САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ИЛМИЙ ДАРАЖАСИНИ БЕРУВЧИ PhD.27.06.2017.FM.02.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

САФАРОВ АКБАР РАХМАНОВИЧ

ТЕБРАНУВЧАН ИНТЕГРАЛЛАРНИНГ ТЕКИС БАҲОЛАРИ ВА УЛАРНИНГ ТАТБИҚЛАРИ

01.01.01 – Математик анализ

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Самарқанд шаҳри – 2017 йил

УДК: 517.518.5

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Contents of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ИЛМИЙ ДАРАЖАСИНИ БЕРУВЧИ PhD.27.06.2017.FM.02.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

САФАРОВ АКБАР РАХМАНОВИЧ

ТЕБРАНУВЧАН ИНТЕГРАЛЛАРНИНГ ТЕКИС БАҲОЛАРИ ВА УЛАРНИНГ ТАТБИҚЛАРИ

01.01.01 – Математик анализ

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Самарқанд шаҳри – 2017 йил

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (Doctor of Philosophy) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2017.2.PhD/FM44 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация Самарқанд давлат университетида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифасида (www.samdu.uz) ва «Ziyonet» Ахборот таълим порталида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар:	**Икромов Исроил Акрамович** физика-математика фанлари доктори, профессор
Расмий оппонентлар:	**Имомкулов Севдиёр Акрамович** физика-математика фанлари доктори
	Тишабаев Жўрабой Каримович физика-математика фанлари номзоди
Етакчи ташкилот:	**Математика институти**

Диссертация ҳимояси Самарқанд давлат университети ҳузуридаги PhD.27.06.2017.FM.02.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2017 йил «___»________ соат____ даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 140104, Самарқанд ш., Университет хиёбони, 15-уй. Тел.: (+99866) 231-06-32, факс: (+99866) 235-19-38, 239-12-47, e-mail: patent@samdu.uz).

Диссертация билан Самарқанд давлат университетининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (___ рақами билан рўйхатга олинган). Манзил: 140104, Самарқанд ш., Университет хиёбони, 15-уй. Тел.: (+99866) 231-06-32.

Диссертация автореферати 2017 йил «____» _______________куни тарқатилди.
(2017 йил «____» ___________ даги _______ рақамли реестр баённомаси).

А.С. Солеев
Илмий даражалар берувчи Илмий
кенгаш раиси, ф.-м.ф.д., профессор

А.М. Халхўжаев
Илмий даражалар берувчи Илмий
кенгаш илмий котиби, ф.-м.ф.д.

С.Н. Лақаев
Илмий даражалар берувчи Илмий
кенгаш қошидаги илмий семинар
раиси, ф.-м.ф.д., профессор

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида олиб борилаётган кўплаб илмий-амалий тадқиқотлар аксарият ҳолларда тебранувчан интеграллар, яъни тез тебранувчан функцияларнинг интегралларини ўрганишга келтирилади. XX асрнинг иккинчи ярмида киритилган тригонометрик йиғиндилар усули ҳамда бу йиғиндиларнинг асимптотик характерини тригонометрик интеграллар орқали ифодаланиши тебранувчан интеграллар назариясининг ривожланишига асос бўлди. Тебранувчан интегралларни ўрганиш учун яна бир муҳим соҳалардан бири аналитик сонлар назариясига тадбиғи ҳисобланади. Бундай интегралларнинг характерини тадқиқ этишнинг икки жиҳати мавжуд бўлиб, улардан бири тригонометрик йиғиндилар билан, бошқаси тригонометрик интеграллар билан боғлиқ. Тебранувчан интегралларнинг характерини тадқиқ қилишга оид тадқиқотларни ривожлантириш муҳим вазифалардан бири бўлиб қолмоқда.

Мустақиллик йилларида мамлакатимизда фундаментал фанларнинг амалий татбиқига эга бўлган математик анализнинг долзарб йўналишларига эътибор кучайтирилди. Жумладан, тебранувчан интегралларнинг характерини ўрганишга алоҳида эътибор қаратилди. Евклид фазосининг қавариқ гиперсиртларида мужассамланган силлиқ Борел ўлчовларининг Фурье алмаштиришларини тадқиқ қилиш ҳамда гиперсиртларда Фурье алмаштиришларининг чегараланганлик муаммоси бўйича салмоқли натижаларга эришилди. Алгебра ва математик анализ, динамик тизимлар назарияси, амалий математика ва математик модделлаштириш математика фанларининг устивор йўналишлари бўйича халқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш асосий вазифалар ва фаолият йўналишлари этиб белгиланди[1]. Қарор ижросини таъминлашда фазаси кўпҳад бўлган тебранувчан интегралларнинг текис ва инвариант баҳолари назарияларини ривожлантириш муҳим аҳамиятга эга.

Ҳозирги кунда жаҳонда сиртлар учун Фурье алмаштиришларини чегараланганлиги ҳақидаги муаммо замонавий гармоник анализнинг долзарб масалаларидан бири ҳисобланади. Таъкидлаш жоизки, ушбу масала сиртда берилган ўлчов Фурье алмаштиришлари орқали аниқланган махсус синф тебранувчан интеграллари ҳолати билан чамбарчас боғлиқ. Хусусан, фазаси кўпҳад бўлган тебранувчан интегралларни текис баҳолаш муҳим аҳамият касб этмоқда. Бу борада: фазаси икки ўзгарувчили учинчи даражали бир жинсли кўпҳад ва чизиқли функциянинг йиғиндиси бўлган тебранувчан интегралларнинг инвариант баҳоларини исботлаш; фазаси икки ўзгарувчили учинчи даражали бир жинсли кўпҳад бўлган тебранувчан интегралларнинг аниқ йиғилиш кўрсаткичини топиш мақсадли илмий тадқиқотлар ҳисобланади.

---

[1] Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2017 йил 18 майдаги “Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий-тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш тўғрисида”ги 292-сон қарори

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2008 йил 15 июлдаги ПҚ-916-сон «Инновацион лойиҳалар ва технологияларни ишлаб чиқаришга татбиқ этишни рағбатлантириш борасидаги қўшимча чора-тадбирлар тўғрисида»ги, 2017 йил 17 февралдаги ПҚ-2789-сон «Фанлар академияси фаолияти, илмий-тадқиқот ишларини ташкил этиш, бошқариш ва молиялаштиришни янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги Қарори ва 2017 йил 8 февралдаги ПФ-4947-сон «Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича ҳаракатлар стратегияси тўғрисида»ги Фармони ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий хужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишга ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига боғлиқлиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Тебранувчан (тригонометрик) интеграллар дастлаб, Френел ва Эйрининг ёруғликнинг интенсивлигини ўрганиш билан боғлиқ ишларида вужудга келган. Кельвин ва Риманлар томонидан тебранувчан интегралларнинг характерини ўрганиш учун стационар фаза усули қўлланила бошлаган. Пуанкаренинг илмий ишларида ёруғликнинг интенсивлигини ўрганишда тебранувчан интеграллардан кенг фойдаланган. Хусусан, у ёруғлик каустикадан ўтаётганда фазаси силжишини исботлаган. Пирси, Людвиг, Урселл, Коннорлар томонидан содда махсусликка эга бўлган тебранувчан интеграллар математик физика масалаларига татбиқ қилинган.

И.М.Виноградовнинг ишларида Диофант тенгламалар системаси ечимларининг сонига мос келувчи (Виноградов интеграли деб аталувчи) интеграллар тадқиқ қилинган. Хуа Ло Ген томонидан тригонометрик интегралларнинг мос $L^p(R^n)$ фазога тегишли бўладиган энг минимал p сонни топиш муаммоси қўйилган. Мазкур масала бир каррали тебранувчан интеграллар учун Г.И.Архипов, В.Н.Чубариков, А.А.Карацубаларнинг ишида ўз ечимини топган ва улар томонидан кўп каррали тригонометрик интеграллар учун юқори баҳо топилган.

И.А.Икромов, Д.Д.Тўрақуловларнинг илмий ишларида Евклид фазосининг қавариқ гиперсиртларида мужассамланган силлиқ борел ўлчовларининг Фурье алмаштиришларини баҳолаш ва бу баҳоларнинг Евклид фазосидаги уч ўлчовли қаварик аналитик гиперсиртлар учун оптималлигини исботланган. И.А.Икромов, Ғ.А.Хасановнинг илмий ишларида ихтиёрий аналитик силлиқ фазали, ҳатто амплитудаси узилишга эга бўлган тебранувчан интеграллар учун текис баҳолар топилган. И.А.Икромов, М.Кемпе ва Д.Мюллерларнинг илмий тадқиқотларида уч ўлчовли фазонинг ихтиёрий сиртлари учун ўлчов Фурье алмаштиришларининг камайиш тартиби ва Е.М.Стейн томонидан қўйилган бу камайиш тартибининг сиртга мос максимал операторлар чегараланганлик кўрсаткичи билан боғлиқлиги ҳақидаги гипотезасининг тасдиғи исботланган.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти Самарқанд давлат университетининг Ф-4-17 «Чизиқли бўлмаган алгебраик ва дифференциал тенгламалар системаларини ҳамда тебранувчи интегралларни тадқиқ этишда янги методларни ишлаб чиқиш ва уларнинг татбиқлари» (2012-2016 йиллар) мавзусидаги илмий тадқиқот лойиҳаси доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади фазаси икки ўзгарувчили учинчи даражали бир жинсли кўпҳад бўлган тебранувчан интеграллар учун текис ва инвариант баҳолар олиш ҳамда аниқ жамлаш кўрсаткичини топишдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари:

фазаси махсус кўринишли кўп каррали тебранувчан интегралларнинг текис баҳолаш;

фазаси икки ўзгарувчили учинчи даражали бир жинсли кўпҳад бўлган тебранувчан интегралларнинг инвариантлигини исботлаш;

фазаси икки ўзгарувчили учинчи даражали бир жинсли кўпҳад ва чизиқли функциянинг йиғиндиси бўлган тебранувчан интегралларнинг инвариант баҳоларини исботлаш;

фазаси икки ўзгарувчили учинчи даражали бир жинсли кўпҳад бўлган тебранувчан интегралларнинг аниқ йиғилиш кўрсаткичини топиш.

Тадқиқотнинг объекти фазаси кўпҳад бўлган тебранувчан интеграллар, модель гиперсиртларда мужассамлашган силлиқ Борел ўлчовларининг Фурье алмаштиришларидан иборат.

Тадқиқотнинг предмети фаза функциясининг коэффициентлари чексизга интилгандаги тебранувчан интегралларнинг ҳолати, тебранувчан интегралларнинг Евклид фазосидаги инвариант классик группалар инвариантлари орқали баҳоларидан иборат.

Тадқиқотнинг усуллари. Тадқиқот ишида дифференциал акслантиришларнинг махсусликлар назарияси, аналитик функциялар назарияси, анализнинг асимптотик усулларидан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

фазаси махсус кўринишли кўп каррали тебранувчан интегралларнинг текис баҳолари олинган;

модель гиперсиртларда мужассамлашган ўлчовлар Фурье алмаштиришларининг баҳолари ҳақида теорема исботланган;

фазаси икки ўзгарувчили учинчи даражали бир жинсли кўпҳад бўлган тебранувчан интеграллар инвариант баҳолари исботланган;

фазаси икки ўзгарувчили учинчи даражали бир жинсли кўпҳад ва чизиқли функциянинг йиғиндиси бўлган тебранувчан интеграллар баҳосининг инвариантлиги исботланган;

фазаси учинчи даражали бир жинсли кўпҳад бўлган тебранувчан интеграллар учун Евклид текислигидаги классик ҳаракатлар группасининг инвариантлари орқали баҳоси олинган;

фазаси учинчи даражали бир жинсли кўпҳад ва бу ўзгарувчиларнинг чизиқли функциялари йиғиндиси бўлган тебранувчан интеграллар учун

Евклид текислиги классик ҳаракатлар группаси инвариантлари орқали баҳоланган;

фазаси икки ўзгарувчили учинчи даражали бир жинсли кўпҳад бўлган тебранувчан интегралларнинг аниқ йиғилиш кўрсаткичи топилган.

Тадқиқотнинг амалий натижалари фазаси икки ўзгарувчили учинчи даражали бир жинсли кўпҳад бўлган тебранувчан интегралларнинг аниқ йиғилиш кўрсаткичи топилганлигидан иборат.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги дифференциал акслантиришларнинг махсусликлар назарияси, аналитик функциялар назарияси, асимптотик анализ усулларидан фойдаланилганлиги ҳамда математик мулоҳазаларнинг ва исботларнинг қатъийлиги билан асосланган.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти фазаси учинчи даражали кўпҳад бўлган тебранувчан интегралларнинг инвариант баҳоларининг мавжудлигини кўрсатилганлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти, гиперболик тенгламаларнинг фундаментал ечимларининг характерини тадқиқ қилишда асос сифатида хизмат қилиши билан белгиланади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Диссертация тадқиқоти жараёнида олинган илмий натижалар қуйидаги йўналишларда амалиётга жорий қилинган:

фазаси кўпҳад бўлган тебранувчан интеграллар текис баҳоларидан QJ130000.2726.01K82 рақамли грант лойиҳасида дискрет Шредингер операторига мос Фредгольм детерминантининг асимптотик ёйилмасини, операторнинг хос қийматларининг жойлашиши ҳамда уларнинг характерини тадқиқ қилишда фойдаланилган (Малайзия технология университети, 2017 йил 18 сентябрдаги маълумотномаси). Илмий натижанинг қўлланилиши хос қийматларнинг мавжудлигини кўрсатиш ва улар жойлашган тўпламнинг чегараларини топиш имконини берган;

фазаси кўпҳад бўлган тебранувчан интегралларнинг текис баҳоларини топишда яратилган усулдан QJ130000.2726.01K82 рақамли грант лойиҳасида дискрет Шредингер операторига мос Фредгольм детерминантини аниқлайдиган функцияни нормал шаклга келтиришда фойдаланилган (Малайзия технология университети, 2017 йил 18 сентябрдаги маълумотномаси). Илмий натижанинг қўлланилиши Фредгольм детерминанти асимптотик ёйилмасининг бош ҳадини топиш имконини берган;

тебранувчан интегралларнинг инвариант баҳолари QJ130000.2726.01K82 рақамли грант лойиҳасида икки заррачали системага мос Гамилтон оператори боғланган ҳолатларининг мавжудлиги, энергияси жойлашган тўпламининг чегара-ларини аниқ кўрсатиш учун фойдаланилган (Малайзия технология университети, 2017 йил 18 сентябрдаги маълумотномаси). Илмий натижанинг қўлланилиши боғланган ҳолатлар энергияси жойлашган тўпламнинг аниқ чегараларини топишга хизмат қилган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари, 11 та илмий-амалий анжуманларда, жумладан 2 та халқаро ва 9 та республика илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Диссертация мавзуси бўйича жами 16 та илмий иш чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий Аттестация комиссиясининг докторлик диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 4 та мақола, жумладан, 1 таси хорижий ва 3 таси республика журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг ҳажми ва тузилиши. Диссертация кириш қисми, учта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан ташкил топган. Диссертациянинг ҳажми 98 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган, мавзу бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг **«Тебранувчан интеграллар ҳақидаги зарур маълумотлар ва маълум натижалар»** деб номланувчи биринчи бобида диссертациянинг асосий натижаларини баён қилишда зарур бўладиган ёрдамчи маълумотлар, асосий таърифлар, тебранувчан интеграллар ҳақидаги муҳим теоремалар келтирилган.

1.1 параграфда силлиқ функциялар учун содда махсусликларнинг баъзи таърифларини келтирамиз. Маълумки, тебранувчан интегралларнинг ҳолати фаза функциясининг критик нуқталар тўпламининг етарлича кичик атрофи орқали аниқланади. Шунинг учун кейинчалик диссертациянинг натижаларини келтирганимизда силлиқ акслантиришларнинг махсусликлар назариясидан фойдаланамиз.

1.2 параграфда функциянинг бирор мусбат сондан кичик бўладиган қийматлар тўплами прообразининг ўлчови тушунчаси келтирилган ва Фонг-Стейн натижасининг умумлашмаси исботланган. Бу баҳолар фазаси икки ўзгарувчили учинчи даражали бир жинсли кўпҳад бўлган тебранувчан интегралларнинг ҳолатини ўрганиш учун керак бўлади.

Ушбу интегрални қарайлик

$$J(p,q) := \int_a^b \frac{dx}{\left|x^3 + px + q\right|^{\delta}}, \tag{1}$$

бунда $0 < \delta < 1$.

Қуйидаги теорема Фонг-Стейн теоремасининг учинчи даражали кўпҳад учун умумлашмаси ҳисобланади.

1-теорема. (1) интеграл учун қуйидаги тасдиқлар ўринли:

1) агар $\frac{1}{3} < \delta < \frac{1}{2}$ бўлса, у ҳолда

$$|J(p,q)| \le \frac{c_\delta}{\left(\frac{|p|^3}{27} + \frac{q^2}{4}\right)^{\frac{3\delta-1}{6}}},$$

2) агар $\frac{1}{2} < \delta < 1$ бўлса, у ҳолда

$$|J(p,q)| \le \frac{c_\delta}{|D|^{\delta-\frac{1}{2}}\left(\frac{|p|^3}{27} + \frac{q^2}{4}\right)^{\frac{2-3\delta}{6}}},$$

тенгсизлик ўринли, бу ерда $D = \frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}$, $x^3 + px + q$ кўпҳаднинг дискриминанти ва c_δ фақатгина δ га боғлиқ мусбат сон.

1.3 параграф кейинги натижаларни тавсифлашда зарур бўладиган, Гельфанд-Лере формаси ҳамда сиртда “дельта” функцияни аниқлашга бағишланган.

1.4 параграфда классик инвариантлар назариясининг баъзи керакли тушунчаларини келтирамиз.

Қуйидаги таъриф тебранувчан интегрални ифодалайди.

1-таъриф. Фазаси f ва амплитудаси φ бўлган тебранувчан (тригонометрик) интеграл деб, қуйидаги кўринишдаги интегралга айтилади

$$J(\lambda, f, \varphi) = \int_{\mathrm{R}^n} e^{i\lambda f(x)}\varphi(x)dx,$$

бунда $f:\mathrm{R}^n \to \mathrm{R}, \varphi:\mathrm{R}^n \to \mathrm{C}$ – силлиқ функциялар, ҳамда φ компакт ташувчига эга, λ – ҳақиқий параметр.

Диссертациянинг **«Фазаси кўпҳад бўлган баъзи каррали тебранувчан интегралларнинг баҳолари»** деб номланувчи иккинчи боби фазаси кўпҳад бўлган баъзи каррали тебранувчан интегралларнинг тадқиқига ҳамда баъзи гиперсиртларда Фурье алмаштиришининг чегараланганлиги муаммосига бағишланади.

2.1 параграфда фазаси махсус кўринишга эга бўлган, компакт ташувчили силлиқ амплитудали баъзи каррали тебранувчан интеграллар қаралади. Таъкидлаш жоизки, В.Н.Чубариковнинг ишида махсус $\varphi(x) = \chi_{[0,1]^r}(x)$ амплитудали тригонометрик интеграллар қаралган.

Фараз қилайлик, $r \ge 2$ ва фаза функция қуйидаги кўринишда бўлсин

$$\Phi(x_1, x_2, ..., x_r) = s_{12..r}x_1...x_r + \sum_{\substack{1\le t_l \le r, 1\le l\le j,\\ 1\le j\le r-1\\ t_i\ne t_k, i\ne k}} s_{t_1t_2..t_j}x_{t_1}x_{t_2}...x_{t_j}. \quad (2)$$

В.Н.Чубариковнинг ишидан қуйидаги натижа маълум

1-тасдиқ. (2) фаза функцияли

$$J=\int\limits_{Q}\exp\left(i\lambda\Phi\left(x_1,x_2,...,x_r\right)\right)dx_1dx_2...dx_r$$

тебранувчан интеграл учун ушбу баҳо ўринли:

$$|J|<<\frac{\left(\ln\left(\lambda|s|\right)\right)^{r-1}}{\lambda|s|},\qquad (3)$$

бунда $Q-$ R^r даги бирлик куб ҳамда $|s|=|s_{12..r}|+\sum\limits_{\substack{1\le t_l\le r,1\le l\le j,\\ 1\le j\le r-1\\ t_i\ne t_k,i\ne k}}\left|s_{t_1t_2..t_j}\right|$. Бу ерда ва кейинчалик (3) кўринишдаги баҳо $|J|\le\frac{C\left(\ln\left(\lambda|s|\right)\right)^{r-1}}{\lambda|s|}$ тенгсизликнинг фақатгина r га боғлиқ C ўзгармас билан бажарилишини билдиради.

Бу параграфда В.Н.Чубариков баҳосининг умумлашмаси ўринли эканлигини кўрсатамиз. Бу ҳолат фаза функцияси ва амплитуданинг махсусликлари тўпламларининг ўзаро кесишмаслиги билан боғлиқ. Бундан ташқари, биз бу теореманинг умумлашмасини гиперсиртларда мужассамлашган ўлчовлар Фурье алмаштиришлари учун исботлаймиз. Бизнинг натижамиз В.Н.Чубариковнинг баҳосини силлиқ амплитудали тебранувчан интеграллар учун янгилайди.

Қуйидаги тасдиқ ўринли.

2-теорема. Нолнинг шундай $U\subset R^r$ атрофи мавжудки, ихтиёрий $\varphi\in C_0^\infty(U)$ амплитудали ва (2) фазали

$$J=\int...\int\limits_{R^r}\varphi\left(x_1,x_2,...,x_r\right)\exp\left(i\lambda\Phi\left(x_1,x_2,...,x_r\right)\right)dx_1dx_2...dx_r\qquad (4)$$

тебранувчан интеграл учун қуйидаги баҳо ўринли:

$$|J|<<\frac{\|\varphi\|_{C^2}\left(\ln\left(\lambda|s|\right)\right)^{r-2}}{\lambda|s|},$$

бунда $|s|=|s_{12..r}|+\sum\limits_{\substack{1\le t_l\le r,1\le l\le j,\\ 1\le j\le r-1\\ t_i\ne t_k,i\ne k}}|\ s_{t_1t_2..t_j}\ |$, $\|\varphi\|_{C^2}=\max\limits_{\substack{|\alpha|\le 2\\ x\in U}}\left|D^\alpha\varphi(x)\right|$.

1-натижа. Агар фаза функция

$$\Phi\left(x_1,x_2,...,x_r,s\right)=x_1x_2...x_r+\sum\limits_{\substack{1\le t_l\le r,1\le l\le j,\\ 1\le j\le r-1\\ t_i\ne t_k,i\ne k}}s_{t_1t_2..t_j}x_{t_1}x_{t_2}...x_{t_j}$$

кўринишга эга бўлса, у ҳолда ихтиёрий s ва $|\lambda|>2$ қийматлар учун қуйидаги баҳо ўринли

$$|J|<<\frac{\left(\ln|\lambda|\right)^{r-2}}{|\lambda|},$$

бунда $s:=\left\{s_{t_1t_2..t_j}\right\}$ ва $1\le t_j\le r,1\le j\le r.$

2.2 параграфда модель гиперсиртларда мужассамлашган ўлчовлар Фурье алмаштиришларининг баҳоси қаралади ва қуйидаги теоремалар исботланган.

3-теорема. Фараз қилайлик, фаза функцияси қуйидаги кўринишга эга бўлсин

$$\Phi\left(x_1,x_2,...,x_r,s\right)=s_{12..r}x_1...x_rb\left(x_1,...,x_r\right)+s_1x_1+s_2x_2+...+s_rx_r,$$

бунда $b(x_1,...,x_r)$ - силлиқ ва $b(0,...,0)\neq 0$ шартни қаноатлантирувчи функция. У ҳолда нолнинг шундай $U\subset R^r$ атрофи мавжудки, ихтиёрий $\varphi\in C_0^\infty(U)$ амплитудали (4) тебранувчан интеграл учун қуйидаги баҳо ўринли

$$|J| << \frac{\|\varphi\|_{C^2}(\ln|\lambda s|)^{r-2}}{|\lambda s|},$$

бунда $|s| = |s_{12..r}| + \sum_{i=1}^{r}|s_i|$.

Қуйидаги теорема 2-теореманинг умумлашмаси ҳисобланади.

4-теорема. Фараз қилайлик, фаза функция қуйидаги кўринишга эга бўлсин

$$\Phi(x_1,x_2,...,x_r,s) = x_1...x_l b(x_1,...,x_r) + s_1x_1 + s_2x_2 + ... + s_rx_r,$$

бунда $b(x_1,...,x_r)$ - силлиқ ва $b(0,...,0)\neq 0$ шартни қаноатлантирувчи функция. У ҳолда нолнинг шундай $U\subset R^r$ атрофи мавжудки, ихтиёрий $\varphi\in C_0^\infty(U)$ амплитудали (4) тебранувчан интеграл учун қуйидаги баҳо ўринли

$$|J| << \frac{\|\varphi\|_{C^2}\left(\ln\left(|\lambda|\left(1+\sum_{i=1}^{r}|s_i|\right)\right)\right)^{l-2}}{|\lambda|\left(1+\sum_{i=1}^{r}|s_i|\right)},$$

бунда $l\leq r$.

Фараз қилайлик, $S\subset R^{r+1}$ гиперсирт

$$\Phi_1(x_1,x_2,...,x_r) = x_1...x_l b(x_1,...,x_r),$$

функциянинг графиги кўринишда берилган бўлсин, бунда $b(x_1,x_2...,x_r)$- силлиқ ҳамда $b(0,0...,0)=1$ шартни қаноатлантирувчи функция, $\mu=\varphi(x)dS-$сирт юзаси ўлчови. μ ўлчовнинг $\hat{\mu}(\xi)$ Фурье алмаштиришини қараймиз.

2-натижа. Нолнинг шундай U атрофи мавжудки, ихтиёрий $\varphi\in C_0^\infty(U)$ функция учун қуйидаги баҳо ўринли:

$$|\hat{\mu}(\xi)| << \frac{\|\varphi\|_{C^2}(\ln|\xi|+2)^{l-2}}{|\xi|+2},$$

бунда $\xi\in R^{r+1}$.

2.3 параграф модель гиперсиртларда Фурье алмаштиришларининг чегараланганлиги муаммосига бағишланган. Шуни таъкидлаш жоизки, олдинги ишларда олинган текис баҳолар жамланувчи функцияларнинг йиғиш кўрсаткичи учун фақатгина қатъий баҳони беради. Ушбу параграфда Литлевуд-Пэли ёйилмасини қўллаш орқали, йиғиш кўрсаткичи учун аниқ баҳони олиш имкони мавжудлигини кўрсатамиз.

Қуйидаги тасдиқ ўринли.

5-теорема. Фараз қилайлик, S нолнинг атрофида $\xi_{n+1} = \xi_1^{m_1} ... \xi_l^{m_l}$ функциянинг графиги кўринишда аниқланган гиперсирт бўлсин, бу ерда $m_j \geq 1,\ j = \overline{1,l}$. У ҳолда $p' \geq 2\left(1 + \max_{1 \leq j \leq l}\{m_j\}\right)$ бўлганда қуйидаги баҳо ўринли:

$$\left(\int_S \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 \psi(\xi) dS(\xi)\right)^{\frac{1}{2}} \leq C\|f\|_{L^p(R^{n+1})},$$

бунда p' сон p га қўшма, яъни $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$

Диссертациянинг **«Фазаси учинчи даражали кўпҳад бўлган икки каррали тебранувчан интегралларнинг инвариант баҳолари ва йиғиш масаласи»** деб номланувчи учинчи бобида фазаси бир жинсли кўпҳад бўлган икки каррали тебранувчан интегралларнинг, ҳамда фазаси бир жинсли кўпҳад ва бу ўзгарувчиларнинг чизиқли функциялари йиғиндиси учун баҳонинг инвариантлиги исботланган. Бундан ташқари, фазаси бир жинсли кўпҳад бўлган икки каррали тебранувчан интеграллар учун йиғиш аниқ кўрсаткичи топилган.

3.1 ва 3.2 параграфларда фазаси икки ўзгарувчили учинчи даражали кўпҳад бўлган тебранувчан интеграллар қаралган. Ушбу интеграллар учун олинган инвариант баҳолар олдинги натижаларни янгилайди.

2-таъриф. Қуйидаги формани кубик бинар форма деб атаймиз:

$$P_3(x_1, x_2, a) = a_0 x_1^3 + 3a_1 x_1^2 x_2 + 3a_2 x_1 x_2^2 + a_3 x_2^3. \tag{5}$$

3-таъриф. Қуйидаги кўпҳадни (5) кубик бинар форманинг дискриминанти деб атаймиз:

$$D(P_3) := 3a_1^2 a_2^2 + 6a_0 a_1 a_2 a_3 - 4a_0 a_2^3 - 4a_1^3 a_3 - a_0^2 a_3^2. \tag{6}$$

1-эслатма. (5) кубик форманинг $D(P_3)$ дискриминанти GL(2, C) группанинг 6 вазнли нисбий инвариантидир.

Қуйидаги кўринишдаги тебранувчан интегрални қараймиз

$$J = \int_{\mathbb{R}^2} e^{iP_3(x_1, x_2, a)} \varphi(x_1, x_2) dx_1 dx_2, \tag{7}$$

бунда $\varphi \in C_0^1(R)$.

6-теорема. (5) фаза функцияли (7) тебранувчан интеграл учун қуйидаги баҳо ўринли:

$$|J| \leq \frac{c\|\varphi\|_{C^1}}{|D(P_3)|^{\frac{1}{6}}}, \tag{8}$$

бунда $D(P_3) -$ P_3 кўпҳаднинг дискриминанти ва $c -$ ўзгармас сон амплитуданинг ташувчисига боғлиқ.

Қуйидаги

$$\|\varphi\|_{W_1^n(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n}\left(\sum_{|\alpha| \leq n} |D^\alpha \varphi|\right) dx, \tag{9}$$

норма билан аниқланган Соболев фазосини $W_1^n(\mathrm{R}^n)$ орқали белгилаймиз, бунда $D^{\alpha}\varphi -$ умумлашган маънодаги ҳосила. $W_1^n(\mathrm{R}^n)$ фазони (9) норма бўйича Шварц синфининг тўлдирмаси сифатида ҳам аниқласа бўлади.

2-эслатма. И.А.Икромов томонидан [*Мат.сбор.***180**(1989), №8] қуйидаги баҳо исботланган:

$$|J| \le \frac{c\|\varphi\|_{W_1^2(\mathrm{R}^2)}}{N^{\frac{1}{6}} + |H|^{\frac{1}{4}} + \frac{|D(P_3)|^{\frac{2}{3}}}{N}}, \tag{10}$$

бунда $N = a_0^2 + 3a_1^2 + 3a_2^2 + a_3^2$, $H = a_1^2 + a_2^2 - a_0 a_2 - a_1 a_3$.

(8) ва (10) баҳолардан қуйидагини ҳосил қиламиз:

7-теорема. (7) тебранувчан интеграл учун қуйидаги баҳо ўринли:

$$|J| \le \frac{c\|\varphi\|_{W_1^2(\mathrm{R}^2)}}{N^{\frac{1}{6}} + |H|^{\frac{1}{4}} + |D(P_3)|^{\frac{1}{6}}},$$

бунда $c -$ ўзгармас.

3-эслатма. Агар $a_j = \lambda a_j^{'}$, $j = 0,1,2,3$ бўлса, у ҳолда $D(P_3(a)) = \lambda^4 D(P_3(a^{'}))$, $H(a) = \lambda^2 H(a^{'})$, $N(a) = \lambda^2 N(a^{'})$.

1. Агар $D(P_3(a^{'})) \ne 0$ ва $a^{'}$ тайинланган параметр бўлса, у ҳолда фаза $D_4^{\pm}$ типдаги махсусликка эга бўлади. Бу ҳолда $\lambda \to \infty$ да қуйидаги асимптотик муносабат ўринли:

$$J = \frac{c\varphi(0,0)}{\lambda^{\frac{2}{3}}} + O(\lambda^{-1}),$$

бунда $c -$ нолмас коэффициент. Охирги асимптотик муносабат $|D(P_3)|^{\frac{1}{6}} > C|H|^{\frac{1}{4}}$, бўлган ҳолда олинган баҳонинг оптималлигини кўрсатади, бу ердаги C етарлича катта мусбат сон.

2. Агар $D(P_3(a^{'})) = 0$ ва $H(a^{'}) \ne 0,$ бўлса, у ҳолда фаза функция D_{∞} типдаги махсусликка эга бўлади, бу эса Сирсма типдаги махсуслик дейилади. Бу ҳолда биз қуйидаги асимптотик муносабатга эга бўламиз:

$$J = \frac{c(\varphi)}{\lambda^{\frac{1}{2}}} + O(\lambda^{-1}),\ (\lambda \to \infty),$$

бунда $\varphi -$ номанфий функция ва $\varphi(0,0) > 0$ бўлганда c коэффициент нолдан фарқли бўлади. Шундай қилиб, агар $D(P_3) = 0$ ва $|H|^{\frac{1}{2}} > CN^{\frac{1}{3}}$ бўлса, у ҳолда олинган баҳони яхшилаб бўлмайди, бундаги $C -$ етарлича катта мусбат сон.

3. Агар $D(P_3(a^{'})) = 0$ ва $H(a^{'}) = 0,$ бўлса, у ҳолда фазанинг x_1^3 га чизиқли эквивалент эканлигини осонгина кўрсатиш мумкин, бу махсусликни $A_{2\infty}$ типдаги махсуслик деб атаймиз ва қуйидагига эга бўламиз:

$$J = \frac{c(\varphi)}{\lambda^{\frac{1}{3}}} + O(\lambda^{-\frac{2}{3}}),\ (\lambda \to \infty).$$

Бунда $\varphi -$ номанфий ва $\varphi(0,0) \ne 0$ бўлса, $c(\varphi) \ne 0$ бўлади.

Таъкидлаш жоизки, учала D_4, D_∞ ва $A_{2\infty}$ ҳолларда ҳам қуйидаги баҳо

$$|J| \le \frac{c\|\varphi\|_{C^2}}{N^{\frac{1}{6}} + |D_{x_1}(P_3)|^{\frac{1}{4}} + |D_{x_2}(P_3)|^{\frac{1}{4}} + |D(P_3)|^{\frac{1}{6}}},$$

$\varphi(0,0) \ne 0$ ва φ номанфий функция бўлганда, асимптотик ёйилманинг бош ҳади билан мос келади, бунда $D_{x_1}(P_3) = a_2^2 - a_1a_3$ ва $D_{x_2}(P_3) = a_1^2 - a_0a_2$ лар мос $\frac{\partial P_3}{\partial x_1}$ ва $\frac{\partial P_3}{\partial x_2}$ кўпҳадларнинг дискриминантлари.

Фараз қилайлик, P кўпҳад қуйидаги кўринишга эга бўлсин:

$$\mathrm{P}(x,a,c) = P_3(x_1,x_2,a) + P_1(x_1,x_2,c),$$

бунда $P_1(x_1,x_2,c) = c_0x_1 + c_1x_2$.

Қуйидаги тебранувчан интегрални қараймиз

$$J = \int_{\mathrm{R}^2} \varphi(x_1,x_2) e^{i\mathrm{P}(x,a,c)} dx_1 dx_2, \tag{11}$$

бунда $\varphi \in W_1^2(\mathrm{R}^2)$ бўлиб, охирги интеграл одатдаги Лебег маъносида яқинлашувчи.

8-теорема. Шундай C мусбат сони мавжудки, ихтиёрий $\varphi \in W_1^2(\mathrm{R}^2)$ да (11) тебранувчан интеграл учун қуйидаги баҳо ўринли:

$$|J| \le \frac{C\|\varphi\|_{W_1^2(\mathrm{R}^2)}}{|D(P_3)|^{\frac{1}{6}}}. \tag{12}$$

8-теорема ва 2-эслатмадан қуйидагига эга бўламиз:

9-теорема. (11) тебранувчан интеграл учун қуйидаги муносабат ўринли:

$$|J| \le \frac{C\|\varphi\|_{W_1^2(\mathrm{R}^2)}}{|D(P_3)|^{\frac{1}{6}} + |H|^{\frac{1}{4}} + N^{\frac{1}{6}}}.$$

Энди ушбу интегрални қараймиз

$$J_T(\lambda,s) = \int_T e^{i\lambda(\xi^3 \pm \xi\eta^2 + s_1\xi + s_2\eta)} d\xi d\eta, \tag{13}$$

бунда $T-$ ихтиёрий учбурчак ва $s := (s_1,s_2)$.

10-теорема. Шундай C ўзгармас сони топиладики, ихтиёрий $(s_1,s_2) \in \mathrm{R}^2$, $\lambda \ne 0$ ва исталган T учбурчак учун қуйидаги баҳо ўринли

$$|J_T(\lambda,s)| \le \frac{C}{\lambda^{\frac{2}{3}}}.$$

10-теорема $T = \mathrm{R}^2$ бўлганда Дж.Дюстермат теоремасининг умумлашмаси сифатида қарашимиз мумкин.

Учинчи бобнинг учинчи параграфида икки каррали тригонометрик интеграллар учун йиғиш масаласи қаралади. Йиғиш кўрсаткичини топиш усули тригонометрик интегралларнинг инвариант баҳоларига асосланади.

Қуйидаги (5) фазали тебранувчан интегрални қарайлик, яъни

$$J(a) = \int_{R^2} e^{iP_3(x_1,x_2,a)} \varphi(x,x_2) dx_1 dx_2, \tag{14}$$

бунда $P_3 : R^2 \times R^4 \to R$, $\varphi \in C_0^\infty(R^2)$, $a = (a_0,a_1,a_2,a_3)$.

11-теорема. Агар J тригонометрик интеграл (5) фазали (14) кўринишда ва $\varphi \in C_0^1(R^2)$ бўлса, у ҳолда ихтиёрий $p > 7$ учун $J \in L^p(R^4)$ муносабат ўринли. Бундан ташқари, агар $\varphi(0,0) \neq 0$ ва φ чексиз марта силлиқ функция нолнинг етарлича кичик атрофида мужассамлашган бўлса, у ҳолда $p \leq 7$ да $J \notin L^p(R^4)$ бўлади.

ХУЛОСА

Диссертация иши тебранувчан интегралларнинг текис, классик группалар инвариантлари орқали ифодаланган баҳолари, фазаси учинчи даражали бир жинсли кўпҳад бўлган икки каррали тебранувчан интегралларнинг инвариант баҳолари, бу интеграллар учун йиғиш масаласи, ҳамда фазаси учинчи даражали ва биринчи даражали кўпҳадларнинг йиғиндиси бўлган икки каррали тебранувчан интегралларнинг инвариант баҳолари масалаларига бағишланган.

Диссертацияда олинган илмий натижалар асосида қуйидаги хулосаларга келинди:

1. Фазаси модел кўпҳад кўринишда бўлган тебранувчан интегралларнинг текис баҳолари коэффициентлар фазосидаги норма орқали ифодаланиши мумкин; Бу баҳолар фаза ва амплитуда функциялари махсусликлари тўпламлари ўзаро кесишмаган ҳолда яхшиланган.

2. Баъзи гиперсиртларда мужассамлашган ўлчовлар Фурье алмаштиришларининг баҳолари ҳақидаги теореманинг ўринли бўлиши исботланган ва бу баҳолар импульслар фазосидаги йўналишга боғлиқ бўлмаслигини кўрсатади.

3. Фазаси учинчи даражали икки ўзгарувчили бир жинсли кўпҳад бўлган тебранувчан интеграллар баҳосининг инвариантлиги исботланган. Бу каби тебранувчан интегралларнинг оптимал баҳоси текисликдаги аффин алмаштиришлари инвариантлари орқали ифодаланиши мумкин эмаслиги кўрсатилган.

4. Фазаси учинчи даражали икки ўзгарувчили бир жинсли кўпҳад ва бу ўзгарувчиларнинг чизиқли функциялари йиғиндиси бўлган тебранувчан интеграллар баҳосининг инвариантлиги кўрсатилган.

5. Фазаси бир жинсли учинчи даражали кўпҳад бўлган тебранувчан интеграллар учун Евклид текислиги классик ҳаракатлар группаси инвариантлари орқали баҳоланган.

6. Фазаси бир жинсли учинчи даражали кўпҳад ва бу ўзгарувчиларнинг чизиқли функциялари йиғиндиси бўлган тебранувчан интеграллар учун Евклид текислиги классик ҳаракатлар группаси инвариантлари орқали баҳоси олинган. Бу баҳо коэффициентлар маълум йўналиш бўйича чексизликка интилгандаги асимптотик ёйилмаси бош ҳадига мослиги асосланган.

7. Фазаси икки ўзгарувчили учинчи даражали бир жинсли кўпҳад бўлган тебранувчан интеграллар учун аниқ йиғиш кўрсаткичи топилган. Олинган натижалар аналитик сонлар назарияси, асимптотик анализ ва унинг татбиқларида қўлланилади.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ PhD.27.06.2017.FM.02.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD) ПРИ САМАРКАНДСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

САМАРКАНДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

САФАРОВ АКБАР РАХМАНОВИЧ

РАВНОМЕРНЫЕ ОЦЕНКИ ОСЦИЛЛЯТОРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

01.01.01 – Математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD) ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

г.Самарканд – 2017 год

Тема диссертации доктора философии (Doctor of Philosophy) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2017.2.PhD/FM44

Диссертация выполнена в Самаркандском государственном университете.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (www.samdu.uz) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (www.ziyonet.uz).

Научный руководитель:	**Икромов Исроил Акрамович** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Имомкулов Севдиёр Акрамович** доктор физико-математических наук
	Тишабаев Журабой Каримович кандидат физико-математических наук
Ведущая организация:	**Институт Математики**

Защита диссертации состоится «____» _____________2017 года в ____ часов на заседании Научного совета PhD.27.06.2017.FM.02.01 при Самаркандском государственном университете. (Адрес: 140104, г. Самарканд, Университетский бульвар, 15. Тел.: (99866)231-06-32, факс: (99866) 235-19-38, e-mail: patent@samdu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Самаркандского государственном университета (зарегистрирована за №_____). (Адрес: 140104, г. Самарканд, Университетский бульвар, 15. Тел.: (99866)231-06-32, факс: (99866) 235-19-38).

Автореферат диссертации разослан «____» _______________2017 года.
(протокол рассылки №________ от «____» _______________2017 года).

А.С. Солеев
Председатель Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., профессор

А.М. Халхужаев
Ученый секретарь Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н.

С.Н. Лакаев
Председатель научного семинара при Научном совете по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., профессор

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии(PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Многие научно-прикладные исследования, проводимые на мировом уровне, во многих случаях приводятся к задачам, связанными с осцилляторными интегралами, точнее к интегралам от быстро осциллирующих функций. Метод тригонометрических сумм и представление асимптотики этих сумм через тригонометрические интегралы был разработан второй половине XX-ого века и стал толчком в развитии теории тригонометрических интегралов. Другим толчком к изучению осцилляторных интегралов являются их применения в аналитической теории чисел. Однако в изучени поведения такого интеграла имеются два препятствия. Одно из них связано с тригонометрической суммой, а другое - с тригонометрическим интегралом. Изучение асимптотических поведений осцилляторных интегралов и обобщение известных результатов становится одной из важных задач в применении этих интегралов для решения многих проблем гармонического анализа.

В нашей стране в годы независимости большое внимание уделялось и продолжает уделяться направлениям, имеющим фундаментальное и прикладное значения современного математического анализа. В частности, особое внимание было уделено изучению поведения осцилляторных интегралов. Значительные результаты были достигнуты по направлениям на бесконечности преобразования Фурье гладких борелевских мер, сосредоточенных на выпуклых гиперповерхностях Евклидова пространства. Проведение научных исследований по приоритетным направлениям математических наук на уровне международных стандартов по алгебре и математическому анализу, теории динамических систем, прикладной математики и математическому моделированию[1]. Развитие теории равномерных и инвариантных оценок осцилляторных интегралов с полиномиальными фазами играют важную роль в исполнении постановления.

В настоящее время в мире одной из важнейших задач гармонического анализа является задача об ограничении преобразования Фурье суммируемых функций на поверхностях. Следует отметить, что эта задача имеет тесную связь с поведением частного класса осцилляторных интегралов, заданных преобразованием Фурье мер, сосредоточенных на поверхностях. В частности, в настоящее время актуальную роль играют равномерные оценки осцилляторных интегралов с полиномиальной фазой. В этой связи: доказать инвариантность оценки осцилляторных интегралов, когда фаза является суммой однородных полиномов третьей и первой степени двух переменных; найти точный показатель суммируемости осцилляторных интегралов с однородной полиномиальной фазой третьей степени от двух переменных считаются целевыми научными исследованиями.

---

[1] Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан от 18 мая 2017 года №292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений академии Наук Республики Узбекистан»

Эта диссертация, в определенной степени, служит осуществлению задач, обозначенных в Постановлениях Президента Республики Узбекистан №-ПП-916 «О дополнительных мерах по стимулированию внедрения инновационных проектов и технологий в производство» от 15 июля 2008 года, №-ПП-2789 «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности» от 17 февраля 2017 года и №-УП-4947 «О стратегии действий по дальнейшему развитию Республики Узбекистан» от 8 февраля 2017 года а также в других нормативно-правовых актах по данной деятельности.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Осцилляторные (тригонометрические) интегралы появились в работах Френеля и Эйри для изучения интенсивности света. Кельвин и Риман для изучения поведения осцилляторных интегралов применяли метод стационарной фазы. В работах Пуанкаре применялись осцилляторные интегралы в математической теории света. В частности, он доказал, что свет, проходя через каустику, претерпевает фазовой сдвиг. В ряде работ по математической физике, в работах Пирси, Людвиг, Урселла, Коннор применялись осцилляторные интегралы с простыми особенностями.

В работах И.М.Виноградова исследован интеграл (называемый интегралом Виноградова), который совпадает с числом целых решений системы Диофантовых уравнений. Хуа Ло Ген поставил проблему нахождения минимального числа p для которого функция, определяемая тригонометрическим интегралом, принадлежит соответствующему пространству $L^p(R^n)$. Для одномерных тригонометрических интегралов эта задача имеет окончательное решение работе Г.И.Архипова, В.Н.Чубарикова, А.А.Карацубы, а также, они нашли оценку сверху для показателя суммируемости в многомерном случае.

В работах И.А.Икромова, Д.Д.Туракулова получены равномерные оценки осцилляторных интегралов и по направлениям на бесконечности преобразования Фурье гладких зарядов, сосредоточенных на выпуклых гиперповерхностях Евклидова пространства. В работах И.А.Икромова, Г.А.Хасанова получено равномерные оценки для более общего осцилляторного интеграла с аналитической или гладкой фазой, а также для разрывной амплитуды. В работах И.А.Икромова, М.Кемпе ва Д.Мюллера получили подтверждение гипотезы Е.М.Стейна о связи с порядком убывания преобразования Фурье меры и показателем ограниченности соответствующих максимальных операторов для произвольных поверхностей трехмерного пространства.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами высшего учебного заведения, в которой выполняется диссертация. Диссертационная работа выполнена в соответствии с плановой темой научно-исследовательских работ Ф–4–17 «Разработка новых методов для исследования систем нелинейных алгебраических уравнений и осцилляторных интегралов и их приложения» Самаркандского государственного университета (2012-2016 гг.).

Целью исследования является получение равномерных и инвариантных оценок осцилляторных интегралов с однородной полиномиальной фазой третьей степени и нахождение точного показателя суммируемости.

Задачи исследования:

- получить равномерные оценки кратного осцилляторного интеграла с полиномиальной фазой специального вида;
- доказать инвариантность оценки осцилляторных интегралов с однородной полиномиальной фазой третьей степени;
- доказать инвариантность оценки осцилляторных интегралов, когда фаза является суммой однородных полиномов третьей и первой степени двух переменных;
- найти точный показатель суммируемости осцилляторных интегралов с однородной полиномиальной фазой третьей степени двух переменных.

Объект исследования. Осцилляторные интегралы с полиномиальной фазой, преобразование Фурье гладких борелевских мер, сосредоточенных на модельных гиперповерхностях.

Предмет исследования. Поведение осцилляторных интегралов, когда коэффициенты фазовой функции стремятся к бесконечности, оценки осцилляторных интегралов через инварианты классических групп.

Методы исследования. В диссертационной работе используются методы теории особенностей дифференцируемых отображений, теории аналитических функций, асимптотические методы анализа, а также методы коммутативного гармонического анализа.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

Доказаны равномерные оценки кратного осцилляторного интеграла с полиномиальной фазой специального вида.

Получен аналог теоремы В.Н.Чубарикова для случая преобразования Фурье мер, сосредоточенных на некоторых гиперповерхностях.

Доказана инвариантность осцилляторного интеграла с однородной полиномиальной фазой третьей степени двух переменных.

Доказана инвариантность осцилляторного интеграла, когда фаза является суммой однородных полиномов третьей и первой степени двух переменных.

Получены оценки осцилляторного интеграла с однородной полиномиальной фазой третьей степени через инварианты групп движений евклидовой плоскости.

Получены оценки осцилляторного интеграла, когда фаза является суммой однородных полиномов третьей и первой степени через инварианты групп движений евклидовой плоскости.

Найден точный показатель суммируемости осцилляторного интеграла с однородной полиномиальной фазой третьей степени двух переменных.

Практические результаты исследования состоят из определенности точный показатель суммируемости осцилляторного интеграла с однородной полиномиальной фазой третьей степени двух переменных.

Достоверность результатов исследования обоснована строгостью математических рассуждений и доказательств, использованием известных методов теории особенностей дифференцируемых отображений, теории аналитических функций, асимптотическими методами анализа.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научное значение результатов исследования заключается в том, что определено существование инвариантной оценки осцилляторного интеграла с полиномиальной фазой третьей степени.

Практическая значимость диссертации состоит в том, что результаты диссертации, позволяет изучить характер фундаментальных решений гиперболических уравнений.

Внедрение результатов исследования. Полученные в диссертации результаты были использованы в следующих научно-исследовательских проектах:

равномерные оценки осцилляторных интегралов с полиномиальной фазой использованы в исследованиях гранта QJ130000.2726.01K82 для исследования асимптотического разложения определителя Фредгольма, соответствующего дискретному оператору Шрёдингера, и для нахождения местоположения собственных значений этого оператора (Университет технологии Малайзии, справка от 18 сентября 2017 года). Применение этих научных результатов дало возможность показать собственные значения и найти точные границы множества их местоположений;

разработанный метод выявления равномерных оценок осцилляторных интегралов с полиномиальной фазой использован в исследованиях гранта QJ130000.2726.01K82 при приведении функции определяющей определитель Фредгольма, соответствующего дискретного оператора Шрёдингера (Университет технологии Малайзии, справка от 18 сентября 2017 года). Применение этих научных результатов позволили найти главной член асимптотического разложения определителя Фредгольма;

инвариантные оценки осцилляторных интегралов использованы в исследованиях гранта QJ130000.2726.01K82 при выявлении наличия связанных состояний оператора Гамильтона, соответствующего системе двух частиц, а также для указания точных границ множества местоположений энергетических уровней (Университет технологии Малайзии, справка от 18 сентября 2017 года). Применение этих научных результатов позволило найти точные границы множества местоположений энергетических уровней.

Апробация результатов исследования. Результаты данного исследования были обсуждены на 11 научно-практических конференциях, в том числе на 2 международных и 9 республиканских научно - практических конференциях.

Публикация результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 16 научных работ, из них 4 входят в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты докторских диссертаций, в том числе 1 опубликованы в зарубежных журналах и 3 – в республиканских научных изданиях.

Объём и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 98 страницы.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведен обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В первой главе диссертации, названной **«Необходимые сведения и известные результаты об осцилляторных интегралах»**, приведены необходимые предварительные сведения, основные определения, теоремы об осцилляторных интегралах, которые будут использованы при изложении результатов диссертации.

В параграфе 1.1 приведены некоторые определения, понятия простых особенностей, гладких функций. Как известно, поведение осцилляторных интегралов определяются достаточно малыми окрестностями критического множества фазовой функции. Поэтому в дальнейшем изложении результатов диссертационной работы естественно используются понятия и методы теории особенностей гладких отображений.

В параграфе 1.2 приведено понятие меры множества меньших значений функций и доказан аналог оценки Фонг-Стейна. Эти оценки необходимы при изучении поведения двукратных осцилляторных интегралов с однородной полиномиальной фазой третьей степени.

Рассмотрим интеграл

$$J(p,q) := \int_a^b \frac{dx}{\left|x^3 + px + q\right|^{\delta}}, \tag{1}$$

где $0 < \delta < 1$.

Следующая теорема является аналогом теоремы Фонг-Стейна для полинома третьей степени.

Теорема 1. Для интеграла (1) справедливы следующие утверждения:

2) если $\frac{1}{3} < \delta < \frac{1}{2}$, то

$$|J(p,q)| \le \frac{c_\delta}{\left(\frac{|p|^3}{27} + \frac{q^2}{4}\right)^{\frac{3\delta-1}{6}}},$$

2) если $\frac{1}{2} < \delta < 1$, то справедливо неравенство:

$$|J(p,q)| \le \frac{c_\delta}{|D|^{\delta-\frac{1}{2}}\left(\frac{|p|^3}{27} + \frac{q^2}{4}\right)^{\frac{2-3\delta}{6}}},$$

где $D = \frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}$ – дискриминант полинома $x^3 + px + q$ и c_δ – некоторое положительное число, зависящее лишь от δ.

Параграф 1.3 посвящен изучению формы Гельфанда-Лере и «дельта» функции на поверхности, которые будут использованы при изложении результатов.

В параграфе 1.4 приведены необходимые сведения из классической теории инвариантов.

Приведем следующее определение.

Определение 1. Осцилляторным (тригонометрическим) интегралом с фазой f и амплитудой φ называется интеграл вида

$$J(\lambda, f, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda f(x)} \varphi(x) dx,$$

где $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ – гладкие функции, причем φ имеет компактный носитель, λ – вещественный параметр.

Вторая глава диссертации, названная **«Оценки некоторых кратных осцилляторных интегралов с полиномиальной фазой»,** посвящена исследованию некоторых кратных осцилляторных интегралов с полиномиальной фазой, а также проблеме об ограничении Фурье на некоторых гиперповерхностях.

В параграфе 2.1 рассматриваются осцилляторные интегралы с полиномиальной фазой специального вида, но с гладкой амплитудой, имеющей компактный носитель. Отметим, что в работе В.Н.Чубарикова рассматриваются тригонометрические интегралы со специальной амплитудной функцией $\varphi(x) = \chi_{[0,1]^r}(x)$.

Пусть $r \ge 2$ и фазовая функция имеет вид

$$\Phi(x_1, x_2, ..., x_r) = s_{12..r} x_1 ... x_r + \sum_{\substack{1 \le t_l \le r, 1 \le l \le j, \\ 1 \le j \le r-1 \\ t_i \ne t_k, i \ne k}} s_{t_1 t_2 .. t_j} x_{t_1} x_{t_2} ... x_{t_j}. \tag{2}$$

Из работы В.Н.Чубарикова известно следующее

Утверждение 1. Для интеграла

$$J = \int_Q \exp(i\lambda\Phi(x_1, x_2, ..., x_r))\, dx_1 dx_2 ... dx_r$$

с фазовой функцией (2) справедлива следующая оценка:

$$|J| << \frac{(\ln(\lambda|s|))^{r-1}}{\lambda|s|}, \tag{3}$$

где Q – единичный куб в R^r и $|s| = |s_{12..r}| + \sum_{\substack{1\le t_l \le r, 1\le l\le j,\\ 1\le j\le r-1\\ t_i\ne t_k, i\ne k}} |s_{t_1t_2..t_j}|$. Здесь и далее оценка вида (3) означает справедливость неравенства $|J| \le \frac{C(\ln(\lambda|s|))^{r-1}}{\lambda|s|}$, с константой C, зависящей лишь от r.

Покажем, что в этом случае оценки В.Н.Чубарикова могут быть обобщены. Это обстоятельство связано с тем, что особенности фазовой функции и амплитуды не сгущаются. Кроме того, мы рассмотрим аналог этой теоремы для оценки преобразования Фурье мер, сосредоточенных на некоторых гиперповерхностях. Наша оценка уточняет оценку В.Н.Чубарикова для осцилляторных интегралов с гладкой амплитудой.

Справедлива следующая

Теорема 2. Существует окрестность нуля $U \subset R^r$ такая, что при любой амплитудной функции $\varphi \in C_0^\infty(U)$ для интеграла

$$J = \int_{R^r} ... \int \varphi(x_1, x_2, ..., x_r)\exp(i\lambda\Phi(x_1, x_2, ..., x_r))\, dx_1dx_2...dx_r \tag{4}$$

с фазовой функцией (2) справедлива следующая оценка:

$$|J| << \frac{\|\varphi\|_{C^2}(\ln(\lambda|s|))^{r-2}}{\lambda|s|},$$

где $|s| = |s_{12..r}| + \sum_{\substack{1\le t_l \le r, 1\le l\le j,\\ 1\le j\le r-1\\ t_i\ne t_k, i\ne k}} |s_{t_1t_2..t_j}|$, $\|\varphi\|_{C^2} = \max_{\substack{|\alpha|\le 2\\ x\in U}} |D^\alpha \varphi(x)|$.

Следствие 1. Если фазовая функция имеет вид

$$\Phi(x_1, x_2, ..., x_r, s) = x_1x_2...x_r + \sum_{\substack{1\le t_l \le r, 1\le l\le j,\\ 1\le j\le r-1\\ t_i\ne t_k, i\ne k}} s_{t_1t_2..t_j} x_{t_1}x_{t_2}...x_{t_j},,$$

то для любых значений s и $|\lambda| > 2$ справедлива оценка

$$|J| << \frac{(\ln|\lambda|)^{r-2}}{|\lambda|},$$

где $s := \{s_{t_1t_2..t_j}\}$ и $1 \le t_j \le r, 1 \le j \le r.$

В параграфе 2.2 рассматриваются оценки преобразования Фурье мер, сосредоточенных на модельных гиперповерхностях и доказаны следующие теоремы.

Теорема 3. Пусть фазовая функция имеет вид

$$\Phi(x_1, x_2, ..., x_r, s) = s_{12..r}x_1...x_r b(x_1, ..., x_r) + s_1x_1 + s_2x_2 + ... + s_rx_r,$$

где $b(x_1, ..., x_r)$ - гладкая функция, удовлетворяющая условию $b(0, ..., 0) \ne 0$. Тогда существует окрестность нуля $U \subset R^r$ такая, что, при любой амплитудной функции $\varphi \in C_0^\infty(U)$, для интеграла (4) справедлива следующая оценка

$$|J| << \frac{\|\varphi\|_{C^2}\left(\ln|\lambda s|\right)^{r-2}}{|\lambda s|},$$

где $|s| = |s_{12\ldots r}| + \sum_{i=1}^{r} |s_i|$.

Следующая теорема является обобщением теоремы 2.

Теорема 4. Пусть фазовая функция имеет вид

$$\Phi(x_1, x_2, ..., x_r, s) = x_1 ... x_l b(x_1, ..., x_r) + s_1 x_1 + s_2 x_2 + ... + s_r x_r$$

где $b(x_1, ..., x_r)$−гладкая функция, удовлетворяющая условию $b(0, ..., 0) \neq 0$. Тогда существует окрестность нуля $U \subset R^r$ такая, что при любой амплитудной функции $\varphi \in C_0^\infty(U)$ для интеграла (4) справедлива следующая оценка

$$|J| << \frac{\|\varphi\|_{C^2}\left(\ln\left(|\lambda|\left(1+\sum_{i=1}^{r}|s_i|\right)\right)\right)^{l-2}}{|\lambda|\left(1+\sum_{i=1}^{r}|s_i|\right)},$$

где $l \leq r$.

Пусть $S \subset R^{r+1}$ – гиперповерхность, заданная в виде графика функции

$$\Phi_1(x_1, x_2, ..., x_l) = x_1 ... x_l b(x_1, ..., x_r),$$

где $b(x_1, x_2 ..., x_r)$- некоторая гладкая функция, удовлетворяющая условию $b(0,0...,0) = 1$ и $\mu = \varphi(x) dS$ – поверхностная мера. Рассмотрим преобразование Фурье $\hat{\mu}(\xi)$ меры μ.

Следствие 2. Существует окрестность нуля U такая, что для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(U)$ справедлива следующая оценка:

$$|\hat{\mu}(\xi)| << \frac{\|\varphi\|_{C^2}\left(\ln|\xi| + 2\right)^{l-2}}{|\xi| + 2},$$

где $\xi \in R^{r+1}$.

Параграф 2.3 посвящен проблеме об ограничении преобразования Фурье на модельных гиперповерхностях. Отметим, что равномерные оценки, полученные в предыдущих теоремах, дают лишь строгую оценку для показателя суммируемости функций. Покажем, что применение разложения Литлевуда-Пэли позволяет получить точную оценку для показателя суммируемости.

Справедлива следующая

Теорема 5. Пусть S гиперповерхность, определенная графиком функции $\xi_{n+1} = \xi_1^{m_1} ... \xi_l^{m_l}$, ($m_j \geq 1,\ j = \overline{1,l}$) в окрестности нуля. Тогда при $p' \geq 2\left(1 + \max_{1 \leq j \leq l}\{m_j\}\right)$ справедлива оценка:

$$\left(\int_S \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 \psi(\xi) dS(\xi)\right)^{\frac{1}{2}} \leq C\|f\|_{L^p(R^{n+1})},$$

где p' – сопряженное к p число, т.е. $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$

В третьей главе диссертации, названной **«Об инвариантных оценках двукратных осцилляторных интегралов с полиномиальной фазой третьей степени и задача суммируемости»**, доказана инвариантность оценки осцилляторного интеграла с однородной фазой, а также с фазой, которая является суммой однородного полинома третьей степени от двух переменных и линейного полинома этих переменных. Кроме того, получен точный показатель суммируемости осцилляторного интеграла с однородной полиномиальной фазой третьей степени от двух переменных.

В параграфах 3.1 и 3.2 рассматриваются осцилляторные интегралы с полиномиальной фазой третьей степени от двух переменных. Получены инвариантные оценки этих интегралов, которые улучшают результаты предыдущих работ.

Определение 2. Кубической бинарной формой назовем следующую форму:

$$P_3(x_1,x_2,a) = a_0 x_1^3 + 3a_1 x_1^2 x_2 + 3a_2 x_1 x_2^2 + a_3 x_2^3. \qquad (5)$$

Определение 3. Дискриминантом кубической бинарной формы (5) называется следующий многочлен:

$$D(P_3) := 3a_1^2 a_2^2 + 6a_0 a_1 a_2 a_3 - 4a_0 a_2^3 - 4a_1^3 a_3 - a_0^2 a_3^2. \qquad (6)$$

Замечание 1. Дискриминант D кубической бинарной формы (5) есть её относительный инвариант группы GL(2, C) веса 6.

Рассмотрим осцилляторный интеграл вида

$$J(\mathrm{P},\varphi) = \int_{\mathrm{R}^2} e^{i\mathrm{P}_3(x_1,x_2,a)} \varphi(x_1,x_2)\,dx_1 dx_2, \qquad (7)$$

где $\varphi \in C_0^1(R)$.

Теорема 6. Для интеграла (7) с фазовой функцией (5) справедлива следующая оценка:

$$|J| \le \frac{c\|\varphi\|_{C^1}}{|D(P_3)|^{\frac{1}{6}}}, \qquad (8)$$

где $D(P_3)$ - дискриминант полинома P_3 и $c-$константа зависящая от носителя амплитуды.

Обозначим через $W_1^n(\mathrm{R}^n)$ пространство Соболева с нормой

$$\|\varphi\|_{W_1^n(\mathrm{R}^n)} = \int_{\mathrm{R}^n} \left(\sum_{|\alpha|\le n} |D^\alpha \varphi| \right) dx, \qquad (9)$$

где $D^\alpha\varphi-$ производная от φ в смысле распределения. Также пространство $W_1^n(\mathrm{R}^n)$ может быть определено как пополнение класса Шварца по норме $W_1^n(\mathrm{R}^n)$.

Замечание 2. В работе И.А.Икромова [*Мат.сбор.* **180**(1989), №8] доказана справедливость следующей оценки:

$$|J| \le \frac{C\|\varphi\|_{W_1^2(\mathrm{R}^2)}}{N^{\frac{1}{6}} + |H|^{\frac{1}{4}} + \frac{|D(P_3)|^{\frac{2}{3}}}{N}}, \qquad (10)$$

где $N = a_0^2 + 3a_1^2 + 3a_2^2 + a_3^2,\ H = a_1^2 + a_2^2 - a_0 a_2 - a_1 a_3$.

Используя оценку (8), с учетом (10) получим:

Теорема 7. Для интеграла (7) имеет место неравенство:

$$|J| \le \frac{c\|\varphi\|_{C^2}}{N^{\frac{1}{6}} + |H|^{\frac{1}{4}} + |D(P_3)|^{\frac{1}{6}}},$$

где $c-$ некоторая константа.

Замечание 3. Если $a_j = \lambda a_j^{'}$, $j = 0,1,2,3,$ то $D(P_3(a)) = \lambda^4 D(P_3(a^{'}),$ $H(a) = \lambda^2 H(a^{'})$, $N(a) = \lambda^2 N(a^{'})$.

1. При этом если $D(a^{'}) \neq 0$, и $a^{'}$ фиксированный параметр, то фаза имеет особенность типа $D_4^{\pm}$. В этом случае известно следующее асимптотическое соотношение:

$$J = \frac{c\varphi(0,0)}{\lambda^{\frac{2}{3}}} + O(\lambda^{-1}), \ (при \ \lambda \to \infty)$$

где $c-$ненулевой коэффициент. Последнее асимптотическое соотношение показывает оптимальность полученной оценки в случае $|D(P_3)|^{\frac{1}{6}} > C|H|^{\frac{1}{4}}$, где $C-$достаточно большое положительное число.

2. Если $D(P_3(a^{'}) = 0$ и $H(a^{'}) \neq 0$, то фазовая функция имеет особенность типа D_∞, это так называемая особенность типа Сирсма. В этом случае мы имеем следующее асимптотическое соотношение

$$J = \frac{c(\varphi)}{\lambda^{\frac{1}{2}}} + O(\lambda^{-1}), \ (при \ \lambda \to \infty)$$

причем $c-$ненулевой коэффициент, при условии, что $\varphi-$неотрицательная функция и $\varphi(0,0) > 0$. Следовательно, если $D(P_3) = 0$ и $|H|^{\frac{1}{2}} > CN^{\frac{1}{3}}$, где C также достаточно большое положительное число, то оценка также не улучшаема.

3. Если же $D(P_3(a^{'}) = 0$ и $H(a^{'}) = 0$, то легко показать, что фаза линейно эквивалентна x_1^3, а эту особенность назовем особенностью типа $A_{2\infty}$ и, следовательно имеем:

$$J = \frac{c(\varphi)}{\lambda^{\frac{1}{3}}} + O(\lambda^{-\frac{2}{3}}), \ (при \ \lambda \to \infty).$$

При этом $c(\varphi) \neq 0$, если φ неотрицательна и $\varphi(0,0) \neq 0$.

Отметим, что во всех трех случаях D_4, D_∞ и $A_{2\infty}$ следующая оценка

$$|J| \le \frac{c\|\varphi\|_{C^1}}{N^{\frac{1}{6}} + |D_{x_1}(P_3)|^{\frac{1}{4}} + |D_{x_2}(P_3)|^{\frac{1}{4}} + |D(P_3)|^{\frac{1}{6}}},$$

соответствует главному члену асимптотического разложения как только $\varphi(0,0) \neq 0$ и φ −неотрицательная функция, где $D_{x_1}(P_3) = a_2^2 - a_1 a_3$ и $D_{x_2}(P_3) = a_1^2 - a_0 a_2$ соответственно дискриминанты полиномов $\frac{\partial P_3}{\partial x_1}$ и $\frac{\partial P_3}{\partial x_2}$.

Пусть полином P имеет вид:

$$\mathsf{P}(x,a,c) = P_3(x_1,x_2,a) + P_1(x_1,x_2,c),$$

где $P_1(x_1, x_2, c) = c_0 x_1 + c_1 x_2$.

Рассмотрим следующий интеграл

$$J = \int_{\mathsf{R}^2} \varphi(x_1, x_2) e^{i\mathsf{P}(x,a,c)} dx_1 dx_2, \tag{11}$$

где $\varphi \in W_1^2(\mathsf{R}^2)$. Несомненно, последний интеграл сходится в смысле Лебега.

Теорема 8. Пусть $\varphi \in W_1^2(\mathsf{R}^2)$. Тогда существует положительное число C такое, что справедлива следующая оценка:

$$| J | \leq \frac{C \|\varphi\|_{W_1^2(\mathsf{R}^2)}}{| D(P_3) |^{\frac{1}{6}}}. \tag{12}$$

Теорема 8 показывает, что линейное возмущение не ухудшает поведения осцилляторного интеграла. Из теоремы 8 и замечания 2 получим следующий результат:

Теорема 9. Для интеграла (11) справедлива следующая оценка:

$$| J | \leq \frac{C \|\varphi\|_{W_1^2(\mathsf{R}^2)}}{| D(P_3) |^{\frac{1}{6}} + | H |^{\frac{1}{4}} + N^{\frac{1}{6}}}.$$

Теперь рассмотрим интеграл

$$J_T(\lambda, s) = \int_T e^{i\lambda(\xi^3 \pm \xi\eta^2 + s_1\xi + s_2\eta)} d\xi d\eta, \tag{13}$$

где T – произвольный треугольник и $s := (s_1, s_2)$.

Теорема 10. Существует константа C такая, что для любого $(s_1, s_2) \in \mathsf{R}^2$, $\lambda \neq 0$ и для любого треугольника T справедлива следующая оценка

$$| J_T(\lambda, s) | \leq \frac{C}{\lambda^{\frac{2}{3}}}.$$

Теорема 10 является аналогом более общей теоремы от Дж.Дюйстермата, соответствующая случаю, когда $T = \mathsf{R}^2$.

В параграфе 3.3 рассматривается задача суммируемости для двукратных тригонометрических интегралов. Наш метод получения границы для показателя суммируемости основывается на инвариантных оценках тригонометрических интегралов.

Рассмотрим осцилляторный интеграл с фазовой функцией (5), т.е.

$$J(a) = \int_{R^2} e^{iP_3(x_1, x_2, a)} \varphi(x, x_2) dx_1 dx_2, \tag{14}$$

где $P_3 : R^2 \times R^4 \to R$, $\varphi \in C_0^\infty(R^2)$, $a = (a_0, a_1, a_2, a_3)$.

Теорема 11. Если J – тригонометрический интеграл (14), с фазой (5) и $\varphi \in C_0^1(R^2)$, то для любого $p > 7$, справедливо включение $J \in L^p(R^4)$. Более того, если $\varphi(0,0) \neq 0$ и бесконечно гладкая функция φ сосредоточена в достаточно малой окрестности нуля, то $J \notin L^p(R^4)$, при $p \leq 7$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данная диссертация посвящена исследованию инвариантных равномерных оценок осцилляторных интегралов и инвариантности оценки осцилляторного интеграла с полиномиальной фазой, суммируемости осцилляторного интеграла с фазой, которая является однородным полиномом третьей степени двух переменных.

Основные результаты исследования состоят в следующем:

1. Равномерные оценки осцилляторных интегралов с модельной полиномиальной фазой могут быть выражены через норму пространства коэффициентов. Эти оценки улучшены в случае, когда множества особенностей фазы и амплитудной функции не пересекаются.

2. Доказана справедливость теоремы о равномерных оценках преобразования Фурье мер, сосредоточенных на некоторых гиперповерхностях и показана независимость направлений в пространстве импульсов.

3. Доказана инвариантность осцилляторного интеграла с однородной полиномиальной фазой третьей степени от двух переменных. Показана невозможность выражения оптимальных оценок этих осцилляторных интегралов через инварианты аффинных преобразований плоскости.

4. Показана инвариантность осцилляторного интеграла с фазой, которая является суммой однородного полинома третьей степени и линейного полинома двух переменных.

5. Получены оценки интегралов, фаза которых является однородным полиномом третьей степени через инварианты классических групп движений евклидовой плоскости.

6. Получены равномерные оценки интегралов, фаза которых является суммой однородного полинома третьей степени и линейного полинома через инварианты классических групп движений евклидовой плоскости. Обосновано, что эта оценка соответствует главному члену асимптотического разложения, когда коэффициенты стремятся к бесконечности вдоль фиксированного направления.

7. Найден точный показатель суммируемости осцилляторного интеграла с однородной полиномиальной фазой третьей степени от двух переменных.

Полученные результаты могут быть использованы в аналитической теории чисел, в теории асимптотического анализа и ее приложениях.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) PhD.27.06.2017.FM.02.01 SAMARKAND STATE UNIVERSITY

SAMARKAND STATE UNIVERSITY

SAFAROV AKBAR RAXMANOVICH

UNIFORM ESTIMATES FOR OSCILLATORY INTEGRALS AND THEIR APPLICATIONS

01.01.01-Mathematical analysis

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Samarkand -2017

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2017.2.PhD/FM44 .

Dissertation has been prepared at Samarkand State University.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (uzbek, russian, english (resume)) on the website (www.samdu.uz) and the “Ziyonet” Information and educational portal (www.ziyonet.uz).

Scientific supervisor:	**Ikromov Isroil Akramovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Official opponents:	**Imomkulov Sevdiyor Akramovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences
	Tishabayev Juraboy Karimovich Candidate of Physical and Mathematical Sciences
Leading organization:	**Institute of Mathematics**

Defense will take place «____» _____________2017 at _____ at the meeting of Scientific Council number PhD.27.06.2017.FM.02.01 at Samarkand State University. (Address: University Boulevard 15, Samarkand, 140104, Uzbekistan, Ph.: (+99866) 231-06-32, fax: (+99866) 235-19-38, e-mail: patent@samdu.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at Samarkand State University (is registered №____) (Address: University Boulevard 15, Samarkand, 140104, Uzbekistan, Ph.: (+99866) 231-06-32).

Abstract of dissertation sent out on «____» _______________2017 year
(Mailing report № ___________on «____» _______________2017 year)

A.S. Soleev
Chairman of scientific council
on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., professor

A.M. Xalxujayev
Scientific secretary of scientific council
on award of scientific degrees, D.F.-M.S.

S.N. Lakaev
Chairman of scientific Seminar under Scientific
Council on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., professor

INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

The aim of the research work is study uniform and invariant estimates for oscillatory integrals and find the sharp convergence exponent of summation.

The object of the research work is oscillatory integrals with polynomial phase. Fourier transform smooth Borel's measure concentrated on the smooth hypersurfaces.

Scientific novelty of the research work is as follows:

It is proved uniform estimates for multiple oscillatory integrals with polynomial phase special type;

It is obtained analogical theorem for the Fourier transform of measure concentrated on some hypersurfaces.

It is proved invariant estimates for oscillatory integrals with homogeneous polynomial phase third order on two variables;

It is proved invariant estimates for oscillatory integrals when phase is the sum of homogeneous third order and linear polynomials on two variables;

It is obtained estimates for oscillatory integrals with phase, which is homogeneous third order through invariants of classical group motion of Euclidian plane;

It is obtained estimates for oscillatory integrals with phase, which is the sum of homogeneous third order and linear polynomials through invariants of classical group of motion of Euclidian plane;

It is shown sharpness of the estimates for oscillatory integrals with polynomial phase;

It is found explicit value of summation exponent for oscillatory integrals with homogeneous polynomial phase third order on two variables.

Implementation of the research results. The results obtained during the dissertation research are practiced in the following areas:

the uniform estimates for the oscillatory integrals with a polynomial phase have been used in studying the location of eigenvalues of the discrete Schrodinger operator and their other properties, the expansion of Fredholm determinant associated to the discrete Schrodinger operator in the grant QJ130000.2726.01K82 (University Technology Malaysia, certificate dated September 18, 2017). The application of the result allows to prove the existence of eigenvalues and to find the bounds for sets they belong;

our method for uniformly estimating the oscillatory integrals with a polynomial phase has been used in finding the normal form of the function defining the Fredholm determinant associated to the discrete Schrodinger operator in grant QJ130000.2726.01K82 (University Technology Malaysia, certificate dated September 18, 2017). The application of the result allows to find the leading term of the expansion of the Fredholm determinant;

the invariant estimates for the oscillatory integrals have been used in proving the existence of bound states and bounds for corresponding energies of eigenvalues of two-particle Hamiltonian QJ130000.2726.01K82 (University Technology

Malaysia, certificate dated September 18, 2017). The application of the result allows to find the exact bounds for the energies of bound states.

The structure and volume of the thesis. The thesis consists of an introduction, three chapters, conclusion and bibliography. The volume of the thesis is 98 pages.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (1 часть; part 1)

1. Сафаров А. Оценки некоторых кратных осцилляторных интегралов с полиномиальной фазой. // Узбекский математический журнал.− Ташкент, 2012. - №2. – С. 106-116. (01.00.00; №6).

2. Икромов И.А., Сафаров А.Р. Об инвариантных оценках осцилляторных интегралов с полиномиальной фазой. // ДАНРУз., − 2013. - №2. - С.11-15. (01.00.00; №7).

3. Сафаров А.Р. О суммируемости двукратных осцилляторных интегралов с полиномиальной фазой третьей степени. // Узбекский математический журнал. − Ташкент, 2015. - №4.− С. 108-117. (01.00.00; №6).

4. Safarov A. On Invariant estimates for oscillatory integrals with polynomial phase. // Journal of Siberian Federal University, Mathematics Physics, 2016, 9(1),- p. 90-101. (01.00.00; №49).

II бўлим (2 часть; part 2)

5. Сафаров А.Р. Фазаси махсусликка эга бўлган тригонометрик интегралларнинг текис баҳолари. // «Замонавий математиканинг долзарб муаммолари». Тез. докл. Рес. науч. конф. – Қарши, 2011. – 30-33б.

6. Safarov A. Estimates for oscillatory integrals with some model phases. // International training-seminars on mathematics in conjunction with the joint mathematics meeting, 2011 between Samarkand State University and Malaysian Mathematical Sciences Society, 2011.− P.197-199.

7. Икромов И.А., Сафаров А.Р. Об инвариантных оценках двукратных осцилляторных интегралов с полиномиальной фазой третьей степени. // «Актуальные проблемы математического анализа». Тез. докл. Рес. науч. конф. – Ургенч, 2012. − С.77-78.

8. Ikromov I.A., Safarov A.R. About summability of double oscillatory integrals. // International training-seminars on mathematics in conjunction with the joint mathematics meeting, 2013 between Samarkand State University and Malaysian Mathematical Sciences Society, 2013.− P.112-113.

9. Икромов И.А., Сафаров А.Р. О суммируемости двукратных осцилляторных интегралов с полиномиальной фазой третьей степени. // «Проблемы современной топологии и ее приложения». Тез. докл. Рес. науч. конф. – Ташкент, 2013.− С.159-160.

10. Икромов И.А., Сафаров А.Р. Об инвариантных оценках двукратных осцилляторных интегралов с полиномиальной фазой третьей степени. // Вестник Башкирского университета. - Уфа, 2014, 19(3). - С. 774-779.

11. Сафаров А.Р. Об ограниченности двукратных тригонометрических интегралов. // «Современные методы математической физики и их приложения». Тез. докл. Рес. науч. конф. – Ташкент, 2015. − С.62-63.

12. Safarov A. Summation of oscillatory integrals with polynomial phase. // “XXI аср –интеллектуал авлод асри” шиори остидаги Самарканд ҳудудий илмий-амалий конференцияси. − Самарқанд, 2015.− 56-57б.

13. Ikromov I.A., Safarov A.R. Oscillatory integrals with discontinuous amplitude. // “Проблемы современной топологии и её приложения”. Тез. докл. Рес. науч. конф. – Ташкент, 2016. − С.56-57.

14. Safarov A.R. Invariant estimates for trigonometric integrals with polynomial phase. // “International conference on Nonlinear analysis and its applications”. − Samarkand, 2016. − P.16-18.

15. Safarov A.R. Invariant estimates for trigonometric integrals with polynomial phase. // «XXI век-век интеллектуального поколения» Тез. докл. Рес. науч. конф. – Ташкент, 2017.− С.293-296.

16. Сафаров А.Р. Оценки некоторых кратных осцилляторных интегралов с полиномиальной фазой. // «Проблемы современной топологии и ее приложения». Тез. докл. Рес. науч. конф. – Ташкент, 2017. − С.262-263.

Авторефератнинг ўзбек, рус ва инглиз тилларидаги нусхалари «Ўзбекистон математика журнали» таҳририятида таҳрирдан ўтказилди.

Босишга рухсат этилди: 02.11.2017 йил
Бичими 60x44 $^{1}/_{16}$, «Times New Roman»
гарнитурада рақамли босма усулида босилди.
Шартли босма табоғи 2,4. Адади: 100. Буюртма: № 319.

Ўзбекистон Республикаси ИИВ Академияси,
100197, Тошкент, Интизор кўчаси, 68

«АКАДЕМИЯ НОШИРЛИК МАРКАЗИ»
Давлат унитар корхонасида чоп этилди.