САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ
ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ
PhD.27.06.2017.FM.02.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

ҚУЛЖОНОВ ЎТКИР НЕМАТОВИЧ

БИР ВА ИККИ ЗАРРАЧАЛИ ДИСКРЕТ ШРЕДИНГЕР ОПЕРАТОРЛАРИНИНГ ҚУЙИ СПЕКТРИ ҲАҚИДА

01.01.01 – Математик анализ

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Самарқанд – 2019

УДК:517.984

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Contents of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

**САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ
ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ
PhD.27.06.2017.FM.02.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ**

САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

ҚУЛЖОНОВ ЎТКИР НЕМАТОВИЧ

БИР ВА ИККИ ЗАРРАЧАЛИ ДИСКРЕТ ШРЕДИНГЕР ОПЕРАТОРЛАРИНИНГ ҚУЙИ СПЕКТРИ ҲАҚИДА

01.01.01 – Математик анализ

**ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD)
ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ**

Самарқанд – 2019

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (Doctor of Philosophy) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2018.2.PhD/FM209 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация Самарқанд давлат университетида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгашнинг веб-саҳифасида (www.samdu.uz) ва «Ziyonet» Ахборот таълим порталида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар:	**Лакаев Саидахмат Норжигитович** физика-математика фанлари доктори, профессор, академик
Расмий оппонентлар:	**Халмухамедов Алимжон Рахимович** физика-математика фанлари доктори, профессор
	Қаршибоев Хайрулло Қиличевич физика-математика фанлари номзоди
Етакчи ташкилот:	**Математика институти**

Диссертация ҳимояси Самарқанд давлат университети ҳузуридаги илмий даражалар берувчи PhD.27.06.2017.FM.02.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2019 йил «___»_________ соат____ даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 140104, Самарқанд ш., Университет хиёбони, 15-уй. Тел.: (+99866) 231-06-32, факс: (+99866) 235-19-38, 239-12-47, e-mail: patent@samdu.uz).

Диссертация билан Самарқанд давлат университети Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (___ рақами билан рўйхатга олинган). Манзил: 140104, Самарқанд ш., Университет хиёбони, 15-уй. Тел.: (+99866) 231-06-32.

Диссертация автореферати 2019 йил «____» _______________куни тарқатилди.

(2019 йил «____» ___________ даги _______ рақамли реестр баённомаси).

А.С. Солеев
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш раиси, физика-математика фанлари доктори, профессор

А.М. Халхўжаев
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш илмий котиби, физика-математика фанлари доктори

И.А.Икромов
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш қошидаги илмий семинар раиси ўринбосари, физика-математика фанлари доктори, профессор

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида олиб борилаётган илмий-амалий тадқиқотларнинг бир қисми микродунёда кечаётган жараёнларни ўрганишга бағишланган. Микродунё ҳодисаларининг изчил назарияси Планк, Эйнштейн, Гейзенберг, Шредингер, Паули, Дирак ва бошқа олимлар томонидан яратилган квант механикасидир. Ҳар қандай квантомеханик системада энг муҳим физик миқдорлардан бири бу энергиядир. Энергия (Гамильтониан ёки Шредингер) операторининг спектрал хоссаларини ўрганиш квант механикасининг асосий масалаларидан биридир. Бу борада панжарадаги бир ва икки заррачали Шредингер оператори экспериментал кузатишларнинг назарий асоси сифатида хизмат қилади. Шу сабабли қаттиқ жисмлар физикаси, квант механикаси ва статистик физикада учрайдиган панжарадаги бир ва икки заррачали системаларга мос Шредингер операторлари спектрининг қуйи чегарасини ўрганишга оид тадқиқотларни ривожлантириш муҳим вазифалардан бири бўлиб қолмоқда.

Ҳозирги кунда жаҳонда панжарадаги бир квант заррачали системага мос энергия оператори хос қийматлари ва уларнинг сони система ташқи майдон ўзгаришига нисбатан ўзгарувчан бўлганлиги учун ушбу оператор дискрет спектрига оид муаммоларни ҳал этиш, жумладан спектрнинг қуйи чегараси яккаланган хос қиймат бўлганда унинг оддийлиги ва унга мос қатъий мусбат хос векторнинг мавжудлиги физик системада кечаётган жараёнларни ўрганишда муҳим роль ўйнайди. Панжарадаги икки квант заррачали системага мос Шредингер оператори хос қийматлари система квазиимпульси ўзгаришига нисбатан ўта сезувчан бўлганлиги учун ушбу оператор хос қийматларига оид муаммоларни ҳал этиш, жумладан энг кичик хос қийматнинг карралилигини ва унга мос векторнинг қатъий мусбатлигини дисперсион функциянинг аниқланишига боғлаб ўрганиш мақсадли илмий тадқиқотлардан ҳисобланади.

Мамлакатимизда фундаментал фанларнинг илмий ва амалий татбиққа эга бўлган долзарб йўналишларига эътибор кучайтирилди, хусусан, мамлакатимиз олимлари томонидан панжарадаги заррачалар системасига мос Шредингер операторларини ўрганишга алоҳида эътибор қаратилмоқда. Алгебра ва математик анализ, эҳтимоллар назарияси, амалий математика ва математик моделлаштириш каби математик фанларнинг устувор йўналишлари бўйича халқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқот олиб бориш асосий вазифалар ва фаолият йўналишлари этиб белгиланди[1]. Қарор ижросини таъминлашда ўз-ўзига қўшма операторлар назариясини ривожлантириш, хусусан, панжарадаги бир ва икки заррачали системаларга мос дискрет Шредингер операторлари спектри қуйи чегараси яккаланган нуқта бўлганда унинг оддий хос қиймат

---

[1]Ўзбекистон Республикаси Вазирлар маҳкамасининг 2017 йил 18 майдаги «Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш тўғрисида»ги 292-сонли қарори.

бўлиши ва унга мос қатъий мусбат хос векторнинг мавжудлик масаласини ўрганиш муҳим аҳамиятга эга.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 17 февралдаги ПҚ-2789-сон «Фанлар академияси фаолияти, илмий-тадқиқот ишларини ташкил этиш, бошқариш ва молиялаштиришни янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ва 2017 йил 20 апрелдаги ПҚ-2909-сон «Олий таълим тизимини янада ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги Қарорлари ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишга ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига боғлиқлиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Квант механикаси, қаттиқ жисмлар назарияси ва ядро физикаси асосан Шредингер операторининг хоссаларини ўрганишга қаратилган. Шредингер тенгламаси – бу квант механикасининг асосий тенгламасидир. Бу соҳада олинган натижалар Д.И.Блохинцевнинг «Квант механикаси асослари», Ф.А.Березин ва М.А.Шубиннинг «Шредингер тенгламалари» китобларида келтирилган. Панжарадаги заррачалар системасига мос Шредингер операторлари ўтган асрнинг тўқсонинчи йилларида физик олимлар Д.С.Маттис ва А.И.Могильнерлар томонидан ўргаила бошланди ва унга оид тадқиқотлар юқори суръатлар билан ривожланди. Панжарадаги бир ёки икки заррачали системага мос Шредингер операторларини қатъий математик тадқиқ этишда узлуксиз Шредингер операторларидаги каби муаммолар учрайди. Узлуксиз ва дискрет Шредингер операторлари спектрал хоссалари, жумладан хос қийматларининг мавжудлиги Д.Яфаев, Б.Саймон, Т.Като, Ф.Реллих, Р.А.Минлос, Ш.А.Алимов, А.Р.Халмухаммедов, С.Н.Лақаев, К.Макаров, Ж.И.Абдуллаев, З.Э.Мўминов ва бошқа олимлар томонидан ўрганилган.

Панжарадаги стандарт Лапласиан ва контакт потенциаллар учун хос қийматнинг ягоналиги ва оддийлиги С.Лақаев, Ж.Абдуллаевлар томонидан исботланган. Бир заррачали дискрет Шредингер операторларида маълум синф дисперсион функциялари учун унинг спектри қуйи чегараси яккаланган бўлади. Бу ҳолда спектр қуйи чегараси оддий хос қиймат бўлади ва унга мос қатъий мусбат хос функция мавжуд. Муҳим спектрнинг қуйи чегараси виртуал сатҳ ёки оддий хос қиймат (резонанс) бўлиши масаласи Д.Яфаев, А.Соболев, С.Лақаев ва З.Мўминовлар томонидан ўрганилган.

Маълумки n ўлчамли Эвклид фазосидаги ихтиёрий A чизиқли операторга бирор nxn квадрат матрицани мос қўйиш мумкин ва аксинча. Агар бу матрицанинг барча элементлари мусбат бўлса, у ҳолда бу операторнинг энг катта хос қиймати оддий бўлиб, унга мос хос векторнинг барча координаталарини мусбат танлаш мумкин. Бу типдаги натижалар Перрон-Фробениус типидаги теоремалар дейилади. Дастлаб О.Перрон мусбат элементли матрицалар учун энг катта хос қийматнинг оддийлиги ва унга мос қатъий мусбат хос векторнинг мавжудлигини исботлаган. Кейинчалик Г.Фробениус бу типдаги теоремаларни умумлаштирган.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти Самарқанд давлат университети илмий-тадқиқот ишлари режалари доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади дискрет Шредингер операторлари спектри қуйи чегараси яккаланган нуқта бўлганда, бу хос қийматнинг оддий бўлиши ва унга мос қатъий мусбат хос векторнинг мавжудлигини кўрсатишдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари:

ихтиёрий ўлчамли панжарадаги бир заррачали системага мос қўзғалмас энергия оператори резольвентасининг муҳим спектрдан қуйидаги барча қийматларда мусбатликни кучайтирувчи эканлигини кўрсатиш;

ихтиёрий ўлчамли панжарадаги бир заррачали системага мос Шредингер оператори спектрининг қуйи чегараси яккаланган бўлганда унинг оддий хос қиймат эканлиги ва унга мос хос функциянинг қатъий мусбатлигини кўрсатиш, яъни Перрон-Фробениус типидаги теоремани исботлаш;

ихтиёрий ўлчамли панжарадаги икки заррачали системага мос қўзғалмас энергия оператори резольвентасининг муҳим спектрдан қуйидаги нуқталарда ва система квазиимпульсининг барча қийматларида мусбатликни сақловчи, баъзи қийматларида эса мусбатликни кучайтирувчи эканлигини кўрсатиш;

ихтиёрий ўлчамли панжарадаги икки заррачали системага мос Шредингер оператори спектри қуйи чегараси яккаланган нуқта бўлганда унинг хос қиймат бўлиши, агар бу хос қиймат оддий бўлса унга мос хос функциянинг қатъий мусбатлиги, агар бу хос қиймат каррали бўлса унга мос хос функцияларнинг мусбатлигини кўрсатиш.

Тадқиқотнинг объекти ихтиёрий ўлчамли панжарадаги бир ва икки заррачали системаларга мос энергия операторлари.

Тадқиқотнинг предмети панжарадаги бир ва икки заррачали системаларга мос Шредингер операторлари спектри қуйи чегараси яккаланган хос қиймат бўлганда унинг оддийлиги ва унга мос хос векторнинг қатъий мусбатлигини кўрсатишдан иборат.

Тадқиқотнинг усуллари. Тадқиқот ишида математик анализ, функционал анализ, комплекс ўзгарувчили функциялар назарияси ва математик физиканинг умумий методларидан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

ихтиёрий ўлчамли панжарадаги бир заррачали системага мос қўзғалмас энергия оператори резольвентаси муҳим спектрдан қуйидаги барча қийматларда мусбатликни кучайтирувчи эканлиги кўрсатилган;

ихтиёрий ўлчамли панжарадаги бир заррачали системага мос Шредингер оператори спектрининг қуйи чегараси яккаланган нуқта бўлганда унинг оддий хос қиймат эканлиги ва унга мос қатъий мусбат хос функциянинг мавжудлиги кўрсатилган, яъни Перрон-Фробениус типидаги теорема исботланган;

ихтиёрий ўлчамли панжарадаги икки заррачали системага мос қўзғалмас энергия оператори резольвентасининг муҳим спектрдан қуйидаги нуқталарда ва система квазиимпульсининг барча қийматларида мусбатликни сақловчи, баъзи қийматларида эса мусбатликни кучайтирувчи эканлиги кўрсатилган;

ихтиёрий ўлчамли панжарадаги икки заррачали системага мос Шредингер оператори спектри қуйи чегараси яккаланган нуқта бўлганда унинг хос қиймат бўлиши, агар бу хос қиймат оддий бўлса унга мос хос функциянинг қатъий мусбатлиги, агар бу хос қиймат каррали бўлса унга мос хос функцияларнинг мусбатлиги кўрсатилган.

Тадқиқотнинг амалий натижалари бир ва икки заррачали Шредингер операторларининг хос қиймат ва хос функциялари ҳақидаги хулосалар атом физикасида, квант механикасида экспериментал тадқиқотларнинг сифат кўрсаткичини аниқлаш ҳамда сонли ҳисоблашларда фойдаланилган.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги математик анализ, математик-физика, функционал анализ ва комплекс ўзгарувчили функциялар назарияси усулларидан фойдаланилганлиги ҳамда математик мулоҳазаларнинг изчиллиги билан асосланган.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти ўз-ўзига қўшма операторлар спектрал назарияси, квант механикаси, қаттиқ жисмлар назарияси, хусусан панжарадаги бир ва икки заррачали система энергия операторининг спектрал хоссалари билан боғлиқ масалаларни ҳал этишда фойдаланиш мумкинлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти ишда олинган илмий натижалар квант механикаси ҳамда қаттиқ жисмлар физикасида мураккаб объектлар ҳосил бўлишини кўрсатувчи экспериментал тадқиқотлар ўтказиш ва қўллашга назарий асос сифатида хизмат қилиши билан белгиланади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши.

Панжарадаги бир ва икки заррачали дискрет Шредингер операторлари спектрининг қуйи чегарасига оид олинган илмий натижалар асосида:

панжарадаги бир ва икки заррачали системага мос Шредингер операторлари спектрининг қуйи чегарасини ўрганиш усуллари QJ130000.2726.01K82 рақамли хорижий грантида дискрет Шредингер операторининг хос қиймати мавжудлиги ва бўсаға ҳодисасини тадқиқ қилишда қўлланилган (Малайзия технология университетининг 2018 йил 21 октябрдаги маълумотномаси). Илмий натижанинг қўлланилиши интеграл операторлар ва панжарадаги Шредингер операторининг асосий хоссаларини ўрганишда уч заррачали Шредингер оператори учун инвариант қисм фазо ва муҳим спектрни тавсифлаш имконини берган;

ихтиёрий ўлчамли панжарадаги бир ёки икки заррачали системага мос қўзғалмас энергия оператори резольвентаси мусбатликни кучайтирувчилиги ЁФ-4-17 рақамли «Дискрет Шредингер оператори ва Фридрихс моделлари хос қийматлари ва резонанслари учун ёйилмалар» лойиҳада $d \geq 3$ ўлчамли панжарада контакт потенциал ёрдамида таъсирлашувчи ихтиёрий икки заррачали системага мос Шрёдингер операторига татбиқ қилинган (Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлигининг 2019 йил 28 мартдаги маълумотномаси). Илмий натижанинг қўлланилиши параметрларга боғлиқ ҳолда муҳим спектрдан чапда қаралаётган операторнинг ягона хос қиймати учун юқори ва қуйи чегараларни аниқлаш имконини берган;

панжарадаги бир ва икки заррачали системаларга мос Шредингер оператори спектрининг қуйи чегараси яккаланган нуқта бўлганда унинг оддий хос қиймат бўлишига оид натижалар ЁФ-4-17 рақамли «Дискрет Шредингер оператори ва Фридрихс моделлари хос қийматлари ва резонанслари учун ёйилмалар» лойиҳада $d \geq 1$ ўлчамли панжарадаги икки заррачали система гамильтонианига мос Фридрихс моделига қўлланилган (Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлигининг 2019 йил 28 мартдаги маълумотномаси). Илмий натижанинг қўлланилиши ўрганилаётган оператор муҳим спектридан чапда ягона хос қиймати мавжудлиги ва бу хос қийматга мос хос векторнинг регуляр функция эканлигини кўрсатиш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари 6 та халқаро ва 3 та республика илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Диссертация мавзуси бўйича жами 16 та илмий иш чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий Аттестация комиссиясининг фалсафа доктори диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 6 та мақола, жумладан, 1 таси хорижий ва 5 таси республика илмий журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг ҳажми ва тузилиши. Диссертация кириш қисми, учта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан ташкил топган. Диссертациянинг ҳажми 93 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган, мавзу бўйича хорижий илмий тадқиқотлар шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг **«Гильберт фазоларида чизиқли чегараланган операторлар»** деб номланувчи биринчи бобида асосий натижаларни баён қилиш учун зарур бўлган тушунча ва тасдиқлар, жумладан чегараланган ўз-ўзига қўшма ва компакт операторлар спектрал назариясининг зарур теоремалари келтирилган. Шунингдек Лоран типидаги операторлар қаралган ҳамда бундай операторларнинг асосий хоссалари баён қилинган. Бир заррачали системага мос қўзғалмас энергия оператори Лоран типидаги оператор бўлиши таъкидланган. Бир заррачали системага мос қўзғалмас энергия операторининг координата ва импульс кўринишлари чегараланган ўз-ўзига қўшма операторлар сифатида мос Гильберт фазоларида қаралган ҳамда унинг спектри абсолют узлуксиз эканлиги исботланган. Чекли ўлчамли Эвклид фазоларидаги чизиқли операторлар учун Перрон-Фробениус теоремаси келтирилган.

Диссертациянинг **«Бир заррачали дискрет Шредингер операторларининг асосий ҳолатлари»** деб номланувчи иккинчи бобида $d \geq 1$ ўлчамли панжарадаги бир заррачали системага мос қўзғалмас энергия операторининг резольвентаси $\hat{R}_0(z), z < \mathcal{E}_{min}$ учун аналитик ифода топилган ҳамда $\hat{R}_0(z)$ операторнинг барча $z < \mathcal{E}_{min}$ лар учун мусбатликни кучайтирувчи эканлиги кўрсатилган. Бир заррачали дискрет Шредингер оператори спектрининг қуйи чегараси яккаланган бўлганда унинг оддий хос қиймат бўлиши ҳамда унга мос хос функциянинг қатъий мусбатлиги кўрсатилган, яъни Перрон-Фробениус типидаги теорема исботланган.

Диссертациянинг **«Икки заррачали дискрет Шредингер операторининг қуйи спектри ҳақида»** деб номланувчи учинчи бобида панжарадаги икки заррачали системага мос энергия оператори Гильберт фазосидаги чегараланган ўз-ўзига қўшма оператор сифатида тавсифланган. Энергия операторининг координата тасвиридан импульс тасвирига ўтилган ҳамда система квазиимпульси $k \in \mathbb{T}^d$ ажратилиб, энергия оператори $H^{(2)}$ қатлам операторлари $h(k)$ ларнинг тўғри интегралига ёйилган. $h(k)$ қатлам операторлари ҳар бир тайинланган $k \in \mathbb{T}^d$ қийматида икки заррачали системага мос Шредингер операторлари дейилади. Натижада икки заррачали системага мос Шредингер оператори спектрини ўрганиш масаласи бир заррачали дискрет Шредингер операторлари оиласи $h(k), k \in \mathbb{T}^d$ нинг спектрал хоссаларини ўрганиш масаласига келтирилган. Шунингдек $h(k)$ оператор спектрининг қуйи чегараси яккаланган бўлганда унинг оддий хос қиймат бўлиши масаласи ўрганилган.

$\mathbb{Z}^d$ орқали $d-$ ўлчамли панжарани, $\ell_2(\mathbb{Z}^d)-$ орқали $\mathbb{Z}^d$ панжарада аниқланган ва квадрати билан жамланувчи функцияларнинг Гильберт фазосини белгилаймиз.

$\hat{\psi}_x, x \in \mathbb{Z}^d$ функциялар $\ell_2(\mathbb{Z}^d)$ фазода ортонормал базис ташкил этади:

$$\hat{\psi}_x(y) = \begin{cases} 1, y = x \\ 0, y \neq x \end{cases}, x, y \in \mathbb{Z}^d.$$

$\hat{\psi}_x, x \in \mathbb{Z}^d$ базислар каноник базислар дейилади.

1-бобнинг 3-параграфида Лоран типидаги операторлар қаралган.

1-таъриф. *Агар $\hat{L}: \ell_2(\mathbb{Z}^d) \to \ell_2(\mathbb{Z}^d)$ чизиқли операторнинг $a_{xy} = (\hat{L}\hat{\psi}_x, \hat{\psi}_y)$, $x, y \in \mathbb{Z}^d$ матрицавий элементлари фақат $x - y$ айирмага боғлиқ бўлса, у ҳолда $\hat{L}$ га Лоран типидаги оператор дейилади.*

1-лемма. *$\ell_2(\mathbb{Z}^d)$ Гильберт фазосида аниқланган $\hat{L}$ оператор Лоран типидаги оператор бўлиши учун, унинг барча $s \in \mathbb{Z}^d$ ларда $\ell_2(\mathbb{Z}^d)$ даги $\hat{T}(s)$ силжитиш оператори билан ўрин алмашинувчи бўлиши зарур ва етарли.*

$\ell_2(\mathbb{Z}^d)$ Гильберт фазосида силжитиш оператори сифатида

$$\big(\hat{T}(s)\hat{f}\big)(x) = \hat{f}(s + x), \quad s \in \mathbb{Z}^d \tag{1}$$

операторни қараймиз. $\hat{T}(s)$ оператор s га силжитиш операторидир.

Таъкидлаймизки, барча $s \in \mathbb{Z}^d$ лар учун $\hat{T}(s)$ оператор унитар оператордир.

Ушбу параграфда Перрон-Фробениус теоремаси ўз-ўзига қўшма операторлар учун келтирилган:

1-теорема (Перрон-Фробениус теоремаси). *$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \cdots \geq \lambda_n$ сонлар ўз-ўзига қўшма $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n, a_{ij} = a_{ji} \geq 0$ операторнинг хос қийматлари бўлсин. У ҳолда:*

a) λ_1 сони мусбат ва у A операторнинг оддий хос қиймати бўлади;

b) A операторнинг λ_1 хос қийматига мос хос векторининг координаталарини мусбат қилиб танлаш мумкин.

Фараз қилайлик $\mathbb{T}^d = (\mathbb{R} / 2\pi\mathbb{Z})^d = (-\pi; \pi]^d, d -$ўлчамли тор, $L_2(\mathbb{T}^d)$ эса $\mathbb{T}^d$ да аниқланган квадрати билан интегралланувчи функцияларнинг Гильберт фазоси бўлсин. Бир заррачали системага мос энергия оператори (Шредингер оператори) $\ell_2(\mathbb{Z}^d)$ Гильберт фазосида

$$\widehat{H} = \widehat{H}_0 - \widehat{V}$$

формула билан аниқланади. Бу ерда $\widehat{H}_0$ заррачанинг панжаранинг бир тугунидан бошқа тугунига ўтиш (сакраш) оператори бўлиб, у қуйидагича аниқланади:

$$\big(\widehat{H}_0\hat{f}\big)(x) = \sum_{s \in \mathbb{Z}^d} \hat{\varepsilon}(s - x)\hat{f}(s), \qquad \hat{f} \in \ell_2(\mathbb{Z}^d).$$

Бу ерда $\hat{\varepsilon}(\cdot)$ дисперсион функция $\ell_1(\mathbb{Z}^d)$ га тегишли, ҳамда жуфт ва ҳақиқий қийматли. $\widehat{V}$ оператор эса $\hat{v}(\cdot) \in \ell_\infty(\mathbb{Z}^d)$ функцияга кўпайтириш операторидир, яъни

$$\big(\widehat{V}\hat{f}\big)(x) = \hat{v}(x)\hat{f}(x), \hat{f} \in \ell_2(\mathbb{Z}^d).$$

Бундан ташқари $\hat{\varepsilon}(\cdot)$ дисперсион функция ва $\hat{v}(\cdot)$ потенциаллар қуйидаги қўшимча шартларни қаноатлантиради деб фараз қиламиз:

1-фараз. *Фараз қилайлик:*
a) $|s|=1$ *да* $\hat{\varepsilon}(s)<0$ *ва* $|s|>1$ *да* $\hat{\varepsilon}(s)\leq 0$ *бўлсин, бу ерда*
$|s|:=|s_1|+\cdots+|s_d|$;
b) *шундай* C *ва* a *мусбат сонлар мавжуд бўлиб, барча* $s\in\mathbb{Z}^d$ *лар учун*
$|\hat{\varepsilon}(s)|\leq Cexp(-a|s|)$ *тенгсизлик бажарилсин.*

2-фараз. *Фараз қилайлик* $\hat{v}(\cdot)\in\ell_1(\mathbb{Z}^d)$ *функция нолмас ва* $\hat{v}(s)\geq 0,\ s\in\mathbb{Z}^d$ *бўлсин.*

1- ва 2-фаразлар бажарилганда $\widehat{H}_0,\widehat{V}$ ва $\widehat{H}$ операторлар чегараланган ва ўз-ўзига қўшма бўлади. 2-фараз бажарилганда $\widehat{V}$ мусбат ва компакт оператор бўлади.

Қуйидаги белгилашни киритамиз:

$$\varepsilon(p)=\sum_{s\in\mathbb{Z}^d}\hat{\varepsilon}(s)e^{i(p,s)}\,,\qquad p=(p_1,\dots,p_d)\in\mathbb{T}^d.$$

$\varepsilon(p)$ функция $\hat{\varepsilon}(\cdot)$ функциянинг Фурье тасвиридан $(2\pi)^{-\frac{d}{2}}$ кўпайтувчига фарқ қилади. 1-фаразнинг b) шартидан $\varepsilon(p)$ функциянинг $\mathbb{T}^d$ да аналитик эканлиги келиб чиқади.

$\widehat{H}_0$ операторнинг импульс фазодаги тасвирини H_0 орқали белгилаймиз. Бу оператор $L_2(\mathbb{T}^d)$ Гильберт фазосини ўзини ўзига акслантирувчи ўз-ўзига қўшма чегараланган оператор бўлиб, у $\varepsilon(p)$ функцияга кўпайтириш операторидир, яъни

$$(H_0f)(p)=\varepsilon(p)f(p),\qquad f\in L_2(\mathbb{T}^d).$$

Маълумки H_0 операторнинг спектри $\varepsilon(p)$ функциянинг қийматлар тўплами билан устма-уст тушади. $\varepsilon(p)$ нинг аналитик фунция эканлигидан H_0 операторнинг спектри абсолют узлуксиз (хос қийматларга эга эмас) эканлиги келиб чиқади, яъни

$$\sigma(H_0)=\sigma_{ac}(H_0)=[\varepsilon_{min};\varepsilon_{max}]=\sigma\big(\widehat{H}_0\big),$$

бу ерда

$$\varepsilon_{min}=\min_{q\in\mathbb{T}^d}\varepsilon(q),\varepsilon_{max}=\max_{q\in\mathbb{T}^d}\varepsilon(q).$$

Муҳим спектрнинг турғунлиги ҳақидаги Вейл теоремасига асосан $\widehat{V}$ оператор компакт бўлганлиги учун $\widehat{H}$ операторнинг муҳим спектри $\widehat{H}_0$ операторнинг спектри билан устма-уст тушади, яъни

$$\sigma_{ess}\big(\widehat{H}\big)=\sigma\big(\widehat{H}_0\big)=[\varepsilon_{min};\varepsilon_{max}].$$

$\widehat{H}_0$ операторнинг $\widehat{R}_0(z)=\big(\widehat{H}_0-zI\big)^{-1},\ z\in\mathbb{C}\backslash[\varepsilon_{min};\varepsilon_{max}]$ резольвентаси

$$\big(\widehat{R}_0(z)\hat{f}\big)(x)=\sum_{s\in\mathbb{Z}^d}\hat{r}_0(x-s;z)\hat{f}(s)\,,\hat{f}\in\ell_2(\mathbb{Z}^d)$$

формула ёрдамида аниқланади, бу ерда

$$\hat{r}_0(x;\,z)=\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{T}^d}\frac{e^{-i(x,t)}}{\varepsilon(t)-z}dt\,,\ \ x\in\mathbb{Z}^d,z\in\mathbb{C}\backslash[\varepsilon_{min};\varepsilon_{max}].$$

Энди баъзи таъриф ва тушунчаларни келтирамиз. Фараз қилайлик $M \subset \mathbb{Z}^d$ ва $\hat{f} \in \ell_2(M)$ бўлсин.

2-таъриф. *Агар $\hat{f} \in \ell_2(M)$ функция учун ихтиёрий $x \in M$ да $\hat{f}(x) \geq 0$ ва бирор $x_0 \in M$ учун $\hat{f}(x_0) > 0$ бўлса, $\hat{f}$ га мусбат функция, агар барча $x \in M$ лар учун $\hat{f}(x) > 0$ бўлса, $\hat{f}$ га қатъий мусбат функция дейилади.*

3-таъриф. *Агар барча мусбат $\hat{f} \in \ell_2(M)$ лар учун $A\hat{f}$ ҳам мусбат бўлса, A га $\ell_2(M)$ да мусбатликни сақловчи оператор, агар барча мусбат $\hat{f}$ лар учун $A\hat{f}$ қатъий мусбат бўлса, A га мусбатликни кучайтирувчи оператор дейилади.*

$\widehat{H} = \widehat{H}_0 - \widehat{V}$ тасвирдан ҳамда $\widehat{V}$ нинг мусбат оператор эканлигидан $\sigma\big(\widehat{H}\big) \cap (\varepsilon_{max}; \infty) = \emptyset$ муносабат келиб чиқади, яъни $\widehat{H}$ операторнинг ε_{max} дан катта хос қийматлари мавжуд эмас. Демак $\widehat{H}$ оператор фақат $(-\infty; \varepsilon_{min})$ оралиқда ётувчи хос қийматларга эга бўлиши мумкин. Мусбат оператор $\widehat{V}$ дан чиқарилган мусбат квадрат илдизни $\widehat{V}^{\frac{1}{2}}$ орқали белгилаймиз.

2-лемма. *1-фараз ўринли бўлсин. У ҳолда ихтиёрий $z < \varepsilon_{min}$ учун $\hat{r}_0(\cdot; z)$ функция қатъий мусбат бўлади.*

Қуйидаги теорема асосий натижаларнинг исботида муҳим роль ўйнайди.

2-теорема. *1-фараз ўринли бўлсин. У ҳолда ихтиёрий $z < \varepsilon_{min}$ учун $\widehat{R}_0(z)$ оператор $\ell_2(\mathbb{Z}^d)$ фазода мусбатликни кучайтирувчи бўлади.*

Иккинчи бобнинг иккинчи параграфида ҳар бир $z \in \mathbb{R}\backslash[\varepsilon_{min}; \varepsilon_{max}]$ учун

$$\widehat{G}(z) = \widehat{V}^{\frac{1}{2}} \widehat{R}_0(z) \widehat{V}^{\frac{1}{2}}$$

операторни қараймиз. $\widehat{G}(z)$ оператор Бирман-Швингер оператори дейилади. $\widehat{G}(z)$ оператор ҳар бир $z \in \mathbb{R}\backslash[\varepsilon_{min}; \varepsilon_{max}]$ да ўз-ўзига қўшма ва компакт бўлади. $\widehat{H}$ операторнинг хос қийматларини топиш масаласи 1 сони $\widehat{G}(z)$ операторнинг хос қиймати бўлишини кўрсатиш масаласига келтирилади.

3-лемма. *1-ва 2-фаразлар ўринли бўлсин. У ҳолда $z < \varepsilon_{min}$ сони $\widehat{H}$ операторнинг хос қиймати бўлиши учун $\lambda = 1$ сони $\widehat{G}(z)$ операторнинг хос қиймати бўлиши зарур ва етарлидир. Бундан ташқари бу хос қийматларнинг карралиликлари устма-уст тушади.*

$N(z)$ орқали $\widehat{H}$ операторнинг $z < \varepsilon_{min}$ дан кичик хос қийматлари сонини, $n(a, A)$ орқали эса A операторнинг a дан катта хос қийматлари сонини белгилаймиз.

4-лемма. *1-ва 2-фаразлар бажарилсин. У ҳолда ҳар бир $z < \varepsilon_{min}$ учун*

$$N(z) = n\big(1, \widehat{G}(z)\big)$$

тенглик ўринли бўлади.

Агар $\hat{v} \neq 0$ бўлса, у ҳолда $\hat{v}$ функция ташувчиси $\overline{supp\hat{v}}$ бўш бўлмаган тўплам бўлади. $\widehat{G}(z)$ операторнинг қийматлар фазоси $Ran\widehat{G}(z) = \ell_2(supp\hat{v})$ эканлиги равшан ва $\ell_2(supp\hat{v})$ қисм фазо $\widehat{G}(z)$ операторга нисбатан инвариант бўлади. $\tilde{G}(z)$ орқали $\hat{G}(z)$ операторнинг $\ell_2(supp\hat{v})$ фазодаги $\hat{G}(z)\big|_{\ell_2(supp\,\hat{v})}$ торайганини белгилаймиз.

5-лемма. *1-ва 2-фаразлар бажарилсин. У ҳолда ихтиёрий $z, z < \varepsilon_{min}$ учун $\tilde{G}(z)$ оператор мусбат ва $\ell_2(supp\hat{v})$ фазода мусбатликни кучайтирувчи бўлади. Бундан ташқари $\|\tilde{G}(z)\|$ сони $\tilde{G}(z)$ операторнинг оддий хос қиймати бўлади ва унга мос хос $\hat{f}$ векторни $\ell_2(supp\hat{v})$ фазода қатъий мусбат қилиб танлаш мумкин.*

Энди иккинчи бобнинг асосий натижасини келтирамиз.

3-теорема. *1-ва 2-фаразлар ўринли ва $z_0 = inf\sigma(\widehat{H}) < \varepsilon_{min}$ бўлсин. У ҳолда z_0 сони $\widehat{H}$ операторнинг оддий хос қиймати бўлади ва унга мос хос векторни $\ell_2(\mathbb{Z}^d)$ фазода қатъий мусбат қилиб танлаш мумкин.*

$d \geq 1$ ўлчамли $\mathbb{Z}^d$ панжарада ҳаракатланувчи икки квант заррачали системага мос $\widehat{H}_0^{(2)}$ қўзғалмас энергия оператори $\ell_2((\mathbb{Z}^d)^2)$ Гильберт фазосида ўз-ўзига қўшма оператор сифатида қуйидагича аниқланади:

$$\widehat{H}_0^{(2)} = -\frac{1}{2m_1}\hat{\Delta}_1 - \frac{1}{2m_2}\hat{\Delta}_2,$$

бу ерда

$$\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}\otimes I,\ \hat{\Delta}_2 = I\otimes\hat{\Delta}.$$

Бунда I оператор $\ell_2(\mathbb{Z}^d)$ фазодаги айний оператор, $m_1, m_2 > 0$ лар эса заррачаларнинг массалари, $\hat{\Delta}$ стандарт дискрет Лаплас оператори бўлиб, у қуйидаги кўринишга эга:

$$\hat{\Delta} = \sum_{j=1}^{d}\left(\hat{T}(e_j) + \hat{T}^*(e_j) - 2\hat{T}(0)\right).$$

Бу ерда e_j лар $\mathbb{Z}^d$ даги бирлик векторлар, $\hat{T}(s)$ эса $s \in \mathbb{Z}^d$ га силжитиш оператори бўлиб, у (1) формула ёрдамида аниқланади.

Қўзғалмас энергия оператори $\widehat{H}_0^{(2)}$ нинг импульс тасвири

$$H_0^{(2)} = F^{-1}\widehat{H}_0^{(2)}F\colon L_2((\mathbb{T}^d)^2) \to L_2((\mathbb{T}^d)^2)$$

қуйидагича аниқланади:

$$\left(H_0^{(2)}f\right)(p,q) = \left(\frac{1}{m_1}\varepsilon(p) + \frac{1}{m_2}\varepsilon(q)\right)f(p,q) = E(p,q)f(p,q). \qquad (2)$$

Биз бу ерда қуйидаги белгилашдан фойдаландик:

$$\varepsilon(p) = \sum_{j=1}^{d}\left(1 - cosp_j\right), p = (p_1, \dots, p_d) \in \mathbb{T}^d.$$

$H_0^{(2)}$ оператор $L_2((\mathbb{T}^d)^2)$ фазода аналитик $E(p,q)$ функцияга кўпайтириш оператори бўлганлиги учун унинг спектри $E(p,q)$ функциянинг қийматлар тўпламидан, яъни $[0;\ 2d(m_1^{-1} + m_2^{-1})]$ кесмадан иборат. Аникроғи

$$\sigma\left(H_0^{(2)}\right)=\sigma_{ess}\left(H_0^{(2)}\right)=[0;2d(m_1^{-1}+m_2^{-1})]=\sigma(\widehat{H}_0).$$

Бошқача айтганда қуйидаги тасдиқ ўринли.

6-лемма. *$\widehat{H}_0$ операторнинг спектри $[0;2d(m_1^{-1}+m_2^{-1})]$ кесма билан устма-уст тушади ва*

$$\sigma\left(\widehat{H}_0^{(2)}\right)=\sigma_{ess}\left(\widehat{H}_0^{(2)}\right)=[0;2d(m_1^{-1}+m_2^{-1})].$$

d ўлчамли панжара $\mathbb{Z}^d$ да ҳаракатланувчи ва ўзаро таъсир энергияси $\widehat{V}_{12}$ бўлган икки квант заррачали системанинг $\widehat{H}^{(2)}$ энергия оператори $\ell_2((\mathbb{Z}^d)^2)$ гильберт фазосида ўз-ўзига қўшма оператор сифатида аниқланади ва

$$\widehat{H}^{(2)}=\widehat{H}_0^{(2)}-\widehat{V}_{12}$$

формула орқали берилади, бу ерда $\widehat{V}_{12}$ оператор $\hat{v}(x-y)$ функцияга кўпайтириш оператори, яъни

$$\left(\widehat{V}_{12}\hat{f}\right)(x,y)=\hat{v}(x-y)\hat{f}(x,y),\qquad \hat{f}\in\ell_2((\mathbb{Z}^d)^2).$$

$\hat{v}:\mathbb{Z}^d\to\mathbb{R}$ функция ҳақиқий қийматли, чегараланган ва 2-фараз шартларини қаноатлантиради.

Гилберт фазоси $\ell_2((\mathbb{Z}^d)^2)$ да

$$\left(\widehat{\boldsymbol{T}}(n)\hat{f}\right)(x,y)=\hat{f}(x+n,y+n)$$

формула билан аниқланувчи $\left\{\widehat{\boldsymbol{T}}(n),n\in\mathbb{Z}^d\right\}$ силжитиш операторлари оиласини киритамиз.

4-теорема. *Ихтиёрий $n\in\mathbb{Z}^d$ учун қуйидаги муносабат ўринли:*

$$\widehat{H}^{(2)}\widehat{\boldsymbol{T}}(n)=\widehat{\boldsymbol{T}}(n)\widehat{H}^{(2)}. \qquad (3)$$

$\left\{\widehat{\boldsymbol{T}}(n),n\in\mathbb{Z}^d\right\}$ операторнинг импульс кўриниши қуйидагича бўлади:

$$(\boldsymbol{T}(n)f)(p,q)=e^{i(n,p+q)}f(p,q).$$

(3) коммутацион муносабатга кўра энергия оператори $H^{(2)}=H_0^{(2)}-\widehat{V}_{12}$ ва гильберт фазоси $L_2((\mathbb{T}^d)^2)$ лар Фон Нейманнинг тўғри интегралига ёйилади, яъни

$$H^{(2)}=\int_{\mathbb{T}^d}\oplus\tilde{h}(k)\,dk,\qquad L_2((\mathbb{T}^d)^2)=\int_{\mathbb{T}^d}\oplus L_2(\mathbb{F}_k)dk,$$

бу ерда

$$\mathbb{F}_k=\{(p,q)\in(\mathbb{T}^d)^2:\ p+q=k\},k\in\mathbb{T}^d.$$

Ҳар бир $k\in\mathbb{T}^d$ да $\tilde{h}(k):L_2(\mathbb{F}_k)\to L_2(\mathbb{F}_k)$ операторлар қуйидаги $h(k):L_2(\mathbb{T}^d)\to L_2(\mathbb{T}^d)$ операторларга унитар эквивалент бўлади:

$$h(k)=h_0(k)-V.$$

Бу ерда $h_0(k)$ операторнинг $f\in L_2(\mathbb{T}^d)$ элементга таъсири қуйидагича аниқланади:

$$(h_0(k)f)(p)=\boldsymbol{E}_k(p)f(p),$$

бу ерда

$$\boldsymbol{E}_k(p) = \frac{1}{m_1}\varepsilon(p) + \frac{1}{m_2}\varepsilon(k-p) = \sum_{j=1}^{d}\left[\mu(0) - \left|\mu(k_j)\right| cos\left(p_j - \varphi(k_j)\right)\right].$$

Бунда $\mu(y) = m_1^{-1} + m_2^{-1}e^{-iy}, y \in \mathbb{T}$ ва $\varphi(k_j) = arg\mu(k_j),\, k_j \in \mathbb{T}$.
$k \in \mathbb{T}^d$ га икки заррачали системанинг тўла квазиимпульси, $\tilde{h}(k), k \in \mathbb{T}^d$ операторларга H операторнинг қатлам операторлари дейилади.

V оператор $L_2(\mathbb{T}^d)$ да интеграл оператор бўлиб, у қуйидагича аниқланади:

$$(Vf)(p) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{T}^d} v(p-q)\, f(q)dq,$$

бу ерда

$$v(p) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\sum_{x\in\mathbb{Z}^d}\hat{v}(x)e^{i(x,p)}.$$

$h_0(k)$ операторнинг координат тасвири $\hat{h}_0(k) = \mathcal{F}h_0(k)\mathcal{F}^{-1}: \ell_2(\mathbb{Z}^d) \to \ell_2(\mathbb{Z}^d)$ оператор қуйидаги формула ёрдамида аниқланади:

$$\hat{h}_0(k) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d}\left(2\mu(0)T(0) - \mu(k_j)\hat{T}(e_j) - \overline{\mu(k_j)}\hat{T}^*(e_j)\right). \qquad (4)$$

$E_k(p+\varphi(k))$ функция

$$E_k(p+\varphi(k)) = E_k(p) = d\mu(0) - \sum_{j=1}^{d}\left|\mu(k_j)\right| cosp_j. \qquad (5)$$

кўринишга эга.
Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$\mathrm{e}_m(k) = \min_{p\in\mathbb{T}^d} E_k(p), \qquad \mathrm{e}_M(k) = \max_{p\in\mathbb{T}^d} E_k(p),$$

$$A(k) = \min_{j=1,\dots d}\left|\mu(k_j)\right|/\mu(0), \qquad \mu(0) = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} > 0.$$

(5) ифодадан қуйидагилар келиб чиқади:

$$\mathrm{e}_m(k) = \min_{p\in\mathbb{T}^d} E_k(p) = d\mu(0) - \sum_{j=1}^{d}\left|\mu(k_j)\right|,$$

$$\mathrm{e}_M(k) = \max_{p\in\mathbb{T}^d} E_k(p) = d\mu(0) + \sum_{j=1}^{d}\left|\mu(k_j)\right|.$$

Ҳар бир $a \in [\mathrm{e}_m(k), \mathrm{e}_M(k)]$ сон учун унга мос

$$E_k^{-1}(a) = \{p \in \mathbb{T}^d : E_k(p) = a\}$$

тўпламни киритамиз ва уни Ферми сирти деб атаймиз.

5-теорема. *a) Агар* $A(k) \neq 0$ *бўлса, у ҳолда* $E_k^{-1}\left(\mathrm{e}_m(k)\right), E_k^{-1}\left(\mathrm{e}_M(k)\right)$ *Ферми сиртлари бир нуқтали тўпламлар бўлади, аниқроғи* $E_k^{-1}\left(\mathrm{e}_m(k)\right) = \{\mathbf{0}\}, E_k^{-1}\left(\mathrm{e}_M(k)\right) = \{\boldsymbol{\pi}\},\ \boldsymbol{\pi} = (\pi, \dots, \pi) \in \mathbb{T}^d.$

b) Агар $A(k) = 0$ *бўлса, у ҳолда* $k \in \mathbb{T}^d \backslash (-\pi, \pi)^d$ *ва* $m_1 = m_2$ *бўлади. Бундан ташқари* $A(k) = 0$ *бўлганда* $E_k^{-1}\left(\mathrm{e}_m(k)\right)$ *ва* $E_k^{-1}\left(\mathrm{e}_M(k)\right)$ *тўпламлар* $\mathbb{T}^l$ *га изоморф бўлади, бу ерда* l, k *нинг* π *га тенг координаталари сони.*

Энди $\hat{h}_0(k)$ оператор резольвентасининг аниқ кўринишини топамиз. $\hat{h}_0(k)$ операторнинг ((4) формулага қаранг) резольвентаси

$$\hat{R}_0(k; z) = \left(\hat{h}_0(k) - zI\right)^{-1}, \qquad z \in \mathbb{C} \backslash [\mathrm{e}_m(k); \mathrm{e}_M(k)]$$

қуйидаги формула ёрдамида аниқланади:

$$\left(\hat{R}_0(k, z)\hat{f}(x)\right) = \sum_{s \in \mathbb{Z}^d} \hat{r}_0(x - s; k, z)\hat{f}(s)\,, \hat{f} \in \ell_2(\mathbb{Z}^d),$$

бу ерда

$$\hat{r}_0(x; k, z) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} \frac{e^{-i(x,t)}}{E_k(t) - z} dt\,,\ \ x \in \mathbb{Z}^d, z \in \mathbb{C} \backslash [\mathrm{e}_m(k); \mathrm{e}_M(k)].$$

Бундан кейин заррачалар массалари тенг, яъни $m_1 = m_2 = m$ деб фараз қиламиз.

Лемма 7. *Фараз қилайлик* $z < \mathrm{e}_m(k)$ *бўлсин. У ҳолда:*

a) агар $k \in (-\pi; \pi)^d$ *бўлса, у ҳолда* $\hat{r}_0(\cdot;\ k, z)$ *функция қатъий мусбат бўлади.*

b) агар $k \in \mathbb{T}^d \backslash (-\pi; \pi)^d$ *бўлса, у ҳолда* $\hat{r}_0(\cdot;\ k, z)$ *функция мусбат бўлади.*

6-теорема. *Фараз қилайлик* $z < \mathrm{e}_m(k)$ *бўлсин. У ҳолда:*

a) агар $k \in (-\pi; \pi)^d$ *бўлса, у ҳолда* $\hat{R}_0(k, z)$ *оператор* $\ell_2(\mathbb{Z}^d)$ *фазода мусбатликни кучайтирувчи бўлади.*

b) агар $k \in \mathbb{T}^d \backslash (-\pi; \pi)^d$ *бўлса, у ҳолда* $\hat{R}_0(k, z)$ *оператор* $\ell_2(\mathbb{Z}^d)$ *фазода мусбатликни сақловчи бўлади.*

Энди учинчи бобнинг асосий натижасини баён этамиз.

7-теорема. *Фараз қилайлик* $m_1 = m_2$ *ва* $z_0(k) = inf\sigma\left(\hat{h}(k)\right) < \mathrm{e}_m(k)$ *бўлсин. У ҳолда:*

a) *агар* $k \in (-\pi; \pi)^d$ *бўлса,* $z_0(k)$ *сони* $\hat{h}(k)$ *операторнинг оддий хос қиймати бўлади ва унга мос хос векторни қатъий мусбат қилиб танлаш мумкин.*

b) *агар* $k \in \mathbb{T}^d \backslash (-\pi; \pi)^d$ *бўлса, ихтиёрий* $n \in \mathbb{N}$ *учун шундай* $\hat{v}$ *потенциал мавжуд бўлиб,* $z_0(k)$ *сони* n*каррали хос қиймат бўлади ва унга мос* n *та хос векторларнинг барчасини мусбат қилиб танлаш мумкин.*

.

ХУЛОСА

Ушбу диссертация иши d ўлчамли панжарадаги бир ва икки заррачали системаларга мос Шредингер операторлари спектрининг қуйи чегараси яккаланган бўлганда унинг оддий хос қиймат бўлиши ҳамда унга мос хос векторнинг қатъий мусбатлигини ўрганишга бағишланган.

Тадқиқотнинг асосий натижалари қуйидагилардан иборат:

1. Ихтиёрий ўлчамли панжарадаги бир заррачали системага мос қўзғалмас энергия оператори резольвентаси учун аналитик ифода топилган ҳамда бу резольвента операторнинг мусбатликни кучайтирувчи эканлиги исботланган.

2. Ихтиёрий ўлчамли панжарадаги бир заррачали системага мос Шредингер оператори спектрининг қуйи чегараси яккаланган нуқта бўлганда унинг оддий хос қиймат эканлиги ва унга мос қатъий мусбат хос функциянинг мавжудлиги исботланган.

3. Ихтиёрий ўлчамли панжарадаги икки заррачали системага мос Шредингер оператори қўзғалмас қисми бўлган $\hat{h}_0(k)$ операторнинг резольвентаси, система квазиимпульсининг $k \in (-\pi;\pi)^d$ қийматларида мусбатликни кучайтирувчи ҳамда $k \in \mathbb{T}^d \setminus (-\pi;\pi)^d$ қийматларида мусбатликни сақловчи эканлиги кўрсатилган.

4. Панжарадаги ихтиёрий икки заррачали системага мос Шредингер оператори $h(k), k \in \mathbb{T}^d$ нинг спектри қуйи чегараси яккаланган нуқта бўлганда унинг оддий хос қиймат эканлиги исботланган ва бу хос қийматга мос қатъий мусбат хос функциянинг мавжудлиги кўрсатилган.

5. Бир хил массали икки заррачали Шредингер оператори қўзғалмас қисмининг дисперсион функцияси Ферми сирти $E_k^{-1}\big(\mathrm{e}_m(k)\big)$ бир нуқтали тўплам ва операторнинг спектри қуйи чегараси яккаланган нуқта бўлганда унинг оддий хос қиймат эканлиги исботланган ва бу хос қийматга мос қатъий мусбат хос функция мавжудлиги кўрсатилган.

6. Бир хил массали икки заррачали Шредингер оператори қўзғалмас қисмининг дисперсион функцияси Ферми сирти $E_k^{-1}\big(\mathrm{e}_m(k)\big), \mathbb{T}^l$ $(1 \le l \le d)$ га изоморф бўлган ҳолда ихтиёрий n натурал сон учун шундай $\hat{v}$ потенциал мавжуд бўлиб, спектрнинг яккаланган қуйи чегараси n каррали хос қиймат бўлиши ва бу хос қийматга мос n та ортогонал хос векторларнинг барчасини мусбат қилиб танлаш мумкинлиги кўрсатилган.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ PhD.27.06.2017.FM.02.01
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ ПРИ
САМАРКАНДСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

САМАРКАНДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

КУЛЖАНОВ УТКИР НЕМАТОВИЧ

О НИЖНЕМ СПЕКТРЕ ОДНОЧАСТИЧНЫХ И ДВУХЧАСТИЧНЫХ ДИСКРЕТНЫХ ОПЕРАТОРОВ ШРЕДИНГЕРА

01.01.01 – математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD)
ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

Самарканд – 2019

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за B2018.2.PhD/FM209

Диссертация выполнена в Самаркандском государственном университете.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (www.samdu.uz) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (www.ziyonet.uz).

Научный руководитель:	**Лакаев Саидахмат Норжигитович** доктор физико-математических наук, профессор, академик
Официальные оппоненты:	**Халмухаммедов Алимджан Рахимович** доктор физико-математических наук, профессор
	Каршибоев Хайрулло Киличевич кандидат физико-математических наук
Ведущая организация:	**Институт Математики**

Защита диссертации состоится «____» _____________2019 года в ____ часов на заседании Научного совета PhD.27.06.2017.FM.02.01 при Самаркандском государственном университете. (Адрес: 140104, г. Самарканд, Университетский бульвар, 15. Тел.: (99866) 231-06-32, факс: (99866) 235-19-38, e-mail: patent@samdu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Самаркандского государственного университета (зарегистрирована за №_____). (Адрес: 140104, г. Самарканд, Университетский бульвар, 15. Тел.: (99866)231-06-32, факс: (99866) 235-19-38).

Автореферат диссертации разослан «____» _______________2019 года.

(реестр протокол рассылки №________ от «____» _______________2019 года).

А.С. Солеев
Председатель Научного совета по присуждению ученых степеней, доктор физико-математических наук, профессор

А.М. Халхужаев
Ученый секретарь Научного совета по присуждению ученых степеней, доктор физико-математических наук

И.А. Икромов
Заместитель председателя Научного семинара при Научном совете по присуждению ученых степеней, доктор физико-математических наук, профессор

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность и востребованность темы диссертации. Один из направлений научно-прикладных исследований, проводимые на мировом уровне, посвящены к изучению процессов, протекающих в микромире. Последовательной теорией явлений микромира является квантовая механика, созданная Планком, Эйнштейном, Гейзенбергом, Шредингером, Паули, Дираком и другими учеными. Важнейшей физической величиной в любой квантово-механической системе является энергия. Изучение спектральных свойств оператора энергии (Гамильтониана или оператора Шредингера) считается одной из основных задач квантовой механики. В этом направлении оператор Шредингера, соответствующих системам одной и двух частиц на решетке служит теоретическим обоснованием экспериментальных наблюдений. Поэтому развитие исследования по изучению нижнего края спектра операторов Шредингера, соответствующих системам одной и двух частиц на решетке, которые встречаются в физики твердого тела, а также в кантовой механике и статистической физике остаётся одним из важных задач.

В настоящее время в мире так как собственные значения оператора энергии, соответствующий системе одной квантовой частицы на решетке и их количество является изменчивым к изменению во внешнем поле, решение проблем относящихся к исследованию дискретных спектров этих операторов, в том числе, когда нижний край спектра есть собственное значение и доказательство того, что оно невырожденное и ему соответствует строго положительный собственный вектор играет важную роль при изучении процессов в физических системах. Так как собственные значения оператора Шредингера, соответствующие системам двух квантовых частиц на решетке являются довольно чувствительными к изменению квазиимпульса системы значительный научный интерес представляет решение проблем, относящихся собственным значениям этого оператора, в том числе, изучение кратности наименьшего собственного значения и строгой положительности соответствующего собственного вектора в зависимости от определения дисперсионных функций является актуальным направлением научных исследований.

В нашей стране удиляется большое внимание к актуальным направлениям, имеющим научное и прикладное применение фундаментальных наук, в частности, особое внимание уделяется со стороны учёных нашей страны к изучению операторов Шредингера, соответствующих системам нескольких частиц на решетке. Важными задачами и направлениями деятельности отмечается осуществление научных исследований по основным приоритетным направлениям математической науки, таких как алгебра и математический анализ, теория вероятностей, прикладная математика и математическое моделирование на уровне международных стандартов[1].

При обеспечении исполнения постановления важное значение имеет, в частности, развитие теории самосопряженных операторов, в том числе, изучение задач о нижнем крае спектра операторов Шредингера, соответствующих системам одной и двух частиц на решетке есть невырожденное собственное значение и существования строго положительного собственного вектора.

Исследования данной диссертации в определенной степени служит решению задач, поставленных в Указах Президента Республики Узбекистан № УП-2789 от 17 февраля 2017 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности» и № УП-2909 от 20 апреля 2017 года «О мерах по дальнейшему развитию системы высшего образования», а также в других нормативно-правовых актах, относящихся к данной области.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий в республике. Данное исследование выполнено в рамках соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Квантовая механика, теория твердых тел и ядерная физика в основном занимаются изучением свойств оператора Шредингера. Уравнение Шредингера – это основное уравнение квантовой механики. Полученные в этой области результаты приведены в книгах Д.И.Блохинцева «Основы квантовой механики», Ф.А.Березина и М.Н.Шубина «Уравнения Шредингера». Операторы Шредингера, соответствующие системам многих частиц на решетке, рассматривались в 90-х годах прошлого века Д.С.Маттисом и А.И.Могильнером и после чего исследования в этом направлении бурно развивались. В случае оператора Шредингера на решетке в математическом смысле возникают те же проблемы их исследования, что и в случае непрерывного оператора Шредингера. Спектральные свойства дискретных и непрерывных операторов Шредингера, в том числе, существование собственных значений изучались в работах Б. Саймона, Т.Като, Ф.Реллих, Р.А.Минлоса, Ш.А.Алимова, А.Р.Халмухаммедова, С.Н.Лакаева, К.Макарова, Ж.И.Абдуллаева и З.Э.Муминова.

Единственность и невырожденность собственного значения для стандартного Лапласиана на решетке и контактных потенциалов доказана С.Лакаевым и Ж.Абдуллаевым. Известно, что для определенного класса дисперсионных функций нижняя грань спектра дискретного оператора Шредингера одной частицы является изолированным. В этом случае нижний край спектра является простым собственным значением и ему соответствует строго положительный собственный вектор. В работах Д.Яфаева, А.Соболева, С.Лакаева и З.Муминова изучено, что нижний край существенного спектра является виртуальным уровнем или невырожденным собственным значением (резонансом) оператора Шредингера.

Известно, что любому линейному оператору A в $n-$мерном эвклидовом пространстве можно сопоставить некоторую $n\times n$ квадратную матрицу и обратное. Если все элементы этой матрицы положительны, то наибольшее собственное значение этого оператора является простым и соответствующий ему собственный вектор можно выбрать положительным. Результаты таких типов называются теоремами типа Перрона-Фробениуса. Сначала О.Перрон для положительных матриц доказал невырожденность наибольшего собственного значения и существование строго положительного собственного вектора. Далее Г.Фробениус обобщил теоремы этого типа.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами высшего учебного заведения, в которой выполнена диссертация. Диссертационная работа выполнена в соответствии с планами научно-исследовательских работ Самаркандского государственного университета.

Цель исследования показать, что если нижний край спектра есть изолированная точка оператора Шредингера на решетке, то он является простым собственным значением и ему соответствует строго положительный собственный вектор.

Задачи исследования:

показать, что резольвента невозмущенного оператора энергии, соответствующего системе одной частицы на $d-$мерной решетке является усиливающим положительность при всех значениях ниже существенного спектра;

доказать, что если нижний край есть изолированная точка спектра оператора Шредингера, соответствующией системе одной частицы на $d-$мерной решетке, то он является простым собственным значением и ему соответствует строго положительный собственный вектор, т.е. доказать аналог теоремы типа Перрона-Фробениуса;

показать, что резольвента невозмущенного оператора энергии, соответствующего системе двух частиц на $d-$ мерной решетке является сохраняющим положительность при всех точках ниже существенного спектра и при всех значениях квазиимпульса системы, а усиливающим положительность при некоторых значениях квазиимпульса;

установить, что нижний край есть изолированная точка спектра оператора Шредингера, соответствующей системе двух частиц на $d-$мерной решетке, то он является собственным значением, если это собственное значение является простым, то ему соответствует строго положительная собственная функция, если это собственное значение является кратным, то ему соответствуют положительные собственные функции.

Объект исследования - операторы энергии, соответствующие системам одной и двух частиц на $d-$мерной решетке.

Предмет исследования – установить, что если нижний край есть изолированная точка спектра оператора Шредингера, соответствующего системе одной или двух частиц на d −мерной решетке, то он является простым собственным значением и ему соответствует строго положительный собственный вектор.

Методы исследования. В диссертации использованы общие методы математического анализа, функционального анализа, теории функций комплексного переменного и математической физики.

Научная новизна исследования. Показано, что резольвента невозмущенного оператора энергии, соответствующего системе одной частицы на d − мерной решетке является усиливающим положительность при всех значениях ниже края существенного спектра;

доказано, что если нижний край есть изолированная точка спектра оператора Шредингера соответствующего системе одной частиц на d −мерной решетке, то он является простым собственным значением и ему соответствует строго положительный собственный вектор, т.е. доказать аналог теоремы типа Перрона-Фробениуса;

показано, что резольвента невозмущенного оператора энергии соответствующего системе двух частиц на d − мерной решетке является сохраняющим положительность при всех точках ниже существенного спектра и при всех значениях полного квазиимпульса, и усиливающим положительность при некоторых значениях полного квазиимпульса;

установлено, что нижний край есть изолированная точка спектра оператора Шредингера соответствующего системе двух частиц на d −мерной решетке, то он является собственным значением, если это собственное значение является простым, то ему соответствует строго положительная собственная функция, если это собственное значение является кратным, то ему соответствуют положительные собственные функции.

Практические результаты исследования состоят в использовании выводов о собственных значениях и собственных функциях операторов Шредингера систем одной и двух частиц на решетке при исследовании качественных свойств экспериментальных наблюдений и численных вычислениях в атомной физике и квантовой механике.

Достоверность результатов исследования обоснована использованием методов математического анализа, математической физики, функционального анализа, теории функций комплексного переменного, а также строгостью математических рассуждений.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научное значение результатов исследования заключается в том, что они могут быть использованы в спектральной теории самосопряженных операторов, в квантовой механике, физике твердого тела, в частности, при решении задач, связанных со спектральными свойствами оператора энергии систем одной и двух частиц на решетке.

Практическое значение диссертационного исследования определяется тем, что полученные в работе научные результаты могут служить теоретической основой экспериментальных исследований, проводимых в квантовой механике и физике твердого тела, показываюших образования сложных объектов.

Внедрение результатов исследования. На основе полученных научных результатов, относящихся к нижнему спектру одночастичных и двухчастичных операторов Шредингера на решетке:

методы изучения нижнего спектра операторов Шредингера, соответствующих системам одной и двух частиц на решетке применено в исследованиях зарубежного гранта под номером QJ130000.2726.01K82 для исследования существования собственного значения и порогового эффекта дискретного оператора Шредингера (Справка Университет технологии Малайзии от 21 октября 2018 г.). Применение научного результата для изучения интегральных операторов и основных свойств оператора Шредингера на решетке дало возможность описания инвариантного подпространства и существенного спектра для трехчастичного оператора Шредингера;

то, что резольвента невозмущенного оператора энергии, соответствующего системе одной или двух частиц на решетке усиливает положительность применено в проекте под номером ЁФ-4-17 «Разложения для собственных значений и резонансов дискретного оператора Шредингера и моделей Фридрихса» при использовании этих научных результатов для оператора Шредингера, соответствующего системе двух частиц, взаимодействующих с помощью контактного потенциала на решетке размерности $d \geq 3$ (Справка Министерство Высшего и среднего специального образования Республики Узбекистан от 28 марта 2019 г.). Применение научного результата дало возможность в зависимости от его параметров определить верхние и нижние грани единственного собственного значения слева от существенного спектра рассматриваемого оператора;

результаты о том, что если нижний край спектра оператора Шредингера, соответствующего системам одной и двух частиц на решетке является изолированной точкой, то он является простым собственным значением, применены в проекте под номером ЁФ-4-17 «Разложения для собственных значений и резонансов дискретного оператора Шредингера и моделей Фридрихса» для модели Фридрихса, соответствующего гамильтониану системы двух частиц на решетке размерности $d \geq 1$ (Справка Министерство Высшего и среднего специального образования Республики Узбекистан от 28 марта 2019 г.). Применение научного результата дало возможность показать существования единственнего собственного значения оператора, лежащего слева от существенного спектра и собственного вектора соответствующего этому собственному значению является регулярной функцией.

Апробация результатов исследования. Результаты данного исследования были обсуждены на 6 международных и 3 республиканских научно-практических конференциях.

Публикация результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 16 научных работ, из них 6 в научных изданиях, входящих в перечень, предложенный Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для опубликования основных научных результатов диссертаций доктора философии, в том числе, 1 работа опубликована в зарубежном журнале и 5 - в республиканских научных изданиях.

Объём и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 93 страницы.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность и востребованность темы диссертации, показано соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий в республике, приведены обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В первой главе диссертации, названной **«Линейные ограниченные операторы в гильбертовом пространстве»**, приведены необходимые предварительные понятия и утверждения, в частности, приведены необходимые теоремы спектральной теории ограниченных самосопряженных и компактных операторов. Также рассмотрены операторы типа Лорана и изложены основные свойства этих операторов. Отмечено, что невозмущенный оператор энергии одной частицы на решетке является оператором типа Лорана. Невозмущенный оператор энергии, соответствующей системе одной частицы рассмотрен как ограниченный и самосопряженный оператор в соответствующем гильбертовом пространстве и доказано абсолютная непрерывность его спектра. Приведена теорема Перрона-Фробениуса для линейных операторов, действующих в конечномерном Эвклидовом пространстве.

Во второй главе диссертации, названной **«Основное состояние одночастичных дискретных операторов Шредингера»** найдено аналитическое представление для резольвенты $\hat{R}_0(z), z < \varepsilon_{min}$ невозмущенного оператора энергии, соответствующей системе одной частицы на $d \geq 1$ мерной решетке и показано, что резольвента $\hat{R}_0(z)$ является оператором, усиливающим положительность при всех значениях $z < \varepsilon_{min}$. Установлено, что если нижний край есть изолированная точка спектра дискретного оператора Шредингера одной частицы, то он является простым собственным значением и ему соответствует строго положительный собственный вектор, т.е. доказан аналог теоремы Перрона-Фробениуса.

В третьей главе диссертации, названной **«О нижнем спектре двухчастичного дискретного оператора Шредингера»** оператор энергии системы двух частиц на решетке описан как ограниченный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве. Осуществлен переход из координатного представления в импульсное представление оператора энергии, а также выделен квазиимпульс системы $k \in \mathbb{T}^d$, оператор энергии $H^{(2)}$ разложен в прямой интеграл операторов $h(k)$, которые называются слойными операторами. Операторы $h(k)$ при каждом фиксированно $k \in \mathbb{T}^d$ называются операторами Шредингера, соответствующими системе двух частиц.

В результате задача изучения спектра оператора Шредингера, соответствующей системы двух частиц сводится к изучению задачи спектральных свойств семейства $h(k), k \in \mathbb{T}^d$ дискретных операторов Шредингера одной частицы. А также изучен вопрос о том, что если нижний край есть изолированная точка спектра оператора $h(k)$, то он является его простым собственным значением.

Через $\mathbb{Z}^d$ обозначается $d-$ мерная решетка, $\ell_2(\mathbb{Z}^d)$ - гильбертово пространство квадратично - суммируемых функций, определённых на $\mathbb{Z}^d$.

Функции $\hat{\psi}_x, x \in \mathbb{Z}^d$ образуют ортонормированный базис в $\ell_2(\mathbb{Z}^d)$:

$$\hat{\psi}_x(y) = \begin{cases} 1, y = x \\ 0, y \neq x \end{cases}, x, y \in \mathbb{Z}^d.$$

Базис $\hat{\psi}_x, x \in \mathbb{Z}^d$ называется каноническим.

В третьем параграфе главы I рассмотрены операторы типа Лорана.

Определение 1. *Оператор $\hat{L}: \ell_2(\mathbb{Z}^d) \to \ell_2(\mathbb{Z}^d)$ называется оператором типа Лорана, если матричные элементы $a_{xy} = (\hat{L}\hat{\psi}_x, \hat{\psi}_y), x, y \in \mathbb{Z}^d$ оператора $\hat{L}$ зависят только от разности $x - y$.*

Лемма 1. *Ограниченный линейный оператор $\hat{L}$ на $\ell_2(\mathbb{Z}^d)$ является оператором Лорана тогда и только тогда, когда $\hat{L}$ коммутирует с оператором сдвига $\hat{T}(s)$ на $\ell_2(\mathbb{Z}^d)$ при любом $s \in \mathbb{Z}^d$.*

Пусть $\hat{T}(s): \ell_2(\mathbb{Z}^d) \to \ell_2(\mathbb{Z}^d)$:

$$\left(\hat{T}(s)\hat{f}\right)(x) = \hat{f}(s + x) \qquad (1)$$

оператор сдвига на $s \in \mathbb{Z}^d$.

Отметим, что оператор $\hat{T}(s)$ является унитарным при всех $s \in \mathbb{Z}^d$.

В этом параграфе приведена теорема Перрона-Фробениуса для самосопряжённых операторов.

Теорема 1 (теорема Перрона-Фробениуса).

Пусть числа $\lambda_1 \geq \lambda \geq_2 \lambda_3 \geq \cdots \geq \lambda_n -$ *собственные значения самосопряженного оператора* $A = \left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{n}, a_{ij} = a_{ji} \geq 0,$ *тогда:*

a) число λ_1 *положительно и является простым собственным значением оператора* A;

b) существует собственный вектор матрицы A *с положительными координатами, соответствующий* λ_1.

Пусть $\mathbb{T}^d = (\mathbb{R} / 2\pi\mathbb{Z})^d = (-\pi; \pi]^d$ - $d-$ мерный тор и $L_2(\mathbb{T}^d)$ – гильбертово пространство квадратично-интегрируемых функций, определённых на $\mathbb{T}^d$.

Оператор энергии $\widehat{H}$, описывающий движение одной квантовой частицы на $d-$ мерной решетке во внешнем поле $\widehat{V}$, определяется как ограниченное возмущение оператора $\widehat{H}_0$:

$$\widehat{H} = \widehat{H}_0 - \widehat{V}.$$

Здесь $\widehat{H}_0$ –оператор переноса частицы с узла на (соседний) узел и определяется по формуле:

$$\left(\widehat{H}_0 \hat{f}\right)(x) = \sum_{s \in \mathbb{Z}^d} \hat{\varepsilon}(s - x)\,\hat{f}(s), \qquad \hat{f} \in \ell_2(\mathbb{Z}^d).$$

Мы предположим, что дисперсионная функция $\hat{\varepsilon}(\cdot) \in \ell_1(\mathbb{Z}^d)$, четная и вещественная.

Оператор $\widehat{V}$ есть оператор умножения на функцию $\hat{v}(\cdot) \in \ell_\infty(\mathbb{Z}^d)$:

$$\left(\widehat{V}\hat{f}\right)(x) = \hat{v}(x)\hat{f}(x), \hat{f} \in \ell_2(\mathbb{Z}^d).$$

Кроме того дисперсионная функция $\hat{\varepsilon}(\cdot)$ и потенциал $\hat{v}(\cdot)$ удовлетворяют дополнительным условиям:

Предположение 1.

a) *предположим, что* $\hat{\varepsilon}(s) < 0,$ *при* $|s| = 1$ *и* $\hat{\varepsilon}(s) \leq 0, |s| > 1$ *где* $|s| := |s_1| + \cdots + |s_d|$;

b) *существуют положительные числа* C, a *и при всех* $s \in \mathbb{Z}^d$ *выполнено неравенство* $|\hat{\varepsilon}(s)| \leq Cexp(-a|s|)$.

Предположение 2. *Предположим, что* $\hat{v}(\cdot) \not\equiv 0, \hat{v}(\cdot) \in \ell_1(\mathbb{Z}^d)$ *и* $\hat{v}(s) \geq 0, s \in \mathbb{Z}^d$.

Пусть выполнены предположения 1 и 2, тогда операторы $\widehat{H}, \widehat{H}_0$ и $\widehat{V}$ являются ограниченными и самосопряженными. Если выполнено предположение 2, то оператор $\widehat{V}$ является положительным и компактным.

Обозначим через $\varepsilon(p)$ функцию:

$$\varepsilon(p) = \sum_{s \in \mathbb{Z}^d} \hat{\varepsilon}(s)\, e^{i(p,s)}, \qquad p = (p_1, \dots, p_d) \in \mathbb{T}^d.$$

Эта функция отличается от преобразования Фурье функции $\hat{\varepsilon}$ на множитель $(2\pi)^{-d/2}$. При выполнении части b) предположения 1 следует аналитичность функции $\varepsilon(p)$ на $\mathbb{T}^d$. Обозначим через H_0 импульсное представление оператора $\widehat{H}_0$. Известно, что невозмущенный оператор в импульсном представлении есть оператор умножения на абсолютно непрерывную функцию $\varepsilon(p)$. Следовательно, оператор H_0 имеет абсолютно непрерывный спектр и он совпадает отрезком $[\varepsilon_{min}, \varepsilon_{max}]$, где

$$\varepsilon_{min} = \min_{q\in\mathbb{T}^d} \varepsilon(q), \varepsilon_{max} = \max_{q\in\mathbb{T}^d} \varepsilon(q).$$

Так как операторы $\widehat{H}_0$ и H_0 унитарно эквивалентны, то спектр оператора $\widehat{H}_0$ абсолютно непрерывный, т.е.

$$\sigma(\widehat{H}_0) = \sigma_{ac}(\widehat{H}_0) = [\varepsilon_{min}; \varepsilon_{max}] = \sigma(\widehat{H}_0).$$

Оператор $\widehat{V}$ является компактным, поэтому, согласно теореме Вейля существенный спектр $\sigma_{ess}(\widehat{H})$ оператора $\widehat{H}$ совпадает со спектром оператора $\widehat{H}_0$, т.е.

$$\sigma_{ess}(\widehat{H}) = \sigma(\widehat{H}_0) = [\varepsilon_{min}; \varepsilon_{max}].$$

Для любой регулярной точки $z \in \mathbb{C}\backslash[\varepsilon_{min}; \varepsilon_{max}]$ резольвента $\widehat{R}_0(z) = \left(\widehat{H}_0 - zI\right)^{-1}$ оператора $\widehat{H}_0$ существует и определяется формулой

$$\left(\widehat{R}_0(z)\hat{f}(x)\right) = \sum_{s\in\mathbb{Z}^d} \hat{r}_0(x-s; z)\hat{f}(s), \hat{f} \in \ell_2(\mathbb{Z}^d),$$

где

$$\hat{r}_0(x;\ z) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{T}^d} \frac{e^{-i(x,t)}}{\varepsilon(t) - z}dt\ ,\ \ x \in \mathbb{Z}^d, z \in \mathbb{C}\backslash[\varepsilon_{min}; \varepsilon_{max}].$$

Приведём некоторые понятия и определения. Пусть $M \subset \mathbb{Z}^d$ − подмножеств d −мерной решетки $\mathbb{Z}^d$.

Определение 2. *Функция $\hat{f} \in \ell_2(M)$ называется положительной, если она неотрицательна и не равна нулю тождественно, $\hat{f}$ называется строго положительной, если $\hat{f}(x) > 0$ при всех $x \in M$.*

Определение 3. *Ограниченный оператор A называется сохраняющим положительность на $\ell_2(M)$, если функция $A\hat{f}$ положительна при положительной $\hat{f} \in \ell_2(M)$, оператор A называется усиливающим положительность на $\ell_2(M)$, если функция $A\hat{f}$ строго положительна при положительной $\hat{f} \in \ell_2(M)$.*

Из представления $\widehat{H} = \widehat{H}_0 - \widehat{V}$ и положительности оператора $\widehat{V}$ следует, что $\sigma(\widehat{H}) \cap (\varepsilon_{max}; \infty) = \emptyset$, т.е. оператор $\widehat{H}$ не имеет сообственного значения, большего чем ε_{max}. Если оператор $\widehat{H}$ имеет собственные значения, то эти совственные значения могут лежать только на интервале $(-\infty; \varepsilon_{min})$. Обозначим через $\widehat{V}^{\frac{1}{2}}$ положительный квадратный корень положительного оператора $\widehat{V}$.

Лемма 2. *Пусть выполнено предположение 1. Тогда при каждом фиксированном* $z < \varepsilon_{min}$ *функция* $\hat{r}_0(\cdot; z)$ *является строго положительной на* $(-\infty; \varepsilon_{min})$.

Следующее утверждение играет важную роль при доказательстве основных результатов второй главы.

Теорема 2. *Пусть выполнено предположение 1. Тогда для любого* $z < \varepsilon_{min}$ *оператор* $\hat{R}_0(z)$ *является усиливающим положительность на* $\ell_2(\mathbb{Z}^d)$.

В втором параграфе второй главы рассматривается оператор $\hat{G}(z)$ при каждом $z \in \mathbb{C} \backslash [\varepsilon_{min}; \varepsilon_{max}]$:

$$\hat{G}(z) = \hat{V}^{\frac{1}{2}} \hat{R}_0(z) \hat{V}^{\frac{1}{2}}.$$

Оператор $\hat{G}(z)$ является самосопряженным и компактным при всех $z \in \mathbb{R} \backslash [\varepsilon_{min}; \varepsilon_{max}]$. Задача исследования числа собственных значений оператора $\hat{H}$ ниже $z < \varepsilon_{min}$ сводится к задаче исследования того, что 1 является собственным значением оператора $\hat{G}(z)$.

Лемма 3. *Пусть выполнены предположения 1 и 2. Тогда число* $z < \varepsilon_{min}$ *является собственным значением оператора* $\hat{H}$ *тогда и только тогда, когда число* $\lambda = 1$ *является собственным значениям оператора* $\hat{G}(z)$. *При этом кратности этих собственных значений совпадают.*

Обозначим через $N(z)$ число собственных значений оператора $\hat{H}$, лежащих левее z $(z < \varepsilon_{min})$ и обозначим через $n(a, A)$ число собственных значений оператора A, лежащих правее a.

Лемма 4. *Пусть выполнены предположения 1 и 2. Тогда для каждого* $z < \varepsilon_{min}$ *выполняется равенство*

$$N(z) = n\big(1, \hat{G}(z)\big).$$

Если $\hat{v} \neq 0$, то $supp\hat{v}$ не пустое множество. Очевидно, что пространство значений $\overline{Ran\hat{G}(z)}$ оператора $\hat{G}(z)$ равно $\ell_2(supp\hat{v})$. Подпространство $\ell_2(supp\hat{v})$ является инвариантным относительно оператора $\hat{G}(z)$. Обозначим через $\tilde{G}(z)$ сужение $\hat{G}(z)\big|_{\ell_2(supp\,\hat{v})}$ оператора $\hat{G}(z)$ на $\ell_2(supp\hat{v})$.

Лемма 5. *Пусть выполнены предположения 1 и 2. Тогда для любого* $z < \varepsilon_{min}$ *оператор* $\tilde{G}(z)$ *положителен и является усиливающим положительность на* $\ell_2(supp\hat{v})$. *Кроме того, число* $\lambda_1(z) = \|\tilde{G}(z)\|, z < \varepsilon_{min}$ *есть простое собственное значение оператора* $\tilde{G}(z)$ *и соответствующий собственный вектор* $\hat{f}$ *(с точностью до множителя) строго положителен в* $\ell_2(supp\hat{v})$.

Теперь сформулируем основной результат второй главы.

Теорема 3. *Пусть выполнены предположения 1,2 и* $z_0 = inf\sigma(\hat{H}) < \varepsilon_{min}$. *Тогда* z_0 *—простое собственное значение оператора* $\hat{H}$ *и соответствующий собственный вектор (с точностью до множителя) строго положителен в* $\ell_2(\mathbb{Z}^d)$.

Невозмущенный оператор энергии $\widehat{H}_0^{(2)}$ системы двух квантовых частиц на $d \geq 1$ мерной решетке $\mathbb{Z}^d$ обычно ассоциируется со следующим самосопряженным оператором в гильбертовом пространстве $\ell_2((\mathbb{Z}^d)^2)$:

$$\widehat{H}_0^{(2)} = -\frac{1}{2m_1}\widehat{\Delta}_1 - \frac{1}{2m_2}\widehat{\Delta}_2,$$

где

$$\widehat{\Delta}_1 = \widehat{\Delta} \otimes I,\ \widehat{\Delta}_2 = I \otimes \widehat{\Delta}.$$

Здесь $I-$ единичный оператор в $\ell_2(\mathbb{Z}^d), m_1, m_2 > 0 -$ массы частиц и $\widehat{\Delta} -$ стандартный решетчатый Лапласиан, т.е.

$$\widehat{\Delta} = \sum_{j=1}^{d}\left(\widehat{T}(e_j) + \widehat{T}^*(e_j) - 2\widehat{T}(0)\right).$$

Здесь $e_j -$ единичные орты на $\mathbb{Z}^d$. $\widehat{T}(s) -$ оператор сдвига на $s \in \mathbb{Z}^d$, определяется по формуле (1).

Импульсное представление невозмущенного оператора $\widehat{H}_0^{(2)}$,

$$H_0^{(2)} = F^{-1}\widehat{H}_0^{(2)}F: L_2((\mathbb{T}^d)^2) \to L_2((\mathbb{T}^d)^2)$$

определяется по формуле:

$$\left(H_0^{(2)}f\right)(p,q) = \left(\frac{1}{m_1}\varepsilon(p) + \frac{1}{m_2}\varepsilon(q)\right)f(p,q) = E(p,q)f(p,q). \qquad (2)$$

Здесь через $\varepsilon(p)$ обозначена функция:

$$\varepsilon(p) = \sum_{j=1}^{d}\left(1 - cos p_j\right), p = (p_1, \dots, p_d) \in \mathbb{T}^d.$$

Оператор $H_0^{(2)}$ есть оператор умножения на аналитическую функцию $E(p,q)$ в $L_2((\mathbb{T}^d)^2)$, поэтому его спектр совпадает с отрезком $[0; 2d(m_1^{-1} + m_2^{-1})]$, точнее

$$\sigma\left(H_0^{(2)}\right) = \sigma_{ac}\left(H_0^{(2)}\right) = [0; 2d(m_1^{-1} + m_2^{-1})] = \sigma\left(\widehat{H}_0^{(2)}\right).$$

Иначе говоря, имеет место следующее утверждение.

Лемма 6. *Спектр оператора $\widehat{H}_0^{(2)}$ абсолютно непрерывный и*

$$\sigma\left(\widehat{H}_0^{(2)}\right) = \sigma_{ac}\left(\widehat{H}_0^{(2)}\right) = [0; 2d(m_1^{-1} + m_2^{-1})].$$

Оператор энергии $\widehat{H}^{(2)}$ в координатном представлении системы двух квантовых частиц, движущихся на $d-$мерной решетке $\mathbb{Z}^d$ с парным взаимодействием $\widehat{V}_{12}$, является ограниченным самосопряженным оператором в гильбертовом пространстве $\ell_2((\mathbb{Z}^d)^2)$ вида

$$\widehat{H}^{(2)} = \widehat{H}_0^{(2)} - \widehat{V}_{12}.$$

Здесь $\widehat{V}_{12}$ −оператор умножения на функцию $\hat{v}(x-y)$, т.е.

$$\left(\widehat{V}_{12}\hat{f}\right)(x,y) = \hat{v}(x-y)\hat{f}(x,y), \qquad \hat{f} \in \ell_2((\mathbb{Z}^d)^2),$$

где $\hat{v}: \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}-$ вещественная ограниченная функция, удовлетворяющая предположению 2.

Введем группу унитарных операторов $\{\widehat{\boldsymbol{T}}(n), n \in \mathbb{Z}^d\}$ в гильбертовом пространстве $\ell_2((\mathbb{Z}^d)^2)$ по формуле:

$$\left(\widehat{\boldsymbol{T}}(n)\hat{f}\right)(x,y) = \hat{f}(x+n, y+n).$$

Оператор энергии $\widehat{H}$ системы двух квантовых частиц коммутирует с группой $\{\widehat{\boldsymbol{T}}(n), n \in \mathbb{Z}^d\}$, т.е. имеет место утверждение.

Теорема 4. *Для любого* $n \in \mathbb{Z}^d$ *имеет место равенство*

$$\widehat{H}^{(2)}\widehat{\boldsymbol{T}}(n) = \widehat{\boldsymbol{T}}(n)\widehat{H}^{(2)}. \qquad (3)$$

Импульсное представление оператора $\widehat{\boldsymbol{T}}(n), n \in \mathbb{Z}^d$ определяется в $L_2((\mathbb{T}^d)^2)$ по формуле:

$$(\boldsymbol{T}(n)f)(p,q) = e^{i(n,p+q)}f(p,q).$$

Оператор $H^{(2)}$ определяется по формуле (2), а оператор V_{12} определяется следующей формулой:

$$(V_{12}f)(p,q) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int\limits_{\mathbb{T}^d} v(s-q)f(p+q-s,s)ds.$$

Из коммутационного соотношения (3) вытекает, что оператор $H^{(2)}$ и пространство $L_2((\mathbb{T}^d)^2)$ разлагаются в прямой интеграл фон Неймана, т.е.

$$H^{(2)} = \int\limits_{\mathbb{T}^d} \oplus \tilde{h}(k)\, dk, \qquad L_2((\mathbb{T}^d)^2) = \int\limits_{\mathbb{T}^d} \bigoplus L_2(\mathbb{F}_k) dk.$$

Здесь

$$\mathbb{F}_k = \{(p,q) \in (\mathbb{T}^d)^2 :\ p+q = k\}, k \in \mathbb{T}^d.$$

Для каждого $k \in \mathbb{T}^d$ оператор $\tilde{h}(k): L_2(\mathbb{F}_k) \to L_2(\mathbb{F}_k)$ унитарно эквивалентен оператору $h(k)$, действующему в $L_2(\mathbb{T}^d)$ по формуле:

$$h(k) = h_0(k) - V.$$

Здесь действие оператора $h_0(k)$ на элемент $f \in L_2(\mathbb{T}^d)$ определяется в виде:

$$(h_0(k)f)(p) = \boldsymbol{E}_k(p)f(p),$$

где

$$\boldsymbol{E}_k(p) = \frac{1}{m_1}\varepsilon(p) + \frac{1}{m_2}\varepsilon(k-p) = \sum_{j=1}^{d}\left[\mu(0) - |\mu(k_j)|cos\left(p_j - \varphi(k_j)\right)\right].$$

Здесь $\mu(y) = m_1^{-1} + m_2^{-1}e^{-iy}, y \in \mathbb{T}$ и $\varphi(k_j) = arg\mu(k_j), k_j \in \mathbb{T}$.

Вектор $k \in \mathbb{T}^d$ называется полным квазиимпульсом системы двух частиц и операторы $\tilde{h}(k), k \in \mathbb{T}^d$ называются слоями оператора энергии $\widehat{H}$.

Оператор V есть интегральный оператор в $L_2(\mathbb{T}^d)$:

$$(Vf)(p) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{T}^d} v(p-q)\, f(q) dq,$$

где

$$v(p) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} \hat{v}(x) e^{i(x,p)}.$$

Координатное представление оператора $h_0(k)$ есть оператор $\hat{h}_0(k) = \mathcal{F} h_0(k) \mathcal{F}^{-1}$: $\ell_2(\mathbb{Z}^d) \to \ell_2(\mathbb{Z}^d)$ который имеет вид:

$$\hat{h}_0(k) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d} \Big(2\mu(0)\hat{T}(0) - \mu(k_j)\hat{T}(e_j) - \overline{\mu(k_j)}\hat{T}^*(e_j)\Big). \qquad (4)$$

Функция $\boldsymbol{E}_k\big(p+\varphi(k)\big)$ имеет следующий вид:

$$\boldsymbol{E}_k\big(p+\varphi(k)\big) = E_k(p) = d\mu(0) - \sum_{j=1}^{d} \big|\mu(k_j)\big| cos p_j. \qquad (5)$$

Введем следующие обозначения:

$$\mathrm{e}_m(k) = \min_{p\in\mathbb{T}^d} E_k(p), \qquad \mathrm{e}_M(k) = \max_{p\in\mathbb{T}^d} E_k(p),$$

$$A(k) = \min_{j=1,\dots d} \big|\mu(k_j)\big|/\mu(0), \qquad \mu(0) = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} > 0.$$

Из представления (5) вытекает:

$$\mathrm{e}_m(k) = \min_{p\in\mathbb{T}^d} E_k(p) = d\mu(0) - \sum_{j=1}^{d} \big|\mu(k_j)\big|,$$

$$\mathrm{e}_M(k) = \max_{p\in\mathbb{T}^d} E_k(p) = d\mu(0) + \sum_{j=1}^{d} \big|\mu(k_j)\big|.$$

Для каждого $a \in [\mathrm{e}_m(k); \mathrm{e}_M(k)]$ определим множество

$$E_k^{-1}(a) = \{p \in \mathbb{T}^d \colon E_k(p) = a\}.$$

Это множество $E_k^{-1}(a)$ будем называть поверхностью Ферми.

Теорема 5. *a) если* $A(k) \neq 0$, *то поверхность Ферми* $E_k^{-1}\big(\mathrm{e}_m(k)\big), E_k^{-1}\big(\mathrm{e}_M(k)\big)$ *является одноточечным множеством, точнее* $E_k^{-1}\big(\mathrm{e}_m(k)\big) = \mathbf{0}$, $E_k^{-1}\big(\mathrm{e}_M(k)\big) = \boldsymbol{\pi}$, $\boldsymbol{\pi} = (\pi, \dots, \pi) \in \mathbb{T}^d$.
b) если $A(k) = 0$, *то* $k \in \mathbb{T}^d \backslash (-\pi,\ \pi)^d$ *и* $m_1 = m_2$. *Кроме того, множества Ферми* $E_k^{-1}\big(\mathrm{e}_m(k)\big)$ *и* $E_k^{-1}\big(\mathrm{e}_M(k)\big)$ *изоморфны* $\mathbb{T}^l$, *где* l *- число координат* k, *равных* π.

Теперь найдём явный вид резольвенты оператора $\hat{h}_0(k)$.

Резольвента $\hat{R}_0(k; z) = \big(\hat{h}_0(k) - zI\big)^{-1}$, $z \in \mathbb{C}\backslash[\mathrm{e}_m(k); \mathrm{e}_M(k)]$, оператора $\hat{h}_0(k)$ определяется формулой (см. формулу (4))

$$\left(\hat{R}_0(k,z)\hat{f}(x)\right) = \sum_{s\in\mathbb{Z}^d} \hat{r}_0(x-s;k,z)\hat{f}(s)\,, \qquad \hat{f}\in \ell_2(\mathbb{Z}^d),$$

где

$$\hat{r}_0(x;k,z) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{T}^d} \frac{e^{-i(x,t)}}{E_k(t)-z}dt\,,\ \ x\in\mathbb{Z}^d, z\in\mathbb{C}\backslash[\mathrm{e}_m(k);\mathrm{e}_M(k)].$$

В дальнейшем мы предположим, что массы частиц равны, т.е. $m_1 = m_2 = m$.

Лемма 7. *Пусть* $z < \mathrm{e}_m(k)$. *Тогда:*

a) если $k\in(-\pi;\pi)^d$, *то функция* $\hat{r}_0(\cdot;\ k,z)$ *является строго положительной;*

b) если $k\in\mathbb{T}^d\backslash(-\pi;\pi)^d$, *то функция* $\hat{r}_0(\cdot;\ k,z)$ *является положительной.*

Теорема 6. *Пусть* $z < \mathrm{e}_m(k)$. *Тогда:*

a) если $k\in(-\pi;\pi)^d$, *то оператор* $\hat{R}_0(k,z)$ *является усиливающим положительность;*

b) если $k\in\mathbb{T}^d\backslash(-\pi;\pi)^d$, *то оператор* $\hat{R}_0(k,z)$ *является сохраняющим положительность.*

Теперь сформулируем основной результат третьей главы.

Теорема *7. Пусть* $m_1 = m_2$ *и* $z_0(k) = inf\sigma\left(\hat{h}(k)\right) < \mathrm{e}_m(k)$. *Тогда:*

a) если $k\in(-\pi;\pi)^d$, *то число* $z_0(k)$ *−невырожденное собственное значение оператора* $\hat{h}(k)$ *и соответствующий собственный вектор можно выбрать положительным.*

b) если $k\in\mathbb{T}^d\backslash(-\pi;\pi)^d$, *то для любого* $n\in\mathbb{N}$ *существует такой потенциал* $\hat{v}$, *что число* $z_0(k)$ *есть* n *кратное собственное значение, а соответствующие собственные векторы можно выбрать положительными.*

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данная диссертация посвящена изучению того, что нижнего края спектра одночастичных и двухчастичных операторов Шредингера на $d-$ мерной решетке является изолированной точкой, то он является простым собственным значением и ему соотстветствует строго положительный собственный вектор.

Основные результаты исследования состоят в следующем:

1. Найдено аналитическое выражение для резольвенты невозмущенного оператора энергии, соответствующий системы одной частицы на d −мерной решетке и доказано, что она является усиливающим положительность.

2. Доказано, что если нижний край есть изолированная точка спектра оператора Шредингера соответствующего системе одной частицы на d −мерной решетке, то он является простым собственным значением и ему соответствует строго положительный собственный вектор, т.е. доказан аналог теоремы типа Перрона-Фробениуса.

3. Показано, что резольвента невозмущенной оператора Шредингера $\hat{h}_0(k)$, являющейся, соответствующего системе двух частиц на решетке, является усиливающим положительность при всех $k \in (-\pi;\pi)^d$, а также сохраняющим положительность при $k \in \mathbb{T}^d \setminus (-\pi;\pi)^d$ квазиимпульса системы.

4. Доказано, что если нижний край спектра оператора Шредингера $\hat{h}(k), k \in \mathbb{T}^d$, соответствующего системе двух частиц на $d-$мерной решетке есть изолированная точка, то он является простым собственным значением и показано существования строго положительной собственной функции.

5. Доказано, что поверхность Ферми $E_k^{-1}\big(\mathrm{e}_m(k)\big)$ дисперсионной функции неподвижной части оператора Шредингера системы двух частиц с одинаковыми массами является одноточечным множеством и если нижний край спектра оператора есть изолированная точка, то он является простым собственным значением и ему соответствует строго положительный собственный вектор.

6. Показано, что если поверхность Ферми $E_k^{-1}\big(\mathrm{e}_m(k)\big)$ дисперсионной функции неподвижной части оператора Шредингера системы двух частиц с одинаковыми массами изоморфна $\mathbb{T}^l$ $(1 \le l \le d)$, то для любого натурального числа n существует такой потенциал $\hat{v}$, что изолированный нижний край спектра является n –кратным собственным значением и все n соответствующие ортогональные векторы можно выбрать положительными.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) PhD.27.06.2017.FM.02.01 AT SAMARKAND STATE UNIVERSITY

SAMARKAND STATE UNIVERSITY

KULZGANOV UTKIR NEMATOVICH

ON THE LOWER SPECTRUM OF ONE - AND TWO-PARTICLE SCHRÖDINGER OPERATORS

01.01.01-Mathematical analysis

ABSTRACT OFDISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Samarkand -2019

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2018.2.PhD/FM209.

Dissertation has been prepared at Samarkand State University

The abstract of the dissertation is posted in three languages (uzbek, russian, english (resume)) on the website (www.samdu.uz) and the «Ziyonet» Information and educational portal (www.ziyonet.uz).

Scientific supervisor:	**Lakaev Saidakhmat Norjigitovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Academician
Official opponents:	**Khalmuxammedov Alimjan Rakhimovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor Karshiboyev Khayrullo Kilichevich Candidate of Physical and Mathematical Sciences
Leading organization:	**Institute of Mathematics**

Defense will take place «____» _____________2019 at _____ at the meeting of Scientific Council number PhD.27.06.2017.FM.02.01at Samarkand State University. (Address: University Boulevard 15, Samarkand, 140104, Uzbekistan, Ph.: (+99866) 231-06-32, fax: (+99866) 235-19-38, e-mail: patent@samdu.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at Samarkand State University (is registered №____) (Address: University Boulevard 15, Samarkand, 140104, Uzbekistan, Ph.: (+99866) 231-06-32).

Abstract of dissertation sent out on «____» _______________2019 year

(Mailing report № ____________on «____» _______________2019 year)

A.S. Soleev
Chairman of scientific council on award of scientific degrees Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor

A.M. Xalxujayev
Scientific secretary of scientific council on award of scientific degrees, Doctor of Physical and Mathematical Sciences

I.A. Ikromov
Vice-chairman of scientific Seminar under Scientific Council on award of scientific degrees, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor

INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

The aim of the research work. To establish that if the lower edge of the spectrum is an isolated point of the Schrödinger operator of a system of one or two particles on a lattice, then under certain conditions with respect to the dispersion functions and the potential, it is a simple eigenvalue and a strictly positive eigenvector corresponds to it.

The object of the research work. The object of study is the energy operators corresponding to systems of one and two particles on a $d-$dimensional lattice.

Scientific novelty of the research work. It is shown that the resolvent of the unperturbed energy operator of a one particle corresponding to the system on a d-dimensional lattice enhances positivity for all values of $z-$below the edge of the essential spectrum;

It is proved that if the lower edge is an isolated point of the spectrum of the Schrödinger operator of a one-particle on a d $-$dimensional lattice, then it is a simple eigenvalue and it corresponds to a strictly positive eigenvector, that is, an analogue of a theorem of Perron-Frobenius type was proved;

It is shown that the resolvent of the unperturbed energy operator corresponding to a system of two particles on a $d-$dimensional lattice enhances positivity for all values of the quasi-momentum of the system $k \in (-\pi; \pi)^d$and preserves positiveness with $k \in \mathbb{T}^d \backslash (-\pi; \pi)^d$;

it was established that if the lower edge is an isolated point of the spectrum of the Schrödinger operator of a system of two-particles on a $d-$dimensional lattice, then when $k \in (-\pi; \pi)^d$, then it is a simple eigenvalue and it corresponds to a strictly positive eigenvector, when $k \in (-\pi; \pi)^d$, it is a multiple eigenvalue and positive eigenvectors correspond to it.

Implementation of the research results. Based on the obtained scientific results relating to the lower spectrum of one-particle and two-particle Schrödinger operators on a lattice:

studying the lower-spectrum Schrödinger operator methods corresponding to one-particle and two-particle systems on a lattice were used in scientific research QJ130000.2726.01K82 to study the existence of an eigenvalue and to study the threshold effect of a discrete Schrödinger operator (University of Technology of Malaysia, reference dated October 21, 2018). The application of the scientific result to the study of integral operators and the basic properties of the Schrödinger operator on a lattice made it possible to describe an invariant subspace and an essential spectrum for the three-particle Schrödinger operator;

the fact that the resolvent of an unperturbed energy operator corresponding to a system of one or two-particles on a lattice enhances positivity is applied when performing in scientific research Yo F-4-17 «Decompositions for eigenvalues and resonances of the discrete Schrödinger operator and Friedrichs models» for the Schrödinger operator associated to a system of arbitrary two particles interacting with the contact potential on a lattice of dimension $d \geq 3$ and this made it possible, depending on its parameters, to determine the upper and lower The outer bounds of the only eigenvalue to the left of the essential spectrum of the considered operator;

the results that if the lower edge of the spectrum of the Schrödinger operator corresponding to systems of one and two particles on a lattice is an isolated point, then it is a simple eigenvalue, applied to the Friedrichs model associated to the Hamiltonian of a system of two-particles on a lattice of dimension $d \geq 1$, when proving the existence of a single eigenvalue of the operator lying to the left of the essential spectrum and the regularity of the eigenvector corresponding to this eigenvalue (Help MHSSE RU 28.03.2019 city).

The structure and volume of the thesis. The thesis consists of an introduction, three chapters, conclusion and list of references. The volume of the thesis is 93 pages.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS
I бўлим (I часть; I part)

1. З.Э.Муминов, У.Н.Кулжанов. Нижние связанные состояния одночастичных гамильтонианов на целочисленной решетке // Математические труды. - Россия, 2012.- №1,С.129-140. (Springer. IF=0.788).
2. З.Э.Муминов, У.Н.Кулжанов. Нижние связанные состояния одночастичных дискретных гамильтонианов // Узбекский математический журнал. - Ташкент, 2013.- №4, С.47-59. (01.00.00; №4).
3. Z.E.Muminov, U.N.Kuljanov. CLR-estimates for two-particle discrete Schrodinger operator on $\mathbb{Z}^d, d \geq 3$. // Uzbek mathematical journal. Tashkent, 2014.-№4, pp.46-56. (01.00.00; №1).
4. З.Э.Муминов, У.Н.Кулжанов. Нижние связанные состояния одночастичных гамильтонианов на целочисленной решетке //Узбекский математический журнал. – Ташкент, 2011.- №1, С.3-15. (01.00.00; №1).
5. Ж.И.Абдуллаев, Ў.Н.Қулжонов.Икки бозонли система гамилтонианининг стационар ҳолатлари // СамДУ илмий ахборотномаси. – Самарқанд, 2017.-№3, 79-86 б. (01.00.00; №3).
6. Ў.Н.Қулжонов. Панжарадаги бир заррачали Шредингер операторининг спектрал хоссалари // СамДУ илмий ахборотномаси. – Самарқанд, 2018.-№3, 4-8 б. (01.00.00; №3).

II бўлим (II часть; IIpart)

7. М.Х.Шерматов, У.Н.Кулжанов. О спектре двухчастичного оператора Шредингера с точечным потенциалом // International School and Conference on Foliations, Dynamical Systems, Singularity theory and Perverse Sheaves, Samarkand State University, Samarkand 2009, October, pp.68-72.
8. У.Н.Кулжанов. О спектре двухчастичного оператора Шредингера с точечным потенциалом в двухмерном случае // Научный вестник СамГУ. №5 (2010), ст.15-24.
9. U.N.Kuljanov. The spectral properties of the one-particle Schrödinger operator on the two-dimensional lattice // International training-seminars on mathematics in conjunction with the joint mathematics meeting. Samarkand 3-5 june 2011, Samarkand State University, pp.154-155.
10. Z.E.Muminov, U.N.Kuljanov. Clr-type estimates for two-particle discrete Schrödinger operator // International Seminar on Mathematics and Natural Sciences, Samarkand, Uzbekistan. ISMNS 2013, pp.13-14.

11. Ў.Н.Қулжонов. Икки ўлчамли панжарадаги бир заррачали Шредингер оператори ва унинг спектрал хоссалари // Академик Ш.Алимовнинг 70 йиллик юбилейига бағишланган «Замонавий математик физика ва унинг қўлланилиш усуллари» номли халқаро илмий конференция. Тошкент-2015.
12. Ж.И.Абдуллаев, Ў.Н.Қулжонов. Икки фермионли система гамилтонианининг боғланган ҳолатлари ҳақида // «Анализнинг долзарб муаммолари» номли халқаро республика илмий. Қарши-2016. 22-23 апрел, 207-209 б.
13. Z.E.Muminov, U.N.Kulzhanov. Spectral properties of the discrete Schrödinger operator with non-local potential // Conference: Innovations through mathematical and statistical research: Proceedings of the 2 nd International Conference on Mathematical Sciences and Statistics (ICMSS 2016, june).pp.1-6. Malayziya.
14. Z.E.Muminov, U.N.Kulzhanov. On the ground state of two-particle discrete Schredinger operators // International Conference on nonlinear analysis and its applications. Samarkand State University, Samarkand 2016, September 19-21, pp.78-79
15. Ў.Н.Қулжонов. Икки ўлчамли панжарадаги бир заррачали Шредингер оператори ва унинг спектрал хоссалари // Ёш олимларнинг республика илмий-амалий конференцияси. ТерДУ. 24-25 март, Термиз-2017.
16. Z.E.Muminov, U.N.Kulzhanov, Sh.S. Lakaev. On the discrete spectrum of the discrete Schrodinger operator on the right, an essential spectrum // Mathematical analysis and its application to mathematical physics. International Conference. Samarkand State University, Samarkand 2018, 17-21 September, pp.50-52.

Автореферат Самарқанд давлат университетининг
«СамДУ илмий тадқиқотлар ахборотномаси» журнали таҳририятида
таҳрирдан ўтказилди (08.06.2019 йил.)