы возбуждения атомов индия можно реализовать в лампе с полым катодом. При настройке частоты генерации перестраиваемого лазера на спектральную линию ( $\lambda = 451,1 \text{ нм}$  и  $\lambda = 303,9 \text{ нм}$ ) атомного  $5p^2P_{1/2,3/2} \rightarrow nd^2S_{1/2}$ ,  $nd^2D_{1/2, 3/2}$  перехода в электрической схеме возникает отрицательный и положительный ОГ сигналы.

При газовом разряде ионы инертного газа бомбардируют поверхность катода и распыляют часть катодного материала в газовую фазу, где атомы In с  $5p$  состояния возбуждаются посредством соударения с ионами и электронами на  $5d$  состоянии. Далее возбужденные атомы в этом состоянии взаимодействуют с лазерным излучением. Продолжая перестройку длины волны излучения лазера в диапазонах 455.8 нм, 456.1 нм, 458.9 нм, было обнаружено увеличение ОГ сигналов. Измерение значения ОГ сигнала дало возможность определить положение автоионизационных состояний атома In. В результате исследования двухступенчатой схемы возбуждения атома индия в лампе с полым катодом обнаружены автоионизационные состояния. Энергии автоионизационных уровней рассчитывались из измеренных значений длин волн лазерного излучения, осуществляющего с  $5d^2D_{5/2}$  уровня атома In. Энергии этих автоионизационных состояний составляли  $52651.2 \text{ см}^{-1}$ ,  $52638.2 \text{ см}^{-1}$ ,  $52503.2 \text{ см}^{-1}$ .

*Столкновительный механизм ионизации.* Были изучены различные схемы возбуждения атомов в атомизаторах «пламя» и «стержень-пламя»: одноступенчатые с основного и возбужденных состояний, двухступенчатые схемы возбуждения от возбужденных состояний, двухступенчатая схема возбуждения от основного состояния и трехступенчатая схема возбуждения от основного состояния. Во всех случаях выбрано оптимальное соотношение «горючий газ» – «воздух», 0,21 л/мин:1,3 л/мин для атомов Al, Eu, (0,21 л/мин:6,6 л/мин) – Cs, (0,22 л/мин:1,7 л/мин) – Na соответственно. Для атомов Ca, In, Cr, Mn, Fe, Ni, Co, Pt, Au, Ag, Yb расходы горючего газа ацетилена и воздуха составили 0,27 л/мин и 1,6 л/мин соответственно. Для каждой схемы исследовали зависимости ионизационного сигнала от плотности мощности возбуждающего лазерного излучения  $W$  в широком диапазоне ее изменения ( $700 \text{ кВт/см}^2$  для 10 нс длительности лазерного излучения). Были использованы двухступенчатые схемы ионизации с  $\lambda_1 = 267.6 \text{ нм}$  и  $\lambda_2 = 294.0 \text{ нм}$  для Au и  $\lambda_1 = 266 \text{ нм}$  и  $\lambda_2 = 292.9 \text{ нм}$  для Pt в атомизаторе стержень-пламя. Лазерные лучи имеют относительно большие диаметры (~2 мм). На рис. 6 представлена зависимость интенсивности ионизационных сигналов ( $U_i$ ) атома золота от плотности мощности лазерного излучения ( $W$ ). Были использованы чистые водные растворы (10 пг/мл – 1 мг/мл) атомов Au для калибровки в спектрометре «стержень-пламя» и электротермического атомизатора. Настроивая второй лазер в диапазоне между 250–340 нм, обнаружили несколько пиков резонанса (рис. 7). Эти пики соответствуют высоко возбужденному ридберговскому состоянию атомов Au. Эти состояния соответствуют основным квантовым числам  $n=8$  и  $n=9$ , где амплитуды сигналов ионизации от двухступенчатых возбуждений оказываются приблизительно в 1000 раз больше, чем при одноступенчатом возбуждении атомов Au. Исследованы одноступенчатый и двухступенчатый

схемы возбуждения из основного  $3d^5 4s^1 {}^7S_3$  состояния на септитные состояния  $3d^5 4p {}^7P_{2,3,4}$ ,  $3d^4 4s 4p {}^7P_{2,3,4}$  атомов хрома в атомизаторе «стержень-пламя». Нижний предел обнаружения для s(Li, Na, Cs), p(Al, In), d(Cr, Mn, Fe, Co, Ni, Ag, Pt, Au) и f(Yb, Eu) элементов в водных растворах в системе «пламя» составляет  $10^{-10} \div 10^{-12}$  г/мл, а для систем «стержень-пламя»  $5 \times 10^{-10} \div 1 \times 10^{-14}$  г/мл.

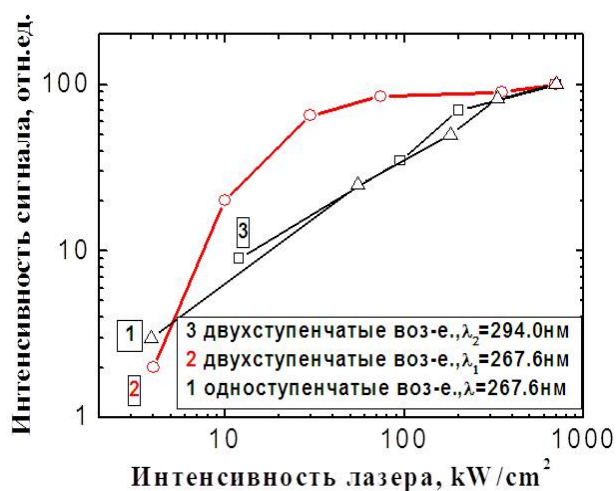


Рис. 6. Зависимость интенсивности ионизационных сигналов ( $U_i$ ) от плотности мощности лазерного излучения ( $W$ )

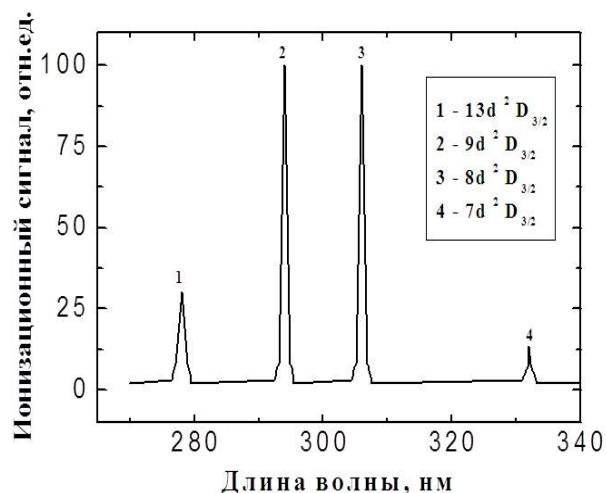


Рис. 7. Атомно-ионизационный спектр золота в области  $p=7 \div 13$  при сканировании второго лазера в диапазоне между 250–340 нм

Результаты исследования теоретической оценки предела обнаружения для s(Li, Na, Cs), p(Al, In), d(Cr, Mn, Fe, Co, Ni, Ag, Pt, Au) и f(Yb) элементов в водных растворах в системе «стержень-пламя» составляет  $1 \times 10^{-14} \div 2 \times 10^{-15}$  г/мл. Экспериментально достигнутые пределы обнаружения оказались примерно на порядок выше, а для некоторых элементов на несколько порядков выше расчетных. В атомно-ионизационном методе существуют следующие влияющие факторы: термические, спектральные и химические. Сочетание лазерного ступенчатого возбуждения атома в системе «стержень-пламя» с пламенным способом атомизации пробы в атмосфере продемонстрировано для определения содержания Li, Na и Ag в ацетоне, фосфорной кислоте, Cr, Mn, Ni, Co,  $\text{NH}_4\text{F}$  и  $\text{NaF}$ , Fe, Al, Na и Fe, Cs в GaAs, Si, Au и Au, Na, Pt,  $\text{AgNO}_3$  и горной породе (Трапп) 30 г/л, Cs, Na, In в природных водах. На рис. 9. представлены зависимости коэффициента усиления сигнала от исследуемых образцов.

Для решения этой проблемы нами исследован эффект усиления сигнала от исследуемых элементов. Для определения золота в азотнокислом серебре готовились растворы  $\text{AgNO}_3$  с концентрацией 1 г/л. Спектральное влияние матрицы в этом случае проявляется в виде аддитивного фонового сигнала от Ag. Для решения этой проблемы нами использованы ступенчатые схемы возбуждения атома Au. Установлено, что химические влияния матрицы отсутствуют.

Для исследования следов золота в горных породах использован электротермический атомизатор «графитовая печь». Были реализованы двухступенчатые столкновительные схемы возбуждения атома золота ( $\lambda_1=267$  нм,  $\lambda_2=294$  нм,  $\lambda_2=306$  нм). Обнаружено химическое влияние матрицы на аналитический сигнал золота. Основными влияющими элементами являются оксиды алюминия и соединения натрия. Эта проблема решается путем разбавления раствора горных пород от  $C=0,3$  г/л до  $C=0,05$  г/л.

Для анализа растворителей наилучшим образом подходит пламенный атомизатор-ионизатор, что продемонстрировано на примере определения Li и K в ацетоне. Натрий определяли в системе «стержень-пламя», где предел обнаружения зависит от чистоты графитовых стержней. Для анализа полупроводниковых материалов использовали растворы кремния и арсенида галлия с концентрацией 1 г/л. Методом добавок установлено, что влияние основы GaAs с концентрацией 10 г/л на величину аналитического сигнала Cr, Al, Na и Fe отсутствует. Предел обнаружения Al в образцах GaAs определялся небольшим аддитивным фоновым сигналом от основы пробы. При определении Fe и Cs в кремнии с помощью стандартных добавок установлено, что влияние основы пробы на величину аналитического сигнала Fe и Cs не обнаружено. Предварительные оценки содержания Fe в растворах GaAs и Si с концентрацией 1 г/л показали, что примеси Fe в используемых для приготовления растворов кислотах HCl,  $\text{HNO}_3$  ограничивали предел

обнаружения Fe в растворах GaAs и Si на уровне  $10^{-3}\%$ . Для решения этой проблемы мы использовали особочистые кислоты и реактивы, а также контролировали чистоту посуды. Поэтому предел обнаружения Fe в этих образцах определялся флуктуациями фонового сигнала от соединений GaAs и Si в пламени.

Для определения Cr, Mn, Ni, Co в фторсодержащих материалах мы впервые использовали атомизаторы «пламя» и «стержень-пламя». Для анализа фторсодержащих материалов использовали растворы  $\text{NH}_4\text{F}$  и NaF с концентрацией 50г/л и 0,2г/л соответственно. Методом добавок установлено, что влияние основы  $\text{NH}_4\text{F}$  с концентрацией 50г/л на величину аналитического сигнала Cr, Co, Mn, Ni отсутствует. При определении никеля и кобальта в 5%-м растворе  $\text{NH}_4\text{F}$  наблюдался неселективный ионизационный фон от матрицы. Природа этого фонового сигнала нами не была исследована. Предел обнаружения Ni и Co в пробе определялся флуктуациями фонового сигнала от соединений  $\text{NH}_4\text{F}$  в пламени. Анализ пробы NaF является более сложным для пламенного АИМ. Атомы Na, находящиеся в основном состоянии 3s и возбужденных состояниях 3p, имеют довольно высокую эффективность ионизации лазерным излучением первой и второй ступеней возбуждения. Подобная ионизация эффективна даже на крыльях линий поглощения вдали от резонанса. Добавление определяемых элементов в разбавленный раствор 0,2г/л NaF также обнаруживает фоновый сигнал от основы пробы. Установлено, что определение содержания Cr, Co, Ni, Mn в образцах NaF с помощью атомно-ионизационного метода в пламени ацетилен-воздух без удаления матрицы невозможно.

В результате проведенных исследований были выбраны следующие режимы нагрева (рис. 8): сушка при  $t=90^\circ\text{C}$  в течение 50с, предварительный нагрев до  $t=800^\circ\text{C}$  в течение 100–600с и рабочий цикл для хрома  $t=1800^\circ\text{C}$ , для марганца  $t=1700^\circ\text{C}$ , а для никеля и кобальта  $t=2000^\circ\text{C}$ . Испарение пробы происходит в течение 6с для каждого цикла. При этих режимах нагрева, работая с 2%-ми растворами, удалось эффективно на предварительной стадии удалить натрий, не теряя хром, марганец, никель и кобальт.

Для исследования аэрозольных факелов от твердых поверхностей нами были выбраны чистые металлы (Fe, Al, Zn, Ag, Au), сплавы и почвы. Морфология аэрозольных факелов была исследована как функция аэрозольных плотностей от расстояния. Мощный Nd-YAG лазер был фокусирован на исследуемые поверхности при частоте 1.0Гц. Образованные аэрозоли транспортировались в медленном потоке воздуха ( $10\text{--}12\text{см}^3\text{с}^{-1}$ ) к счётчику частиц.

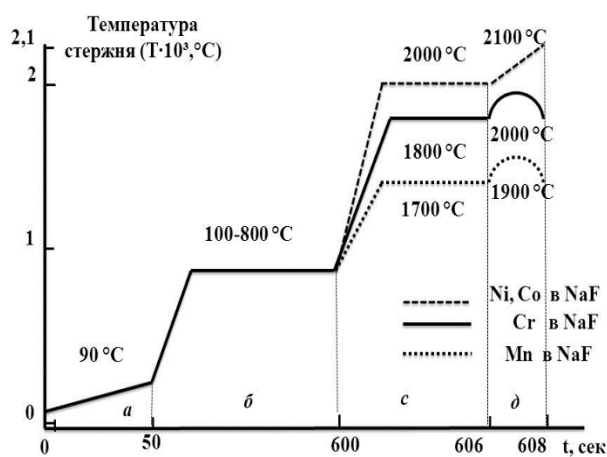


Рис. 8. Режимы нагрева стержня при определении Cr, Mg, Ni и Co в NaF; а) предварительный нагрев, б) испарение натрия, в) испарение определяемых элементов, д) прокаливание стержня

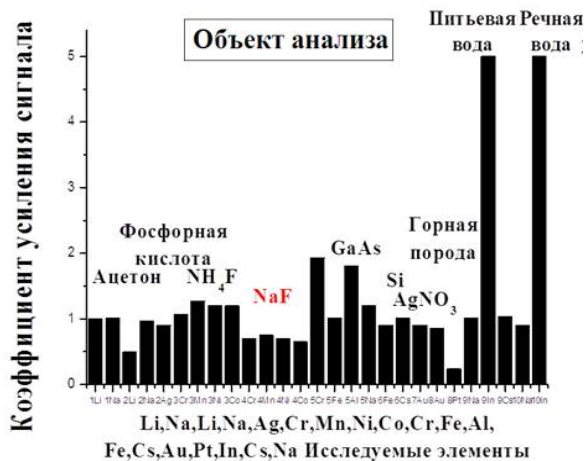


Рис. 9. Зависимости коэффициента усиления сигнала от исследуемых образцов

Для достижения высокой эффективности процесса возбуждения и стимулируемой лазером ионизации не обязательно возбуждать атомы в состояния, лежащие вблизи границы ионизации. В условиях оптического насыщения можно реализовать столкновительные схемы возбуждения атомов, которые происходит даже с уровней, лежащих на  $0,9\div 1,3\text{эВ}$  ниже границы ионизации.

В работе [16] описаны внутрирезонаторные лазерные абсорбционные спектрометры для измерения экстинкции света частицами аэрозоля. В спектрометре для образования аэрозольных частиц были использованы мощное лазерное излучение и пневматические распылители. В

экспериментальной установке использовали два варианта формирования лазерных импульсов испарения и накачки лазера на красителях: одним и двумя Nd:YAG лазерами. На первом варианте Nd:YAG лазер запускается от формирователя двойных импульсов генератора DG535. Вторая установка была основана на применении двух лазеров. Первой Nd:YAG лазер использован для накачки лазера на красителях.

В работе приведены результаты экспериментов по исследованию измерения числа частиц, коэффициента экстинкции и время затухания лазерного импульса в оптическом резонаторе. Для исследования аэрозольных факелов от твердых поверхностей нами были выбраны чистые металлы (Fe, Al, Zn, Ag, Au), сплавы и почвы и результаты представлены в таблице 3. Было исследовано влияние мощности лазера на морфологию аэрозоля.

Результаты, приведенные в таблице 4, указывают, что величины фактора эффективности зависят от размерного параметра. Родаминовые аэрозоли поглощают излучения лазера на длине волны  $\lambda=635$  нм. На рис. 10. представлена зависимость время затухания на длину волны ( $\lambda$ ) лазера; (1)- пустой резонатор и (2)- с пробой.

Таблица 3

Результаты исследования различных сплавов

| Металлы                                        | Al                    | Fe                    | Au                   | Ag                    | Zn                   | Почва                |
|------------------------------------------------|-----------------------|-----------------------|----------------------|-----------------------|----------------------|----------------------|
| $\tau_0$ , с                                   | $1,41 \times 10^{-6}$ | $1,49 \times 10^{-6}$ | $1,5 \times 10^{-6}$ | $1,49 \times 10^{-6}$ | $1,5 \times 10^{-6}$ | $1,5 \times 10^{-6}$ |
| $\tau_1$ , с                                   | $9,7 \times 10^{-7}$  | $11,7 \times 10^{-7}$ | $7,2 \times 10^{-7}$ | $5,5 \times 10^{-7}$  | $3,4 \times 10^{-7}$ | $1,5 \times 10^{-7}$ |
| $\sigma$ , $\text{см}^{-1}$<br>$L=12\text{мм}$ | $1,1 \times 10^{-6}$  | $6,12 \times 10^{-6}$ | $24 \times 10^{-6}$  | $35 \times 10^{-6}$   | $77 \times 10^{-6}$  | $200 \times 10^{-6}$ |

Таблица 4

Результаты исследования органических красителей

| Родамин 640            | d, нм                 | $\tau_1$ , с          | $\tau_0$ , с          | c, см/с            | N, $\text{см}^{-3}$ | Q      | $\alpha$ |
|------------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|--------------------|---------------------|--------|----------|
| $\lambda=615\text{нм}$ | $2,75 \times 10^{-5}$ | $9,74 \times 10^{-7}$ | $1,49 \times 10^{-6}$ | $3 \times 10^{10}$ | 2206                | 4,1112 | 1,40     |
| $\lambda=635\text{нм}$ | $5,75 \times 10^{-5}$ | $1,45 \times 10^{-6}$ | $1,5 \times 10^{-6}$  | $3 \times 10^{10}$ | 64,667              | 4,1012 | 2,84     |

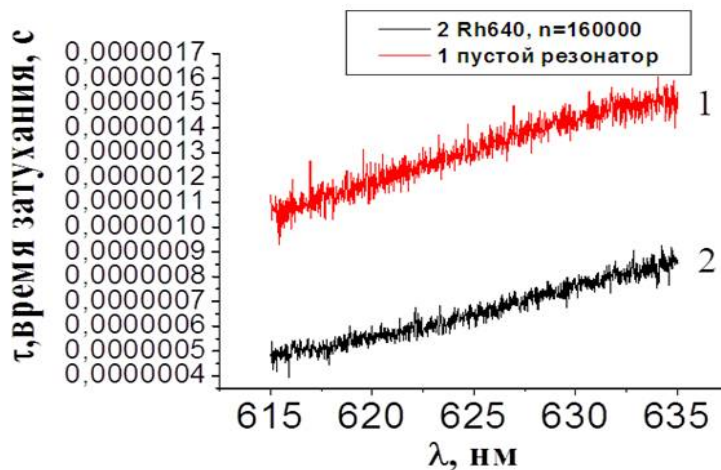


Рис. 10. Зависимость время затухания на длину волны ( $\lambda$ ) лазера; (1)- пустой резонатор и (2)- с пробой

Результаты исследования для не поглощающих аэрозолей, таких как NaCl, CsCl, NaI, NaF, KCl представлены в таблице 5. Максимальное значение Q соответствует минимальному значению размерного параметра, и результаты представлены в таблице 5. Эффективность экстинкции аэрозольной частицы возрастает с увеличением показателя преломления.



Таблица 5

Результаты исследования для не поглощающих аэрозолей NaCl, CsCl, NaI, NaF, KCl, AgNO<sub>3</sub>

|                     | NaF                  | KCl                  | NaCl                  | CsCl                 | AgNO <sub>3</sub>     | NaI                   |
|---------------------|----------------------|----------------------|-----------------------|----------------------|-----------------------|-----------------------|
| d, нм               | $9,0 \times 10^{-5}$ | $9,0 \times 10^{-5}$ | $10,0 \times 10^{-5}$ | $7,5 \times 10^{-5}$ | $4,0 \times 10^{-5}$  | $6,3 \times 10^{-5}$  |
| $\tau_1$ , с        | $1,2 \times 10^{-6}$ | $1,3 \times 10^{-6}$ | $1,4 \times 10^{-6}$  | $1,2 \times 10^{-6}$ | $1,3 \times 10^{-6}$  | $1,04 \times 10^{-6}$ |
| $\tau_0$ , с        | $1,5 \times 10^{-6}$ | $1,5 \times 10^{-6}$ | $1,47 \times 10^{-6}$ | $1,6 \times 10^{-6}$ | $1,49 \times 10^{-6}$ | $1,53 \times 10^{-6}$ |
| N, см <sup>-3</sup> | 246,333              | 96                   | 32                    | 284                  | 223,333               | 541,333               |
| Q                   | 3,579                | 5,12                 | 3,6664                | 5,347                | 2,756                 | 6,199                 |
| A                   | 4,49                 | 4,49                 | 4,984                 | 3,74                 | 1,99                  | 3,12                  |
| N                   | 1.34                 | 1.49                 | 1.54                  | 1.64                 | 1.75                  | 1.77                  |
| c, см/с             | $3 \times 10^{10}$   | $3 \times 10^{10}$   | $3 \times 10^{10}$    | $3 \times 10^{10}$   | $3 \times 10^{10}$    | $3 \times 10^{10}$    |

Экспериментально измеряли время задержки заполненного резонатора с пробой рассеивающей ( $\tau_1$ ) и время задержки пустого резонатора ( $\tau_0$ ). Тогда  $\tau_1 = 1/14326,7468 = 6,98 \cdot 10^{-5}$  с,  $\tau_0 = 1/13327,12461 = 7,5035 \cdot 10^{-5}$  с, коэффициент экстинкции для атмосферного воздуха  $3,3 \cdot 10^{-6}$  см<sup>-1</sup>.

### Выводы

1. Впервые реализованы двухступенчатые столкновительные схемы возбуждения атомов In, Li, Au, Ag, Pt, Yb в атомизаторе «Графитовая печь», состоящего из графитовой трубки, платформы и охлаждаемого коллектора. Полученная чувствительность элементов в водных модельных растворах оказалась в 100 и 10 раз лучше по сравнению с атомизаторами «пламя» и «стержень-пламя» соответственно. Показано, что максимальный сигнал наблюдается для атомов In при переходе  $5p^2P_{3/2} \rightarrow 6s^2S_{3/2} \rightarrow 8p^2P_{1/2}$  и для атомов Li, Na, Ag, Au, Pt при переходе  $(n)s \rightarrow (m)p \rightarrow (k)d$  соответственно (где n, k, m и f главные квантовые числа уровней) соответственно.

2. Первые эксперименты с использованием электротермического атомизатора-ионизатора в АИ методе подтвердила его перспективность. Метод может быть использован в процессах возбуждения и ионизации исследуемых атомов для нахождения оптимальных условий и получения максимального селективного сигнала, а также для решения широкого круга физических и химических задач.

3. Разработан и создан внутрирезонаторный лазерный абсорбционный спектрометр для измерения экстинкции света частицами аэрозоля, который состоит из системы лазеров, системы блока подготовки и очистки газа и системы регистрации сигнала затухания.

4. Впервые изучены морфологические и оптические свойства аэрозольных факелов от поверхностей металлов (Fe, Al, Zn, Ag, Au), сплавов и почвы при воздействии мощного инфракрасного импульсного лазера ( $\lambda = 1064$  нм).

5. Определены зависимости эффективности экстинкции ( $Q_{\text{экс}}$ ) прозрачных аэрозолей солей металлов (NaCl, CsCl, NaI, NaF, KCl, AgNO<sub>3</sub>) и показана осцилляция эффективности экстинкции  $Q_{\text{экс}}$  аэрозолей соли металлов (NaCl, CsCl, NaI, NaF, KCl, AgNO<sub>3</sub>), органических красителей.

### Литература

1. Balykin Victor I. The scientific career of V S Letokhov. Phys. Scr. 2012. V85. –p1-51.
2. Fedosseev V.N., Kudryavtsev Yu., Mishin V.I. Resonance laser ionization of atoms for nuclear physics. Phys. Scr. 2012. V85. –p1-14.
3. Travis J.C., Turk G.C. Laser-Enhanced Ionization Spectrometry // New York.: John Wiley & Sons Inc. 1996. - 334 p.
4. Winefordner J.D., Gornushkin I.B., Pappas D., Matveev O.I. and Smith B.W. Novel uses of lasers in atomic spectroscopy. Plenary Lecture//J. Anal. Atomic Spectrom. -2000. 15. –P.1161-1189.
5. Nadeema A., Haqa S.U., Nawaza M., Shaha M., Baig M.A. Measurements of the oscillator strengths for the  $6p7s (1/2, 1/2)1 \rightarrow 6pnp (1/2, 3/2)2$  Rydberg transitions of lead // Spectrochimica Acta Part B: Atomic Spectroscopy. 2011. –Vol. 66. - № 11–12, - pp. 841 – 846.
6. Зоров Н.Б., Кузяков Ю.Я., Новодворский О.А., Чаплыгин В.И.. Химия плазмы. – Москва: Энергоатомиздат, 1987).
7. Тухлибаев О. Лазерная резонансная спектроскопия многоэлектронных элементов и исследование их термодинамических параметров // Дисс.Док. физ.-мат.наук. Ташкент: Отдел

Теплофизики, 1999. – 230 с.

8. Эшкobilов Н.Б. Околопороговая лазерно-ионизационная спектроскопия ридберговских и автоионизационных состояний атомов I, II и III групп элементов // Дисс.док. физ.-мат. наук. – Т.: Отдел Теплофизики, 2002. – 250 с.

9. Свиридов А.П. Лазерно-индуцированные термopоцессы в соединительных тканях и их оптическая диагностика: Дис. Док. Физ.-мат. наук. – Москва, 2015. – С. 1 – 280.

10. Кочелаев Е. А. Проточно-оптический метод анализа биоаэрозолей. Автореф. дис. канд.тех. наук. – Санкт-Петербург, 2013. – С. 1 - 19.

11. Kokhkharov A.M., Bakhramov S.A., Zakhidov E.A., Makhmanov U.K., ofurovSh.P., Bolobernikov A.V. Study of molecular-colloidal solutions of C<sub>70</sub> fullerene: structural features, optical and nonlinear-optical properties. // Uzbek Journal of Physics, - Tashkent, 2014. - Vol.16, - № 2. - pp.114-125.

12. Miles, R., Carruthers, A. and Reid, J. (2011), Novel optical techniques for measurements of light extinction, scattering and absorption by single aerosol particles// Laser & Photonics Reviews. - 2011. Volume 5, Issue 4, P.534–552,

13. Khalmanov A.T., Do-kyongKo, J.Lee, N.Eshkobilov and A.Tursunov, J.KoreanPhys.Soc. 44, 843 (2004).

14.Халманов А.Т., Эшкobilов Н.Б. Идентификация ультрамалых концентраций атомов в различных фазовых состояниях вещества, Узбекский физический журнал. 2014 год. Том 16. №2. С.100-105.

15.Халманов А.Т., Эшкobilов Н.Б. Исследование динамики и типов физических процессов возбуждения и ионизации атомов методом атомно-ионизационной спектроскопии, Узбекский физический журнал. 2017 год. Том 19. №5. С.272-277.

16. Халманов А.Т. Высокочувствительная лазерная спектроскопия ультрамалых концентраций атомов в различных фазовых состояниях вещества, автореферат докторской (DSc) диссертация физико-математическим наукам. – Ташкент: Академия ноширлик маркази, 2017. – С.1-60.

УДК: 541.64:53

## О СВОЙСТВАХ НАНОВОЛОКОННЫХ АНИЗОТРОПНЫХ НАНОПОРИСТЫХ МАТЕРИАЛОВ

А.А.Холмуминов<sup>1</sup>, Б.М.Матякубов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Национальный университет Узбекистана,

<sup>2</sup>Военно-технический институт Национальной гвардии РУз

**Аннотация.** В статье приводятся результаты исследования по получению нановолоконных анизотропных нанопористых материалов в виде тонкого материала на основе фиброина шелка и хлопковой целлюлозы методом электроспиннинга с использованием эксцентрично-вращающегося экрана-приёмника. Исследование анизотропических свойств, механо-структурных изменений полученных нановолоконных тонкослойных полимерных материалов выполнено непосредственно при помощи метода эффект двухлучевой преломления с применением поляризационно-оптической установки.

**Ключевые слова:** фиброин, целлюлоза, электроспиннинг, нановолокно, наноматериал, формирование, полимер, шелка, структура, температура.

### Nanotolali nanog‘ovakli anizotrop materiallarning xossalari haqida

**Annotatsiya.** Maqolada elektrospinning usulida nanotolalarni qabul qilib oluvchi eksentrik – aylanuvchi ekran ishlatilgan holda, ipak fibroini va paxta sellulozasi asosida nanotolali nanog‘ovakli materiallarni olish bo‘yicha tadqiqot natijalari keltirilgan. Olingan nanotolali yupqa qatlamli polimer materiallarning anizotrop xususiyatlari, mexano-strukturaviy o‘zgarishlarini tadqiqot qilish uchun polarizatsion-optik qurilma orqali bevosita qo‘sh nurning sinish effekti usuli yordamida amalga oshirilgan.

**Kalit so‘zlar:** fibroin, selluloza, elektrospinning, nanotola, nanomaterial, shakllantirish, polimer, ipak, tuzilishi, temperatura.

**About the properties nanofiber anisotropic nanoporous materials**

**Abstract.** The article presents the results of a study on the production of nanofibrous anisotropic nanoporous materials in the form of a thin material based on silk fibroin and cotton cellulose by electrospinning using an eccentrically rotating screen-receiver. The study of anisotropic properties, mechanical and structural changes of the obtained nanofiber thin-layer polymeric materials was carried out directly using the method of two-beam refraction using a polarization-optical installation.

**Keywords:** fibroin, cellulose, electrospinning, nanofiber, nanomaterial, formation, polymer, silk, structure, temperature.

**Введение.**

Потребность человечества всегда обращена на создание новых материалов, и на протяжении последних лет основным исследовательским направлением нанопредметов и наноматериалов ведущих стран мира стали фундаментальные проблемы создания наноструктур тонкослойных полимерных материалов, в том числе проведение исследования по формированию нановолокон, а также их практического применения.

Существуют различные методы формирования нановолокон, однако любой процесс получения нановолокон включает три обязательных стадии: перевод материала в вязкотекучее состояние, формирование и отвердивание [1].

Электроспиннинг - универсальный метод получения непрерывных волокон с диаметром от нескольких нанометров до микрометров из растворов или расплавов полимеров [2].

Особое внимание при получении нановолокон уделяется выбору растворителя для исходного твердого полимера. Растворитель должен удовлетворять следующим основным требованиям [3]:

- температура кипения в интервале 80-200 °C;
- давление насыщенных паров в интервале 0,35-10 кПа при 20 °C;
- поверхностное натяжение не выше 0,05 Н/м;
- электропроводность в интервале  $10^{-6}$ - $10^{-2}$  См/м;
- относительная диэлектрическая проницаемость не более 100.

Метод электроспиннинга, принципиальная основа, которой был рекомендован в 1934 году и является один из современных методов формирования нановолокон [4]. Где в результате воздействия постоянного электрического поля высокого напряжения вдоль потока раствора, наблюдалась испарение растворителя, а также формирование волокон ориентированного соединения молекул полимера между собой на расстоянии 10-30 см. Но сформированные волокна сплелись между собой и имели неустойчивую структуру. Для устранения этих недостатков в 1990 году учеными США из Беркли предложена метод ближнеполевого электроспиннинга (near-field electrospinning process). Было сформировано волокно наноизмерения и его эффективность началом новой эры развивающихся полимерных нановолокон [5].

В 2008 году доктор Ли из Калифорнийского университета и его коллеги с помощью электроспиннинга близкого поля получили матрицу упорядоченных нановолокон диаметром от 50 до 500 нм[6].

Несомненно, полимерные сырья на основе наноразмерных полимерных материалов нашли широкое применение: в современном и будущем новой технологии, электронике, биомедицине, авиации, автопромышленности, искусственных спутниках, спорт товарах и в других отраслях. В том числе имеет большое значение для изучения их необыкновенных свойств, т.е. изменение морфологических и анизотропных свойств в результате механического, термического, оптического воздействия[7].

В целом, усовершенствование способа электроспиннинга нановолокон на уровне нанотехнологии современных материалов является весьма актуальным научным направлением прикладных исследований. В этом некоторые особенности исследования представляются важными, а именно:

- формирование нановолоконных нанопористых нетканых материалов на основе местных биополимеров - фиброина шелка и хлопковой целлюлозы, содержащих функционально-активных групп, проявляющих уникальные свойства в материалах;
- исследование особенностей проявления специальных физико-химических и медико-биологических свойств биополимерных нановолоконных нанопористых нетканых материалов.

**Экспериментальная часть.**



Для получения нановолокон из растворов и смесей выбранных полимеров использована оригинальная установка электроспиннинга, которая была собрана на основе представленной принципиальной схемы и имела вид (рис.1) лабораторная установка электроспиннинга для формирования нановолокон полимеров.

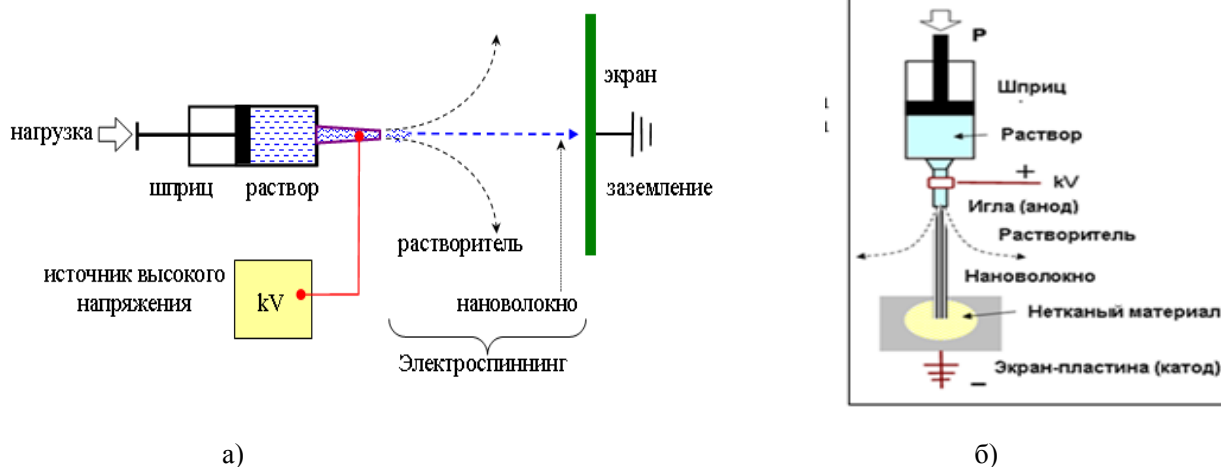


Рис. 1. Принципиальные схемы установок электроспиннинга нановолокон  
а- горизонтальная; б- вертикальная.

Данные установки позволяют формировать нановолокон из растворов полимеров под действием высокого напряжения (15 кВ) и принимать нановолокон на катоде, т.е. на поверхности плоского экрана в виде нетканого материала. В зависимости от концентрации полимера и расстояния между анодом (иглой шприца - фильеры) и катодом (экрана) возможно, получить нановолокон с диаметрами 50 - 500 нм. При этом нановолокна укладываются произвольно, т.е. неупорядоченно и между ними образуются наноразмерные пустые пространства, которые могут быть рассмотрены как нанопоры с различными размерами в нетканом материале[8].

Представлял большой интерес определения возможностей усовершенствования собранной установки электроспиннинга в двух аспектах: дополнение к установке специальной конструкции приемника (катада), обеспечивающего упорядоченной укладки нановолокон в получаемом материале и повышение производительности нановолокон с использованием большого объема прядильного раствора.

#### Эксцентрично-вращающий экран для электроспиннинга.

Как было указано выше, одна из главных задач исследования является разработка эксцентрично-вращающего экрана-приемника нановолокон, которая решена составлением принципиальной схемы данной конструкции и сборкой её лабораторной модели.

Схема эксцентрично-вращающего экрана. Данная схема включает себя 2 электромотора с частотой вращения  $\omega = 5$  об/мин, подвижные и неподвижные металлические пластины, а также эксцентрично-вращающего экрана (рис.2).

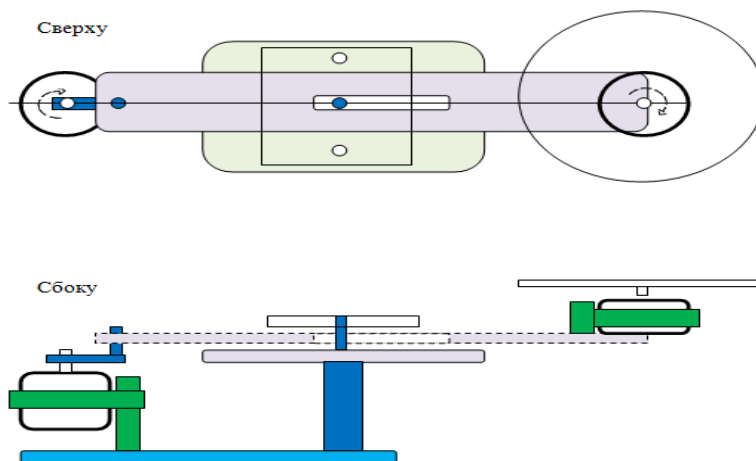


Рис.2. Принципиальная схема эксцентрично-вращающего экрана



Формирование нановолокон в данных установок осуществляется под действием постоянного напряжения в диапазоне 10 - 20 кВ. Толщина нановолокон регулируется выбором растворителя, концентрация растворов и смесей, а также расстояния между фильерой (анодом) и экраном (катодом).

Толщина нетканого материала зависит от продолжительности электроспиннинга, где толщина нановолокон определена методом электронной микроскопии (РЭМ) и атомно-силовой микроскопии (АСМ), а также средний размер пор нановолокон методом сорбции паров воды и этанола.

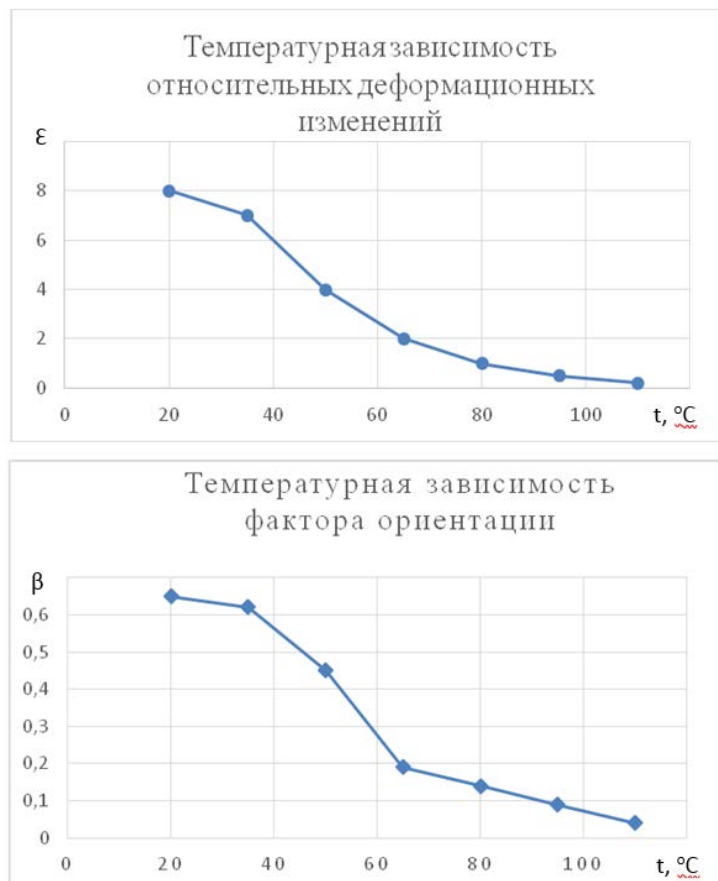


Рис. 4. Температурная зависимость относительных деформационных и фактора ориентации соответственно.

Определение плотности нановолоконного покрытия при различных скоростях вращения волокнообразующего электрода показало, что данный параметр практически не оказывает влияния на структуру нановолокон, но влияет на плотность получаемого покрытия (рис. 5).

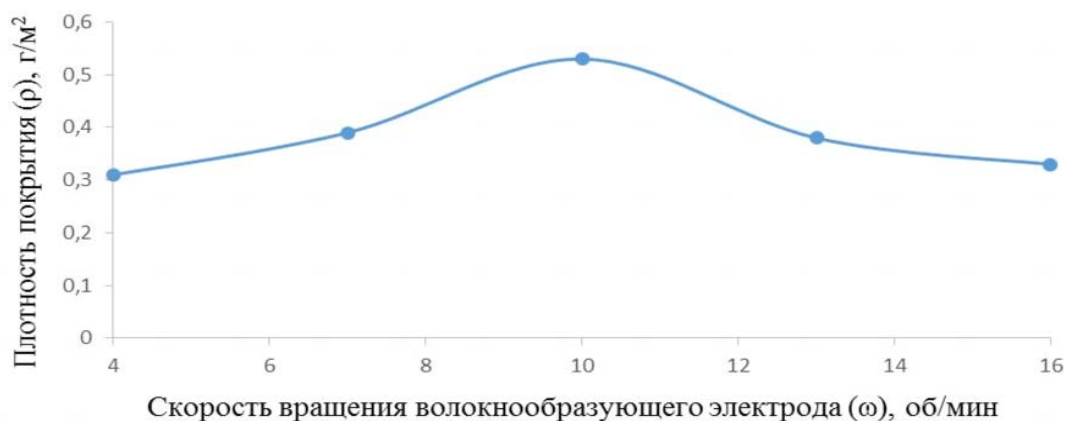
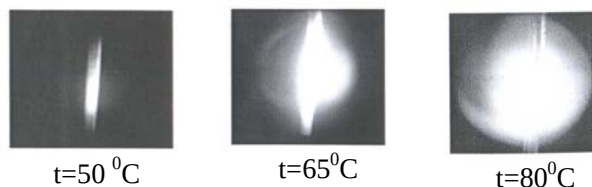


Рис. 5 - Плотность нановолоконного покрытия из фиброина в зависимости от скорости вращения волокнообразующего электрода

Подобный характер изменения свойств обусловлен, вероятно, созданием наиболее приемлемых условий для формирования нановолоконного покрытия при определенной скорости вращения волокнообразующего электрода: при низких значениях скорости может наблюдаться нехватка формирующего раствора на его поверхности, что снижает производительность процесса, а при высоких значениях скорости вращения формовочный раствор не успевает полностью сформоваться на его поверхности [12].

Изменение температурно оптической анизотропии  
нановолокон



Изменение деформационно оптической анизотропии  
нановолокон

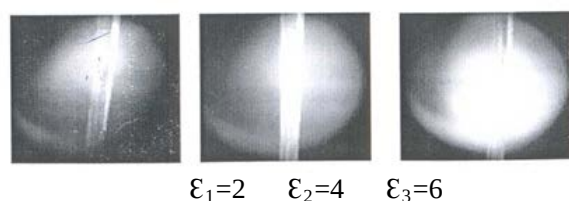


Рис. 6. Изменения анизотропии нановолокон в зависимости температуры и деформации соответственно.

### Заключение

Здесь отметим, что в статье получены следующие результаты:

Определены электроспиннинга нановолокон для некоторых местных полимеров.

Получены температурная зависимость относительных деформационных и фактора ориентации.

Определены плотность нановолоконного покрытия из фиброина в зависимости от скорости вращения волокнообразующего электрода.

Определены изменения анизотропии нановолокон в зависимости температуры и деформации соответственно.

Работа выполнена по проекту № Ф-А-2018-033, при поддержке Министерство инновационных разработок Республики Узбекистан.

### Литература

1. Н.Р. Прокопчук, Ж.С. Шашок, Д.В. Прищепенко, В.Д. Меламед., Электроформование нановолокон из раствора хитозана (обзор). //Полимерные материалы и технологии., Т.1 (2015) УДК 677.473, №2, С. 36–56.
2. Li D., Wang Y., Xia Y. Electrospinning nanofibers as uniaxially aligned arrays and layer by-layer stacked films // Adv. Mater. 2004. Vol. 16, N 4. P. 361-366.
3. Матвеев А.Т., Афанасов И.М. Получение нановолокон методом электроформования: учебное пособие. Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова. 2010. С.9-13.
4. Витязь П.А. Наноматериаловедение - Минск.: Высшая школа, 2015. -511 с.
5. G.S.Bhat, R W Tock, S Parameswaran, S S Ram Kumar Electrospinning of Nanofibrels // Journal of Polymer Science Vol 96. pp. 557-569.
6. S. Li, D. Wu, X. Yan, Y. Guan. Acetone-activated polyimide electrospun nanofiber membrane for thin-film microextraction and thermal desorption-gas chromatography-massspectrometric analysis of phenols in environmental water. J. of Chromatography A. 2015. Vol.1411. P.1-8.

7. Филатов, Ю.Н. Электроформование волокнистых материалов (ЭФВ-процесс) / Ю.Н. Филатов. - М.: ГИЦ РФ НИФХИ им. Л.Я. Карпова, 2001. - 231 с.
8. Kholmuminov A.A., Matyakubov B.M., Nano-Fiber Nonwoven Materials of Polymers with Surface-Active Properties //Journal of Scientific and Engineering Research., Research Article 2019, Vol 6(11): pp. 232-235 ISSN: 2394-2630 CODEN(USA): JSERBR www.jsaer.com
9. D.Sh.Shakarova., Ch.K. Begimkulova., A.A. Kholmuminov., Surface-Active Properties of Nanofibers on the basis of Fibroin Silk and Copolymer Acrylonitrile// International Journal of Advanced Scientific and Technical Research ISSN 2249-9954// Available online on <http://www.rspublication.com/ijst/index.html> Issue 8 volume 3 Page 62 May-June 2018
10. Kholmuminov A.A. Ashurov N. Sh., Yunusov M. Y., Acrylonitrile Copolymer Nanofibers and Their Structural Characteristics // Polymer Science, Ser. A, 2013, Vol. 55, No. 1, pp. 39-42.
11. Subbiah T., Parameswaran S., Ramkumar S. Electrospinning of nanofibers //Journal of Applied Polymer Science, 2005. - V. 96. - No 2. - P. 557 - 569.
12. Ayutsede, J. Regeneration of Bombyx mori silk by electro-spinning. Part 3: characterization of electrospun nonwoven mat. / J. Ayutsede [et.al] // Polymer. – 2005. – Vol. 46. - P. 1625–1634.

UDK: 539.2

**KOGERENT POTENSIALLAR METODI YORDAMIDA AMORF HOLATDAGI  $\text{Cu}_x\text{Ti}_{1-x}$  QOTISHMALARDA XOLL KOEFFITSIYENTINI HISOBLASH**

**О.К.Кувандиков, Д.Х.Имамназаров**

*Самаркандский государственный университет*

**Annotatsiya.** Kuchli o'zaro ta'sir hamda gibrizatsiyani hisobga olgan holda s-d modeli uchun kogerent potentsial metodi yordamida amorf holatdagi paramagnit  $\text{Cu}_x\text{Ti}_{1-x}$  qotishmalarining elektron strukturasi, solishtirma elektr qarshiligi  $\rho$  va Hall koeffitsienti  $R_0$  hisoblandi. O'tkinchi metallar va ular qotishmalarining kinetik xususiyatlarining konsentrasiyaga qarab anomal o'zgarishi zaryad tashuvchilarning oraliq zonalararo o'tishlari bilan birga kuchli elektron-electron o'zaro ta'siri bilan bog'liqligi ko'rsatilgan. Hisoblangan kattaliklarning  $\rho$  va  $R_0$  konsentratsiyaga bog'liqligi tajriba natijalari bilan mos kelishishiga erishildi.

**Kalit so'zlar:** elektron struktura, elektronlar holat zichligi, solishtirma elektr qarshiligi, Xoll koeffitsienti, kogerent potentsial metodi, holatlar gibrizlanishi.

**Расчет коэффициента Холла в сплавах  $\text{Cu}_x\text{Ti}_{1-x}$  в аморфном состоянии методом когерентных потенциалов**

**Аннотация.** В рамках приближения когерентного потенциала для s-d-модели с учетом недиагонального беспорядка рассчитаны электронная структура, электросопротивление  $\rho$  и коэффициент Холла  $R_0$  аморфных парамагнитных сплавов  $\text{Cu}_x\text{Ti}_{1-x}$ . Показано, что anomalous изменение кинетических свойств переходных металлов и сплавов в зависимости от концентрации связаны с сильным взаимодействием с учетом гибридизации, сопровождающимся межзонными переходами токоносителей. Получено удовлетворительное согласие рассчитанных концентрационных зависимостей  $\rho$  и  $R_0$  с экспериментальными данными.

**Ключевые слова:** электронная структура, плотность электронных состояний, удельное электросопротивление, коэффициент Холла, метод когерентного потенциала, гибридизация состояний.

**A calculation of coefficient of Hall is in the alloys of  $\text{Cu}_x\text{Ti}_{1-x}$  in the amorphous state by the method of coherent potentials**

**Abstract.** Within the framework of the coherent potential approximation for the s-d model, taking into account the off-diagonal disorder the electronic structure, electrical resistivity  $\rho$ , and Hall coefficient  $R_0$  of amorphous paramagnetic  $\text{Cu}_x\text{Ti}_{1-x}$  alloys are calculated. It is shown that the anomalous change in the kinetic properties of transition metals and alloys depending on concentrations associated with a strong interaction with hybridizations accompanied by interband transitions of current carriers. Satisfactory agreement was obtained between the calculated concentration dependences  $\rho$  and  $R_0$  with experimental data.

**Keywords:** electronic structure, electron density of states, electrical resistivity, Hall coefficient, coherent potential method, state hybridization.

### Masalaning qo'yilishi

Keyingi vaqtlarda kondensirlangan holat fizikasini nazariy va amaliy tekshirishga juda katta e'tibor berilmoqda. Ayniqsa o'tkinchi metallar asosidagi qotishmalarning amorf va kristall holatdagi elektrik, termoelektrik, galvonomagnitik va magnit hossalari o'rganishga katta e'tibor qaratilmoqda. Buning birdan-bir sababi ularning fan va texnikada keng qo'llanilishidir. O'tkinchi metallar asosidagi qotishmalarning bosqichma-bosqich nazariyasini qurishdagi kamchiliklar qotishma kristall panjarasidagi davriy potensialning yo'qligi hamda o'tkinchi metallarning elektron tuzilishidagi o'ziga hos xususiyati bilan bog'liqdir.

Kogerent potensiallar metodi yaratilgunga qadar notartib sistemalar nazariyasi oddiy qo'zg'alish nazariyasi yordamida, ya'ni elektronlarning kristall panjara tugunidagi tasodifiy potensialdan sochilishi kuchsiz deb qarab chiqilar edi. Ammo o'tkinchi metallar asosidagi qotishmalarning energetik spektridagi s-zonaga qaraganda kengligi juda tor bo'lgan to'lmagan d-zona mavjud bo'lib, ularga tegishli bo'lgan elektronlarning sochilishi kuchli bo'ladi. Shuning uchun bunday elektronlarni qo'zg'alish nazariyasining birinchi hadlari bilan ifodalab bo'lmaydi.

O'tkinchi metallar asosidagi notartib qotishmalarning elektron strukturalari va kinetik hossalari batafsil qarab chiqishda kogerent potensial metodi nazariyasi to'liq imkon beradi. Uning asosida ko'p karrali sochilish nazariyasi va Grin funksiyasi metodi yotadi. Bu metod Veysning ferromagnitizm nazariyasidagi effektiv maydon metodiga o'xshash bo'lib, sochilish potensialiga va qotishmalarning konsentratsion tarkibiga hech qanday chegaralanish qo'ymaydi.

Maqsadli yo'naltirilgan yangi materiallarni hosil qilishda ular tarkibiga kiruvchi elementlarning elektron strukturalari hamda kinetik hossalari bilish juda muhim ahamiyatga ega. Ayniqsa termo-elektriyurituvchi kuch va Xoll koeffitsiyenti kattaliklari qotishmalarning elektron strukturalariga juda sezgir bo'ladi. Bu effektini o'rganish qotishmalarning elektron strukturalari haqida zarur ma'lumotlarni beradi. Shuning uchun ushbu ishda kogerent potensiallar metodi yordamida qotishmalarning elektron strukturalari, solishtirma qarshiligi, Xoll koeffitsiyenti uchun umumiy ifodalar hisoblab chiqarilib, shu asosda konkret sistema, ya'ni amorf holatdagi  $\text{Cu}_x\text{Ti}_{1-x}$  qotishmasi uchun tadbiq qilinadi va tajriba natijalari bilan taqqoslanadi.

Bizga ma'lumki, Bolsmanning kinetik tenglamasiga asoslangan erkin elektronlar modelida erkin elektronlarning dispersiya qonuni  $E(k)$  ixtiyoriy ko'rinishda bo'lgan kvaziklassik nazariyaga asosan solishtirma elektr o'tkazuvchanlik tenzorining diagonal  $\sigma_{xx}$  va nodiagonal  $\sigma_{xy}$  elementlari quyidagi ko'rinishga ega:

$$\sigma_{xx} = \frac{ne^2\tau}{m^*}, \quad (1)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{ne^3\tau^2 B \alpha}{m^{*2}}, \quad (2)$$

bunda  $n$  — hajm birligidagi elektronlar konsentratsiyasi,  $e$  — elektron zaryadi,  $B$  — magnit maydon induksiyasi,  $\tau$  — zaryad tashuvchilarning relaksatsiya vaqti,  $m^*$  — elektronning effektiv massasi bo'lib, u elektronning energetik spektridan aniqlanadi:

$$m^* = \frac{\hbar^2}{\frac{\partial^2 E}{\partial k^2}} \quad (3)$$

va  $\alpha$  — o'zgaras kattalik bo'lib, quyidagicha ifodalanadi:

$$\alpha = \frac{\frac{\partial E}{\partial k}}{\left| \frac{\partial E}{\partial k} \right|} \quad (4)$$

(1) va (2) ifodalardan Xoll koeffitsiyenti uchun quyidagi formulani topish mumkin:

$$R = \frac{\sigma_{xy}}{B\sigma_{xx}} = \frac{\alpha}{ne} \quad (5)$$

(5) formuladan ko'rinadiki, Xoll koeffitsiyenti  $R$  relaksatsiya vaqti  $\tau$  va effektiv massa  $m^*$  ga bo'g'liq bo'lmay, uning ishorasi elektronlarning gruppaviy tezligi  $\frac{\partial E}{\partial k}$  ning ishorasiga bog'liq bo'ladi. Shuning uchun erkin elektronlar modelida elektronlarning energiyasi bilan to'liq vektor orasida  $E \sim k^2$  munosabat o'rinli ekanligini inobatga olsak, u holda  $\alpha \sim 1$  bo'lib,  $R = \frac{1}{ne}$  bo'ladi va Xoll koeffitsiyenti har doim manfiy bo'lishi kerak, chunki elektronning zaryadi manfiy. Haqiqatdan ham s-p ko'rinishdagi oddiy qotishmalarda zaryad tashuvchilarning sochilishi kuchsiz bo'lganligi sababli ularda elektr qarshilik  $\rho < 100$  mOm·sm va Xoll koeffitsiyenti har doim manfiy bo'ladi. Bunday holat amorf va kristall holatdagi oddiy



metallar qotishmalarida kuzatiladi, ammo o'tkinchi metallar qotishmalarida bunday holatlar kuzatilmaydi. Xoll ko'effitsiyenti kattaligi musbat ishoraga ega bo'lib, qotishmalarda konsentratsiya o'zgarishi tufayli tajribada Xoll ko'effisienti ishorasi ham o'zgarishi mumkinligi hamda juda kichik bo'lsada temperaturaga bog'liqligi kuzatilgan (Pd-Zr qotishmalarda esa 10% atrofida o'zgarishi kuzatilgan). Undan tashqari o'tkinchi metallar asosidagi qotishmalarning suyuq, amorf va kristall holatdagi fazalarida musbat Xoll effekti ko'effitsiyenti kuzatilganligi bu bevesta struktura tuzilishi bilan bog'liq bo'lmay, balki o'tkinchi metallar asosidagi qotishmalarning elektron strukturasi o'ziga xos xususiyatlariga bog'liq degan farazga olib keladi.

Xoll ko'effitsiyentining  $R_0$  musbat ishoraga ega bo'lishi sababini tushuntirish uchun nazariy jihatdan turli xil qarashlar ishlab chiqilgan.

1) Mott tomonidan elektronlarning tasodifiy potensialda sochilishiga bog'liq bo'lgan holda erkin elektronlar modelidan chetlanishlarni qarab chiqqanda ular faqatgina  $R_0$  kattaligining o'zgarishiga olib kelib, lekin ishorasi o'zgarishiga olib kelmaydi.

2) Ma'lumki Xoll maydoni  $E_y$  umumiy holda quyidagi ko'rinishga ega:

$$E_y = (R_0 B_z + 4\pi R_s M_z) j_x \quad (6)$$

bunda  $j_x - x$  o'qi bo'ylab tok zichligi vektorining tashkil etuvchisi ( $I_y = I_z = 0$ ),  $B_z - z$  o'qi bo'ylab yo'nalgan magnit maydon induksiyasi,  $M_z - z$  o'qi bo'ylab magnitlanish vektorining tashkil etuvchisi,  $R_0$  va  $R_s$  - mos ravishda normal va anomal Xoll ko'effitsiyentlari bo'lib, bunda  $R_s$  spin-orbital o'zaro tasiri natijasida paydo bo'ladi. Bu ifodadan tajribada o'lchanadigan Xoll ko'effitsiyentining haqiqiy qiymati

$$R^{eff} = R_0 + 4\pi \chi R_s \quad (7)$$

ekanligi kelib chiqadi, bunda  $\chi$  - qotishmaning magnit qabul qiluvchanligi. Odatda  $R_s$  kattaligi  $R_0$  dan  $10^2$  tartibida katta bo'ladi. Qotishmaning magnit qabul qiluvchanligi  $\chi \cdot 10^{-3} - 10^{-4}$  tartibida bo'lsa, u holda  $R_s > 0$  bo'ladi va kuzatilayotgan normal Xoll ko'effitseti  $R_0 > 0$  bo'lishi (7) ifodadagi ikkinchi handing kattaligiga bo'g'liq bo'ladi. Tajribada bunday nuqtai-nazarni tasdiqlovchi natijalar olingan bo'lsada, shuni alohida takidlash kerakki, bunday konsepsiya juda katta qarama-qarshilikka ega. Bunday mexanizm asosida tekshirilgan qotishmalar katta qiymatga ega bo'lib,  $R_s$  ning tempraturaga bog'liqligi huddi  $\chi$  ning tempraturaga bo'gliqligi kabi bo'lishi kerak (odatda katta qarshilikli qotishmalar uchun,  $R_s$  kattaligi tempraturaga kuchsiz bog'langan), bu esa nafaqat eksperimental tarzda isbotlangan, balki anomal Xoll effekti nazariyasiga to'raligicha qarama-qarshidir. Chunki bu nazariya bo'yicha,  $R_s$  istalgan ishoraga ega bo'lib qotishma tarkibining konsentratsiyasi o'zgarishi bilan o'z ishorasini o'zgartirishi mumkin. Ammo bazi bir qotishmalar uchun bunday mexanizm o'rinli ekanligini ham takidlab o'tish joizdir.

3) d-zonaning hisobiga  $R_0$  ning musbat ishoraga ega bo'lishi mumkinligini tushuntiruvchi qarashlar, hususan, O.K. Quvondiqov, N. Xamrayev va A.B. Granovskiylar ko'rsatdilar, o'tkinchi metallar asosidagi kristall va amorf qotishmalardagi normal Xoll ko'effitsiyenti musbat ishora va tempraturaga bog'liqligi ikki zonali model asosida tushuntirib berdilar. Ammo, Xouson va Morganlar d-zonaning qiymati juda kichik bo'lib, manfiy ishoraga ega ekanligini aniqladilar. Buning birdan-bir sababi d-zonadagi elektronlar konsentratsiyasi katta ekanligiga bo'g'liqdir. Umuman olganda bu masala keyinchalik ham tekshirishlar olib borishni taqozo qiladi. Chunki keyingi paytlarda ko'pgina o'tkinchi metallar asosidagi qotishmalarda olib borilgan tekshirishlarning ko'rsatishicha elektr o'tkazuvchanlik d-zona uchun katta ekanligi aniqlab berilgan.

4) Xouson-Morgan o'tkinchi metallar asosidagi qotishmalarda,  $R_0$  ning o'ziga xos xususiyatlarini tushuntirib berishda s-d gibridizatsiyaning qotishma elektron strukturasi va kimyoviy xossasiga tasirini qarab chiqdilar. Bu qarashga s-d gibersdizatsiya s-holat spektrini shunday o'zgartirib yuboradiki, natijada anomal dispersiyali energiyalar oralig'i paydo bo'lib, bunda shu intervalda tok tashuvchilar gruppaviy tezligi manfiy ishoraga ega bo'ladi va shu intervalda Xoll ko'effisienti musbat ishoraga ega bo'lishi mumkin. Bu nazariya  $R_0$  ishorasini tushuntirib berishda muvoffaqiyatga olib kelgan bo'lsa-da, bu nazariya ba'zi-bir tushunmovchiliklarga olib keladi. Buning sabablari quydagilardan iborat. Birinchidan, yuqorida aytib o'tilgan bu metodda d-holatlarining elektr o'tkazuvchanlikda ishtirok etishi umuman e'tiborga olinmaydi (d-holatlar lokallashgan holatda dab qaraladi). Bu esa kristall va amorf holatidagi qotishmalar elektr o'tkazuvchanligini hisoblashlar natijalariga butunlay qarama-qarshidir. Ikkinchidan, bu metodda o'tkinchi metallar asosidagi qotishmalarda sochilish kuchli bo'lib, uni faqatgina kogerent potensial metodi asosidagina olib borish kerak. Uchinchidan, Xoll ko'effitsiyentli bir zonali va ikki zonali modellar asosida kogerent potentsiallar metodi asosida hisoblashlar natijasida Xouson-Morgan topgan qonuniyatlarni

tasdiqlab bermadi. Shuning uchun bunday qarama-qarshiliklar yechimini topish uchun konkret qotishmalar misolida qarab chiqishga to'g'ri keladi.

5) Endi,  $R_0$  ni bir zonali va ikki zonali kogerent potentsiallar metodi asosida hisoblashlar natijalari bilan tanishib chiqamiz. Birinchi marta  $R_0$  ni bir zonali bir tugunli kogerent potentsiallar metodi asosida Levin-Velicky-Erenreyxlar tomonidan diagonal tartibsizliklarda va nodiagonal tartibsizliklar asosida esa Xoshino-Niizekilar tomonidan hisoblab chiqdilar. Ular magnit maydonining kvaziklassik yaqinlashishida Xoll solishtirma elektr o'tkazuvchanligi uchun quyidagi umumiy ifodani hosil qildilar.

$$\sigma_{xy} = \frac{4e^2 B \hbar^2}{3\pi c \Omega} \int d\eta \left(-\frac{\partial f}{\partial \eta}\right) \int d\xi [I_m G(\eta)]^3 \sum_k v^2(\vec{k}) \delta(\xi - \varepsilon(\vec{k})) \quad (8)$$

bunda  $I_m G(\eta)$  – Grin funksiyasining mavhum qismi,  $\delta(\xi - \varepsilon(\vec{k}))$  – Dirak delta funksiyasi,  $\varepsilon(\vec{k})$  – qo'zg'alman holatga mos keluvchi energetik spektr.

Bu ifoda hususiy holda, ya'ni kuchsiz sochilish yaqinlashishida ( $\delta \ll 1$ ) Bolsmaning kinetik tenglamasidan aniqlanuvchi ifodani hosil qilish mumkin, ya'ni

$$\sigma_{xy}^B = \frac{2e^2 e H \tau^2}{(2\pi)^2 c} \int d^3 k \frac{\partial \varepsilon}{\partial k_x} \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial k} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial k_y^2} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial k_x} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial k_x \partial k_y} \right) \quad (9)$$

Bu ifodada erkin elektronlar modelini  $\varepsilon \sim k^2$  e'tiborga olib, effektiv massa  $m^*$  va elektronlar tezliklarini qo'yib, bundan (2) ifodani keltirib chiqarish mumkin. Levin-Velikiy-Erenreyxlar tomonidan  $R_0$  ni bir zonali model asosida hisoblashlar natijasi shuni ko'rsatadiki, solishtirma elektr o'tkazuvchanlik va termo-elektr yurutuvchi kuch ko'effitsiyentlaridan farqli ravshda  $R_0$  elektronlarning so'nish kattaligi  $\Delta$  – ga (ya'ni, kogerent potentsialning mavhum qismiga) kuchsiz bo'g'liq bo'lib,  $\Delta$  ning energetik o'zgarishi Xoll ko'effitsiyentiga  $R_0$  tasir qilmaydi.  $R_0$  ning energiyaga bog'liq holda o'zgarishiga  $E_f = Re \sum(z)$  shart bajarilganda (ya'ni, Fermi energiyasi kogerent potentsialning haqiqiy qismiga teng bo'lgan holda)  $R_0$  ning ishorasi manfiydan musbatga qarab o'zgarishi aniqladilar. Kuchsiz sochilishdan kuchli sochilishga o'tish  $R_0$  ga sezilarli darajada tasir qilmaydi va faqatgina spektrning katta normallashtirishi natijasida energiya o'qi bo'ylab siljish kuzatiladi.

Keyinchalik normal Xoll effekti ko'effitsiyentini ikki zonali s-d model asosida Brauwers-Bhattacharya-Brouerslar hisoblab chiqdilar va Xollning solishtirma elektr o'tkazuvchanligi uchun quyidagi umumiy ifodani hosil qildilar:

$$\sigma_{xy} = \frac{\hbar^2 e^2 B}{\pi^2 c \Omega} \int d\eta \left(-\frac{\partial f}{\partial \eta}\right) \sum_{k\alpha, \beta} C_{\alpha\beta} \{M_{xy}^{-1}(k) v_x^{\alpha\alpha}(k) \cdot v_y^{\beta\beta}(k) - M_{xx\alpha}^{-1}(k) v_y^{\alpha\alpha}(k) v_y^{\beta\beta}(k) \Gamma_{\alpha\beta}(\vec{k}, \eta)\} \quad (10)$$

bunda  $C_{ss} = 2$ ,  $C_{sd} = C_{ds} = \sqrt{20}$ ,  $C_{dd} = 10$ ,  $M_{ij\alpha}^{-1}(\vec{k}) = \frac{1}{\hbar^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_{\alpha}(k)}{\partial k_i \partial k_j}$ ;  $V_i^{\alpha\alpha}(k) = \frac{1}{\hbar^2} \frac{\partial \varepsilon_{\alpha}(k)}{\partial k_i}$

$$\Gamma_{\alpha\beta}(\vec{k}, \eta) = I_m G_{\alpha\beta}(\vec{k}, \eta); R_{\alpha\beta}(\vec{k}, \eta) = R_s G_{\alpha\beta}(\vec{k}, \eta)$$

Hosil qilingan bu ifoda (10) bir zonali model natijasini (8) umumlashtirib, hususiy holda gibridizatsiya ko'effitsiyenti nolga teng bo'lganda ( $\gamma \rightarrow 0$ ) bu ifodadan (8) ifoda kelib chiqadi. Olib borilgan modeli hisoblashlar natijasi shuni ko'rsatadiki, Xoll ko'effitsiyentining ishorasi s-zonani tubida manfiy bo'lib, zonaning cho'qqisida musbat ishoraga ega bo'ladi. Huddi bir zonadagi singari Xoll doimiysi  $E_f - R_s \sum(z)$  kattaligining o'zgarishiga bog'liq bo'lib, bir zonadagidan farqli ravishda kogerent potentsialning haqiqiy qismi  $d$  – zona tartibsizligi va  $sd$  – giberidizatsiyani o'z ichiga oladi. Xoll doimiysining ishora o'zgarishi bir zonadagidan farqli ravishda  $d$  – zonadan chiqishda ro'y beradi.

Solishtirma elektr o'tkazuvchanlik  $\sigma_{xx}$  va Xoll doimiysini  $R_0$  ni ikki zonali umumlashtirilgan  $sd$  – model bo'yicha kogerent potentsial metodi asosida hisoblashda zonalararo tezlikning matritsa elementlari  $v_{sd}$  ning hamda  $s$  – zonadagi sochilish potentsiali e'tiborga olinmagan. Bularni e'tiborga olsak u holda  $\sigma_{xx}$  va  $\sigma_{xy}$  lar uchun quyidagi umumiy ifodalarni hosil qilish mumkin:



$$\begin{aligned}
\langle \sigma_{xy}(B) \rangle = & \left( \frac{\hbar^2 \varepsilon_F^3}{\pi^2 \varepsilon \Omega} \right) \left\{ \sum_{k\alpha\beta} C_{\alpha\beta} [M_{xy\alpha\alpha}^{-1}(k) V_x^{\alpha\alpha} V_y^{\beta\beta}(k) - M_{xx\alpha\alpha}^{-1}(k) V_y^{\alpha\alpha} V_y^{\beta\beta}(k)] \Gamma_{\alpha\beta}(k, \varepsilon_F) \cdot \frac{\partial R_{\alpha\beta}(k, \varepsilon_F)}{\partial \varepsilon_{\alpha\alpha}(k)} + \right. \\
& \sum_{\substack{k\alpha\beta \\ \alpha \neq \beta}} 4C_{\alpha\beta} [M_{xy\alpha\alpha}^{-1}(k) V_x^{\alpha\alpha}(k) V_y^{\alpha\beta}(k) - M_{xy\alpha\alpha}^{-1}(k) V_y^{\alpha\alpha} V_y^{\alpha\beta}(k)] \cdot \left[ \frac{\partial^2 \gamma(k)}{\partial k_x \partial k_y} V_x^{\alpha\alpha}(k) V_y^{\beta\beta}(k) - \right. \\
& \left. \frac{\partial^2 \gamma(k)}{\partial k_x^2} V_y^{\alpha\alpha}(k) V_y^{\beta\beta}(k) \right] \cdot [\Gamma_{\alpha\alpha}(k, \varepsilon_F) \frac{\partial R_{\alpha\beta}(k, \varepsilon_F)}{\partial \varepsilon_{\alpha\alpha}(k)} + \sum_{\substack{k\alpha\beta \\ \alpha \neq \beta}} 2C_{\alpha\beta} \left[ \frac{\partial^2 \gamma(k)}{\partial k_x \partial k_y} V_x^{\alpha\alpha}(k) V_y^{\alpha\beta}(k) - \right. \\
& \left. \left. \frac{\partial^2 \gamma(k)}{\partial k_x^2} \right] \Gamma_{\alpha\alpha}(k, \varepsilon_F) \frac{\partial R_{\beta\beta}(k, \varepsilon_F)}{\partial \varepsilon_{\alpha\alpha}(k)} \right] \left. \right\} \quad (11)
\end{aligned}$$

Bu ifodadan ko‘rinib turibdiki, tezlikning zonalararo matritsa elementlari  $V_{sd}$  ni e‘tiborga olish natijasida uchta qo‘shimcha hadlar solishtirma elektr o‘tkazuvchanlik va normal Xoll effekti koeffitsiyenti o‘tkinchi metallar asosidagi qotishmalarda hisoblashda katta ro‘l o‘ynaydi.

Xoll koeffitsiyentini (11) ifoda bo‘yicha analitik ko‘rinishda hisoblashning imkoniyati yo‘q. Shuning uchun sonli hisoblashni amalga oshirishda to‘liq Brillyuen zonalar bo‘yicha integrallashni chetlab o‘tish uchun quyidagi yaqinlashishlardan foydalanamiz:

1. Birinchidan faraz qilaylik gibritlanmagan s-zonaning holatlar zichligi Xabbardning yarim elliptik ko‘rinishdagi holatlar zichligi kabi bo‘lsin, ya‘ni

$$g_0^s(E) = \frac{1}{N} \sum_k \delta(E - \varepsilon_s(k)) = \begin{cases} \frac{2}{\pi \omega_s^2} (\omega_s^2 - E^2)^{\frac{1}{2}}, & |E| \leq \omega_s \\ 0, & |E| > \omega_s \end{cases} \quad (12)$$

bunda  $\omega_s$  – s-zonaning yarim kengligi. U holda Fermi sathida holatlar zichligi quyidagi formulalar orqali aniqlanadi:

$$\begin{aligned}
g(\varepsilon_F) &= g_s(\varepsilon_F) + g_d(\varepsilon_F) \\
g_s(\varepsilon_F) &= -\frac{2}{\pi} I_m F_{ss}(\varepsilon_F + i0, \Sigma_s, \Sigma_d) \\
g_d(\varepsilon_F) &= -\frac{2}{10} I_m F_{dd}(\varepsilon_F + i0, \Sigma_s, \Sigma_d) \quad (13)
\end{aligned}$$

va bunga mos ravishda qotishmaning Fermi sathi energiyasi quyidagi munosabatdan topiladi:

$$\int_{-\infty}^{\varepsilon_F} g(\varepsilon) d\varepsilon = x n^A + (1-x) n^B \quad (14)$$

bunda  $n^A, n^B$  - mos ravishda A va B metallardagi elektronlarning to‘liq soni.

2. Zonalar parametriga bog‘liq bo‘lgan yordamchi  $\Phi(E)$  funksiyani Velikiy tomonidan taqdim etilgan quyidagi munosabat ko‘rinishida olamiz:

$$\Phi(E) = \frac{1}{N} \sum_k [V^{ss}(k)]^2 \delta(\varepsilon - \varepsilon_s(k)) = \frac{2v_m^2}{\pi \omega_s^2} (\omega_s^2 - E^2)^{3/2} \quad (15)$$

bunda  $V^{ss}(\vec{k}) = \frac{1}{\hbar} \left| \frac{\partial \varepsilon_s(k)}{\partial k} \right|$ ,  $v_m$  – zonadagi elektronlarning eng katta maksimal tezligi bo‘lib, u quyidagiga teng bo‘ladi:

$$v_m = \frac{a \omega_s}{\hbar}, \quad (a - \text{panjara doimiysi}).$$

3. Elektronlarning zonalararo tezligi uchun quyidagi yaqinlanishdan foydalanamiz:

$$v_{sd}(\vec{k}) = \frac{1}{\hbar} \left| \frac{\partial \gamma(\vec{k})}{\partial \vec{k}} \right| = \left( \frac{\gamma}{\omega_s} \right) V^{ss}(\vec{k}) \quad (16)$$

bu yerda  $\gamma$  – gibridizatsi potensialining kattaligi.

Mana bu yaqinlashishlarni e‘tiborga olib, ikki zonali umumlashtirilgan s–d modellda kogerent potensial yaqinlanishda solishtirish elektr o‘tkazuvchanlik tenzorining diagonal elementlari uchun quyidagi ifodalarni yozish mumkin:

$$\sigma_{xx}(\varepsilon_F) = \sigma_{xx}^{ss}(\varepsilon_F) + \sigma_{xx}^{dd}(\varepsilon_F) + 2\sigma_{xx}^{sd}(\varepsilon_F) + 2\left(\sigma_{xx}^{sd}(\varepsilon_F)\right)' \quad (17)$$

Bunda

$$\sigma_{xx}^{ss}(\varepsilon_F) = 2\sigma_0 \int_{-\omega_s}^{\omega_s} (\omega_s^2 - E^2)^{3/2} dE [\Gamma_{ss}(E; \varepsilon_F)]^2 \quad (18)$$

$$\sigma_{xx}^{dd}(\varepsilon_F) = 10\alpha^2 \sigma_0 \int_{-\omega_s}^{\omega_s} (\omega_s^2 - E^2)^{3/2} dE [\Gamma_{dd}(E; \varepsilon_F)]^2 \quad (19)$$

$$\sigma_{xx}^{sd}(\varepsilon_F) = \sqrt{20}\alpha\sigma_0 \int_{-\omega_s}^{\omega_s} (\omega_s^2 - E^2)^{3/2} dE [\Gamma_{sd}(E; \varepsilon_F)]^2 \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \left(\sigma_{xx}^{sd}(\varepsilon_F)\right)' &= \sqrt{20}\left(\frac{\gamma}{\omega_s}\right)^2 \sigma_0 \int_{-\omega_s}^{\omega_s} (\omega_s^2 - E^2)^{3/2} dE [\Gamma_{ss}(E; \varepsilon_F)] [\Gamma_{dd}(E; \varepsilon_F)] \\ &+ 2\sqrt{20}\left(\frac{\gamma}{\omega_s}\right) \sigma_0 \int_{-\omega_s}^{\omega_s} (\omega_s^2 - E^2)^{3/2} dE [\Gamma_{ss}(E; \varepsilon_F)] [\Gamma_{sd}(E; \varepsilon_F)] \\ &+ 2\sqrt{20}\left(\frac{\gamma}{\omega_s}\right) \alpha \sigma_0 \int_{-\omega_s}^{\omega_s} (\omega_s^2 - E^2)^{3/2} dE [\Gamma_{dd}(E; \varepsilon_F)] [\Gamma_{sd}(E; \varepsilon_F)] \end{aligned} \quad (21)$$

$$\sigma_0 = \frac{4v_m^2 \varepsilon^2 \hbar}{3\pi^2 \Omega \omega_s^4}, \quad \varepsilon_d(k) = \alpha \varepsilon_s(k) (\alpha < 1). \quad (22)$$

Solishtirma elektr o'tkazuvchanlikning nodiagonal elementlarini hisoblashda yuqoridagi yaqinlashishlarga ko'shimcha sifatida quyidagi yaqinlanishlarni e'tiborga olamiz:

1) Elektronning effektiv massasi tenzorining nodiagonal tashkil etuvchisi nolga teng bo'lsin, ya'ni  $M_{xy}^{-1} = 0$ .

2) Gibrizatsiya kattaligining kvaziimplusga bog'liqligini quyidagi ko'rinishda olamiz:  $(k) \sim \gamma \alpha^2 k^2$ , bunda  $\gamma$  — giberizatsiya parametri,  $\alpha$  — panjara doimiysi.

3) Zonalar parametriga bog'liq bo'lgan yordamchi funksiyani Fukuyama tomonidan tag'dim etilgan quyidagi munosabat ko'rinishida olamiz:

$$\frac{1}{N} \sum_k [v^{ss}(\vec{k})]^4 \delta(\varepsilon - \varepsilon_s(k)) = \frac{2v_m^4}{\pi \omega_s^5} (\omega_s^2 - \varepsilon^2)^{5/2} \quad (23)$$

Bu yaqinlashishlarni e'tiborga olib, (11) ifodani  $\mathbf{k}$  bo'yicha yig'indidan integralga o'tkazib, ya'ni solishtirma elektr o'tkazuvchanlik tenzorining magnit maydonidagi nodiagonal elementlari uchun quyidagi ifodani hosil qilish mumkin:

$$\sigma_{xy}(\varepsilon_F) = \sigma_{xx}^{ss}(\varepsilon_F) + \sigma_{xy}^{dd}(\varepsilon_F) + 2\sigma_{xy}^{sd}(\varepsilon_F) + 2\left(\sigma_{xy}^{sd}(\varepsilon_F)\right)' \quad (24)$$

bunda

$$\sigma_{xy}^{ss}(\varepsilon_F) = 2\sigma_H \int_{-\omega_s}^{\omega_s} (\omega_s^2 - E^2)^{5/2} dE [\mathcal{F}_{ss}(E; \varepsilon_F)]^2 \quad (25)$$

$$\sigma_{xy}^{dd}(\varepsilon_F) = 10\alpha^2 \sigma_H \int_{-\omega_s}^{\omega_s} (\omega_s^2 - E^2)^{5/2} dE [\mathcal{F}_{dd}(E; \varepsilon_F)]^2 \quad (26)$$

$$\sigma_{xy}^{sd}(\varepsilon_F) = \sqrt{20}\alpha\sigma_H \int_{-\omega_s}^{\omega_s} (\omega_s^2 - E^2)^{5/2} dE [\mathcal{F}_{sd}(E; \varepsilon_F)]^2 \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \left(\sigma_{xy}^{sd}(\varepsilon_F)\right)' &= 2\sqrt{20}\left(\frac{\gamma}{\omega_s}\right) \sigma_H \int_{-\omega_s}^{\omega_s} (\omega_s^2 - E^2)^{5/2} dE \left\{ \frac{\partial^2 R_{sd}(E; \varepsilon_F)}{\partial E^2} [\Gamma_{ss}(E; \varepsilon_F) + \alpha \Gamma_{dd}(E; \varepsilon_F)] + \right. \\ &\frac{\partial R_{sd}(E; \varepsilon_F)}{\partial E} \left[ \frac{\partial \Gamma_{ss}(E; \varepsilon_F)}{\partial E} + \alpha \frac{\partial \Gamma_{dd}(E; \varepsilon_F)}{\partial E} \right] \left. \right\} + \left( 2\sqrt{20}\alpha \frac{\gamma^2 \alpha^2}{\hbar^2} \frac{9\sigma_H}{v_m^2} \right) \int_{-\omega_s}^{\omega_s} (\omega_s^2 - \\ &E^2)^{5/2} dE \left\{ \Gamma_{sd}(E; \varepsilon_F) \left[ \frac{\partial R_{ss}(E; \varepsilon_F)}{\partial E} + \frac{\partial R_{dd}(E; \varepsilon_F)}{\partial E} \right] + \left( \sqrt{20}\alpha \frac{\gamma^2 \alpha^2}{\omega_s} \frac{9\sigma_H}{v_m^2} \right) \int_{-\omega_s}^{\omega_s} (\omega_s^2 - \right. \\ &E^2)^{5/2} dE \left\{ \Gamma_{ss}(E; \varepsilon_F) \frac{\partial R_{dd}(E; \varepsilon_F)}{\partial E} + \alpha \Gamma_{dd}(E; \varepsilon_F) \frac{\partial R_{ss}(E; \varepsilon_F)}{\partial E} \right\} \end{aligned} \quad (28)$$

$$\mathcal{F}_{\alpha\beta}(E; \varepsilon_F) = \Gamma_{\alpha\beta}(E; \varepsilon_F) \frac{\partial^2 R_{\alpha\beta}(E; \varepsilon_F)}{\partial E^2} + \frac{\partial R_{\alpha\beta}(E; \varepsilon_F)}{\partial E} \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}(E; \varepsilon_F)}{\partial E} \quad (29)$$

$\Gamma_{\alpha\beta}(E; \varepsilon_F)$  va  $R_{\alpha\beta}(E; \varepsilon_F)$  mos ravshda Grin funksiyasining  $G_{\alpha\beta}(E; \varepsilon_F)$  mavhum va haqiqiy qismlari,  $\sigma_H$  – doimiy kattalik bo‘lib, u quyidagiga teng:

$$\sigma_H = \frac{2v_m^4 e^3 \hbar^2 B}{9\pi^3 C \Omega v_s^6} \quad (30)$$

O‘tkinchi metallar asosidagi amorf qotishmalarning kinetik xossalarini xarakterlovchi kattaliklarni (solishtirma elektr qarshilik, termo-E.Yu.K koeffitsiyenti, Xoll effekti koeffitsiyenti) tajribada olingan qiymatlarini fizik nuqtai-nazardan talqin etishda hozirgi vaqtda zaryad tashuvchilarning sochilishi kuchsiz bo‘lgan holdagi qonunyatga asoslanuvchi umumlashgan Faber–Zayman modeli qo‘llaniladi. Shuningdek bu modelda  $d$  – elektronlarning zaryad ko‘chishlari e‘tiborga olinmaydi. Bu model asosida olib borilgan hisoblashlar shuni ko‘rsatadiki, oddiy va nodir metallar asosidagi qotishmalarda solishtirma elektr qarshilikning konsentrasiyaga va temperaturaga bog‘liqligini tushuntirib berishga imkon beradi, ammo to‘lmagan d-holatdagi elektronlarga (o‘tkinchi metallar) bu modelni tadbqiq qilish jiddiy qiyinchiliklarga olib keladi.

Birinchidan, bunday qotishmalarning solishtirma elektr qarshiligi juda katta qiymatga ( $\rho(0) \geq 150 \text{ mkOm} \cdot \text{sm}$ ) ega bo‘lib, bu esa ularda zaryad tashuvchilarning sochilishi kuchsiz emasligini bildiradi. Xususan, ikki komponentali o‘tkinchi metallar asosidagi qotishmalarda (masalan,  $\text{Cu}_x\text{Ti}_{1-x}$ ) qarshilikning temperatura koeffitsiyenti manfiy ishoraga ega bo‘lib, uning qiymati tempraturaning 4.2 K qiymatigacha pasayishida taxminan 3% ga oshishini ko‘rsatadi. Solishtirma elektr o‘tkazuvchanlikning tempraturaga bog‘lanishidan ko‘rinadiki,  $T < 100 \text{ K}$  da  $\sigma \sim T$  va  $T > 100 \text{ K}$  da  $\sigma \sim \sqrt{T}$  bog‘lanishlar tajribada kuzatilgan.

Ikkinchidan, o‘tkinchi metallar asosidagi amorf qotishmalarning ko‘pchiligida Xoll koeffitsiyenti R konsentratsiyaning o‘zgarishi bilan o‘z ishorasini manfiydan musbatga o‘zgartiradi, bu esa yuqoridagi modelga hech qachon to‘g‘ri kelmaydi. Bunday qarashlarni bartaraf etish uchun s-d gibridizatsiya effektiga asoslangan anomal dispersiya konsepsiyasini qo‘llash kerak.

Uchinchidan, elektr o‘tkazuvchanlikda d-holatlarining ham ulushi bor degan farazga asoslanilsa, modelning birlamchi parametrlarini ham tanlash ixtiyoriy bo‘ladi, hususan, qotishmalarning effektiv valentligi masalasida bu qotishmalarning elektron strukturasi hisoblanmay, balki ma‘lum degan faraz asosida olib boriladi. Shuning uchun ushbu ishda yuqoridagi kamchiliklarni bartaraf etish maqsadida o‘tkinchi metallar asosidagi amorf qotishmalarda kinetik xossalarni o‘rganishda kogerent potensial metodini qo‘llaymiz. Kristall qotishmalar uchun yaratilgan KPM ni topologik notartib sistemalar uchun umumlashtirilgan bazi bir qiyinchiliklarni tug‘diradi. Shuning uchun ushbu ishda hisoblash nuqtai – nazardan oson bo‘lgan quydagi sxema asosida, aniqrog‘i kogerent lokator yaqinlashishida ikki zonali umumlashgan s-d model uchun nodiagonal tartibsizliklarni hisobga olib, effektiv qotishmalarning bir zarrachali Grin funksiyasi hisoblaniladi. Bunda sakrash integrali huddi kristall qotishmalardagi singari bitta yoki uchta qiymatni qabul qilmay, balki amorf qotishmalarning atomlarining juft taqsimlanish funksiyasiga mos keluvchi Gauss taqsimoti funksiyasi orqali beriluvchi uzluksiz qator qiymatlarni qabul qiladi. Bunday sxema asosida aniqlangan amorf qotishmalarning elektron strukturasi keyinchalik kinetik xossalarni hisoblashda qo‘llaniladi va kristall qotishmalardagi KPM yaqinlashishdagi ifodalarni amorf qotishmalarga qo‘llash mumkin.

$\text{Cu}_x\text{Ti}_{1-x}$  qotishmalarning elektron strukturasi hisoblash uchun qotishma tarkibiga kiruvchi mis (**Cu**) va titan (**Ti**) elementlari s- va d-zonalarining yarim kengliklari  $W$  va ularning og‘irlik markazlari  $\varepsilon$  (**ev** larda ) hamda gibridizatsiya  $\gamma$  parametrlari sonli hisoblashlarni amalga oshirishda birlamchi bo‘lgan parametrlar quyida keltirilgan:

| Modda     | $W_d$ | $W_s$ | $\varepsilon_d$ | $\varepsilon_s$ | $\gamma$ |
|-----------|-------|-------|-----------------|-----------------|----------|
| <b>Cu</b> | 3.1   | 17.6  | -10.1           | -8.2            | 1.2      |
| <b>Ti</b> | 4.3   | 10.0  | -2.6            | -4.6            | 1.0      |

Hisoblashlarni soddalashtirish maqsadida quydagi yaqinlashishlarni ham e‘tiborga olamiz:

$$1) \gamma = x\gamma^{\text{Cu}} + (1-x)\gamma^{\text{Ti}}; \quad 2) v_{sd} = \left(\frac{\gamma}{W_s}\right) v_{ss};$$

$$3) \frac{1}{N} \sum_k \delta(E - \varepsilon_\alpha(k)) v_\alpha^2 = \frac{2(v_\alpha^m)^2}{\pi W_\alpha} \left[ 1 - \left( \frac{E}{W_\alpha} \right)^2 \right]^{3/2}, \text{ bunda } v_\alpha^m = \left( \frac{\alpha}{\sqrt{3}} \right) W_\alpha$$

( $\alpha = s, d$ ),  $a$  – qotishmadagi atomlararo o‘rtacha masofa.

4) Qotishmalarning Fermi energiyasi qotishmaning to‘liq energetik spektridan aniqlanadi:

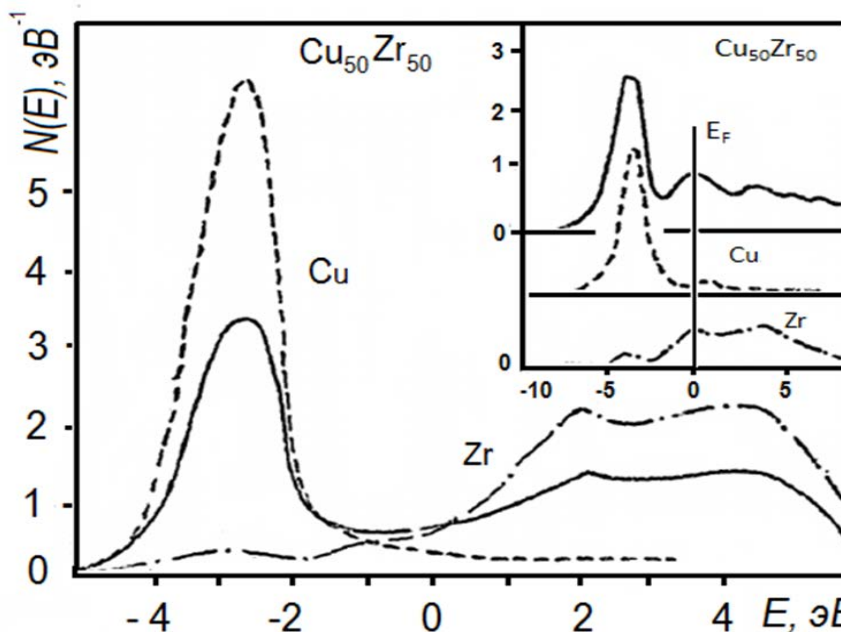
$$\int_{-\infty}^{E_F} [g^s(E) + g^d(E)] dE = x n_0^{Cu} + (1-x) n_0^{Ti}$$

bunda  $n_0^{Cu}$  – Cu uchun s-va d –elektronlar to‘liq soni  $3d^{10}4s^1$  elektron struktura uchun  $n_0^{Cu} = 11$ ,  $n_0^{Ti}$  – Ti uchun ( $3d^24s^2$  – elektron konfiguratsiyasi) s- va d –elektronlarning to‘liq sonibo‘lib, u 4 ga teng  $n_0^{Ti} = 4$ . Mis elementi (Cu) - GTK panjaraviy strukturaga ega bo‘lib, elementar yacheykadagi atomlar soni  $Z=4$  ga teng, bitta atomga to‘g‘ri keluvchi hajm  $V_{aT} = \frac{a^3}{Z}$  ( $a$  - panjara doimiysi) ga teng va

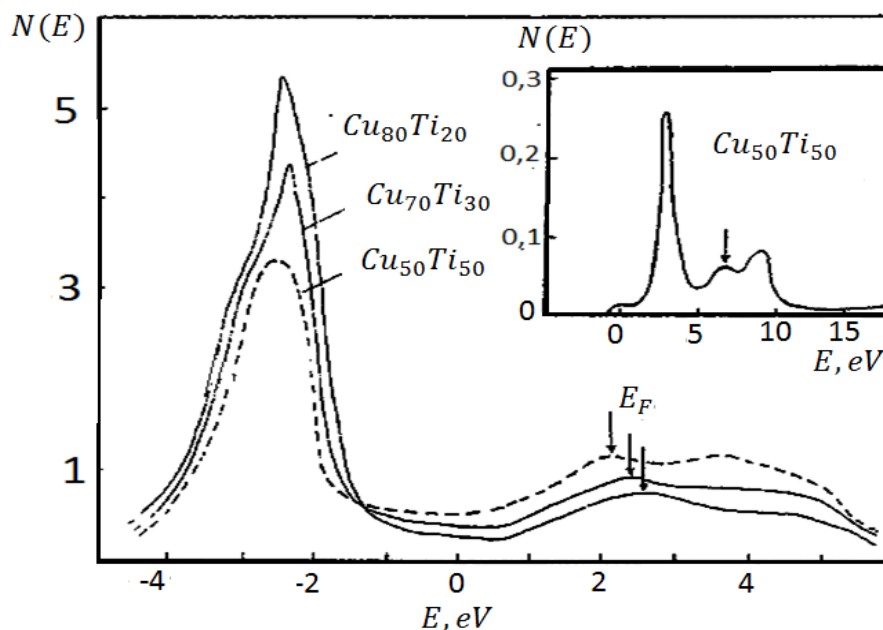
molyar hajm  $V_{mol} = N_A \frac{a^3}{Z}$  ( $N_A$  – Avagadro soni). U holda molyar massa  $\mu$  bilan kristall zichligi  $\rho$  o‘rtasidagi  $\rho = \frac{Z\mu}{N_A a^3}$  bog‘lanishdan  $a^3 = \frac{Z\mu}{N_A \rho} = \frac{4.63.54 \cdot 10^{-3}}{6.02 \cdot 10^{23} \cdot 8.93 \cdot 10^3} = 4.7 \cdot 10^{-29} m^3$  ni topamiz va  $1 m^3$  hajmga to‘g‘ri keluvchi atomlar soni quydagiga teng bo‘ladi:  $N^{Cu} = \frac{Z}{a^3} = 8.49 \cdot 10^{28} m^{-3}$ .

Ti elementi (Ti) – GPU panjaraviy strukturaga ega bo‘lib, uning panjara doimiylari  $a = 2.95 \cdot 10^{-10} m$ ,  $c = 4.69 \cdot 10^{-10} m$  ga teng bo‘lib, elementlar yacheykadagi atomlar soni  $Z = 2$  ga teng va bitta atomga to‘g‘ri keluvchi hajm  $V_{aT} = \frac{\sqrt{3} a^2 c}{2}$ . U holda  $1 m^3$  hajm birligiga to‘g‘ri keluvchi atomlar soni Ti elementi uchun quydagiga teng bo‘ladi:  $N^{Ti} = \frac{1}{V_{aT}} = \frac{2Z}{\sqrt{3} a^2 c} = 6.6 \cdot 10^{28} m^3$ .

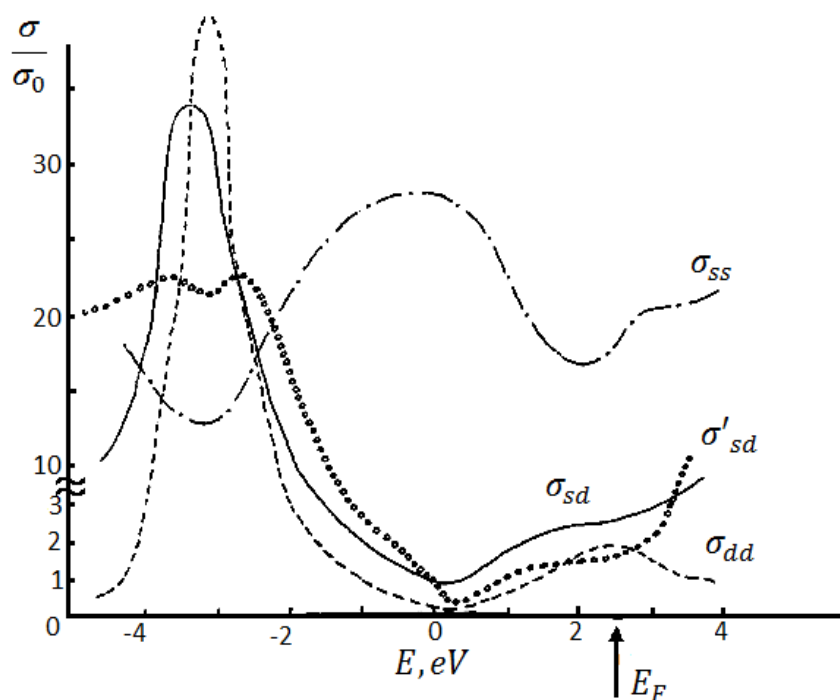
1- va 2-rasmlarda amorf qotishmasining  $Cu_{50}Ti_{50}$  hisoblangan parsial va to‘liq electron holat zichligi hamda amorf qotishmalarning Cu-Ti 3 ta konsentratsiyasi uchun kogerent potensial metodi asosida hisoblangan holatlar zichligining energiyaga bog‘liqligi grafigi keltirilgan. Strelkalar yo‘nalishi Fermi sathini ko‘rsatadi. Shu grafikning yuqori burchagida  $Cu_{50}Ti_{50}$  amorf qotishmalarning holatlar zichligini LMTO metodi (kuchli bog‘lanish metodi) atom sferalari yaqinlanishida 1500 atomdan iborat bo‘lgan klaster uchun hisoblangan elektronlar holat zichligi keltirilgan bo‘lib, kogerent potensial metodining lokator yaqinlashishda hisoblangan elektron strukturasi LMTO yordamida hisoblangan elektron struktura bilan mos tushadi. Elektronlar holat zichligi d –holatlar orqali aniqlanib, qotishma tarkibidagi Ti elementlari konsentratsiyasi oshib borishi bilan Fermi sathi ham oshib boradi. Haqiqatdan ham Ti elementi uchun elektron holat zichligi funksiyasida Fermi sathi energiyasi Ti elementi d – holatga (cho‘qqisiga) yaqin joylashgan bo‘ladi, mis Cu elementida d – holatlar to‘lgan bo‘lib, Fermi sathi energiyasi, d – zonadan tashqarida joylashgan bo‘ladi.



1-rasm.  $Cu_{50}Ti_{50}$  amorf qotishmasining parsial va to‘liq electron holat zichligining energiyaga bog‘liqligi.



2-rasm. Amorf qotishmalar  $\text{Cu}_x\text{Ti}_{1-x}$  elektron holat zichligining energiyaga bog‘liqligi (energetik spektri). Vertikal chiziqlar qotishma Fermi sathining joylashishini ko‘rsatadi (konsentratsiya o‘zgarishi bilan Fermi sathining ham siljib borishini ko‘rish mumkin). Shuningdek, taqqoslash maqsadida yuqori burchakda LMTO metodi asosida hisoblangan  $\text{Cu}_{50}\text{Ti}_{50}$  qotishmasining holatlar zichligi keltirilgan.

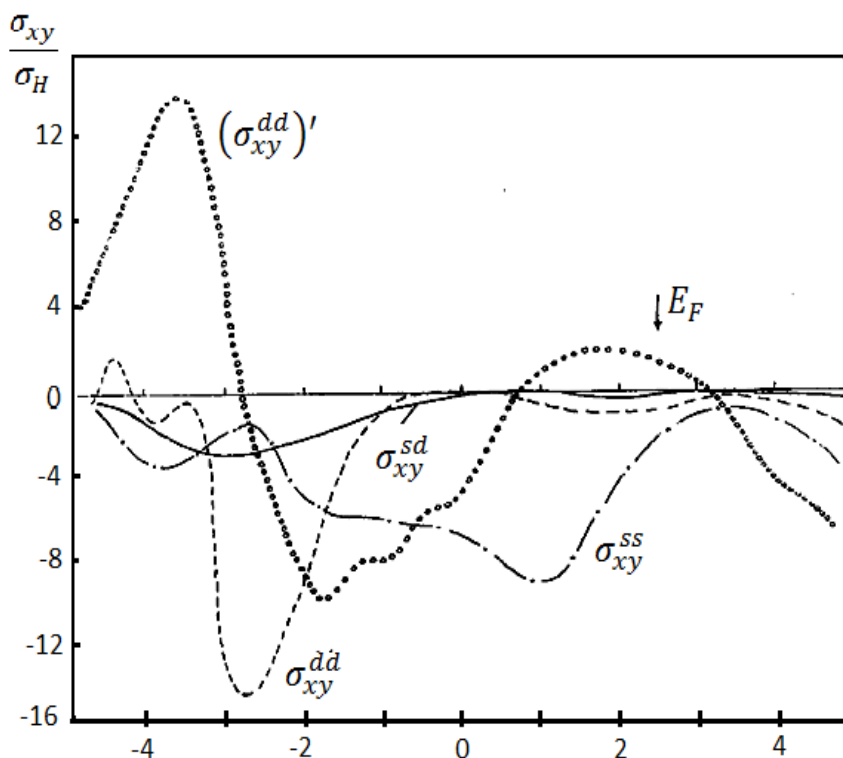


3-rasm.  $\text{Cu}_{50}\text{Ti}_{50}$  amorf qotishmasi uchun solishtirma elektr o‘tkazuvchanlik tashkil etuvchilarining energiyaga bog‘lanish (bunda  $\sigma_0 = \frac{4v_m^2 e^2 \hbar}{3\pi^2 \Omega}$ )

$\text{Cu}_{50}\text{Ti}_{50}$  qotishmasi uchun solishtirma elektr o‘tkazuvchanlik partsial va natijaviy qiymatlarining (II.17-II.21 ifodalar asosida) Fermi energiyasi sathidan bo‘g‘liqlik grafigi 2-rasmda keltirilgan. Fermi energiyasining istalgan ixtiyoriy qiymatlarida tezlikning zonalararo o‘tish matritsa elementlari bilan bog‘liq bo‘lgan hadi  $(\sigma_{xx}^{sd}(\epsilon_F))$  giberdizatsion had  $\sigma_{xx}^{sd}(\epsilon_F)$  bilan bir xil tartibda bo‘lib, u bilan energetik

bog'liqligi juda yaqin ko'rinishga ega. Fermi energiyasining haqiqiy joylashgan nuqtasida (2-rasmda strelka bilan ko'rsatilgan) solishtirma elektr o'tkazuvchanlikning  $\sigma$  asosiy hadini s—holatlar ( $\sigma_{ss}$ ) tashkil qiladi, ammo d—holatlar ( $\sigma_{dd}$ ) va gibridizatsion tashkil etuvchilar ( $\sigma_{xy}^{sd}, (\sigma_{xy}^{sd})'$ ) ham unchalik kichik bo'lmagan qiymatlarga ega ekanligini ko'rish mumkin. Buning birdan-bir sababi s—elektronlarning holatlar zichligiga ulushi kichik bo'lsada, ularning kuchsiz sochilishga nisbatan so'nishi d—elektronlarga nisbatan juda kichik bo'lishi bilan bo'g'liq bo'lishi mumkin.

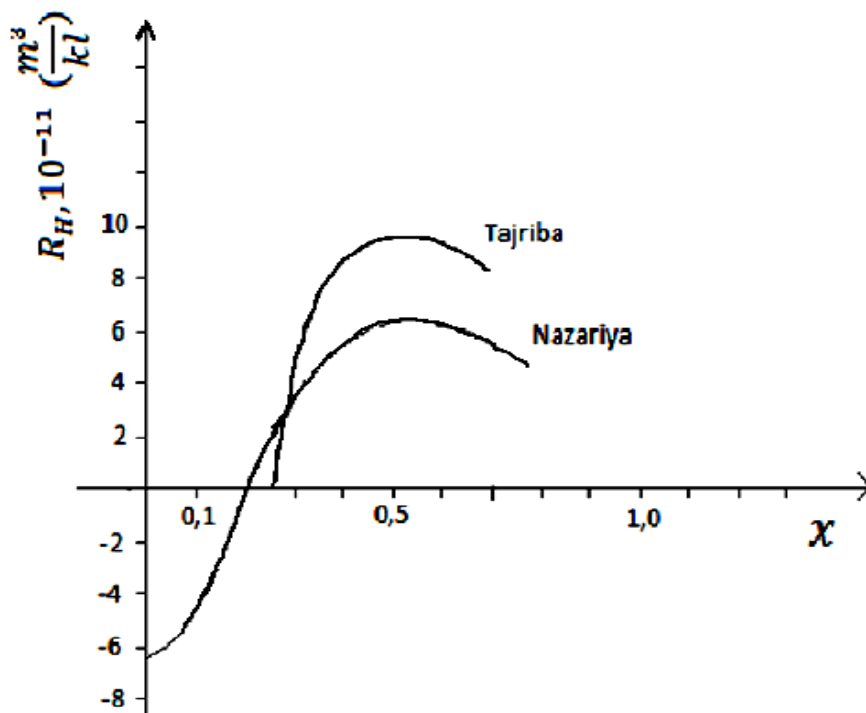
$\text{Cu}_{50}\text{Ti}_{50}$  amorf qotishmasi uchun solishtirma elektr o'tkazuvchanlik tenzorining nodiagonal elementlari tashkil etuvchilarining energiyaga bog'liqligi (II.24-II.30 ifodalar asosida hisoblangan) grafigi 3-rasmda, Xoll doimiysining konsentratsiyaga bog'liqligi esa 4-rasmda keltirilgan. Shuni alohida ta'kidlab o'tish lozimki, partial tashkil etuvchilar juda ham murakkab energetik bog'lanishlarga ega bo'lib, ular elektronlar holat zichligining energetik bog'lanishi bilan mos tushmaydi.  $\sigma_{xy}^{dd}$  tashkil etuvchisi to'liq energetik diapazonda Cu komponentining d-zonasining tashqarisidan bo'lak, hamma joyda juda kichik, shuning uchun Xoll koefitsientining qiymati va ishorasi s-holatning tashkil etuvchisi  $\sigma_{xy}^{ss}$  va gibridizatsion  $\sigma_{xy}^{sd}$  va  $(\sigma_{xy}^{sd})'$  tashkil etuvchilarning qiymatlari bilan aniqlanadi. Yig'indi Holl o'tkazuvchanligi  $\sigma_{xy}$  va Xoll koefitsientining Ro Fermi sathi energiyasi yoki konsentrasiya o'zgarishi bilan ishorasining o'zgarishi o'tkazuvchanlikning tezlikning zonalararo matrisa elementlari orqali aniqlanuvchi tashkil etuvchisi  $(\sigma_{xy}^{sd})'$  ning  $\sigma_{xy}^{ss}$  va  $\sigma_{xy}^{sd}$  tashkil etuvchilariga qaraganda turli xil energetik bog'lanishga hamda qarama-qarshi ishoraga ega ekanligi hisobiga amalga oshiriladi. Bu esa Xouson-Morganlarning o'tkinchi metallar asosidagi amorf qotishmalarda Xoll koefitsientining ishora o'zgarishi sd-gibridizatsiya effekti tufayli yuz beradi degan konsepsiyasiga muvofiq keladi.



4-rasm.  $\text{Cu}_{50}\text{Ti}_{50}$  amorf qotishmasi uchun solishtirma elektr o'tkazuvchanlikning nodiagonal elementi uchun partial tashkil etuvchilarining energiyaga bog'liqligi

(bunda  $\sigma_H = -\frac{2v_m^4 e^3 B}{9\pi^2 c \Omega}$ ).





**5-rasm.**  $\text{Cu}_x\text{Ti}_{1-x}$  qotishmalar uchun normal Xoll koeffitsiyenti  $R_H$  ning konsentratsiyaga bogʻliqlik grafigi: (tajriba natijalari [15])

Shunday qilib, oʻtkinchi metallar asosidagi ikki komponentali nomagnit amorf qotishmalarning elektron strukturasi, solishtirmalelektr qarshilik hamda Holl koeffisienti kattaliklari uchun kogerent potensial metodi umumiyashtirilgan giberidizatsion s-d modeli asosida chiqarilgan umumiy ifodalar, konkret amorf qotishmasi  $\text{Cu}_x\text{Ti}_{1-x}$  uchun sonli hisoblashlar usulidan foydalanilgan holda bajarildi. Hisoblashlar natijasi tajribada oʻlchangan qiymatlarga ancha yaqin boʻladi. Xoll koeffitsiyenti musbat ishoraga ega boʻlishi hamda konsentratsiya oʻzgarishi bilan Xoll koeffitsiyenti oʻz ishorasini oʻzgartirishi hamda d— zonaning elektr oʻtkazuvchanlik ulushi qiymatiga ega ekanligidan dalolat beradi. Kelajakda bunday notartib qotishmalarning elektron strukturasi va kinetik hossalari hisoblashda faqatgina kogerent potentsiallar metodini qoʻllash kerak degan xulosaga olib keladi.

#### Adabiyotlar

1. Ведяев А.В., Грановский А.Б., Котельникова О.А. Кинетические явления в неупорядоченных ферромагнитных сплавах. –М.: МГУ, 1992. –158 с
2. Эренрейх Г., Шварц Л. Электронная структура сплавов. - М.,1979, 200 с.
3. Brouers F., Vedyayev A.V. // Phys.Rev.B. 1972. 5. № 2. P. 384
4. Chen A.B., Weisz G., Sher A. // Phys. Rev. B, 1972. 5. № 8. P.2897
5. Грановский А.Б, Кувандилов О.К, Хамраев Н.С. // ФММ. 1987. 63. № 2. С.301
6. Howson M.A., Morgan G.T. // Phil mag.B. 1985. 51. P. 439
7. Имамназаров Д.Х. Сопротивление и эффект Холла в модифицированной s-d модели неупорядоченных сплавов // Самарканд. Деп.в Уз НИИТИ. №1251, от 24.05.90.
8. Gallagher B.L. Greig D.// J.Phys.F. 1982. 12. P.1721
9. M.A.Howson, B.L.Gallagher. Phys.Rep. 1988. 170. №5, P.265
10. Ведяев А.В, Грановский А.Б, Халилов И.Х. Ниналалов С.А., Имамназаров Д.Х, Гехтман М.М. // Вест. МГУ, Сер.3, физ.-астрон., 1991. 32. № 5. С. 61

## MUALLIFLAR DIQQATIGA!

Hurmatli mualliflar, maqola muallif tomonidan qog'ozda chop etilgan va elektron shaklida taqdim qilinishi shart. **Maqolada quyidagi bandlar:** UDK, ishning nomi (o'zbek, rus va ingliz tillarida), maqola hammualliflarining ro'yxati (to'liq familiyasi, ismi, otasining ismi – o'zbek, rus va ingliz tillarida), muallif haqida ma'lumotlar: ish joyi, lavozimi, pochta va elektron pochta manzili; maqola annotatsiyasi (300 belgigacha, o'zbek, rus va ingliz tillarida), kalit so'zlar (5-7, o'zbek, rus va ingliz tillarida) bo'lishi lozim.

## MAQOLALARGA QO'YILADIGAN TALABLAR!

Maqolalarning nashr etilishi uchun shartlar nashr etilishi mo'ljallangan maqolalar dolzarb mavzuga bag'ishlangan, ilmiy yangilikka ega, muammoning qo'yilishi, muallif tomonidan olingan asosiy ilmiy natijalar, xulosalar kabi bandlardan iborat bo'lishi lozim; ilmiy maqolaning mavzusi informativ bo'lib, mumkin qadar qisqa so'zlar bilan ifodalangan bo'lishi kerak va unda umumiy qabul qilingan qisqartirishlardan foydalanish mumkin; "Ilmiy axborotnoma" jurnali mustaqil (ichki) taqrizlashni amalga oshiradi.

## MAQOLALARNI YOZISH VA RASMIYLASHTIRISHDA QUYIDAGI QOIDALARGA RIOYA QILISH LOZIM:

Maqolalarning tarkibiy qismlariga: kirish (qisqacha), tadqiqot maqsadi, tadqiqotning usuli va obyekti, tadqiqot natijalari va ularning muhokamasi, xulosalar yoki xotima, bibliografik ro'yxat. Maqola kompyuterda Microsoft Office Word dasturida yagona fayl ko'rinishida terilgan bo'lishi zarur. Maqolaning hajmi jadvallar, sxemalar, rasmlar va adabiyotlar ro'yxati bilan birgalikda doktorantlar uchun 0,25 b.t. dan kam bo'lmasligi kerak. Sahifaning yuqori va pastki tomonidan, chap va o'ng tomonlaridan - 2,5 sm; oriyentatsiyasi - kitob shaklida. Shrift - Times New Roman, o'lchami - 12 kegl, qatorlar orasi intervali - 1,0; bo'g'in ko'chirish - avtomatik. Grafiklar va diagrammalar qurishda Microsoft Office Excel dasturidan foydalanish lozim. Matndagi bibliografik havolalar (ssilka) kvadrat qavsda ro'yxatda keltirilgan tartibda qayd qilish lozim. Maqolada foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati keltirilishi lozim. Bibliografik ro'yxat alfavit tartibida - GOST R 7.0.5 2008 talablariga mos tuziladi.

- Ikki oyda bir marta chiqadi.
- "Samarqand davlat universiteti ilmiy axborotnomasi"dan ko'chirib bosish faqat tahririyatning yozma roziligi bilan amalga oshiriladi.
- Mualliflar maqolalardagi fakt va raqamlarning haqqoniyligiga shaxsan mas'ul.

## MAQOLAGA QUYIDAGILAR ILOVA QILINADI:

- Yo'llanma xati;
- Ekspert xulosasi.

E- mail: axborotnoma@samdu.uz



# **SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI ILMIY AXBOROTNOMASI**

**НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК**

**SCIENTIFIC REPORTS**

Mas'ul kotib  
Musahhih  
Texnik muharrir

**X. Sh. Tashpulatov**  
**O. Ro'ziboyev**  
**A. I. Inatov**

## **Muharrirlar:**

|                     |                      |
|---------------------|----------------------|
| <b>I.Sulaymonov</b> | - f.f.d., dotsent    |
| <b>E.Arziqulov</b>  | - f.-m.f.n., dotsent |
| <b>O.Yusupova</b>   | - fil.f.n., dotsent  |
| <b>A.R.Safarov</b>  | - PhD., dotsent      |

## **Mas'ul muharrirlar:**

|                            |                   |
|----------------------------|-------------------|
| <b>D. M. Aronbayev</b>     | - k.f.n., dotsent |
| <b>A. Sh. Yarmuxamedov</b> | - f.-m.f.n.       |

Muassis: Samarqand davlat universiteti  
Manzil: 140104, Samarqand shahri, Universitet hiyoboni, 15.  
Telefon: (0 366) 239-14-07, Faks: (0 366) 239-13-87  
e-mail: [axborotnoma@samdu.uz](mailto:axborotnoma@samdu.uz)

SamDU «Ilmiy axborotnoma» jurnali tahririyati kompyuterida terildi.  
Bosishga 20.03.2020 yilda ruxsat etildi. Qog'oz o'lchami A-4. Nashriyot hisob tabog'i 10,00.  
Buyurtma raqami 20/03.

**Manzil:** 140104, Samarqand shahri, Universitet xiyoboni, 15.  
**SamDU bosmaxonasida chop etildi.**