САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ
ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ
PhD.27.06.2017.FM.02.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

УСМАНОВ САЛИМ ЭШИМОВИЧ

ЁЙИЛУВЧАН ГИПЕРСИРТЛАР БИЛАН БОҒЛАНГАН МАКСИМАЛ ОПЕРАТОРЛАРНИНГ ЧЕГАРАЛАНГАНЛИГИ МУАММОСИ

01.01.01 – Математик анализ

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Самарқанд - 2019

УДК: 517.984

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Contents of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ
ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ
PhD.27.06.2017.FM.02.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

УСМАНОВ САЛИМ ЭШИМОВИЧ

ЁЙИЛУВЧАН ГИПЕРСИРТЛАР БИЛАН БОҒЛАНГАН МАКСИМАЛ ОПЕРАТОРЛАРНИНГ ЧЕГАРАЛАНГАНЛИГИ МУАММОСИ

01.01.01 – Математик анализ

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Самарқанд - 2019

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2017.3.PhD/FM107 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация Самарқанд давлат университетида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгашнинг веб-саҳифасида (www.samdu.uz) ва «Ziyonet» Ахборот таълим порталида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар:	**Икромов Исроил Акрамович** физика-математика фанлари доктори, профессор
Расмий оппонентлар:	**Имомқулов Севдиёр Акрамович** физика-математика фанлари доктори, профессор
	Қўчқоров Эркин Иброхимович физика-математика фанлари номзоди
Етакчи ташкилот:	**Ўзбекистон Миллий университети**

Диссертация ҳимояси Самарқанд давлат университети ҳузуридаги PhD.27.06.2017.FM.02.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2019 йил «___»_________ соат____ даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 140104, Самарқанд ш., Университет хиёбони, 15-уй. Тел.: (+99866) 231-06-32, факс: (+99866) 235-19-38, 239-12-47, e-mail: patent@samdu.uz).

Диссертация билан Самарқанд давлат университетининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (___ рақами билан рўйхатга олинган). Манзил: 140104, Самарқанд ш., Университет хиёбони, 15-уй. Тел.: (+99866) 231-06-32.

Диссертация автореферати 2019 йил «____» _______________куни тарқатилди.
(2019 йил «____» ___________ даги _______ рақамли реестр баённомаси).

А.С. Солеев
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш раиси, физика-математика фанлари доктори, профессор

А.М. Халхўжаев
Илмий даражаларлар берувчи Илмий кенгаш илмий котиби, физика-математика фанлари доктори

С.Н. Лақаев
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш қошидаги илмий семинар раиси, физика-математика фанлари доктори, профессор, академик

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида олиб борилаётган илмий-амалий тадқиқотларнинг бир қисми параметрга боғлиқ интеграллар ва йиғиндиларда лимитга ўтиш тушунчаси билан боғлиқ масалаларда, хусусан, интегралларни диференциаллаш билан боғлиқ масалаларда учрайдиган ҳар хил турдаги максимал операторларга келтирилади. Замонавий гармоник анализда Шредингер максимал операторлари, Фурье қаторларининг хусусий йиғиндилари билан ва гиперсиртларнинг чўзилишлари билан боғланган максимал операторлар кўп учрайди. Гиперсиртлар билан боғланган максимал операторларнинг чегараланганлиги гармоник анализ ва математик физиканинг кўпгина масалаларини ечишда назарий асос сифатида хизмат қилади. Шу сабабли кўп ўлчовли Евклид фазоларидаги гиперсиртлар билан боғланган максимал операторларнинг жамланувчи функциялар фазоси $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$ да чегараланганлик масаласини ўрганишга оид тадқиқотларни ривожлантириш муҳим вазифалардан бири бўлиб қолмоқда.

Ҳозирги кунда жаҳонда гармоник анализ масалаларини тадқиқ қилиш, хусусан, тебранувчан интегралларнинг хусусий синфи бўлган, гиперсиртларда мужассамлашган ўлчовлар Фурье алмаштиришларининг характерига оид муаммоларни ҳал этиш, жумладан, Фурье алмаштиришларининг аниқ баҳоларини олиш математик физика баъзи масалаларининг ечимларини ўрганишда муҳим роль ўйнайди. Силлиқ гиперсиртларда мужассамлашган ўлчовлар Фурье алмаштиришининг текис баҳоси гиперсиртларда Фурье алмаштиришининг чегараланганлиги масаласини ечишда муҳим аҳамиятга эга. Анализнинг муҳим масалаларидан бири ҳисобланган гиперсиртларда йиғилувчи функциялар Фурье алмаштиришларининг чегараланганлик масаласини ўрганиш мақсадли илмий тадқиқотлардан ҳисобланади.

Мамлакатимизда фундаментал фанларнинг илмий ва амалий тадбиққа эга бўлган долзарб йўналишларига эътибор кучайтирилди, хусусан, мамлакатимиз олимлари томонидан гармоник анализни ўрганишга алоҳида эътибор қаратилмоқда. Математик физика кўпгина масалаларининг ечимлари максимал операторлар ва Фурье алмаштиришларига келтирилади. «Функционал анализ, математик физика ва статистик физика»[1] фанларининг устувор йўналишлари бўйича халқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш математика фанининг асосий вазифалари ва фаолият йўналишлари этиб белгиланди. Қарор ижросини таъминлашда максимал операторларнинг ва Фурье алмаштиришларининг чегараланганлик масалаларини ўрганиш муҳим аҳамиятга эга.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 17 февралдаги

[1] Ўзбекистон Республикаси Вазирлар маҳкамаси 2017 йил 18 майдаги «Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш тўғрисида»ги 292-сонли қарори.

ПҚ-2789-сон «Фанлар академияси фаолияти, илмий-тадқиқот ишларини ташкил этиш, бошқариш ва молиялаштиришни янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ва 2017 йил 20 апрелдаги ПҚ-2909-сон «Олий таълим тизимини янада ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги Қарорлари ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишга ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига боғлиқлиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Гиперсиртлар билан боғланган максимал операторлар кўп олимларнинг ишларида ўрганилган. Дастлаб 1976 йилда И.М.Стейн сфера билан боғланган максимал операторнинг ҳамма $p>(n+1)/n$ лар учун $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$ $(n\geq 2)$ фазода чегараланганлигини ва барча $1\leq p\leq (n+1)/n$ лар учун чегараланмаганлигини исботлаган. Кейинчалик текисликдаги ҳол учун бу метод ўтмайдиган ҳолда И.М.Стейн теоремасининг аналоги Ж. Бурген томонидан исботланди. Бу натижалар Евклид фазосининг кўпхилликлари билан боғланган турли синфдаги максимал операторларни ўрганиш учун бошланғич қадамлар бўлди.

А.Гринлиф гиперсирт $\mathbb{R}^{n+1}$ фазода қатъий қавариқ ва координаталар бошига нисбатан юлдузли (координаталар бошидан чиқувчи ихтиёрий нур гиперсирт билан фақат битта нуқтада кесишади ва гиперсиртнинг гаусс эгрилиги мусбат) бўлганда И.М.Стейн теоремасининг тасдиқлари ўринли эканлигини исботлади. Бундан ташқари, у агар гиперсирт ҳар бир нуқтасида $k\ (k\geq 2)$ та нолдан фарқли бош эгриликларга эга бўлса, у ҳолда максимал оператор барча $p>(k+1)/k$ лар учун $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$ фазода чегараланганлигини исботлади. Қийинроқ бўлган $k=1$ ҳолда интеграл операторнинг локал силлиқлигидан фойдаланиб, аналогик натижа К.Д.Согги томонидан олинди. Гиперсиртлар билан боғланган максимал операторларнинг чегараланганлиги ҳақидаги умумий натижа К.Д.Согги ва И.М.Стейнга тегишли. Улар гиперсиртнинг гаусс эгрилиги чексиз тартибли ноллларга эга бўлмаган ҳолда, S гиперсирт билан боғланган максимал операторларнинг чегараланганлик кўрсаткичи деб аталувчи шундай $p(S)$ сон топиладики, p нинг $p>p(S)$ бўлган қийматлари учун максимал операторларнинг $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$ фазода чегараланганлигини исботладилар.

Максимал операторларнинг чегараланганлик масаласи М.Ковлинг, Г.Маучери, А.Нагел, А.Сеегер, С.Вингер, А.Иосевич, И.А.Икромов, М.Кемпе Д.Мюллер, М.Греенблатт, Р.Маннанинг ишларида ҳам тадқиқ қилинган.

Тебранувчан интеграллар, хусусан, гиперсиртларда мужассамлашган ўлчовлар Фурье алмаштириши текис баҳосининг ажойиб қўлланилишларидан бири гиперсиртларда Фурье алмаштиришининг чегараланганлиги масаласига тадбиқ этилиши ҳисобланади. Таъкидлаш керакки, гиперсиртларда йиғилувчи функциялар Фурье алмаштиришининг чегараланганлиги ҳақидаги масала гармоник анализнинг муҳим масалаларидан бири ҳисобланади. Фурье алмаштиришларининг чегараланганлик муаммолари И.М.Стейн, А.П.Томас, К.Фефферман, А.Зигмунд, Р.Штрихартс, А.Гринлиф, И.Феррейра, А.Магяр, И.А.Икромов, Д.Мюллер, А.Иосевич, Д.Д.Тўрақулов, Г.А.Хасанов, А.Р.Сафаров ва бошқаларнинг ишларида тадқиқ қилинган.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти Самарқанд давлат университетининг ОТ-Ф4-69 рақамли «Гармоник анализ, даражали геометрия ва уларнинг математик физика масалаларига тадбиқлари» (Самарқанд, 2017-2021 йиллар) мавзусидаги илмий тадқиқот лойиҳаси доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади силлиқ ёйилувчан гиперсиртлар билан боғланган максимал операторлар ва Фурье алмаштиришларининг чегараланганлик муаммоларини ўрганиш ва максимал операторларнинг чегараланганлик кўрсаткичини аниқлашдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари:

кўп ўлчовли Евклид фазосидаги силлиқ ёйилувчан гиперсиртлар учун мувофиқлашган координаталар системасининг мавжудлиги ҳақидаги масалани тадқиқ қилиш;

кўп ўлчовли Евклид фазосидаги силлиқ ёйилувчан гиперсиртларда мужассамлашган ўлчовлар Фурье алмаштиришининг текис баҳосини олиш;

кўп ўлчовли Евклид фазосидаги силлиқ ёйилувчан гиперсиртларда Фурье алмаштиришининг чегараланганлик масаласини ечиш;

параметрга боғлиқ кичик эгриликли силлиқ гиперсиртлар билан боғланган максимал операторларнинг нормаси учун текис баҳо олиш;

силлиқ ёйилувчан гиперсиртлар билан боғланган максимал операторларнинг $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$ $(n \geq 2)$ фазода чегараланганлигини исботлаш.

Тадқиқотнинг объекти силлиқ гиперсиртлар билан боғланган максимал операторлар ва силлиқ ёйилувчан гиперсиртларда Фурье алмаштиришидан иборат.

Тадқиқотнинг предмети силлиқ гиперсиртлар билан боғланган максимал операторлар ва силлиқ ёйилувчан гиперсиртларда Фурье алмаштиришларининг баҳолари.

Тадқиқотнинг усуллари. Тадқиқот ишида дифференциалланувчи акслантиришлар назарияси, аналитик функциялар назарияси, дифференциал геометрия ва анализнинг асимптотик усуллари, шунингдек гармоник анализ усулларидан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

кўп ўлчовли Евклид фазосидаги силлиқ ёйилувчан гиперсиртлар учун мувофиқлашган координаталар системасининг мавжудлиги исботланган;

кўп ўлчовли Евклид фазосидаги силлиқ ёйилувчан гиперсиртларда мужассамлашган ўлчовлар Фурье алмаштиришининг текис баҳоси олинган;

$\mathbb{R}^{n+1}\left(n\geq 2\right)$ фазодаги силлиқ ёйилувчан гиперсиртларда Фурье алмаштиришининг чегараланганлик масаласи ечилган;

кичик эгриликли силлиқ гиперсиртлар оиласи ва силлиқ ёйилувчан гиперсиртлар билан боғланган максимал операторларнинг $L^p(\mathbb{R}^{n+1})\left(n\geq 2\right)$ фазода чегараланганлиги исботланган.

Тадқиқотнинг амалий натижалари ёйилувчан гиперсиртлар билан боғланган максимал операторларнинг чегараланганлик кўрсаткичи аниқланганлигидан иборатдир.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги математик мулоҳазаларнинг қатъий исботланганлиги ҳамда дифференциалланувчи акслантиришлар, аналитик функциялар назарияси, дифференциал геометрия, гармоник анализ ва математик анализнинг усулларидан фойдаланилганлиги билан асосланган.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти ёйилувчан гиперсиртлар билан боғланган максимал операторларнинг чегараланганлик кўрсаткичи аниқланганлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти математик физика тенгламалари фундаментал ечимларининг характерини тадқиқ қилиш учун хизмат қилади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Силлиқ ёйилувчан гиперсиртлар билан боғланган максимал операторлар ва силлиқ ёйилувчан гиперсиртларда мужассамлашган ўлчовлар Фурье алмаштиришига оид олинган илмий натижалар асосида:

силлиқ ёйилувчан гиперсиртлар билан боғланган максимал операторларнинг баҳоси бўйича олинган натижалар ва усуллардан Q.J130000.2626.14J72 рақамли хорижий лойиҳада дискрет Шредингер оператори билан боғланган интеграл операторларнинг чегараланганлик хоссаларини тадқиқ қилишда фойдаланилган (Малайзия технология университетининг 2019 йил 19 мартдаги маълумотномаси). Илмий натижанинг қўлланилиши дискрет Шредингер операторига мос келувчи интеграл оператор нормаси учун текис баҳо олиш имконини берган;

силлиқ гиперсиртларда мужассамлашган ўлчовлар Фурье алмаштиришининг текис баҳосидан ОТ-Ф4-66 рақамли «Панжарадаги чекли сондаги заррачалар системаси моделлари. Энергия операторларининг муҳим ва дискрет спектрлари» лойиҳасида икки заррачали система гамильтонианига мос операторнинг спектрал хоссаларини ўрганишда қўлланиладиган Фредгольм детерминантининг характерини текширишда фойдаланилган (Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлигининг 2019 йил 14 майдаги 89-03-1965-сонли маълумотномаси). Илмий натижанинг қўлланилиши Фредгольм детерминантидаги спектрал параметр узлуксиз спектрнинг чегарасига яқинлашганда детерминант чексизга интиладиган дисперсив муносабатлар синфини топиш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари 10 та илмий-амалий анжуманларда, жумладан 2 та халқаро ва 8 та республика илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Тадқиқот мавзуси бўйича жами 16 та илмий иш чоп этилган, шулардан Ўзбекистон Республикаси Олий Аттестация комиссиясининг докторлик диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 6 та мақола, жумладан, 1 таси хорижий ва 5 таси республика журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация кириш қисми, учта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан ташкил топган. Диссертациянинг ҳажми 94 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган, мавзу бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг **«Зарурий маълумотлар ва максимал операторларнинг айрим хоссалари»** деб номланувчи биринчи бобида диссертациянинг асосий натижаларини баён қилиш учун зарур бўладиган асосий таърифлар ва тушунчалар, ёрдамчи маълумотлар келтирилган, максимал функциянинг ўлчовлилиги ҳамда чизиқли алмаштиришнинг максимал операторларга таъсири ўрганилган.

I бобнинг 1.1 параграфида гиперсиртлар ва максимал операторлар назариясига оид таърифлар, тушунчалар ва тасдиқлар баён қилинган.

V n- ўлчови чизиқли фазо ва $A:V\to V$ чизиқли оператор бўлсин. $A\Lambda A$ орқали биз $V\Lambda V$ чизиқли фазони ўзини-ўзига ўтказувчи чизиқли операторни белгилаймиз, бунда $V\Lambda V$ билан V чизиқли фазонинг ўз-ўзига ташқи кўпайтмаси белгиланган. $(A\Lambda A)(x\Lambda y):=Ax\Lambda Ay$, $x,y\in V$ формула билан аниқланадиган $A\Lambda A$ операторга A операторнинг ўз-ўзига ташқи кўпайтмаси (ташқи квадрати) дейилади. Агар V чизиқли фазода базис тайинланган бўлса, у ҳолда A операторга $n\times n$ тартибли матрица мос келади, мос равишда $A\Lambda A$

операторга A оператор матрицасининг ташқи квадрати деб аталувчи матрица мос келади.

Фараз қиламиз, ϕ силлиқ функция координаталар бошининг бирор атрофида аниқланган ва $\phi(0)=0$ ва $\nabla\phi(0)=0$ шартларни қаноатлантирсин. Бу функциянинг Маклорен қаторини қараймиз:

$$\phi_x \approx \sum_{k\in\mathbb{N}_0^n} c_k x^k,\ c_k \in \mathbb{R},$$

бу ерда $k=(k_1,k_2,...,k_n)\in\mathbb{N}_0^n$, $x^k := x_1^{k_1}\cdot ...\cdot x_n^{k_n}$. Бу қаторнинг ташувчиси, яъни Тейлор ташувчиси деб қуйидаги

$$M(\phi_x)=\{k\in\mathbb{N}_0^n\setminus\{0\}: c_k\neq 0\}$$

тўпламга айтилади. d ҳақиқий сон $x_1=\ldots=x_n=d$ тўғри чизиқ билан $M\ (\phi_x)$ тўпламнинг Ньютон кўпёқлиги чегарасининг кесишиш нуқтаси бўлсин. d сонига координаталар боши билан Ньютон кўпёқлиги орасидаги масофа дейилади ва $d(x)$ каби белгиланади. $h(\phi)=sup\{d(x)\}$ сонга ϕ функциянинг баландлиги дейилади, бунда «supremum» координаталар бошида барча локал силлиқ координаталар системасига нисбатан олинган. Агар $h(\phi)=d(x)$ тенглик бажарилса, локал координаталар системаси ϕ функцияга мувофиқлашган дейилади.

Айтайлик, $S\subset\mathbb{R}^{n+1}$ силлиқ гиперсирт бўлсин. Ихтиёрий $x\in S$ нуқта учун $G(x)=\{g_{ij}\}$ ва $B(x)=\{b_{ij}\}$ лар орқали S гиперсиртнинг мос равишда биринчи ва иккинчи квадратик формаларининг матрицаларини белгилаймиз. Табиийки, $\{g^{ij}\}$ тензор аниқланади. D - $B(x)$ матрицани ўз-ўзига ташқи кўпайтмасидан ҳосил бўлган тензор бўлсин. $D=\{d_{i_1i_2i_3i_4}\}$ (0,4) типдаги тензор бўлади. И.А.Икромов К.Д.Согги ва И.М.Стейннинг ғояларини ривожлантириб, қуйидаги тенгликлар билан аниқланган Λ_1, Λ_2 сўндирувчи кўпайтувчиларни киритган:

$$\Lambda_1(x) := \sum g^{i_1j_1}(x)g^{i_2j_2}(x)b_{i_1i_2}(x)b_{j_1j_2}(x),$$

$$\Lambda_2(x) := \sum g^{i_1j_1}(x)g^{i_2j_2}(x)g^{i_3j_3}(x)g^{i_4j_4}(x)d_{i_1i_2i_3i_4}(x)d_{j_1j_2j_3j_4}(x).$$

Бу формулаларда йиғинди барча индекслар бўйича олинган. Сўндирувчи кўпайтувчилар гиперсиртнинг биринчи ва иккинчи квадратик формалари орқали аниқланади.

Диссертация ишида кўп ўлчовли Евклид фазоларидаги гиперсиртларнинг бир жинсли чўзилишлари билан боғланган, яъни гиперсиртлар билан боғланган максимал операторлар деб аталувчи операторлар билан иш кўрамиз, аниқроғи қуйидаги кўринишдаги максимал операторлар қаралади:

$$\mathcal{M} f(y) := \sup_{t>0} | A_t f(y) |,$$

бу ерда

$$A_t f(y) = \int_S f(y - tx)\psi(x) dS(x)$$

ўрталаштириш оператори дейилади, $S \in \mathbb{R}^{n+1}$ силлиқ гиперсирт, ψ тайинланган номанфий, компакт ташувчили чексиз марта силлиқ функция, яъни $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ ва $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$, $dS(x) - S$ гиперсиртдаги сирт ўлчови.

Кейинги баёнларимизда қуйидаги трансверсаллик шарти бажарилади деб фараз қиламиз: ихтиёрий $x \in S$ нуқта учун S гиперсиртга $x + T_x S$ аффин уринма текислик координаталар бошидан ўтмайди.

Айтайлик, $\phi = \phi_{pr} + \phi_r$, бу ерда $\phi_r \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ етарлича кичик ва U $x^0 \in \mathbb{R}^2$ нуқтанинг бирор атрофи, $\phi_{pr} \in C^\infty(U, \mathbb{R})$. S_ε орқали

$$x_3 = 1 + \varepsilon\phi(x_1, x_2)$$

функциянинг графиги билан берилган $\mathbb{R}^3$ фазодаги силлиқ гиперсиртни белгилаймиз, бу ерда $\varepsilon > 0$, $(x_1, x_2) \in U$ ва ϕ функция $\phi(0,0) = 0,\ \nabla\phi(0,0) = 0$ шартларни қаноатлантирувчи силлиқ функция. У ҳолда ўрталаштириш оператори қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$A_t^\varepsilon f(y) := \int_{S_\varepsilon} f(y - tx)\psi(x) dS(x).$$

Мос максимал оператор қуйидаги муносабат билан аниқланади:

$$\mathcal{M}^\varepsilon f(y) := \sup_{t>0} | A_t^\varepsilon f(y) |.$$

Қуйидаги теорема И.А.Икромов, М.Кемпе ва Д.Мюллер томонидан исботланган.

1-Теорема. *Фараз қиламиз ϕ_{pr} функция $\partial_2^m \phi_{pr}(x_1^0, x_2^0) \neq 0$, m≥2 шартни қаноатлантирсин ва U x^0 нуқтанинг етарлича кичик атрофи бўлсин. У ҳолда шундай $N_1 \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$ сонлар топиладики, $\phi_r \in C^\infty(U, \mathbb{R})$, $\|\phi_r\|_{C^{N_1}} < \delta$ ва шундай C_p сон топиладики, $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ ва етарлича кичик $\varepsilon > 0$ лар учун барча p>m ларда қуйидаги априор баҳо ўринли бўлади:*

$$\left\| \mathcal{M}^\varepsilon f \right\|_{L^p} \leq C_p \varepsilon^{-\frac{1}{p}} \|f\|_{L^p},$$

бу ерда C_p *сон* ε *га боғлиқ эмас.*

ψ нинг ташувчиси компакт тўплам бўлганлиги учун максимал операторларнинг ҳолати гиперсиртнинг тайинланган нуқтасининг етарлича кичик атрофи билан аниқланади. Шунинг учун келгусда умумийликка зиён етказмасдан ψ нинг ташувчиси $x^0 \in S$ нуқтанинг етарлича кичик атрофида мужассамлашган деб ҳисоблаймиз.

I бобнинг 1.2 параграфида максимал оператор образининг Борел бўйича ўлчовли эканлиги исботланган.

Баъзи максимал операторларнинг чегараланганлигини ўрганишда чизиқли алмаштиришларнинг шундай операторлар синфига таъсири қўлланилади. Шунинг учун I бобнинг 1.3 параграфида чизиқли алмаштиришларнинг максимал операторларга таъсирининг хоссалари ўрганилган.

Одатдагидек, $GL(n+1,\mathbb{R})$ орқали барча тескариланувчи ҳақиқий $(n+1)\times(n+1)$ тартибли квадрат матрицалар группасини белгилаймиз. $GL(n+1,\mathbb{R})$ группа максимал операторлар фазосида

$$(\mathcal{M}B^*)(f) := \mathcal{M}(B^* f), \ (B^*\mathcal{M})f(y) = (\mathcal{M}f)(By)$$

муносабатлар бўйича таъсир қилади, бу ерда $B^* f(y) = f(B^{-1}y)$. $\mathcal{M}B^*$ ва $B^*\mathcal{M}$ лар $GL(n+1,\mathbb{R})$ группанинг $\mathcal{M}$ операторга мос равишда ўнг ва чап таъсирлари деб айтилади. $\mathcal{M}_1 f$ орқали қуйидаги тенглик билан аниқланадиган максимал операторни белгилаймиз:

$$\mathcal{M}_1 f := (B^{-1})^* \mathcal{M}B^* f\,.$$

1.3 параграфда қуйидаги теоремалар исботланган.

2-Теорема. *Агар* $\mathcal{M}$ *оператор* $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$ *фазода чегараланган ва унинг нормаси* C *бўлса, у ҳолда* $\mathcal{M}B^*$ *ва* $B^*\mathcal{M}$ *операторлар ҳам* $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$ *фазода чегараланган ва уларнинг нормалари учун қуйидаги тенгликлар ўринли бўлади:*

$$\left\|\mathcal{M}B^*\right\|_{L^p} = C\,|\,detB\,|^{\frac{1}{p}}, \quad \left\|B^*\mathcal{M}\right\|_{L^p} = C\,|\,detB\,|^{-\frac{1}{p}}\,.$$

3-Теорема. *Барча* $B \in GL(n+1,\mathbb{R})$ *лар учун* $\mathcal{M}$ *ва* $\mathcal{M}_1$ *максимал операторлар* $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$ *фазода бир вақтда чегараланган ва уларнинг бу фазодаги нормалари устма-уст тушади.*

Диссертациянинг **«Силлиқ ёйилувчан гиперсиртларда Фурье алмаштиришининг чегараланганлиги ҳақида»** деб номланувчи иккинчи боби гессиан матрицасининг ўз-ўзига ташқи кўпайтмаси айнан нолга тенг, яъни $D^2\phi(x)\wedge D^2\phi(x) \equiv 0$ бўлган кўп ўзгарувчили силлиқ ϕ функциялар учун мувофиқлашган координаталар системасининг мавжудлиги ҳамда силлиқ ёйилувчан гиперсиртларда Фурье алмаштиришининг чегараланганлиги масалаларига бағишланган. Бу ерда $D^2\phi(x)=\left\{\frac{\partial^2\phi(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right\}_{i,j=1}^{n}$ ϕ функциянинг x нуқтадаги гессиан матрицаси. Агар ϕ функциянинг гессиан матрицасининг ўз-ўзига ташқи кўпайтмаси айнан нолга тенг бўлса, у ҳолда

$$x_{n+1}=1+\phi(x) \tag{1}$$

тенглама билан аниқланган гиперсиртни ёйилувчан деб атаймиз.

1-эслатма. S гиперсиртнинг ҳар бир нуқтасида $\Lambda_2(x)\equiv 0$, $D^2\phi(x)\Lambda D^2\phi(x)\equiv 0$ тенгликлар эквивалент бўлади.

Бу бобнинг 2.1 параграфида гессиан матрицасининг ўз-ўзига ташқи кўпайтмаси айнан нолга тенг бўлган кўп ўзгарувчили бир жинсли кўпҳадларнинг умумий шакли ҳақидаги қуйидаги теорема исботланган.

4-Теорема. *P ҳақиқий, нолдан фарқли, даражаси k бўлган бир жинсли кўпҳад бўлиб, $D^2P\Lambda D^2P\equiv 0$ шартни қаноатлантирсин, у ҳолда шундай нолдан фарқли $(\alpha_1,...,\alpha_n)$ вектор топиладики, қуйидаги тенглик ўринли бўлади:*

$$P(x_1,...,x_n)=\pm(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+...+\alpha_n x_n)^k.$$

II бобнинг 2.2 параграфида гессиан матрицасининг ташқи квадрати айнан нолга тенг бўлган кўп ўзгарувчили силлиқ ϕ функциялар, яъни силлиқ ёйилувчан гиперсиртлар учун мувофиқлашган координаталар системасининг мавжудлиги масаласи қаралган. Қуйидаги теорема бу параграфнинг асосий натижасидир.

5-Теорема. *ϕ функция $\mathbb{R}^n$ фазода координаталар бошининг бирор U атрофида аниқланган, чексиз марта силлиқ функция бўлсин ва у $\phi(0)=0, \nabla\phi(0)=0$ шартларни қаноатлантирсин, шунингдек шундай α $(|\alpha|\geq 2)$ мультииндекс топилиб, $D^\alpha\phi(0)\neq 0$ бўлсин. Агар бу функция учун $D^2\phi\Lambda D^2\phi\equiv 0$ муносабат бажарилса, у ҳолда шундай ортогонал A матрица ва координаталар бошининг бирор атрофида аниқланган $g(y)$, $\{g_j\}_{j=0}^{h-1}$ силлиқ функциялар топиладики, қуйидаги тенглик ўринли бўлади:*

$$\phi(Ay)=y_1^h g(y)+\sum_{j=0}^{h-1} y_1^j g(y_2,...,y_n),$$

бу ерда $g(0)\neq 0$ ва $\{g_j\}_{j=0}^{h-1}$ лар координаталар бошида текис функциялар, h $(h\geq 2)$– натурал сон.

Хусусий ҳолда, агар ϕ функция $\mathbb{R}^n$ фазода координаталар бошининг бирор U атрофида аниқланган, нолдан фарқли ҳақиқий аналитик функция бўлиб, $\phi(0)=0, \nabla\phi(0)=0$ шартларни қаноатлантирсин. Агар бу функция учун $D^2\phi \Lambda D^2\phi \equiv 0$ муносабат бажарилса, у ҳолда шундай ортогонал A матрица ва координаталар бошининг бирор атрофида аниқланган ҳақиқий аналитик g(y) функция топиладики, қуйидаги тенглик ўринли бўлади:

$$\phi(Ay) = y_1^h g(y),$$

бу ерда $g(0) \neq 0$, $h\ (h \geq 2)$ – натурал сон.

2-эслатма. Агар ϕ функция 5- теорема шартларини қаноатлантирса, у ҳолда y ϕ функция учун мувофиқлашган координаталар системасининг аналоги бўлади.

II бобнинг 2.3 параграфида силлиқ ёйилувчан гиперсиртларда мужассамлашган силлиқ Борел ўлчовларининг Фурье алмаштириши қаралган ва бу алмаштириш учун текис баҳо олинган. Шунингдек силлиқ ёйилувчан гиперсиртларда Фурье алмаштиришининг чегараланганлик муаммоси ечилган. Бу параграфнинг асосий натижалари қуйидаги теоремалар ёрдамида баён қилинган.

6-Теорема. *$S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ координаталар боши оддий нуқтаси бўлган чексиз силлиқ ёйилувчан гиперсирт бўлсин. У ҳолда координаталар бошининг шундай U атрофи топиладики, ихтиёрий номанфий $\psi \in C_0^\infty(U)$ функция учун қуйидаги баҳо ўринли бўлади:*

$$\left|\hat{d}\mu(\xi)\right| \leq C|\xi|^{-\frac{1}{h}}.$$

7-Теорема. *$S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ координаталар боши оддий нуқтаси бўлган чексиз силлиқ ёйилувчан гиперсирт, $h = \sup\limits_{x \in S \cap supp(\psi)} h(S,x)$ унинг баландлиги бўлсин. У ҳолда шундай C мусбат сон топиладики, ихтиёрий $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})$ функция учун барча $p = 1 + \frac{1}{2h+1}$ ларда қуйидаги баҳо ўринли бўлади:*

$$\left(\int_S \left|\hat{f}\right|^2 d\mu\right)^{\frac{1}{2}} \leq C\|f\|_{L^p}. \tag{2}$$

Ундан ташқари, агар h максимумга $x^0 \in S$ нуқтада эришса ва $\psi(x^0) > 0$ бўлса, у ҳолда ҳамма $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})$ функциялар учун барча $p > 1 + \frac{1}{2h+1}$ ларда (2) тенгсизликни қаноатлантирувчи C сон топилмайди.

Диссертациянинг «**Силлиқ гиперсиртлар билан боғланган максимал операторларнинг чегараланганлиги»** деб номланувчи учинчи бобида кичик эгриликли силлиқ гиперсиртлар, кичик эгриликли силлиқ гиперсиртлар оиласи ва силлиқ ёйилувчан гиперсиртлар билан боғланган максимал операторларнинг чегараланганлиги исботланган.

Учинчи бобнинг 3.1 параграфида кичик эгриликли силлиқ гиперсиртлар билан боғланган максимал операторлар қаралган. $S_\varepsilon \in \mathbb{R}^{n+1}$ гиперсирт $\mathbb{R}^n$ фазода координаталар бошининг бирор атрофида аниқланган силлиқ

$$x_{n+1} = 1 + \varepsilon\phi(x_1, x_2, ..., x_n)$$

функциянинг графиги билан берилган ва $\varepsilon > 0$ ҳақиқий сон, ϕ функция $\phi(0) = 0$, $\nabla\phi(0) = 0$ шартларни қаноатлантирсин. S_ε гиперсирт учун ўрталаштириш оператори

$$A_t f(y) = A_t^\varepsilon f(y) := \int_{S_\varepsilon} f(y - tx)\psi(x)dS(x)$$

ни қараймиз, бу ерда $dS(x)$ сирт ўлчови ва $\psi \in C_0^\infty(S_\varepsilon)$ ташувчиси компакт бўлган номанфий силлиқ функция. Мос максимал оператор қуйидагича аниқланади:

$$\mathcal{M}^\varepsilon f(y) := \sup_{t>0} | A_t^\varepsilon f(y) |.$$

Қуйидаги теорема 1-теореманинг умумлашмаси ҳисобланади.

8-Теорема. *$\varepsilon > 0$ етарлича кичик сон, $S_\varepsilon \in \mathbb{R}^{n+1}$ силлиқ гиперсирт ва ϕ функция $\phi(0) = 0$, $\nabla\phi(0) = 0$, $d^m\phi(0) \neq 0$, $m \geq 2$ шартларни қаноатлантирсин. У ҳолда координаталар бошининг шундай U атрофи топиладики, тайинланган $\psi \in C_0^\infty(U)$ функция учун шундай ўзгармас C_p >0 сон топилиб, барча $p > m$ ларда барча $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ функциялар учун қуйидаги априор баҳо ўринли бўлади:*

$$\left\|\mathcal{M}^\varepsilon f\right\|_{L^p} \leq C_p \varepsilon^{-\frac{1}{p}} \|f\|_{L^p},$$

бу ерда C_p сон ε га боғлиқ эмас.

III бобнинг 3.2 параграфида кичик эгриликли силлиқ гиперсиртлар оиласи билан боғланган максимал операторлар қаралган. $S_{\varepsilon,\sigma} \in \mathbb{R}^{n+1}$ гиперсиртлар оиласи

$$x_{n+1} = c(\varepsilon, \sigma) + \varepsilon\phi(x, \sigma)$$

функциянинг графиги билан берилган бўлсин. Бу ерда $\varepsilon > 0$, $\sigma \in \mathbb{R}^m$ параметр, $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ ва $\phi(x,\sigma)$, $c(\varepsilon,\sigma)$ силлиқ функциялар бўлиб, $c(0,0) \neq 0$. Таъкидлаш керакки, $S_{\varepsilon,\sigma}$ гиперсирт трансверсаллик шартини қаноатлантиради. Қуйидаги ўрталаштириш операторини қараймиз:

$$A_t^{\varepsilon,\sigma} f(y) := \int_{\mathbb{R}^n} f\Big(y - t(x + x^0), y_{n+1} - t(c(\varepsilon,\sigma) + \varepsilon\phi(x,\sigma))\Big)\psi(x,\sigma)dx,$$

бу ерда $x^0 \in \mathbb{R}^n$ - тайинланган нолдан фарқли нуқта ва ψ - компакт ташувчили номанфий чексиз силлиқ функция. Мос максимал оператор қуйидагича аниқланади:

$$\mathcal{M}^{\varepsilon,\sigma} f(y) := \sup_{t>0} |A_t^{\varepsilon,\sigma} f(y)|.$$

Қуйидаги теорема ўринли.

9-Теорема. *$\phi(x,\sigma)$ ҳақиқий силлиқ функция бўлиб, $\phi(0,0) = 0$, $\nabla_x \phi(0,0) = 0$, $D_x^m \phi(0,0) \neq 0$, $2 \leq m \in \mathbb{N}$ шартларни қаноатлантирсин. У ҳолда $\left(x^0, c(0,0)\right)$ нуқтанинг шундай U, $\mathbb{R}^m$ фазода координаталар бошининг шундай V атрофлари ва C_p, $\varepsilon_0 > 0$ сонлар топиладики, тайинланган $\psi \in C_0^\infty(U \times V)$ ҳамда $f \in C_0^\infty\left(R^{n+1}\right)$ функция учун барча $p > m$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ ларда қуйидаги априор баҳо ўринли бўлади:*

$$\left\|\mathcal{M}^{\varepsilon,\sigma} f\right\|_{L^p} \leq C_p \varepsilon^{-\frac{1}{p}} \|f\|_{L^p},$$

бу ерда C_p сон ε ва σ ларга боғлиқ эмас.

III бобнинг охирги 3.3 параграфида кўп ўлчовли Евклид фазосидаги силлиқ ёйилувчан гиперсиртлар билан боғланган максимал операторлар тадқиқ қилинган. h $\mathbb{R}^n$ фазода координаталар бошининг бирор атрофида аниқланган нолдан фарқли силлиқ ϕ функциянинг баландлиги ва бу функция $\phi(0) = 0$, $\nabla\phi(0) = 0$ шартларни қаноатлантирсин. Умумийликка зиён етказмасдан, $x^0 = (0,0,...,0,1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ тайинланган нуқта деб фараз қиламиз ва S гиперсирт $x_{n+1} = 1 + \phi(x)$ функциянинг графиги билан берилган бўлсин. Бу гиперсиртнинг x^0 нуқтадаги баландлиги $h_{x^0}(S) = h(\phi)$ тенглик билан аниқланади. Таъкидлаш керакки, $\Lambda_2 \equiv 0$ шартга кўра $h(\phi) \geq 2$ бўлади.

10-Теорема. *$S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ силлиқ гиперсирт бўлиб, $\Lambda_2 \equiv 0$ шартни қаноатлантирсин. Шунингдек $0 \leq \psi \in C_0^\infty(S)$ функция ташувчисининг ҳар бир нуқтасида трансверсаллик шарти бажарилсин ва $h_\psi(S) := \sup_{x \in \sup p(\psi)} h_x(S)$. У* *ҳолда барча* $p > h_{\psi}(S)$ *лар учун* $\mathcal{M}$ *максимал оператор* $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$ *да чегараланган. Бундан ташқари, агар* $\psi(x^0) > 0$ *бўлса, у ҳолда* $\left(1, h_{x^0}\right)$ *интервалга тегишли барча p сонлар учун* $\mathcal{M}$ *максимал оператор* $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$ *да чегараланмаган. Хусусан, агар* x^0 *нуқтада* $h_x(S) = \infty$ *бўлса, у ҳолда барча чекли мусбат ҳақиқий p сонлар учун* $\mathcal{M}$ *максимал оператор* $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$ *да чегараланмаган. Агар S аналитик гиперсирт ва* x^0 *нуқтада* $\psi(x^0) > 0$ *бўлса, у ҳолда* $p = h_{x^0}(S)$ *да* $\mathcal{M}$ *максимал оператор* $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$ *да чегараланмаган.*

$S_{\sigma} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ гиперсиртлар оиласи

$$x_{n+1} = c(\sigma) + \phi(x, \sigma)$$

функциянинг графиги билан берилган бўлсин. Бу ерда $x \in \mathbb{R}^n$ нуқта координаталар бошининг бирор атрофига тегишли, $\sigma \in \mathbb{R}^m$ параметр, $n, m \in \mathbb{N},\ n \geq 2$ ва $\phi(x, \sigma)$, $c(\sigma)$ - силлиқ функциялар бўлиб, $c(0) \neq 0.$ Таъкидлаймизки, S_{σ} гиперсирт трансверсаллик шартини қаноатлантиради. Ўрталаштириш оператори қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$A_t^{\sigma} f(y) := \int_{\mathbb{R}^n} f\Big(y - t(x + x^0), y_{n+1} - t(c(\sigma) + \phi(x, \sigma))\Big)\psi(x, \sigma)dx,$$

бунда $x^0 \in \mathbb{R}^n$ - тайинланган нолдан фарқли нуқта ва ψ - компакт ташувчили чексиз силлиқ функция. Мос максимал оператор қуйидаги тенглик билан аниқланади:

$$\mathcal{M}^{\sigma} f(y) := \sup_{t>0} | A_t^{\sigma} f(y) |.$$

11-Теорема. $\phi(x, \sigma)$ *ҳақиқий силлиқ функция бўлиб,* $\phi(0,0) = 0, \nabla_x \phi(0,0) = 0,$ $D^2\phi \Lambda D^2\phi \equiv 0$ *шартларни қаноатлантирсин. У ҳолда* $\left(x^0, c(0)\right)$ *нуқтанинг шундай U атрофи,* $\mathbb{R}^m$ *фазода координаталар бошининг шундай V атрофи топиладики, тайинланган номанфий* $\psi \in C_0^{\infty}(U \bigcap V)$ *ва* $f \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^{n+1})$ *функция учун барча* $p > h(\phi(x,0)) \geq 2$ *ларда* $\mathcal{M}$ *максимал оператор* $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$ *фазода чегараланган бўлади, яъни шундай* C_p *мусбат сон топиладики, барча* $f \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^{n+1})$ *функциялар учун*

$$\left\| \mathcal{M} f \right\|_{L^p} \leq C_p \left\| f \right\|_{L^p}$$

тенгсизлик ўринли бўлади, бу ерда C_p *сон* σ *га боғлиқ эмас.*

ХУЛОСА

Диссертация иши силлиқ ёйилувчан гиперсиртлар учун мувофиқлашган координаталар системасининг мавжудлиги, силлиқ ёйилувчан гиперсиртларда Фурье алмаштиришининг чегараланганлиги, кичик эгриликли силлиқ гиперсиртлар ва ёйилувчан силлиқ гиперсиртлар билан боғланган максимал операторларнинг $\mathbb{R}^{n+1}$ фазода чегараланганлик муаммоларига бағишланган.

Диссертацияда олинган илмий натижалар асосида қуйидаги хулосаларга келинди:

1. $\mathbb{R}^{n+1}\ (n \geq 2)$ фазода силлиқ гиперсиртлар билан боғланган максимал операторлар ёрдамида аниқланган максимал функциянинг Борель бўйича ўлчовлилиги исботланган.

2. Чизиқли алмаштиришларнинг ўнг ва чап таъсирларига нисбатан максимал операторлар нормаларининг ковариантлиги кўрсатилган.

3. Кўп ўлчовли Евклид фазоларида силлиқ ёйилувчан гиперсиртлар учун мувофиқлашган координаталар системасининг мавжудлиги исботланган.

4. $\mathbb{R}^{n+1}\ (n \geq 2)$ фазода силлиқ ёйилувчан гиперсиртларда мужассамлашган силлиқ Борел ўлчовлари Фурье алмаштиришининг текис баҳоси олинган.

5. Кўп ўлчовли Евклид фазоларидаги силлиқ ёйилувчан гиперсиртларда Фурье алмаштиришининг чегараланганлиги масаласи ечилган.

6. $\mathbb{R}^{n+1}\ (n \geq 2)$ фазода кичик эгриликли силлиқ гиперсиртлар билан боғланган максимал операторларнинг текис баҳоси олинган.

7. Кичик эгриликли силлиқ гиперсиртлар оиласи билан боғланган максимал операторлар учун $\mathbb{R}^{n+1}\ (n \geq 2)$ фазода текис баҳо олинган.

8. Силлиқ ёйилувчан гиперсиртлар билан боғланган максимал операторларнинг $\mathbb{R}^{n+1}\ (n \geq 2)$ фазода чегараланганлиги исботланган.

9. Силлиқ ёйилувчан гиперсиртлар билан боғланган максимал операторларнинг аниқ чегараланганлик кўрсаткичи топилган.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ PhD.27.06.2017.FM.02.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНОЙ СТЕПЕНЕЙ ПРИ САМАРКАНДСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

САМАРКАНДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УСМАНОВ САЛИМ ЭШИМОВИЧ

ПРОБЛЕМА ОГРАНИЧЕННОСТИ МАКСИМАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ, СВЯЗАННЫХ С РАЗВЕРТЫВАЮЩИМИСЯ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЯМИ

01.01.01 – Математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD) ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

Самарканд – 2019

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за B2017.3.PhD/FM107.

Диссертация выполнена в Самаркандском государственном университете.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (www.samdu.uz) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (www.ziyonet.uz).

Научный руководитель:	**Икромов Исроил Акрамович** доктор физико-математических наук, профессор,
Официальные оппоненты:	**Имомкулов Севдиёр Акрамович** доктор физико-математических наук, профессор
	Кучкоров Эркин Иброхимович кандидат физико-математических наук
Ведущая организация:	**Национальный университет Узбекистана**

Защита диссертации состоится «____» _____________2019 года в ____ часов на заседании Научного совета PhD.27.06.2017.FM.02.01 при Самаркандском государственном университете. (Адрес: 140104, г. Самарканд, Университетский бульвар, 15. Тел.: (+99866) 231-06-32, факс: (+99866) 235-19-38, e-mail: patent@samdu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Самаркандского государственного университета (зарегистрирована за №_____). (Адрес: 140104, г. Самарканд, Университетский бульвар, 15. Тел.: (+99866) 231-06-32, факс: (99866) 235-19-38).

Автореферат диссертации разослан «____» _______________2019 года.
(реестр протокол рассылки №________ от «____» _______________2019 года).

А.С. Солеев
Председатель Научного совета по присуждению ученых степеней, доктор физико-математических наук, профессор

А.М. Халхужаев
Ученый секретарь Научного совета по присуждению ученых степеней, доктор физико-математических наук

С.Н.Лакаев
Председатель научного семинара при Научном совете по присуждению ученых степеней, доктор физико-математических наук, профессор, академик

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Многие научно-прикладные исследования, проводимые на мировом уровне, сводятся к различным родам максимальных операторов, встречающие в задачах, связанных с понятием предельного перехода в интегралах и суммах, зависящих от параметров, в частности, с дифференцированием интеграла. В современном гармоническом анализе часто встречаются максимальные операторы Шредингера, максимальные операторы, связанные с частичными суммами рядов Фурье, с растяжениями гиперповерхностей. Ограниченность максимальных операторов, связанных с гиперповерхностями служат основой для решения многих задач гармонического анализа и математической физики. Поэтому развитие исследования ограниченности максимальных операторов в пространстве суммируемых функций L^p, связанных с гиперповерхностями многомерного Евклидова пространства остается одной из важных задач научных исследований.

В настоящее время в мире исследование задач гармонического анализа позволяет решить проблемы о поведении преобразования Фурье мер, сосредоточенных на гиперповерхностях, являющиеся частным классом осцилляторных интегралов. Получение точных оценок преобразования Фурье играет важную роль при изучении решения некоторых задач математической физики. Равномерная оценка преобразования Фурье мер, сосредоточенных на гладких гиперповерхностях, имеет особое значение при решении задач ограниченности преобразования Фурье на гиперповерхностях. Изучение задачи об ограничении преобразования Фурье суммируемых функций на гиперповерхностях, являющийся одной из важных задач анализа, является актуальным направлением научных исследований.

В нашей стране большое внимание уделяется направлениям, имеющим научное и прикладное значение. Ученые нашей страны особое внимание уделяют исследованию задач гармонического анализа. Решения многих задач математической физики сводятся к максимальным операторам и преобразованиям Фурье. Проведение научных исследований на международном уровне по таким важным направлениям как функциональный анализ, математическая физика и статистическая физика рассматривается как основная задача фундаментальных исследований[2]. Развитие исследований об изучении ограниченности максимальных операторов и преобразования Фурье играют важную роль при реализации этого постановления.

Исследования данной диссертации в определенной степени служит решению задач, поставленных в Указах Президента Республики Узбекистан № УП-2789 от 17 февраля 2017 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности» и № УП-2909 от 20

[2] Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан от 18 мая 2017 года № 292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений Академии наук Республики Узбекистан»

апреля 2017 года «О мерах по дальнейшему развитию системы высшего образования», а также в других нормативно-правовых актах, относящихся к данной области.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Максимальные операторы, связанные с гиперповерхностями изучались в работах многих авторов. Впервые в 1976 году И.М.Стейн доказал, что если гиперповерхность является единичной сферой, то соответствующий максимальный оператор ограничен в пространстве $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$ $(n \geq 2)$ при $p > (n+1)/n$ и неограничен для $1 \leq p \leq (n+1)/n$. Позднее, аналог теоремы И.М.Стейна для плоского случая, когда методы доказательства И.М.Стейна не применимы, был доказан Дж.Бургеном. Эти результаты стали отправной точкой для изучения различных классов максимальных операторов, связанных с подмногообразиями Евклидова пространства.

А.Гринлиф доказал, что если гиперповерхность строго выпуклая и звездная относительно начала координат в $\mathbb{R}^{n+1}$ $(n \geq 2)$ (это означает, что любой луч исходящий из начала координат пересекается с гиперповерхностью в единственной точке и гауссова кривизна гиперповерхности положительна), то справедливы утверждения теоремы И.М.Стейна. Более того, как он показал, если в каждой точке гиперповерхности имеются хотя бы k $(k \geq 2)$ ненулевых главных кривизн, то при $p > (k+1)/k$ максимальный оператор ограничен в L^p. В более сложном случае, когда $k = 1$ с использованием локальной гладкости интегральных операторов аналогичный результат получен К.Д.Согги. Общий результат об ограниченности максимальных операторов, ассоциированных с гиперповерхностями принадлежит К.Д.Согги и И.М.Стейну. Они доказали, что если Гауссова кривизна гиперповерхности не имеет нулей бесконечного порядка, то существует число $p(S)$, называемое показателем ограниченности максимальных операторов, связанных с гиперповерхностям $S \in \mathbb{R}^n$ такое, что при $p > p(S)$ максимальный оператор ограничен в L^p.

Задача об ограниченности максимальных операторов также исследована в работах М.Ковлинга, Г.Маучери, А.Нагела, А.Сеегера, С.Вингера, А.Иосевича, И.А.Икромова, М.Кемпе, Д.Мюллера, М.Греенблатта и Р.Манна.

Одним из замечательных применений равномерных оценок осцилляторных интегралов, в частности, преобразования Фурье мер, сосредоточенных на гиперповерхностях, является использование оценки в проблеме об ограничении преобразования Фурье. Надо отметить, что одной из важных задач гармонического анализа является решение задачи об ограничении преобразования Фурье суммируемых функций на гиперповерхностях. Проблема ограниченности преобразования Фурье исследована в работах И.М.Стейна, А.П.Томаса, С.Фефферманa, А.Зигмунда, Р.Штрихартса, А.Гринлифа, И.Феррейра, А.Магяра, И.А.Икромова, Д.Мюллера, А.Иосевича, Д.Д.Туракулова, Г.А.Хасанова, А.Р.Сафарова и других.

Связь диссертационного исследования с планами научно-исследовательских работ высшего образовательного или научно-исследовательского учреждения, где выполнена диссертация. Диссертационная работа выполнена в соответствии с плановой темой научно-исследовательских работ ОТ-Ф4-69 «Гармонический анализ, степенная геометрия и их приложения к задачам математической физики» Самаркандского государственного университета (2017-2021 гг.).

Целью исследования является решение проблемы ограниченности максимальных операторов, связанных с гладкими развертывающимися гиперповерхностями и преобразования Фурье на гладких развертывающихся гиперповерхностях, а также нахождение показателя ограниченности максимальных операторов.

Задачи исследования:

исследование задачи о существовании приспособленных систем координат для гладких развертывающихся гиперповерхностей многомерного Евклидова пространства;

получение равномерных оценок преобразования Фурье Борелевских мер, сосредоточенных на гладких развертывающихся гиперповерхностях многомерного Евклидова пространства;

решение проблемы об ограничении преобразования Фурье на гладких развертывающихся гиперповерхностях многомерного Евклидова пространства;

получение оценки для максимальных операторов, связанных с гладкими гиперповерхностями, зависящими от параметров, имеющими малые кривизны;

доказательство ограниченности максимальных операторов, связанных с гладкими развертывающимися гиперповерхностями в пространстве $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$ $(n \geq 2)$.

Объект исследования - максимальные операторы, связанные с гладкими гиперповерхностями и преобразование Фурье на гладких развертывающихся гиперповерхностях.

Предмет исследования - оценка максимальных операторов, связанных с гладкими гиперповерхностями и оценка преобразования Фурье на гладких развертывающихся гиперповерхностях.

Методы исследования. В диссертации использованы методы теории особенностей дифференцируемых отображений, теории аналитических функций, методы дифференциальной геометрии, асимптотические методы анализа, а также методы гармонического анализа.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

доказано существование приспособленных систем координат для гладких развертывающихся гиперповерхностей многомерного Евклидова пространства;

получена равномерная оценка преобразования Фурье Борелевских мер, сосредоточенных на гладких развертывающихся гиперповерхностях многомерного Евклидова пространства;

получено решение проблемы об ограничении преобразования Фурье на гладких развертывающихся гиперповерхностях в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ $(n \geq 2)$;

доказана ограниченность максимальных операторов, связанных с семейством гладких гиперповерхностей, имеющих малые кривизны и гладкими развертывающимися гиперповерхностями в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ $(n \geq 2)$.

Практические результаты исследования состоят из определения показателя ограниченности максимальных операторов, ассоциированных с гладкими развертывающимися гиперповерхностями.

Достоверность результатов исследования обоснована строгостью математических рассуждений и доказательств, с использованием известных методов теории особенностей дифференцируемых отображений, теории аналитических функций, дифференциальной геометрии, гармонического анализа и асимптотическими методами анализа.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научное значение результатов исследования заключается в том, что найден показатель ограниченности максимальных операторов.

Практическая значимость диссертации состоит в том, что результаты диссертации служат основой при изучении характера фундаментальных решений уравнений математической физики.

Внедрение результатов исследования. На основе полученных научных результатов, относящихся к максимальным операторам, связанными с гладкими развертывающимися гиперповерхностями и преобразованием Фурье мер, сосредоточенных на гладких развертывающихся гиперповерхностях:

результаты и методы об оценке максимальных операторов, связанных с гладкими развертывающимися гиперповерхностями использованы в исследованиях зарубежного гранта под номером Q.J130000.2626.14J72 для исследования свойства ограниченности интегральных операторов, связанных с дискретным оператором Шредингера (Справка Университет технологии Малайзии от 19 марта 2019 г.). Применение научного результата дало возможность получить равномерную оценку для нормы интегрального оператора, соответствующего дискретному оператору Шредингера;

равномерная оценка преобразования Фурье Борелевских мер, сосредоточенных на гладких гиперповерхностях, использована в проекте под номером ОТ-Ф4-66 и по теме «Модели системы частиц конечного числа на решетке. Существенный и дискретный спектр операторов энергии» для исследования спектралных свойств соответствующего оператора гамильтониана системы двух частиц (Справка Министерство Высшего и среднего специального образования Республики Узбекистан, от 14 мая 2019 года, № 89-03-1965). Применение научного результата дало возможность найти класс дисперсивных соотношений, когда определитель Фредгольма стремится к бесконечности в случае, если спектралный параметр сходится к границе непрерывного спектра.

Апробация результатов исследования. Результаты данного исследования были обсуждены на 10 научно-практических конференциях, в том числе на 2 международных и 8 республиканских научно - практических конференциях.

Опубликованность результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 16 научных работ, из них 6 входят в перечень научных изданий, предложенных высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты докторских диссертаций, в том числе 1 статья опубликована в зарубежном журнале и 5 в республиканских научных изданиях.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 94 страницы.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведен обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации, степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В первой главе диссертации, названной «**Необходимые сведения и некоторые свойства максимальных операторов**», приведены вспомогательные сведения, основные определения и понятия, которые необходимы при изложении основных результатов диссертации, изучена измеримость максимальной функции и действия линейного преобразования на максимальный оператор.

В параграфе 1.1 главы I изложены определения, понятия и утверждения, относящиеся к теории гиперповерхностей и максимальных операторов.

Пусть V n - мерное линейное пространство и $A:V\to V$ линейный оператор. Обозначим через $A\Lambda A$ линейный оператор, отображающий линейное пространство $V\Lambda V$ на само себя, где через $V\Lambda V$ обозначено внешнее произведение пространства V на само себя. Оператор $A\Lambda A$, определенный формулой $(A\Lambda A)(x\Lambda y):=Ax\Lambda Ay$, где $x,y\in V$, называется внешним произведением (внешним квадратом) оператора A на саму себя. Если в пространстве V зафиксирован базис, то оператору A соответствует матрица порядка $n \times n$, соответственно оператору $A \Lambda A$, также соответствует матрица, называемая внешним квадратом матрицы оператора A.

Предположим, что ϕ гладкая функция, определенная в начале координат, удовлетворяет условиям $\phi(0)=0$ и $\nabla\phi(0)=0$. Рассмотрим ряд Маклорена этой функции:

$$\phi_x \approx \sum_{k \in \mathbb{N}_0^n} c_k x^k,\ c_k \in \mathbb{R},$$

где $k=(k_1,k_2,...,k_n)\in \mathbb{N}_0^n$, $x^k := x_1^{k_1} \cdot ... \cdot x_n^{k_n}$. Носителем этого ряда, т.е. носителем Тейлора называется следующее множество:

$$M(\phi_x)=\{k \in \mathbb{N}_0^n \setminus \{0\} : c_k \neq 0\}.$$

Пусть вещественное число d есть координата пересечения прямой $x_1 = \ldots = x_n = d$ с границей многогранника Ньютона множества $M(\phi_x)$. Это число будет называться расстоянием между многогранником Ньютона и началом координат и обозначается через $d(x)$. Число $h(\phi)=sup\{d(x)\}$ называется высотой функции ϕ, где «supremum» берется относительно набора всех локальных гладких систем координат x в начале координат. Локальная система координат называется приспособленной к функции ϕ, если выполняется равенство $h(\phi)=d(x)$.

Пусть $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ гладкая гиперповерхность. Для произвольной точки $x \in S$ через $G(x)=\{g_{ij}\}$ и $B(x)=\{b_{ij}\}$ обозначаются матрицы первой и второй квадратичные форм гиперповерхности S, соответственно. Естественно определяется тензор $\{g^{ij}\}$. Пусть D - тензор, получаемый внешним произведением матрицы $B(x)$ на себя. $D=\{d_{i_1 i_2 i_3 i_4}\}$ является тензором ранга $(0,4)$. Развивая идею К.Д.Согги и И.М.Стейна, И.А.Икромов ввел множители гашения Λ_1, Λ_2, определенные следующими равенствами:

$$\Lambda_1(x) := \sum g^{i_1 j_1}(x) g^{i_2 j_2}(x) b_{i_1 i_2}(x) b_{j_1 j_2}(x),$$

$$\Lambda_2(x) := \sum g^{i_1 j_1}(x) g^{i_2 j_2}(x) g^{i_3 j_3}(x) g^{i_4 j_4}(x) d_{i_1 i_2 i_3 i_4}(x) d_{j_1 j_2 j_3 j_4}(x).$$

В этих формулах производится суммирование по всем индексам. Множители гашения определяются через первую и вторую фундаментальные формы гиперповерхности.

В диссертационной работе будем иметь дело с максимальными операторами, связанными (ассоциированными) с однородными растяжениями гиперповерхностей, т.е. называемыми максимальными операторами, связанными с гиперповерхностями, точнее, рассматриваются операторы вида:

$$\mathcal{M} f(y) := \sup_{t>0} | A_t f(y) |,$$

где

$$A_t f(y) = \int_S f(y - tx)\psi(x)dS(x)$$

называется оператором усреднения, $S \in \mathbb{R}^{n+1}$ - гладкая гиперповерхность, ψ - фиксированная неотрицательная бесконечно гладкая функция с компактным носителем, т.е. $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ и $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$, $dS(x)$ - поверхностная мера на S.

В дальнейших изложениях предполагается выполнение следующего условия трансверсальности: для любой точки $x \in S$ аффинная касательная плоскость $x + T_x S$ к гиперповерхности S в точке x не проходит через начало координат.

Пусть $\phi = \phi_{pr} + \phi_r$, где $\phi_r \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ достаточно малое и U есть открытая окрестность точки $x^0 \in \mathbb{R}^2$, $\phi_{pr} \in C^\infty(U, \mathbb{R})$. Обозначим через S_ε гиперповерхность в пространстве $\mathbb{R}^3$, заданную графиком гладкой функции

$$x_3 = 1 + \varepsilon\phi(x_1, x_2),$$

где $\varepsilon > 0$, $(x_1, x_2) \in U$ и гладкая функция ϕ удовлетворяет условиям: $\phi(0,0) = 0,\ \nabla\phi(0,0) = 0.$ Тогда оператор усреднения записывается в виде:

$$A_t^\varepsilon f(y) := \int_{S_\varepsilon} f(y - tx)\psi(x)dS(x).$$

Соответствующий максимальный оператор определяется соотношением:

$$\mathcal{M}^\varepsilon f(y) := \sup_{t>0} | A_t^\varepsilon f(y) |.$$

Следующая теорема доказана И.А.Икромовым, М.Кемпе и Д.Мюллером.

Теорема 1. *Предположим, что* ϕ_{pr} *удовлетворяет условию* $\partial_2^m \phi_{pr}(x_1^0, x_2^0) \neq 0$, $m \geq 2$ *и окрестность U точки* x^0 *достаточно малая. Тогда существуют числа* $\mathrm{N}_1 \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$ *такие, что для* $\phi_r \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ *с* $\|\phi_r\|_{C^{N_1}} < \delta$ *и для всех* $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, *существует положительное число* C_p *такое, что при* $p > m$ *и достаточно малого числа* $\varepsilon > 0$ *справедлива следующая априорная оценка:*

$$\left\| \mathcal{M}^\varepsilon f \right\|_{L^p} \leq C_p \varepsilon^{-\frac{1}{p}} \|f\|_{L^p}$$

где C_p *не зависит от* ε.

Поскольку носитель ψ - компактное множество, то поведение максимальных операторов определяется достаточно малыми окрестностями фиксированных точек гиперповерхности. Поэтому в дальнейшем без ограничения общности, мы будем считать, что носитель ψ сосредоточен в достаточно малой окрестности точки $x^0 \in S$.

В параграфе 1.2 главы I доказана Борелева измеримость образа максимального оператора.

При изучении ограниченности некоторых максимальных операторов используется действие линейного преобразования на класс таких операторов. Поэтому в параграфе 1.3 главы I изучена свойства действия линейных преобразованиях на максимальный оператор.

Как обычно, обозначим через $GL(n+1,\mathbb{R})$ группу всех обратимых вещественных матриц порядка $(n+1)\times(n+1)$. Группа $GL(n+1,\mathbb{R})$ действует в пространстве максимальных операторов по формулам

$$(\mathcal{M}B^*)(f) := \mathcal{M}(B^*f), \quad (B^*\mathcal{M})f(y) = (\mathcal{M}f)(By),$$

где $B^*f(y) = f(B^{-1}y)$. $\mathcal{M}B^*$ и $B^*\mathcal{M}$ называются соответственно правым и левым действием группы $GL(n+1,\mathbb{R})$ на оператор $\mathcal{M}$. Через $\mathcal{M}_1 f$ обозначим максимальный оператор, определенный соотношением: $\mathcal{M}_1 f := (B^{-1})^* \mathcal{M}B^* f$.

В этом параграфе доказаны следующие теоремы.

Теорема 2. *Если максимальный оператор $\mathcal{M}$ ограничен в $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$ нормой C, то $\mathcal{M}B^*$ и $B^*\mathcal{M}$ также ограничены в $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$ и для их нормы справедливы равенства:*

$$\left\|\mathcal{M}B^*\right\|_{L^p} = C\,|\,detB\,|^{\frac{1}{p}}, \quad \left\|B^*\mathcal{M}\right\|_{L^p} = C\,|\,detB\,|^{-\frac{1}{p}}.$$

Теорема 3. *Максимальные операторы $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}_1$ одновременно ограничены и их нормы совпадают в $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$ при $B \in GL(n+1,\mathbb{R})$.*

Вторая глава диссертации, названной «**Об ограничении преобразования Фурье на гладких развертывающихся гиперповерхностях**» посвящена задачам о существовании приспособленных систем координат для функции ϕ, когда внешний квадрат гессиановой матрицы гладкой функции ϕ тождественно равен нулю, т.е. $D^2\phi(x)\Lambda D^2\phi(x) \equiv 0$, а также к проблеме ограничения преобразования Фурье на развертывающихся гиперповерхностях. Здесь $D^2\phi(x) = \left\{\frac{\partial^2\phi(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right\}_{i,j=1}^n$ гессиановая матрица функции ϕ в точке x. Если внешний квадрат гессиановой матрицы гладкой функции ϕ тождественно равен нулю, то гиперповерхность, определенная уравнением

$$x_{n+1} = 1 + \phi(x) \tag{1}$$

назовем развертывающейся.

Замечание 1. В каждой точке гиперповерхности S равенства $\Lambda_2(x) \equiv 0$ и $D^2\phi(x)\Lambda D^2\phi(x) \equiv 0$ эквивалентны.

В параграфе 2.1 этой главы доказана следующая теорема об общей форме однородных многочленов многих переменных, которых внешний квадрат гессиановой матрицы тождественно равен нулю.

Теорема 4. *Если P вещественный, ненулевой, однородный многочлен степени k, удовлетворяющий условиям: $D^2P\Lambda D^2P \equiv 0$, то существует вещественный ненулевой вектор $(\alpha_1,...,\alpha_n)$ такой, что справедливо равенство:*

$$P(x_1,...,x_n) = \pm(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n)^k.$$

В параграфе 2.2 главы II доказано существование приспособленных систем координат для гладких функций ϕ, внешний квадрат гессиановой матрицы которых тождественно равен нулю, т.е. рассмотрена задача о существовании приспособленных систем координат для гладких развертывающихся гиперповерхностей.

Следующая теорема является основным результатом этого параграфа.

Теорема 5. *Пусть ϕ бесконечно-гладкая функция, определенная в окрестности начала координат $\mathbb{R}^n$ и она удовлетворяет условиям: $\phi(0) = 0, \nabla\phi(0) = 0$, а также существует мультииндекс α $(|\alpha| \geq 2)$ такой, что $D^\alpha\phi(0) \neq 0$. Если для этой функции выполняется соотношение $D^2\phi\Lambda D^2\phi \equiv 0$, то существуют ортогональная матрица A и гладкие функции $g(y)$, $\{g_j\}_{j=0}^{h-1}$, определенные в некоторой окрестности начала координат такие, что справедливо следующее равенство:*

$$\phi(Ay) = y_1^h g(y) + \sum_{j=0}^{h-1} y_1^j g(y_2,...,y_n),$$

причем $g(0) \neq 0$ и $\{g_j\}_{j=0}^{h-1}$ - плоские функции в начале координат, где h $(h \geq 2)$- натуральное число. В частности, если ϕ ненулевая, вещественно-аналитическая функция в начале координат и она удовлетворяет условиям $\phi(0) = 0, \nabla\phi(0) = 0$, а также $D^2\phi\Lambda D^2\phi \equiv 0$, то существуют ортогональная матрица A и вещественно-аналитическая функция $g(y)$ в начале координат такие, что справедливо равенство: $\phi(Ay) = y_1^h g(y)$, причем $g(0) \neq 0$, где h $(h \geq 2)$- натуральное число.

Замечание 2. Если функция ϕ удовлетворяет условиям теоремы 5, то y является аналогом приспособленных систем координат для функции ϕ.

В параграфе 2.3 главы II рассмотрено преобразование Фурье мер, сосредоточенных на развертывающихся гиперповерхностях и получена равномерная оценка для преобразования Фурье. А также решена проблема об ограничении преобразования Фурье на гладких развертывающихся гиперповерхностях. Основные результаты этого параграфа содержатся в следующих теоремах.

Теорема 6. *Пусть* $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *- развертывающаяся бесконечно-гладкая гиперповерхность с обыкновенной точкой в начале координат и высотой h. Тогда существует окрестность нуля U такая, что для любой неотрицательной функции* $\psi \in C_0^\infty(U)$ *имеет место следующая оценка:*

$$\left|\hat{d\mu}(\xi)\right| \le C|\xi|^{-\frac{1}{h}}.$$

Теорема 7. *Пусть* $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$*- развертывающаяся бесконечно-гладкая гиперповерхность с высотой* $h = \sup\limits_{x \in S \cap supp(\psi)} h(S,x)$*. Тогда существует положительное число C такое, что для любой функции* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})$*, при* $p = 1 + \frac{1}{2h+1}$ *имеет место следующая оценка:*

$$\left(\int_S \left|\hat{f}\right|^2 d\mu\right)^{\frac{1}{2}} \le C\|f\|_{L^p}. \qquad (2)$$

Более того, если максимум h *достигается в точке* $x^0 \in S$ *и* $\psi\left(x^0\right) > 0$*, то не существует число C, удовлетворяющее неравенству* (2)*, для всех* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})$ *при значениях* $p > 1 + \frac{1}{2h+1}$.

В главе III, названной «**Ограниченность максимальных операторов, связанных с гладкими гиперповерхностями**» доказана ограниченность максимальных операторов, связанных с гладкими гиперповерхностями малыми кривизнами, с семейством гладких гиперповерхностей, имеющих малые кривизны и гладкими развертывающимися гиперповерхностями.

В параграфе 3.1 главы III рассмотрены максимальные операторы, связанные с гладкими гиперповерхностями малыми кривизнами. Пусть гиперповерхность $S_\varepsilon \in \mathbb{R}^{n+1}$ задана графиком гладкой функции

$$x_{n+1} = 1 + \varepsilon\phi(x_1, x_2, ..., x_n),$$

где $\varepsilon > 0$ вещественное число, ϕ гладкая функция, определенная в окрестности начала координат в $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющая условиям: $\phi(0) = 0$, $\nabla\phi(0) = 0$. Рассмотрим следующий оператор усреднения для гиперповерхности S_ε:

$$A_t f(y) = A_t^\varepsilon f(y) := \int_{S_\varepsilon} f(y - tx)\psi(x) dS(x)$$

где $\psi \in C_0^\infty(S_\varepsilon)$ - неотрицательная бесконечно гладкая функция с компактным носителем. Тогда соответствующий максимальный оператор определяется равенством

$$\mathcal{M}^\varepsilon f(y) := \sup_{t>0} | A_t^\varepsilon f(y) |.$$

Следующая теорема является обобщением теоремы 1.

Теорема 8. *Пусть* $\varepsilon > 0$ *достаточно малое число и* ϕ *удовлетворяет условиям:* $\phi(0) = 0$, $\nabla\phi(0) = 0$, $d^m\phi(0) \neq 0$, $m \geq 2$. *Тогда существуют окрестность* U *начала координат и положительное число* C_p *такие, что для фиксированной функции* $\psi \in C_0^\infty(U)$ *для всех* $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ *и при* $p > m$ *справедлива следующая апиорная оценка:*

$$\left\| \mathcal{M}^\varepsilon f \right\|_{L^p} \leq C_p \varepsilon^{-\frac{1}{p}} \left\| f \right\|_{L^p}$$

где C_p *не зависит от* ε.

В параграфе 3.2 главы III рассмотрены максимальные операторы, связанные с семейством гладких гиперповерхностей малыми кривизнами. Пусть гиперповерхность $S_{\varepsilon,\sigma} \in \mathbb{R}^{n+1}$ задана графиком функции

$$x_{n+1} = c(\varepsilon,\sigma) + \varepsilon\phi(x,\sigma),$$

где $\varepsilon > 0$, параметр $\sigma \in \mathbb{R}^m$ принадлежит некоторой малой окрестности нуля, $n,m \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\phi(x,\sigma)$, $c(\varepsilon,\sigma)$ - гладкие функции и $c(0,0) \neq 0$. Отметим, что гиперповерхность $S_{\varepsilon,\sigma}$ удовлетворяет условию трансверсальности. Рассмотрим следующий оператор усреднения:

$$A_t^{\varepsilon,\sigma} f(y) := \int_{\mathbb{R}^n} f\Big(y - t(x + x^0), y_{n+1} - t(c(\varepsilon,\sigma) + \varepsilon\phi(x,\sigma))\Big)\psi(x,\sigma)dx,$$

где $x^0 \in \mathbb{R}^n$ - ненулевая фиксированная точка и $\psi \in C_0^\infty(S_{\varepsilon,\sigma})$ - неотрицательная, бесконечно гладкая функция с компактным носителем. Соответствующий максимальный оператор определяется равенством:

$$\mathcal{M}^{\varepsilon,\sigma} f(y) := \sup_{t>0} | A_t^{\varepsilon,\sigma} f(y) |.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 9. *Пусть* $\phi(x,\sigma)$ *гладкая функция и удовлетворяет условиям:* $\phi(0,0) = 0$, $\nabla_x\phi(0,0) = 0$, $D_x^m\phi(0,0) \neq 0$, $2 \leq m \in \mathbb{N}$. *Тогда существуют окрестность* U *точки* $\left(x^0, c(0,0)\right)$, *окрестность* V *начала координат* $\mathbb{R}^m$ *и положительные числа* C_p, $\varepsilon_0 > 0$ *такие, что для фиксированной функции*

$\psi \in C_0^\infty(U \times V)$ и для всех $f \in C_0^\infty(R^{n+1})$, при $p > m$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ справедлива следующая априорная оценка:

$$\left\| \mathcal{M}^{\varepsilon,\sigma} f \right\|_{L^p} \le C_p \varepsilon^{-\frac{1}{p}} \|f\|_{L^p},$$

где C_p не зависить от ε и σ.

В заключительном параграфе 3.3 главы III исследованы максимальные операторы, ассоциированные с гладкими развертывающимися гиперповерхностями многомерного Евклидова пространства. Пусть h высота ненулевой гладкой функции ϕ, определенной в некоторой окрестности начала координат $\mathbb{R}^n$ и удовлетворяет условиям: $\phi(0) = 0$, $\nabla\phi(0) = 0$. Без ограничения общности, мы можем предполагать, что $x^0 = (0,0,...,0,1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ фиксированная точка и гиперповерхность $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ задана графиком гладкой функции $x_{n+1} = 1 + \phi(x)$. Высота гиперповерхности S в точке x^0 определяется равенством $h_{x^0}(S) = h(\phi)$. Надо отметить, что из условия $\Lambda_2 \equiv 0$, вытекает соотношение $h(\phi) \ge 2$.

Теорема 10. *Пусть $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ гладкая гиперповерхность, удовлетворяющая условию: $\Lambda_2 \equiv 0$, а также условию трансверсальности в каждой точке носителя плотности $0 \le \psi \in C_0^\infty(S)$ и $h_\psi(S) := \sup_{x \in \sup p(\psi)} h_x(S)$.. Тогда для любого $p > h_\psi(S)$ максимальный оператор $\mathcal{M}$ ограничен в $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$. Более того, если $\psi(x^0) > 0$, то для любого числа p, принадлежащего интервалу $(1, h_{x^0})$ максимальный оператор $\mathcal{M}$ неограничен в $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$. В частности, если в точке x^0 $h_x(S) = \infty$, то для любого конечного положительного вещественного числа p максимальный оператор $\mathcal{M}$ неограничен в $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$.. При этом, если S аналитическая гиперповерхность, в точке x^0 и $\psi(x^0) > 0$, то для $p = h_{x^0}(S)$ максимальный оператор $\mathcal{M}$ также неограничен в $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$.*

Предположим, что гиперповерхность $S_\sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ задана графиком гладкой функции

$$x_{n+1} = c(\sigma) + \phi(x, \sigma),$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ принадлежит некоторой малой окрестности нуля, $\sigma \in \mathbb{R}^m$ параметр, $n, m \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$ и $\phi(x,\sigma)$, $c(\sigma)$ - гладкие функции, причем $c(0) \ne 0$. Отметим, что гиперповерхность S_σ удовлетворяет условию трансверсальности. Оператор усреднения записывается в виде:

$$A_t^\sigma f(y) := \int_{\mathbb{R}^n} f\Big(y - t(x + x^0), y_{n+1} - t(c(\sigma) + \phi(x,\sigma))\Big)\psi(x,\sigma)dx,$$

где $x^0 \in \mathbb{R}^n$ - ненулевая фиксированная точка и $\psi \in C_0^\infty(S_\sigma)$ - неотрицательная, бесконечно гладкая функция с компактным носителем. Соответствующий максимальный оператор определяется соотношением:

$$\mathcal{M}^\sigma f(y) := \sup_{t>0} | A_t^\sigma f(y) |.$$

Теорема 11. *Пусть $\phi(x,\sigma)$ гладкая функция, удовлетворяющая условиям: $\phi(0,0) = 0, \nabla_x \phi(0,0) = 0, \quad D^2\phi \Lambda D^2\phi \equiv 0$. Тогда существуют окрестность U точки $(x^0, c(0))$, окрестность V начала координат в $\mathbb{R}^m$ такие, что для фиксированной функции $\psi \in C_0^\infty(U \cap V)$ и при $p > h(\phi(x,0)) \geq 2$ максимальный оператор $\mathcal{M}$ ограничен в $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$, т.е. для всех $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ существует положительное число C_p такое, что имеет место неравенство*

$$\|\mathcal{M} f\|_{L^p} \leq C_p \|f\|_{L^p}$$

где C_p не зависить от σ.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данная работа посвящена проблемам существования приспособленных систем координат для гладких развертывающихся гиперповерхностей, ограниченности преобразования Фурье на гладких развертывающихся гиперповерхностях, ограниченности максимальных операторов, связанных с гладкими гиперповерхностями малыми кривизнами и гладкими развертывающимися гиперповерхностями в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ $(n \geq 2)$.

По основе результатов, полученных в диссертации, можно сделать следующие выводы:

1. Показана Борелева измеримость максимальной функции, определенной максимальными операторами, связанными с гладкими гиперповерхностями в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ $(n \geq 2)$.

2. Доказана ковариантность нормы максимальных операторов, относительно как правого, так и левого действия линейных преобразований.

3. Доказано существование приспособленных систем координат для гладких развертывающихся гиперповерхностей многомерного Евклидова пространства.

4. Получена равномерная оценка преобразования Фурье гладких Борелевских мер, сосредоточенных на гладких развертывающихся гиперповерхностях в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ $(n \geq 2)$.

5. Решена проблема об ограничении преобразования Фурье на гладких развертывающихся гиперповерхностях многомерного Евклидова пространства.

6. Получена равномерная оценка для максимальных операторов, связанных с гладкими гиперповерхностями малыми кривизнами в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ $(n \geq 2)$.

7. Получена оценка для максимальных операторов, связанных с семейством гладких гиперповерхностей, имеющих малые кривизны в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ $(n \geq 2)$.

8. Доказана ограниченность максимальных операторов, связанных с гладкими развертывающимися гиперповерхностями в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ $(n \geq 2)$.

9. Найден точный показатель ограниченности максимальных операторов, связанных с гладкими развертывающимися гиперповерхностями.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) PhD.27.06.2017.FM.02.01 AT SAMARKAND STATE UNIVERSITY

SAMARKAND STATE UNIVERSITY

USMANOV SALIM ESHIMOVICH

BOUNDEDNESS PROBLEM FOR MAXIMAL OPERATORS ASSOCIATED WITH DEVELOPABLE HYPERSURFACES

01.01.01-Mathematical analysis

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Samarkand – 2019

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2017.3.PhD/FM107.

Dissertation has been prepared at Samarkand State University.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (uzbek, russian, english (resume)) on the website (www.samdu.uz) and the «Ziyonet» Information and educational portal (www.ziyonet.uz).

Scientific supervisor:	**Ikromov Isroil Akramovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Official opponents:	**Imomkulov Sevdiyor Akramovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
	Kuchkorov Erkin Ibrohimovich Candidate of Physical and Mathematical Sciences
Leading organization:	**National university of Uzbekistan**

Defense will take place «____» _____________2019 at _____ at the meeting of Scientific Council number PhD.27.06.2017.FM.02.01 at Samarkand State University. (Address: University Boulevard 15, Samarkand, 140104, Uzbekistan, Ph.: (+99866) 231-06-32, fax: (+99866) 235-19-38, e-mail: patent@samdu.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at Samarkand State University (is registered №______) (Address: University Boulevard 15, Samarkand, 140104, Uzbekistan, Ph.: (+99866) 231-06-32).

Abstract of dissertation sent out on «____» _______________2019 year
(Mailing report № ___________on «____» _______________2019 year)

A. S. Soleev
Chairman of scientific council on award of scientific degrees, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor

A.M. Xalxujayev
Scientific secretary of scientific council on award of scientific degrees, Doctor of Physical and Mathematical Sciences

S.N. Lakaev
Chairman of scientific Seminar under Scientific Council on award of scientific degrees, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Academician

INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

The aim of the research work is study boundedness problem for maximal operators and Fourier transforms associated with smooth developable hypersurfaces and find a boundedness index of maximal operators.

The object of the research work is maximal operators associated to smooth developable hypersurfaces and the Fourier transforms on smooth developable hypersurfaces.

Scientific novelty of the research work is as follows:

It is proved an existence of adapted coordinate systems for smooth developable hypersurfaces of multidementional Euclidean spaces;

It is obtained an uniform estimate for the Fourier transform of Borel's measures supported on a smooth developable hypersurfaces of multidementional Euclidean spaces.

It is obtained a solution of restriction problem for the Fourier transform to smooth developable hypersurfaces in $\mathbb{R}^{n+1}\,(n \geq 2)$.

It is proved boundedness of the maximal operators associated to a family of smooth hypersurfaces with small curvatures in $\mathbb{R}^{n+1}\,(n \geq 2)$.

It is proved boundedness of the maximal operators associated to smooth developable hypersurfaces in $\mathbb{R}^{n+1}\,(n \geq 2)$.

Implementation of the research results. Based on the obtained scientific results relating to the maximal operators associated with smooth developable hyper surfaces and the Fourier transform of smooth measures supported to the smooth developable hyper surfaces:

the results and methods of the dissertation on estimates for maximal operators related to developable hyper surfaces were used in the grant Q.J130000.2626.14J72 to investigate boundedness properties of integral operators related to the discrete Schrödinger operator (University Tecknologi Malaysia, certificate dated March 19, 2019). The application of the scientific result made it possible to take an estimate for the norm of integral operator corresponding to the discrete Schrödinger operator;

the uniform estimate for the Fourier transform of measures supported to hyper surfaces were used in scientific research OT-F4-66 «Models of the system of finite particles on a lattice. Essential and discrete spectrums of the operator of energy» in order to study behavior of Fredholm determinant used in studying spectral properties of the operator corresponding to the Hamiltonian of two- particles system. (Ministry of Higher and Secondary Specialized Education of the Republic of Uzbekistan, a certificate from 14 May 2019, no. 89-03-1965). The application of the scientific result allows find the class of disperse relation when determinant of Fredholm converges to infinite in the case spectral parameter converges to a bound of the continuous spectrum.

The structure and volume of the thesis. The thesis consists of an introduction, three chapters, conclusion and bibliography. The volume of the thesis is 94 pages.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (I часть; I part)

1. С.Э.Усманов. Приспособленные системы координат для некоторых функций многих переменных. Узбекский математический журнал. Ташкент, 2013. № 4, стр. 128-139.
2. С.Э.Усманов. Равномерные оценки преобразования Фурье мер, сосредоточенных на развертываюшихся гиперповерхностях. Узбекский математический журнал. Ташкент, 2014, № 4, стр. 154-163.
3. С.Э.Усманов. Действие линейного преобразования на максимальный оператор. Научный вестник СамГУ. Самарканд, 2015, № 5, стр. 15-20.
4. S.E.Usmanov. The boundedness problem for the maximal operators associated to hypersurfaces in $\mathbb{R}^{n+1}$ with small curvatures. Scientific journal, Samarkand state university, Samarkand, 2016, № 1, pp. 9-14.
5. И. А. Икромов, С. Э. Усманов. Об ограниченности максимальных операторов, связанных с гиперповерхностями. Современная математика. Фундаментальные направления. Российский университет дружбы народов. Россия, 2018 г., том 64, выпуск 4, стр. 650-681.
6. И.А.Икромов, С. Э. Усманов. Об ограничении преобразования Фурье на развертывающихся гиперповерхностях. Научный вестник СамГУ. Самарканд, 2019, № 1, стр. 43-47.

II бўлим (II часть; II part)

7. И.А.Икромов, С.Э.Усманов. О существовании приспособленных систем координат для вырожденных функций, зависящих от многих переменных. Некорректные и неклассические задачи математической физики и анализа. Самаркандский государственный университет. Тезисы научно-практического семинара. Самарканд, 2012 г., 5-6 июля, стр. 32-33.
8. И.А.Икромов, С.Э.Усманов. Алгоритм определения приспособленных систем координат для некоторых функций, многих переменных. Актуальные проблемы математического анализа. Ургенчский государственный университет. Ургенч, 9-10 ноября, 2012 г., стр. 92-94.
9. И.А.Икромов, С.Э.Усманов. Приспособленные системы координат для развертывающихся гиперповерхностей. Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий Аль-Хорезмий 2012. Националный университет Узбекистана. Тезисы международной научной конференции. Ташкент, 19-22 декабря, 2012 г., стр. 47-48.
10. S.E.Usmanov. The boundedness problem for the maximal operators associated to hypersurfaces with small curvatures. International conference on nonlinear analysis and its applications. Abstracts of the conference. Samarkand State University. September 19-21, 2016, Samarkand, Uzbekistan, pp 18-20.

11. С.Э.Усманов. Ёйилувчан гиперсиртларда мужассамлашган ўлчовлар Фурье алмаштиришининг текис баҳоси. Тошкент шаҳридаги Турин политехника университети. Динамик системаларнинг долзарб муаммолари ва уларнинг тадбиқлари. Республика илмий конференцияси (хорижий олимлар иштирокида) материаллари. Тошкент ш., 1-3 май, 2017 йил, 46-47-бетлар.

12. С.Э.Усманов. Действие линейного преобразования на максимальный оператор. Ташкентский государственный педагогический университет. Проблемы современной топологии и её приложения. Тезисы докладов научной конференции (с участием зарубежных ученых). Ташкент, 11-12 мая, 2017 г., стр. 275-277.

13. С.Э.Усманов. Приспособленные системы координат для некоторых функций многих переменных. Орловский государственный университет имени И.С.Тургенева. Современные проблемы физико-математических наук. Материалы III международной научно-практической конференции. 23-26 ноября 2017 г., Орёл, Россия, стр. 105-108.

14. И.А.Икромов, С.Э.Усманов. Проблема об ограничении преобразования Фурье на вырожденных гиперповерхностях. Новые результаты математики и их приложения. Самаркандский государственный университет. Материалы республиканской научной коференции. Самарканд, 14-15 мая, 2018г., стр. 28-30.

15. И.А.Икромов, С.Э.Усманов. Об ограниченности максимальных операторов, связанных с вырожденными гиперповерхностями. Математический анализ и его приложения к математической физике. Самаркандский государственный университет. Тезисы международной научной коференции. Часть I. Самарканд, 17-20 сентября, 2018 г., стр. 19-21.

16. И.А.Икромов, С.Э.Усманов. О проблеме сужения преобразования Фурье. Елецкий государственный университет им. И.А.Бунина. V международная научно-практическая коференция "Актуальные проблемы математики и информатики: теория, методика, практика". Сборник материалов. 18-21 апреля 2019 г., г. Елец, Россия, стр. 33-34.

Автореферат Самарқанд давлат университетининг
“СамДУ илмий тадқиқотлар ахборотномаси” журнали таҳририятида
таҳрирдан ўтказилди (08.06.2019 йил).

Гувоҳнома №10-3512

14.06.2019 йилда босишга рухсат этилди
Шартли босма табоғи 2,5. Қоғоз бичими 60x84 1/16.
“Times” гарнитураси. Адади 100 нусха. Буюртма №17/06.

СамДЧТИ нашр-матбаа маркази босмахонасида чоп этилди.
Манзил: 140104, Самарқанд ш., Бўстонсарой кўчаси, 93