МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

САМАРКАНДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

“УТВЕРЖДАЮ”
Председатель научного совета
PhD.27.06.2017.FM.02.01 при
Самаркандском
Государственном университете
А.С.Солеев
____
“___” __________2018 г.

“УТВЕРЖДАЮ”
Председатель Высшей
Аттестационной Комиссии
при КМ РУз
А.Т.Юсупов
____
“26” 04 2018 г.

“СОГЛАСОВАНО”
Председатель научного совета
DSc.27.06.2017.FM.01.01 при
Национальном университете
Узбекистана
А.С.Садуллаев
____
“3” 05 2018 г.

П Р О Г Р А М М А

КВАЛИФИКАЦИОННОГО ЭКЗАМЕНА ПО СПЕЦИАЛЬНОСТИ 01.01.02-«Дифференциалные уравнения и математическая физика»

Самарканд 2018

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая экзаменационная программа соответствует утвержденному паспорту научной специальности "Дифференциальные уравнения и математическая физика ".

В основу программы положены следующие дисциплины: обыкновенные дифференциальные уравнения, теория интегральных уравнений и линейные операторные уравнения с вполне непрерывными операторами, уравнения математической физики, оптимальное управление, основы математическое моделирование и математической статистики, а также ряд отдельных вопросов функционального анализа и теории функциональных пространств.

СОДЕРЖАНИЕ И СТРУКТУРА КВАЛИФИКАЦИОННОГО ЭКЗАМЕНА

1. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Гладкость решения задачи Коши по начальным данным и параметрам, входящим в правые части системы уравнений. Продолжение решения.

Общая теория линейных уравнений и систем (область существования решения, фундаментальная матрица Коши, формула Лиувилля–Остроградского, метод вариации постоянных и др.).

Автономные системы уравнений. Положения равновесия. Предельные циклы.

Устойчивость по Ляпунову. Теорема Ляпунова об устойчивости положения равновесия по первому приближению.

Задачи оптимального управления. Принцип максимума Понтрягина (без доказательства), приложение к задачам быстродействия для линейных систем.

Краевая задача для линейного уравнения или системы уравнений. Функция Грина. Представление решения краевой задачи.

Задача Штурма–Лиувилля для уравнения второго порядка. Свойства собственных функций.

Системы обыкновенных дифференциальных уравнений с комплексными аргументами. Доказательство теоремы существования и единственности аналитического решения методом мажорант.

Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. Теорема существования и единственности решения при условиях Каратеодори.

Линейные и квазилинейные уравнения с частными производными первого порядка. Характеристики. Задача Коши. Теория Гамильтона–Якоби.

2. Уравнения с частными производными. Системы уравнений с частными производными типа Ковалевской. Аналитические решения. Теория Коши–Ковалевской. Корректная постановка задачи Коши. Пример Адамара.

Классификация линейных уравнений второго порядка на плоскости. Характеристики.

Задача Коши для волнового уравнения. Теорема единственности. Формулы для решения и их исследование. Свойства решений (характеристический конус, конечность скорости распространения волн, характер переднего и заднего фронтов волны и др.). Смешанная задача для гиперболического уравнения. Понятие обобщенного решения. Метод Фурье. Задача Штурма-Лиувилля.

Уравнение Лапласа. Формулы Грина. Принцип максимума. Свойства гармонических функций (теоремы о среднем по сфере и шару, аналитичность, теорема Лиувилля, теоремы об устранимой - особенности, теоремы Харнака).

Функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Примеры функций Грина. Решение задачи Дирихле в шаре.

Основные свойства потенциалов простого и двойного слоя и ньютонова потенциала.

Решение задачи Дирихле для широкого класса областей (метод потенциалов либо вариационный метод). Задача Неймана.

Задачи Дирихле и Неймана для уравнения Пуассона и методы их решения.Свойства решений (принцип максимума, гладкость, теоремы о среднем и др.)

Вариационный метод решения краевых задач для эллиптического уравнения второго порядка. Метод Ритца. Задачи на собственные значения. Разложение в ряды по собственным функциям.

Задача Коши и начально-краевые задачи для уравнения теплопроводности и методы их решения. Принцип максимума для уравнения теплопроводности. Задача Коши. Фундаментальное решение уравнения теплопроводности. Метод Фурье для решения смешанной задачи для уравнения теплопроводности.

Обобщенные функции. Свертка обобщенных функций, преобразование Фурье. Обобщенные функции. Свертка обобщенных функций. Обобщенные функции медленного роста. Преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста. Фундаментальные решения линейных дифференциальных операторов.

Пространства Соболева W_m^p. Теоремы вложения, следы функций из W_m^p на границе области.

Обобщенные решения краевых задач для эллиптического уравнения второго порядка. Задачи на собственные функции и собственные значения.

Основные смещенные задачи для волнового уравнения. Метод Фурье решения смешанных задач. Метод Галеркина решения смешанных задач для волнового уравнения.

3. Теория интегральных уравнений и линейные операторные уравнения с вполне непрерывными операторами. Теоремы Фредгольма для интегральных уравнений второго рода. Теорема Гильберта–Шмидта и ее следствия. Интегральные уравнения Вольтера. Метод последовательных приближений. Уравнения Вольтера первого рода. Интегральное уравнение Абеля. Решение краевых задач математической с помощью интегральных уравнений физики.Теория потенциала.

4. Оптимальное управление

Теоремы отделимости, теорема Банаха об обратном операторе и следствия из них. Определение производных, основные теоремы дифференциального исчисления в функциональных пространствах. Теоремы о неявной функции и обратном отображении. Теорема Люстерника о касательном пространстве.

Принцип Лагранжа для гладких задач. Случай бесконечномерных экстремальных задач с равенствами и неравенствами. Простейшая задача и задача Лагранжа в классическом вариационном исчислении; уравнения Эйлера и Эйлера-Лагранжа. Простейшие вариационные неравенства.

Достаточные условия для бесконечномерных задач с равенствами и неравенствами. Простейшая задача вариационного исчисления: необходимые и достаточные условия экстремума второго порядка.

Связь между лагранжианом и гамильтонианом. Уравнение Гамильтона-Якоби. Принцип максимума Понтрягина. Решение конкретных задач вариационного исчисления и оптимального управления и экстремальных задач анализа, геометрии, теории аппроксимации.

Основные понятия выпуклого анализа и формулы выпуклого исчисления. Теоремы о субдифференциале и об очистке. Принцип Лагранжа для выпуклых задач. Теорема Куна-Таккера. Теоремы двойственности в выпуклом программировании. Теоремы двойственности и симплекс метод в линейном программировании. Транспортная задача и задача о назначении.

5. Динамические системы.

Общее понятие структурной устойчивости. Критерий Андронова-Понтрягина структурной устойчивости векторных полей на сфере.

Диффеоморфизмы окружности: число вращения; диффеоморфизмы с рациональным числом вращения. Теорема о равномерном распределении для иррациональных поворотов окружности. Теорема Данжуа (без доказательства). Описание структурно устойчивых диффеоморфизмов окружности.

Структурная устойчивость Анонсовского диффеоморфизма тора. Определение диффеоморфизмов Аносова и формулировка теоремы об их структурной устойчивости.

Общая задача теории бифуркаций. Лемма Сарда. Теорема трансверсальности. Семейства общего положения. Бифуркация Андронова-Хопфа.

6. Основы математическое моделирование и математической статистики. Фундаментальные вопросы математического моделирования и математической статистики, достаточных для применения методов математического моделирования и математической статистики в своей области исследований. Основы триады «Модель-алгоритм-программа», на котором базируется математическое моделирование.

Нелинейные математические модели как источник возникновения новых явлений и эффектов. Возможность адаптации известных математических-статистических моделей для решения задач, связанных с темой диссертации для замены дорогостоящих натурных экспериментов математическим моделированием и статистическими методами.

Основные понятия теории вероятностей и математической статистики. Методы обработки и анализа статистических данных.

Вопросы экзамена по специальности
01.01.02 - Дифференциальные уравнения и математическая физика

1. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для линейных и нелинейных систем первого порядка.
2. Линейные уравнения и системы с постоянными коэффициентами и специальными правыми частями.
3. Линейные уравнения и системы с переменными коэффициентами. Многообразие решений. Формула Лиувилля – Остроградского.
4. Теоремы о непрерывной зависимости решения от начальных условий и от параметров.
5. Гладкость решения по начальным данным и параметрам.
6. Автономные системы. Классификация особых точек.
7. Устойчивость по Ляпунову. Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению.
8. Предельные циклы.
9. Дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка.
10. Элементы вариационного исчисления. Функции Лагранжа. Условия экстремума. Уравнения Эйлера-Лагранжа. Энергия. Импульс. Гамильтониан. Уравнение Гамильтона-Якоби.
11. Задачи оптимального управления. Принцип максимума Понтрягина.

12. Теоремы Фредгольма для интегральных уравнений второго рода.
13. Интегральные уравнения с эрмитовым ядром; теорема Гильберта-Шмидта.
14. Понятие о характеристиках уравнений в частных производных. Задача Коши; теорема Ковалевской. Классификация уравнений в частных производных .
15. Физические задачи, приводящие к эллиптическим уравнениям. Свойства гармонических функций (гладкость, теоремы о среднем, принцип максимума, теоремы об устранении особенности, теорема Лиувилля). Фундаментальное решение задачи Лапласа.
16. Решение краевых задач для уравнения Лапласа методом потенциалов. Разностные методы решения краевых задач.
17. Обобщенные решения основных краевых задач для эллиптического уравнения второго порядка. Разрешимость краевых задач и гладкость обобщенных решений.
18. Вариационный метод решения краевых задач для эллиптического уравнения второго порядка. Метод Ритца.
19. Задачи на собственные значения. Разложение в ряд по собственным функциям.
20. Физические задачи, приводящие к параболическим уравнениям. Свойства решений однородного уравнения теплопроводности (гладкость, принцип максимума). Фундаментальное решение. Задача Коши.
21. Основные начально-граничные задачи для уравнения теплопроводности; классические и обобщенные решения начально-граничных задач; решение смешанных задач методом Фурье. Решение смешанных задач методом конечных разностей .
22. Физические задачи, приводящие к гиперболическим уравнениям. Конечная гладкость решений волнового уравнения. Фундаментальное решение. Задача Коши.
23. Основные начально-граничные задачи для волнового уравнения. Метод Фурье решения начально-граничных задач. Метод Галеркина решения начально-граничных задач для волнового уравнения.
24. Обобщенные функции. Свертка обобщенных функций. Обобщенные функции медленного роста; преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста.
25. Пространства дифференцируемых функций H^k. Эквивалентные нормировки пространств H^0 и H^1. Вложение пространства H^k в C^l .
26. Математическое моделирование как средство познания объективной реальности и создания современных технологий. Этапы эволюции математического моделирования.
27. Примеры построения математических моделей на основе фундаментальных законов природы. Математические модели процессов и явлений, описываемых

обыкновенными дифференциальными уравнениями и уравнениями в частных производных.

28. Нелинейность законов окружающего мира, источники нелинейности, хаос и синэнергетика. Разработка нелинейных математических моделей на основе законов сохранения.
29. Нелинейные математические модели процессов в однородных, неоднородных, изотропных и неизотропных средах.
30. Режимы с обострением в нелинейных математических моделях и их приложения.
31. Методы исследование математических моделей. Автомодельные и приближенно автомодельные методы.
32. Численные методы, как способ реализации математических моделей. Численное моделирование с использованием итерационных методов.
33. Методы статистического моделирования (метод Монте-Карло).

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ЛИТЕРАТУРА

Основная литература

1. Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2000.
2. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.
3. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1983.
4. Пикулин В.П., Похожаев С.И. Практический курс по уравнениям математической физики. М.: Наука, 1995.
5. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1998 (и последующие издания).
6. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. М.: Наука, 1963 (и последующие издания).
7. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: ГИТТЛ, 1953 (и последующие издания).
8. Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
9. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1980.
10. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Физматлит., 1985.

11. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т.IV, ч. I, II, М.: Наука, 1981, 550 с.
12. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.
13. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Физматгиз, 1950, 303 с.
14. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1983, 424 с.
15. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973, 404 с.

Дополнительная литература

1. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1971.
2. Мартинсон Л.К., Малов Ю.И. Дифференциальные уравнения математической физики. М.: Изд-во МГТУ, 1996.
3. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985.
4. Шубин М.А. Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория. М.: Наука, 1978.
5. Треногин В.А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.
6. Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976.
7. Мизохата С. Теория уравнений с частными производными. М.: Мир, 1977.
8. Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными. М.: ИЛ. 1967
9. Степанов. В.В. Курс дифференциальных уравнений. М.: ФизМат. 1959.
10. Салахиддинов М.С., Насритдинов Ғ.Н. Оддий дифференциал тенгламалар. Т.: ”Ўзбекистон”, 1994.
11. Салахиддинов М.С. Математик физика тенгламалари. Т.: ”Ўзбекистон”, 2002.
12. Салахиддинов М.С. Интеграл тенгламалар. . Т.: 2007.
13. Самарский А. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Галактионов В. Режимы с обострением для квазилинейных уравнений параболического типа. М. Наука,1987,487 с.
14. Самарский А. А., Михайлов А. П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. — 2-е изд., испр. — М.: Физматлит, 2001. — 320 с.
15. Белолипецкий В.М., Шокин Ю.И. Математическое моделирование в задачах охраны окружающей среды.- Новосибирск «ИНФОЛИО-пресс», 1997.-240с.
16. Самарский А.А. Введение в числ. методы. - М.: Наука, 1982. - 272 с.

17. Самарский А.А. Теория разностных схем. - М.: Наука, 1989. - 616 с.
18. Арипов М. Прикладная математика в естествознание и технологии. Тащкент 2012.
19. Арипов М. Методы эталонных уравнений для решения нелинейных краевых задач. Ташкент Фан, 1988, 137 с.
20. Холодниок М. , Клич А., Марек М., Кубичек М. Методы анализа нелинейных динамических систем Москва, Мир 1991, 365 с.

Интернет сайты

1. http://www.ziyonet.uz/
2. http://www.allmath.ru/
3. http://www.mcce.ru/
4. http://lib.mexmat.ru/
5. http://www.webmath.ru/
6. http://www.exponenta.ru/

КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ

«ОТЛИЧНО»

- полно раскрыто содержание материала в объеме программы;
- четко и правильно даны определения, раскрыто содержание понятий;
- верно использованы научные термины;
- ответ самостоятельный, использованы ранее приобретенные знания;
- четко прослеживается межпредметная связь с историей и философией науки, специальными дисциплинами и др;
- при ответе раскрыты причинно-следственные связи, закономерности.

«ХОРОШО»

- раскрыто основное содержание материала;
- в основном правильно даны определения понятий и использованы научные термины;
- ответ самостоятельный;
- при определении понятий допущены неточности, нарушена последовательность изложения;
- небольшие недостатки при использовании научной терминологии;
- небольшие неточности в выводах.

«УДОВЛЕТВОРИТЕЛЬНО»

- усвоено основное содержание учебного материала, изложено фрагментарно не всегда последовательно;
- определения понятий недостаточно четкие;
- допущены существенные ошибки и неточности в использовании научной терминологии.

«НЕУДОВЛЕТВОРИТЕЛЬНО»

- не усвоено основное содержание учебного материала, изложено фрагментарно, не последовательно;
- определения понятий не четкие;
- допущены ошибки и неточности в использовании научной терминологии определение понятий.