



ILMIY AXBOROTNOMA

НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК

SCIENTIFIC JOURNAL

2020-yil, 5-son (123)

ANIQ FANLAR SERIYASI

Matematika, Mexanika, Informatika, Fizika

Samarqand viloyat matbuot boshqarmasida ro'yxatdan o'tish tartibi 09-25.
Jurnal 1999-yildan chop qilina boshlagan va OAK ro'yxatiga kiritilgan.

BOSH MUHARRIR
BOSH MUHARRIR O'RINBOSARLARI:

R. I. XALMURADOV, t.f.d. professor
H.A. XUSHVAQTOV, f.-m.f.n., dotsent
A. M. NASIMOV, t.f.d., professor

TAHRIRIYAT KENGASHI:

M. X. ASHUROV	- O'zFA akademigi
T.M.MO'MINOV	- O'zFA akademigi
SH. A. ALIMOV	- O'zFA akademigi
S. N. LAKAYEV	- O'zFA akademigi
T. RASHIDOV	- O'zFA akademigi
M.M.MIRSAIDOV	- O'zFA akademigi
A. S. SOLEEV	- f.-m.f.d., professor
I. A. IKROMOV	- f.-m.f.d., professor
B. X. XO'JAYAROV	- f.-m.f.d., professor
I. I. JUMANOV	- f.-m.f.d., professor
X. X. XUDOYNazarov	- t.f.d., professor
N. N. NIZAMOV	- f.-m.f.d., professor
L.SABIROV	- f.-m.f.d., professor
A.G.YAGOLA	- f.-m.f.d., professor (Moskva davlat universiteti, Rossiya)
MASLINA DARUS	- Malayziya milliy universiteti professori, Malayziya
ALBERTO DEL BIMBO	- Florensiya universiteti professori, Italiya

Obuna indeksi – yakka tartbidagi obunachilar uchun - 5583,
tashkilot, korxonalar uchun - 5584

MUNDARIJA/СОДЕРЖАНИЕ/CONTENTS

МАТЕМАТИКА / МАТЕМАТИКА / MATHEMATICS

Lakaev S.N., Khamidov Sh.I. Threshold effects in the spectrum of the one-particle schrödinger operator on a lattice	4
Akratova D.I. Arnol'dning E_6 tipidagi maxsusligi bilan bog'langan tebranuvchan integrallar haqida	15
Кабулов А.В., Урунбаев Э., Бердимуродов М.А. Логический метод нахождения максимальных совместных подсистем систем булевых уравнений	27
Mamatov A.U. Modeling the effect of the two-fold non-linear heat dissipation equation on biological population with ambient density	37
Azimov A.A. A method for finding a unimodular matrix of a power transformation using continued fractions in three-dimensional space	40
Махмудов О.И., Нуъзов И.Э. Критерий разрешимости задачи Коши для системы уравнений термоупругости	46
Kuliev K., Kuliyeva G., Maxmadiyorova M. Muavr-Laplasning lokal va integral limit teoremlari	52
Мирзаев О.Э. Изоспектральные операторы Штурма-Лиувилля на конечном отрезке	60
Usmanov S.E. On properties of some singular surfaces	64
Артикбаев А., Исмоилов Ш. Сечение сферы с плоскостью в изотропном пространстве \mathbf{R}_3^2	70
Кулжанов У.Н., Исмоилов Г.И. Спектральные свойства одночастичного оператора Шредингера на решетке	74

МЕХАНИКА / МЕХАНИКА / MECHANICS

Хужайёров Б.Х., Усмонов А.И., Қайтаров З. Численное решение задачи переноса вещества в двумерной неоднородной пористой среде	79
Гайбулов Ю., Джаббаров М.С. Моделирование давления на плунжер при эксплуатации скважин, добывающих неньютоновские нефти	91
Суванкулов И.Ш., Муллажонова Н.Ж. Об одном способе формирования двухпоясных решетчатых структур	96

ИНФОРМАТИКА / ИНФОРМАТИКА / INFORMATICS

Turaqulov Sh. X. CNN (Convolutional Neural Network) orqali tasvir kasallik diagnostikasini amalga oshirish	102
Iskandarova S. N., Muxamadjonov X. Z. Tanib olish masalalari uchun qator segmentatsiya masalasi	107
Sotvoldiev D. M. Ko'z tubi qon tomiri tasviri asosida kasalliklarni tashxislash	111

FIZIKA / ФИЗИКА / PHYSICS

<i>Сафаров А.Н., Мухамедов А.К., Шаронов И.А., Азимов А.Н., Сафаров А.А., Салимов М.И., Ражаббоев Б.И.</i>	119
О радиационном экспресс-анализе строительных материалов	
<i>Шарифов Г.</i>	128
Межмолекулярные взаимодействия молекул пиррола и его растворах. неэмпирические (ab initio) расчеты	
<i>Hushvaktov H.</i>	133
Raman scattering spectra of α -alanine molecular complexes	
<i>Tuxtayev U.U., Nurmurodov L.N., Umirzakov E.A., Tog'ayev B.S., Fayzullayeva M.L.</i>	138
Buloq suvlarida Radon-222 miqdorini ssintillyatsion gamma-spektrometriya usuli yordamida aniqlash	
<i>Xudoyberdiyeva M.K., Jo'rayeva N.B.</i>	141
Tarkibida kompakt obyektlar bo'lgan tor qo'shaloq sistemalarning elektromagnit nurlanishi	
<i>Бункин Н.Ф., Сабиров Л.М., Козлов В.А., Жураев Й.Т.</i>	147
Реологический эффект при набухании полимерных мембран в водных растворах с различным дитиреческим содержанием	
<i>Egamberdiyev Sh., Axunov T., Jurayev B., Turniyazov R.</i>	152
SBS1520+530 va SDSS2124+1632 gravitatsion linzalangan sistemalarning fotometrik tahlili	

Mualliflarga

UDK: 517.984

THRESHOLD EFFECTS IN THE SPECTRUM OF THE ONE-PARTICLE SCHRÖDINGER OPERATOR ON A LATTICE

S. N. Lakaev, Sh. I. Khamidov
 Samarkand State University
 slakaev@mail.ru, shoh.hamidov1990@mail.ru

Abstract. We consider a wide class of Schrödinger operators $H_V = H_0 + V$ describing a particle in an external force field \hat{v} in the d -dimensional cubic integer lattice \mathbb{Z}^d , $d \geq 3$. We study the existence or absence of bound states of the one-particle Schrödinger operator H_V depending on the potential \hat{v} and the dimension of the lattice \mathbb{Z}^d , $d \geq 3$, as well as threshold effects in its spectrum. We establish that the appearance of bound states of the operator H_V depends on whether the threshold of the essential spectrum of H_V is a regular point or a singular point: namely, if the lower threshold of the essential spectrum of H_V is a regular point of the essential spectrum, then it does not create any eigenvalues below the essential spectrum under small perturbations, but if the lower threshold of the essential spectrum of the operator H_V is a singular point, then it creates eigenvalues below the essential spectrum under perturbations.

Keywords: discrete Schrödinger operator, quantum mechanics, Hamiltonian, dispersion relation, virtual level, eigenvalue, lattice.

Пороговые эффекты в спектре одночастичного оператора Шредингера на целочисленной решетке

Аннотация. Мы рассматриваем широкий класс операторов Шредингера $H_V = H_0 + V$, описывающих частицу, во внешнем силовом поле \hat{v} , на d -мерной целочисленной кубической решетке \mathbb{Z}^d , $d \geq 3$. Мы изучим пороговые эффекты в спектре одночастичного оператора Шредингера на H_V , а также существования или отсутствия его связанных состояний в зависимости от потенциала \hat{v} и от размерности решетки \mathbb{Z}^d , $d \geq 3$. Мы установили, что появление связанных состояний оператора H_V зависит от того, является ли порог его существенного спектра H_V регулярной точкой или сингулярной точкой: а именно, если нижний порог существенного спектра H_V есть регулярная точка его существенного спектра, то при малых возмущениях число собственных значений ниже существенного спектра не меняется, если же нижний порог существенного спектра оператора H_V является сингулярной точкой, то при определенных малых возмущениях оператор H_V имеет собственные значения ниже существенного спектра.

Ключевые слова. дискретный оператор Шредингера, квантовая механика, гамильтониан, дисперсионное соотношение, виртуальный уровень, собственное значение, решетка.

Panjaradagi bir zarrachali Shrödinger operatori spektridagi bo'sag'a effektlari

Annotatsiya. Biz d -o'lchovli \mathbb{Z}^d , $d \geq 3$, butun kubik panjarada \hat{v} tashqi maydonidagi zarrachani tavsiflovchi $H_V = H_0 + V$ Shrödinger operatorlarining keng sinfini ko'rib chiqamiz. Biz bir zarrachali H_V Shrödinger operatorining bog'langan holatlarini mavjudligi yoki yo'qligini \hat{v} potentsialga va \mathbb{Z}^d , $d \geq 3$ panjaraning o'lchamiga bog'liq holda o'rganamiz. H_V operatorning bog'langan holatlarining paydo bo'lishi uning muhim spektrining bo'sag'asi *regulyar nuqta* yoki *singulyar nuqta* bo'lishiga bog'liqligini aniqladik: ya'ni agar H_V operatorning muhim spektrining quyi bo'sag'asi uning muhim spektrining *regulyar nuqtasi* bo'lsa, unda kichik qo'zg'alishlarda muhim spektrdan quyida birorta ham xos

qiymat paydo bo'lmaydi, lekin agar H_V operatorning muhim spektrining quyi bo'sag'asi *singular nuqta* bo'lsa, unda kichik qo'zg'alishlarda H_V operator muhim spektrdan quyida xos qiymatlar paydo bo'ladi.

Kalit so'zlar: diskret Shrödinger operatori, kvant mexanikasi, gamiltonian, dispersiya munosabati, virtual sath, xos qiymat, panjara.

1. Introduction

Our main aim is to establish some threshold effects and the existence or absence of eigenvalues of one-particle discrete Schrödinger operators $H_V = H_0 + V$ depending on the potentials \hat{v} and on the dimensions $d \geq 3$ of the lattice \mathbb{Z}^d , which have not been studied earlier even for the continuous Schrödinger operators.

Some spectral properties of Hamiltonians on the $d \geq 1$ -dimensional lattice \mathbb{Z}^d have been intensively studied (see, e.g., [1], [2], [3]–[6], [10]–[14], [16] for the relevant discussions, and also works [9], [15] for the general study of the low-lying excitation spectrum for quantum systems on lattices).

The emission and absorption of the negative eigenvalues and their appearance for the Schrödinger operators H_V with negative infinitesimal perturbations, i.e., the existence of the threshold resonance, leads to the existence of infinitely many bound states (Efimov's effect) for the corresponding three-particle system (see, e.g., [2], [3], [4], [7], [8], [11], and references therein).

In the current paper, we investigate the appearance mechanism of eigenvalues from the essential spectrum and the absorption into the spectrum depending on the interaction $\hat{v} \leq 0$.

The essential spectrum of the one-particle continuous Schrödinger operator coincides with the positive semi-axis, therefore only the point zero is its threshold, and it can be either a regular or a singular point of the continuous spectrum. In the case, the one-particle discrete Schrödinger operator on the lattice \mathbb{Z}^d , the essential spectrum fills a certain segment of the real axis and, therefore, its upper and lower boundaries are thresholds of the essential spectrum, which are either a *regular* or a *singular* point of the essential spectrum (threshold resonances or threshold eigenvalues).

Moreover, whether a threshold of the essential spectrum is a *regular* or a *singular* point depends on the perturbation operator V and on the dimension of the lattice \mathbb{Z}^d , $d \geq 3$.

We establish that the appearance of eigenvalues of the operator H_V depends on whether a threshold of the essential spectrum of the operator H_V is a *regular* or a *singular* point: if the lower (upper) threshold of the essential spectrum of the operator H_V is a *regular point* of the essential spectrum, then the number of eigenvalues below (above) the essential spectrum does not change under small perturbations (Theorem 2); if the lower (upper) threshold of the essential spectrum of the operator H_V is a *singular point*, then the operator H_V has eigenvalues below (above) the essential spectrum under such perturbations (Theorem 3).

Note that in [2] for the two-particle Schrödinger operators $H(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$ on the lattice \mathbb{Z}^d , the threshold effect was proved: for all non-zero values of the quasi-momentum $0 \neq k \in \mathbb{T}^d$, $d \geq 3$ the discrete spectrum below the threshold is not empty if the operator $H(0)$ has either a threshold resonance or a threshold eigenvalue at the lower threshold of the essential spectrum.

In [5], the validity of the Weyl's asymptotics is discussed - in the sense of two-sided boundaries for the size of the discrete spectrum of the one-particle Schrödinger operator on the $d \geq 1$ -dimensional cubic lattice \mathbb{Z}^d with large constraints.

Note that the results of works [5] and [19] yield there existence of eigenvalues of the operator H_V below the essential spectrum for $d = 1, 2$.

In [12], the discrete Schrödinger operators $h_{\mu\lambda}(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$, $d \geq 3$, associated with the Hamiltonian $\hat{h}_{\mu\lambda}$ are considered, describing the motion of a two quantum particles on the d -dimensional lattice \mathbb{Z}^d with attractive interactions $\mu \geq 0$ on one site and $\lambda \geq 0$ on nearest-neighbor sites on the lattice.

The number of eigenvalues of the operator $h_{\mu\lambda}(0)$ and their locations are investigated depending on the value of the interactions $\mu \geq 0$ and $\lambda \geq 0$.

The present paper is organized as follows. In Section 2, we introduce the one-particle lattice Hamiltonian. In Section 3, we establish a generalized Birman-Schwinger principle and introduce the notions of regular and singular points of the essential spectrum of the operator H_V . The main results of the paper are stated in Section 4 and proved them in Section 5.

2. The one-particle hamiltonians on lattices

2.1. Position space representation

Let \mathbb{Z}^d be the $d \geq 3$ dimensional cubic lattice and $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ be the Hilbert space of square-summable functions on \mathbb{Z}^d . Let $\ell^1(\mathbb{Z}^d)$, $\ell^\infty(\mathbb{Z}^d)$ and $\ell_0(\mathbb{Z}^d)$ be Banach spaces of functions on \mathbb{Z}^d , resp. summable, bounded and accumulating to zero at infinity.

We assume that H_0 is the Laurent-Toeplitz- type operator given by

$$(H_0 \hat{f})(x) = \sum_{s \in \mathbb{Z}^d} \varepsilon(x-s) \hat{f}(s), \quad \hat{f} \in \ell^2(\mathbb{Z}^d), \quad (1)$$

where the function $\varepsilon(\cdot)$ is defined on \mathbb{Z}^d and belongs to space $\ell^1(\mathbb{Z}^d)$.

We also assume that the self-adjointness condition of the operator H_0 :

$$\varepsilon(s) = \overline{\varepsilon(-s)}, \quad s \in \mathbb{Z}^d. \quad (2)$$

Let $\ell^1(\mathbb{Z}^d; \mathbb{R}_0^-) \subset \ell^1(\mathbb{Z}^d)$ be the set of summable non-positive functions. Operator V is defined as the operator of multiplication by the function $\hat{v} \in \ell^1(\mathbb{Z}^d; \mathbb{R}_0^-)$:

$$(V \hat{f})(x) = \hat{v}(x) \hat{f}(x), \quad \hat{f} \in \ell^2(\mathbb{Z}^d). \quad (3)$$

Note that V is the non-positive and compact operator in $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$.

In the position space representation, the one-particle Hamiltonian $H_V := H_V(\varepsilon)$ describing the motion of one quantum particle in a potential field \hat{v} and acting in $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ has form

$$H_V = H_0 + V. \quad (4)$$

One can easily check that the operator H_V is bounded and self-adjoint.

2.2. Momentum space representation

Let \mathbb{T}^d be the $d \geq 1$ dimensional torus, i.e., the cube $(-\pi, \pi]^d$ with the corresponding identification of opposite faces and $L^2(\mathbb{T}^d, \eta)$ be the Hilbert space of square-integrable functions on \mathbb{T}^d with the Haar measure $\eta = \frac{d^d p}{(2\pi)^d}$.

The standard Fourier transform and its inverse respectively are defined as follows

$$F: \ell^2(\mathbb{Z}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{T}^d, \eta), \quad (F\hat{f})(p) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} e^{i(p \cdot x)} \hat{f}(x),$$

$$F^{-1}: L^2(\mathbb{T}^d, \eta) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}^d), \quad (F^{-1}f)(x) = \int_{\mathbb{T}^d} e^{-i(p \cdot x)} f(p) \eta(dp).$$

In the momentum space representation, the Schrödinger operator $H_V := FH_V F^{-1}$ acts in $L^2(\mathbb{T}^d, \eta)$ as

$$H_V = H_0 + V.$$

Here $H_0 := FH_0 F^{-1}$ is the multiplication operator by the function $\varepsilon(\cdot)$:

$$(H_0 f)(p) = \varepsilon(p) f(p), \quad f \in L^2(\mathbb{T}^d, \eta),$$

where $\mathcal{E}(\cdot)$ is the Fourier transform of $\varepsilon(\cdot)$, i.e.

$$\mathcal{E}(p) = (F\varepsilon)(p) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} e^{i(p,x)} \varepsilon(x), \quad p \in \mathbb{T}^d,$$

is a real-valued function on \mathbb{T}^d .

The integral operator $V := FVF^{-1}$ is defined as

$$(Vf)(p) = \int_{\mathbb{T}^d} v(p-t) f(t) \eta(dt), \quad f \in L^2(\mathbb{T}^d, \eta),$$

where $v(\cdot)$ is the Fourier transform of $\hat{v}(\cdot)$, i.e.

$$v(p) = (F\hat{v})(p) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} e^{i(p,x)} \hat{v}(x).$$

3. Spectral properties of the Schrödinger operator H_V

3.1. The essential spectrum of H_V

The operator H_0 is the multiplication operator by a continuous real function $\varepsilon(\cdot)$ defined on \mathbb{T}^d , therefore it has only an essential spectrum, i.e.,

$$\sigma(H_V) = \sigma(H_0) = \sigma(H_0) = \sigma_{\text{ess}}(H_0) = [\varepsilon_{\min}, \varepsilon_{\max}], \quad (5)$$

where

$$\varepsilon_{\min} \equiv \min_{p \in \mathbb{T}^d} \varepsilon(p), \quad \varepsilon_{\max} \equiv \max_{p \in \mathbb{T}^d} \varepsilon(p).$$

Since the perturbation operator V is compact, then by the classical Weyl theorem, the essential spectrum of the operator H_V coincides with the essential spectrum of the operator H_0 ,

$$\sigma_{\text{ess}}(H_V) = \sigma_{\text{ess}}(H_0) = \sigma(H_0). \quad (6)$$

Note that, in contrast to the Schrödinger operator on \mathbb{R}^d , the discrete Schrödinger operator may have eigenvalues above the threshold of the essential spectrum, when the sign of the potential \hat{v} is changed. This case can be investigated in the same way as in this paper.

The min-max principle implies that all isolated eigenvalues of finite multiplicity of the operator H_V lie below the threshold ε_{\min} of the essential spectrum $\sigma_{\text{ess}}(H_V)$ for $\hat{v} \leq 0$.

3.2. The Birman–Schwinger principle for the operator H_V

Let $d \geq 3$ and $\hat{v} \in \ell^1(\mathbb{Z}^d; \mathbb{R}_0^-)$ be a nonpositive function. For any $z < \varepsilon_{\min}$, we define the Birman-Schwinger operator $B_V(z)$, which is acting in $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ as:

$$B_V(z) := |V|^{\frac{1}{2}} R_0(z) |V|^{\frac{1}{2}}. \quad (7)$$

Here, $R_0(z) := F^{-1} R_0(z) F$. $R_0(z) := [H_0 - zI]^{-1}$ is the resolvent of the operator H_0 at the point $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(H_0)$ and $|V|^{\frac{1}{2}}$ is the positive square root of the nonnegative operator $|V|$:

$$(|V|^{\frac{1}{2}} \hat{f})(x) = |\hat{v}(x)|^{\frac{1}{2}} \hat{f}(x), \quad \hat{f} \in \ell^2(\mathbb{Z}^d), \quad (8)$$

where

$$(|V| \hat{f})(x) = \hat{v}(x) \hat{f}(x), \quad \hat{f} \in \ell^2(\mathbb{Z}^d).$$

The kernel function $B_V(z; \cdot, \cdot)$, $z < \varepsilon_{\min}$, associated to the Birman-Schwinger operator $B_V(z)$ is given by

$$B_V(z; x, y) = |\hat{v}(x)|^{\frac{1}{2}} R_0(z; y-x) |\hat{v}(y)|^{\frac{1}{2}}, \quad x, y \in \mathbb{Z}^d, \quad (9)$$

where

$$R_0(z; x) := \int_{\mathbb{T}^d} \frac{e^{i(p,x)} \eta(dp)}{\varepsilon(p) - z}, \quad x \in \mathbb{Z}^d. \quad (10)$$

It is easy to verify that $B_V(z)$ is a nonnegative compact operator in $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ for $z < \varepsilon_{\min}$.

The following lemma is the standard Birman-Schwinger principle for the one-particle Schrödinger operator $H_{\hat{V}}$ on the lattice \mathbb{Z}^d .

Lemma 1. (Birman-Schwinger principle) *Let $\hat{v} \in \ell^1(\mathbb{Z}^d; \mathbb{R}_0^-)$. Then for any $z < \varepsilon_{\min}$, the following statements hold:*

(i) *If $\hat{\phi} \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$ solves $H_{\hat{V}} \hat{\phi} = z \hat{\phi}$, then $\hat{\psi} := |V|^{1/2} \hat{\phi} \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$ solves $\hat{\psi} = B_V(z) \hat{\psi}$.*

(ii) *If $\hat{\psi} \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$ solves $\hat{\psi} = B_V(z) \hat{\psi}$, then $\hat{\phi} = R_0(z) |V|^{1/2} \hat{\psi} \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$ solves $H_V \hat{\phi} = z \hat{\phi}$.*

(iii) *The number $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(H_V)$ is an eigenvalue of H_V of multiplicity M if and only if 1 is an eigenvalue of $B_V(z)$ of multiplicity M .*

(iv) *Counting multiplicities, the number of eigenvalues of H_V smaller than z equals to the number of eigenvalues of $B_V(z)$ greater than 1.*

The proof of the lemma 1, associated to the Schrödinger operator H_V , can be found in [5].

Lemma 2. *Let $\hat{v} \in \ell^1(\mathbb{Z}^d; \mathbb{R}_0^-)$. Then for any $x, y \in \mathbb{Z}^d$, the function $B_V(\cdot; x, y)$ is holomorphic on the interval $\mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(H_V)$.*

Proof. For any $x \in \mathbb{Z}^d$, the equality (10) and the holomorphy of the function $R_0(z; x)$ in $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(H_V)$ yield the holomorphy of the kernel $B_V(z; x, y)$ in $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(H_V)$ for any $x, y \in \mathbb{Z}^d$.

3.3. Generalized Birman-Schwinger principle for the operator H_V

Let $C^{(n)}(\mathbb{T}^d)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ be the Banach spaces of n times continuously differentiable functions on \mathbb{T}^d .

In order to introduce a generalization of the Birman-Schwinger principle and the concept of a threshold resonance (virtual level) for the operator H_V , we assume the following conditions, which guarantee some smoothness of the dispersion relation $\varepsilon(\cdot)$ and the function \hat{v} .

Hypothesis 1.

(i) *The dispersion relation $\varepsilon(\cdot) \in C^{(3)}(\mathbb{T}^d)$ is a real-valued even function having a nondegenerate minimum at $p_1, \dots, p_\ell \in \mathbb{T}^d$, with $p_1 = 0 \in \mathbb{T}^d$.*

(ii) *The nonzero (not identically zero) non-positive function \hat{v} is absolutely summable, i.e., $\hat{v} \in \ell^1(\mathbb{Z}^d; \mathbb{R}_0^-)$, $d \geq 3$.*

Let $d \geq 3$. Assume Hypothesis 1. For all $x, y \in \mathbb{Z}^d$, we define the functions

$$R_0(\varepsilon_{\min}; x) := \int_{\mathbb{T}^d} \frac{e^{i(p,x)}}{\varepsilon(p) - \varepsilon_{\min}} \eta(dp), \quad (11)$$

$$B_{\hat{V}}(\varepsilon_{\min}; x, y) := |\hat{v}(x)|^{1/2} R_0(\varepsilon_{\min}; x - y) |\hat{v}(y)|^{1/2} \quad (12)$$

and formulate some of their properties.

Lemma 3. *Let $d \geq 3$. Assume Hypothesis 1. Then the following statements are true:*

(i) *the function $R_0(\varepsilon_{\min}; \cdot)$ is defined on \mathbb{Z}^d ,*

(ii) the kernel function $B\hat{v}(\varepsilon_{\min}; \cdot, \cdot)$ is a square-summable function on $\mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d$.

Proof. (i) By the assumption of the lemma and according to the parametric Morse lemma, there exist neighborhoods $U_1(p_1), \dots, U_\ell(p_\ell) \subset \mathbb{T}^d$ of points $p_1, \dots, p_\ell \in \mathbb{T}^d$, the ball $W_\gamma(0)$ with center $q = 0$ and radius $\gamma > 0$, and a family of diffeomorphisms $\phi_j(\cdot): W_\gamma(0) \rightarrow U_j(p_j), j = 1, \dots, \ell$ from $C^{(1)}(W_\gamma(0))$, such that in $W_\gamma(0)$ the function $\varepsilon(\varphi_j(y))$ can be represented as

$$\varepsilon(\varphi_j(y)) = \varepsilon_{\min} + y^2 = \varepsilon_{\min} + y_1^2 + \dots + y_d^2, \quad j = 1, \dots, \ell. \tag{13}$$

The Jacobian $J_j(\phi_j(y))$ of the mapping ϕ_j is continuous in $W_\gamma(0)$ and $J_j(0) > 0, j = 1, \dots, \ell$.

For any fixed $x \in \mathbb{Z}^d$, the function $R_0(\varepsilon_{\min}; x)$ can be written as:

$R_0(\varepsilon_{\min}; x) = R_0^{(1)}(\varepsilon_{\min}; x) + R_0^{(2)}(\varepsilon_{\min}; x)$, where

$$R_0^{(1)}(\varepsilon_{\min}; x) = \sum_{j=1}^{\ell} \int_{U_j(p_j)} \frac{e^{i(p,x)} \eta(dp)}{\varepsilon(p) - \varepsilon_{\min}}, \tag{14}$$

$$R_0^{(2)}(\varepsilon_{\min}; x) = \int_{\mathbb{T}^d \setminus \bigcup_{j=1}^{\ell} U_j(p_j)} \frac{e^{i(p,x)} \eta(dp)}{\varepsilon(p) - \varepsilon_{\min}}. \tag{15}$$

Obviously, $R_0^{(2)}(\varepsilon_{\min}; x)$ is defined on \mathbb{Z}^d . By making a change of variables $p = \phi_j(y), j = 1, \dots, \ell$, in (14) and taking (13) into account, we obtain

$$R_0^{(1)}(\varepsilon_{\min}; x) = \sum_{j=1}^{\ell} \int_{U_j(p_j)} \frac{e^{i(\varphi_j(y),x)}}{\sum_{n=1}^d y_n^2} J_j(\varphi_j(y)) \eta(dy), \tag{16}$$

where $J_j(\phi_j(y))$ is the Jacobian of the map $\phi_j(y)$. In the spheroidal coordinates, by denoting $y = r\omega$, it can be rewritten as

$$R_0^{(1)}(\varepsilon_{\min}; x) = \sum_{j=1}^{\ell} \int_0^\gamma r^{d-3} dr \int_{\Omega_{d-1}} e^{i(\varphi_j(r\omega),x)} J_j(\varphi_j(r\omega)) d\omega, \tag{17}$$

where Ω_{d-1} is the unit sphere in \mathbb{R}^d and $d\omega$ is its element.

Since $d \geq 3$, the holomorphism of the function $J_j(\phi_j(r\omega))$ implies that the function $R_0^{(1)}(\varepsilon_{\min}; x)$ is defined on \mathbb{Z}^d .

(ii) It can be shown that the inequality

$$\|B_V\|_{\ell^2((\mathbb{Z}^d)^2)} \leq \left[\int_{\mathbb{T}^d} \frac{\eta(dp)}{\varepsilon(p) - \varepsilon_{\min}} \right]^2 \|\hat{v}\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}^2,$$

i.e., the kernel function $B_V(\varepsilon_{\min}; x, y)$ is square-summable.

Now we define the so-called generalized Birman-Schwinger operator, associated to the discrete Schrödinger operator H_V on the lattice \mathbb{Z}^d .

Definition 1. Assume $d \geq 3$ and Hypothesis 1. We define the generalized (limit) Birman-Schwinger operator $B_V(\varepsilon_{\min})$ as an integral operator acting in $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ as

$$[B_V(\varepsilon_{\min})\hat{\psi}](x) := [|V|^{-\frac{1}{2}} R_0(\varepsilon_{\min}) |V|^{\frac{1}{2}} \hat{\psi}](x) = \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} B_V(\varepsilon_{\min}; x, y) \hat{\psi}(y), \tag{18}$$

where

$$[R_0(\varepsilon_{\min})\hat{\phi}](x) := \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} \mathcal{R}_0(\varepsilon_{\min}; y-x)\hat{\phi}(y), \hat{\phi} \in \ell^1(\mathbb{Z}^d). \quad (19)$$

In the following theorem the Birman-Schwinger principle is extended to $z = \varepsilon_{\min}$.

Theorem 1. (generalized Birman-Schwinger principle) *Assume Hypothesis 1. Then the following statements hold:*

(i) *Let $d \geq 3$. If $\hat{f} \in \ell^\infty(\mathbb{Z}^d)$ solves $H_V \hat{f} = \varepsilon_{\min} \hat{f}$, then $\hat{\psi} := |V|^{1/2} \hat{f} \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$ solves $\hat{\psi} = B_V(\varepsilon_{\min})\hat{\psi}$.*

(ii) *Let $d = 3, 4$. If $\hat{\psi} \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$ solves $\hat{\psi} = B_V(\varepsilon_{\min})\hat{\psi}$, then $\hat{f} := R_0(\varepsilon_{\min})|V|^{1/2} \hat{\psi} \in \ell_0(\mathbb{Z}^d)$ solves $H_V \hat{f} = \varepsilon_{\min} \hat{f}$.*

(iii) *Let $d \geq 5$. If $\hat{\psi} \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$ solves $\hat{\psi} = B_V(\varepsilon_{\min})\hat{\psi}$, then $\hat{f} := R_0(\varepsilon_{\min})|V|^{1/2} \hat{\psi} \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$ solves $H_V \hat{f} = \varepsilon_{\min} \hat{f}$.*

(iv) *Let $d \geq 3$. Counting multiplicities, the number of eigenvalues of H_V less than ε_{\min} , equals to the number of eigenvalues of $B_V(\varepsilon_{\min})$ greater than 1.*

Proof. Let $d \geq 3$ and $\hat{v} \in \ell^1(\mathbb{Z}^d; \mathbb{R}_0^-)$.

(i) Note that $\hat{f} \in \ell^\infty(\mathbb{Z}^d)$ and $\hat{v} \in \ell^1(\mathbb{Z}^d; \mathbb{R}_0^-)$ yield $\hat{\psi} = |V|^{1/2} \hat{f} \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$. Now let $\hat{f} \in \ell^\infty(\mathbb{Z}^d)$ be a solution of $(H_V - \varepsilon_{\min} I)\hat{f} = 0$, i.e., the equality

$$(H_0 - \varepsilon_{\min} I)\hat{f} = -V\hat{f} \quad (20)$$

holds. Then the conditions for \hat{v} of Hypothesis 1 yields that $V\hat{f} \in \ell^1(\mathbb{Z}^d)$.

Using the definitions of $R_0(\varepsilon_{\min})$ and $H_0 - \varepsilon_{\min} I$ and the properties of the Fourier transform, it can be shown that $[R_0(\varepsilon_{\min})][H_0 - \varepsilon_{\min} I] = I$, i.e., the operator $R_0(\varepsilon_{\min})$ is the resolvent of H_0 at the threshold $z = \varepsilon_{\min}$.

The equality (20) yields the relation:

$$R_0(\varepsilon_{\min})(H_0 - \varepsilon_{\min} I)\hat{f} = -R_0(\varepsilon_{\min})V\hat{f} = R_0(\varepsilon_{\min})|V|\hat{f}$$

and

$$|V|^{1/2} \hat{f} = [|V|^{1/2} R_0(\varepsilon_{\min})|V|^{1/2}] |V|^{1/2} \hat{f},$$

i.e., $\hat{\psi} = |V|^{1/2} \hat{f}$ is a solution of $B_V(\varepsilon_{\min})\hat{\psi} = \hat{\psi}$.

(ii) Let $d = 3, 4$. Since $\hat{v} \in \ell^1(\mathbb{Z}^d; \mathbb{R}_0^-)$, for any $\hat{\psi} \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$, the Cauchy-Schwarz inequality leads to the relation $|V|^{1/2} \hat{\psi} \in \ell^1(\mathbb{Z}^d)$. Note that the function $\frac{1}{\varepsilon(\cdot) - \varepsilon_{\min}}$ is integrable on \mathbb{T}^d , i.e.,

$\frac{1}{\varepsilon(\cdot) - \varepsilon_{\min}} \in L^1(\mathbb{T}^d, \eta)$. Hence the Riemann-Lebesgue lemma yields

$$R_0(\varepsilon_{\min}; x) := \int_{\mathbb{T}^d} \frac{e^{i(p,x)} \eta(dp)}{\varepsilon(p) - \varepsilon_{\min}} \rightarrow 0 \text{ as } |x| \rightarrow \infty. \quad (21)$$

By the Toeplitz theorem, the condition $|V|^{1/2} \hat{\psi} \in \ell^1(\mathbb{Z}^d)$ implies that

$$\hat{f}(x) = \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} R_0(\varepsilon_{\min}; y-x) |\hat{v}(y)|^2 \hat{\psi}(y) \rightarrow 0 \text{ as } |x| \rightarrow \infty, \quad (22)$$

i.e., $\hat{f} \in \ell_0(\mathbb{Z}^d)$.

Now let $\hat{\psi} \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$ be a solution of the equation

$$[|V|^{\frac{1}{2}} R_0(\varepsilon_{\min}) |V|^{\frac{1}{2}}] \hat{\psi} = \hat{\psi}. \quad (23)$$

By denoting

$$\hat{f} = R_0(\varepsilon_{\min}) |V|^{\frac{1}{2}} \hat{\psi} \quad (24)$$

we have that $\hat{f} \in \ell_0(\mathbb{Z}^d)$. Equation (23) yields that

$$|V|^{\frac{1}{2}} \hat{f} = \hat{\psi}, \quad |V| \hat{f} = |V|^{\frac{1}{2}} \hat{\psi}. \quad (25)$$

The equality (24) and the second equality in (25) imply that

$$(H_0 - \varepsilon_{\min} I) \hat{f} = (H_0 - \varepsilon_{\min} I) R_0(\varepsilon_{\min}) |V| \hat{f} \quad (26)$$

i.e., $\hat{f} \in \ell_0(\mathbb{Z}^d)$ is a solution of the equation $H_V \hat{f} = \varepsilon_{\min} \hat{f}$.

(iii) Let $d \geq 5$ and $\hat{\psi} \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$. Since $\frac{1}{\varepsilon(\cdot) - \varepsilon_{\min}} \in L^2(\mathbb{T}^d, \eta)$, the Plancherel theorem leads to

$$R_0(\varepsilon_{\min}; x) := \int_{\mathbb{T}^d} \frac{e^{i(p,x)} \eta(dp)}{\varepsilon(p) - \varepsilon_{\min}} \in \ell^2(\mathbb{Z}^d). \quad (27)$$

Note that, if $K(\cdot) \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$ and $g \in \ell^1(\mathbb{Z}^d)$, then their convolution

$$(K * g)(x) := \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} K(x-y)g(y)$$

belongs to $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ i.e.,

$$\|K * g\|_2 \leq \|K\|_2 \|g\|_1. \quad (28)$$

The relations $|V|^{\frac{1}{2}} \hat{\psi} \in \ell^1(\mathbb{Z}^d)$ and (27) yield that

$$\hat{f}(x) = \left[R_0(\varepsilon_{\min}) |V|^{\frac{1}{2}} \hat{\psi} \right](x) = \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} \mathcal{R}_0(\varepsilon_{\min}; y-x) |\hat{v}(y)|^2 \hat{\psi}(y), \quad \hat{\psi} \in \ell^2(\mathbb{Z}^d),$$

belongs to $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$.

(iv) This item can be proven similarly to the proof of Theorem 6 in [13].

3.4. Regular and singular points

Let $d \geq 3$. Then by Lemma 3 the Birman-Schwinger operator $B_V(\varepsilon_{\min})$ is self-adjoint Hilbert-Schmidt operator. Since the operator $B_V(\varepsilon_{\min})$ is self-adjoint and compact exactly one of the following two cases holds true:

(i) The number 1 is an eigenvalue for $B_V(\varepsilon_{\min})$.

(ii) The number 1 is in the resolvent set of the operator $B_V(\varepsilon_{\min})$.

Definition 2. Let $d \geq 3$. If the number 1 is not an eigenvalue (resp. is an eigenvalue) of the operator $B_V(\varepsilon_{\min})$, then the threshold $z = \varepsilon_{\min}$ of the essential spectrum $\sigma_{\text{ess}}(H_V)$ is called a regular (resp. singular) point of the essential spectrum of the operator H_V .

Remark 1. If the threshold $z = \varepsilon_{\min}$ is a regular point of the essential spectrum of H_V , then Definition 2 and item (i) of Theorem 1 yield that the equation $H_V \hat{f} = \varepsilon_{\min} \hat{f}$, $\hat{f} \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$, has only the trivial solution and the number of eigenvalues of the operator H_V below the threshold ε_{\min} remains unchanged under small perturbations of the operator V .

Remark 2. Let the threshold $z = \varepsilon_{\min}$ be a singular point of the essential spectrum of H_V , i.e., the equation $B_V(\varepsilon_{\min})\hat{\psi} = \hat{\psi}$ has a non-trivial solution (up to a constant factor) $\hat{\psi} \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$. Then the generalized Birman-Schwinger principle gives the following statements:

(i) If $d = 3, 4$, then the function

$$\hat{f} = R_0(\varepsilon_{\min}) |V|^{-\frac{1}{2}} \hat{\psi}, \quad \hat{\psi} \in \ell^2(\mathbb{Z}^d) \quad (29)$$

is the solution of the equation $H_V \hat{f} = \varepsilon_{\min} \hat{f}$ and $\hat{f} \in \ell_0(\mathbb{Z}^d)$. If $\hat{f} \in \ell_0(\mathbb{Z}^d) \setminus \ell^2(\mathbb{Z}^d)$, then the singular point $z = \varepsilon_{\min}$ is called the threshold resonance (virtual level) of H_V .

(ii) If $d \geq 5$, then the solution (29) of the equation $H_V \hat{f} = \varepsilon_{\min} \hat{f}$ belongs to $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$, i.e., the singular point $z = \varepsilon_{\min}$ is an eigenvalue of the operator H_V .

Remark 3. Notice that the threshold singular point is either a threshold resonance (virtual level) or a threshold eigenvalue of H_V and our definition of the threshold resonance is the direct analogue of those, which have been introduced in the continuous Schrödinger operators and discrete cases (see, e.g., [2], [17], [18], [20]).

4. Statement of the main results

We consider the threshold phenomenon, specifically the appearance mechanism of the first eigenvalue from the essential spectrum and its absorption into the essential spectrum depending on the interaction $\hat{v} \leq 0$.

Let $U_\gamma(\hat{v}_0) := \{\hat{v} \in \ell^1(\mathbb{Z}^d; \mathbb{R}_0^-) : \|\hat{v} - \hat{v}_0\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d; \mathbb{R}_0^-)} < \gamma\}$ be a ball centered at $\hat{v}_0 \leq 0$ and radius $\gamma > 0$.

Remark 4. Let for some function $\hat{v}_0 \in \ell^1(\mathbb{Z}^d; \mathbb{R}_0^-)$ the equality

$$\sup_{\|\hat{\psi}\|_{\ell^2(\mathbb{Z}^d)}=1} (B_{V_0}(\varepsilon_{\min})\hat{\psi}, \hat{\psi})_{\ell^2(\mathbb{Z}^d)} = (B_{V_0}(\varepsilon_{\min})\hat{\psi}_0, \hat{\psi}_0)_{\ell^2(\mathbb{Z}^d)} = \|B_{V_0}(\varepsilon_{\min})\| = 1.$$

holds. Then, by the Hilbert-Schmidt theorem, 1 is the largest eigenvalue of the operator $B_{V_0}(\varepsilon_{\min})$ and $\hat{\psi}_0 \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$ is the corresponding eigenvector, i.e., $B_{V_0}(\varepsilon_{\min})\hat{\psi}_0 = \hat{\psi}_0$ [17].

In the case the threshold ε_{\min} is a regular point of the essential spectrum of H_V , then new eigenvalues of the operator H_V do not appear under small perturbations of the potential \hat{v} .

Theorem 2. Assume $d \geq 3$ and the Hypothesis 1. Let the threshold ε_{\min} is a regular point of the essential spectrum of the operator $H_V = H_0 + V$ for some $\hat{v}_0 \in \ell^1(\mathbb{Z}^d; \mathbb{R}_0^-)$. Then there exists a neighborhood $\mathbb{U}(\hat{v}_0) \subset \ell^1(\mathbb{Z}^d; \mathbb{R}_0^-)$ of \hat{v}_0 such that for all $\hat{v} \in \mathbb{U}(\hat{v}_0)$, the number of eigenvalues of the operator H_V below the threshold ε_{\min} remains unchanged.

Corollary 1. Assume $d \geq 3$ and the Hypothesis 1. Let for some $\mu_0 > 0$ and $\hat{v} \in \ell^1(\mathbb{Z}^d; \mathbb{R}_0^-)$ the threshold ε_{\min} is a regular point of the essential spectrum of the operator $H_{\mu_0 V} = H_0 + \mu_0 V$. Then there

exists a neighborhood $\mathbb{U}(\mu_0)$ of μ_0 such that for all $\mu \in \mathbb{U}(\mu_0)$, the number of eigenvalues of the operator $H_{\mu V}$ below the threshold ε_{\min} remains unchanged.

Corollary 2. Let $d \geq 3$. Note that the set of all $\mu > 0$ for which ε_{\min} , the threshold of the essential spectrum is a regular point of the operator $H_{\mu V}$, is the union of some intervals $U_\alpha \subset \mathbb{R}_+$, $\alpha = 1, 2, \dots$

We introduce the following subsets of interactions $\hat{v} \leq 0$.

$$U_\gamma^>(\hat{v}_0) := \{\hat{v} \in \ell^1(\mathbb{Z}^d; \mathbb{R}_0^-) : \|\hat{v} - \hat{v}_0\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d; \mathbb{R}_0^-)} < \gamma, \|B_V(\varepsilon_{\min})\| > 1\},$$

$$U_\gamma^=(\hat{v}_0) := \{\hat{v} \in \ell^1(\mathbb{Z}^d; \mathbb{R}_0^-) : \|\hat{v} - \hat{v}_0\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d; \mathbb{R}_0^-)} < \gamma, \|B_V(\varepsilon_{\min})\| = 1\},$$

$$U_\gamma^<(\hat{v}_0) := \{\hat{v} \in \ell^1(\mathbb{Z}^d; \mathbb{R}_0^-) : \|\hat{v} - \hat{v}_0\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d; \mathbb{R}_0^-)} < \gamma, \|B_V(\varepsilon_{\min})\| < 1\}.$$

The sets $U_\gamma^>(\hat{v}_0)$ and $U_\gamma^<(\hat{v}_0)$ are open subsets of $\ell^1(\mathbb{Z}^d; \mathbb{R}_0^-)$ and $U_\gamma^=(\hat{v}_0) \subset \ell^1(\mathbb{Z}^d; \mathbb{R}_0^-)$ is a manifold of codimension one.

Moreover,

$$U_\gamma^>(\hat{v}_0) \cup U_\gamma^=(\hat{v}_0) \cup U_\gamma^<(\hat{v}_0) = U_\gamma(\hat{v}_0).$$

The mechanism of the appearance or emission of the first eigenvalue from the essential spectrum, depending on the interaction $\hat{v} \in U_\gamma(\hat{v}_0)$, is described in the following theorem.

Theorem 3. Assume $d \geq 3$ and the Hypothesis 1. Let for some nonzero function $\hat{v}_0 \in \ell^1(\mathbb{Z}^d; \mathbb{R}_0^-)$ the equality $\|B_{V_0}(\varepsilon_{\min})\| = 1$ holds. Then there exists $\gamma > 0$ such that:

(i) For all $\hat{v} \in U_\gamma^>(\hat{v}_0)$, the operator H_V has an eigenvalue $z_{\hat{v}}$ in $(-\infty, \varepsilon_{\min})$;

(ii) Let $d = 3, 4$. For all $\hat{v} \in U_\gamma^=(\hat{v}_0)$ the threshold ε_{\min} is a virtual level of the operator H_V .

(iii) Let $d \geq 5$. For all $\hat{v} \in U_\gamma^=(\hat{v}_0)$ the threshold ε_{\min} is an eigenvalue of the operator H_V .

(iv) For all $\hat{v} \in U_\gamma^<(\hat{v}_0)$ the threshold ε_{\min} is a regular point of the essential spectrum of the operator H_V and therefore, the operator H_V has neither eigenvalues lying in $(-\infty, \varepsilon_{\min})$, nor a virtual level equal to ε_{\min} .

Corollary 3. Let $d \geq 3$. Assume the Hypothesis 1. Then:

(i) for any $\hat{v} \in \ell^1(\mathbb{Z}^d; \mathbb{R}_0^-)$, there exists $\mu_0 > 0$ such that, the threshold ε_{\min} is a singular point of the essential spectrum of the operator $H_{\mu_0 V} = H_0 + \mu_0 V \geq \varepsilon_{\min} I$;

(ii) for all $\mu > \mu_0 > 0$, the operator $H_{\mu V} = H_0 + \mu V$ has an eigenvalue in $(-\infty, \varepsilon_{\min})$;

(iii) for all $0 < \mu < \mu_0$, the operator $H_{\mu V}$ has no eigenvalues in $(-\infty, \varepsilon_{\min})$ and the threshold ε_{\min} is a regular point of the essential spectrum of the operator $H_{\mu V}$.

5. The proof of the main results

The proof of Theorem 2. If ε_{\min} is a regular point, then the number 1 is not an eigenvalue of the operator $B_V(\varepsilon_{\min})$. Since, the operator $B_V(\varepsilon_{\min})$ is continuous in $\hat{v} \in \ell^1(\mathbb{Z}^d; \mathbb{R}_0^-)$, there exists a neighborhood $\mathbb{U}(\hat{v}_0) \subset \ell^1(\mathbb{Z}^d; \mathbb{R}_0^-)$ of \hat{v}_0 such that the operator $[I - B_{V_0}(\varepsilon_{\min})]^{-1}$ exists and continuous in \hat{v} . So, for any $\hat{v} \in \mathbb{U}(\hat{v}_0)$, the number of non-zero solutions of $B_V(\varepsilon_{\min})\hat{\psi} = \hat{\psi}$ in $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ remains unchanged.

The proof of Theorem 3. Assume $d \geq 3$ and the Hypothesis 1.

(i) Let $\hat{v} \in U_\gamma^>(\hat{v}_0)$. Then $\|B_V(\varepsilon_{\min})\| > \|B_{V_0}(\varepsilon_{\min})\| = 1$, i.e., the compact self-adjoint operator $B_V(\varepsilon_{\min})$ has an eigenvalue greater than 1. Hence the item (iv) of Theorem 1 yields that the operator H_V has an eigenvalue z_ν in $(-\infty, \varepsilon_{\min})$.

(ii) Let $d = 3, 4$ и $\hat{v} \in U_\gamma^=(\hat{v}_0)$. Then

$$\|B_{V_0}(\varepsilon_{\min})\| = \sup_{\|\hat{\psi}\|_{\ell^2(\mathbb{Z}^d)} = 1} (B_{V_0}(\varepsilon_{\min})\hat{\psi}, \hat{\psi}) = 1$$

and by the Hilbert-Schmidt theorem there exists $\hat{\psi}_0 \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$ such that $B_{V_0}(\varepsilon_{\min})\hat{\psi}_0 = \hat{\psi}_0$, i.e., the number 1 is an eigenvalue and $\hat{\psi}_0 \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$ is the corresponding eigenfunction of the operator $B_{V_0}(\varepsilon_{\min})$. Then by (ii) of Theorem 1, the function $\hat{f} := R_0(\varepsilon_{\min})|V|^{1/2}\hat{\psi}_0 \in \ell_0(\mathbb{Z}^d)$ is a solution of the equation $H_V\hat{f} = \varepsilon_{\min}\hat{f}$, i.e., the number ε_{\min} is a virtual level of the Schrödinger operator H_V .

(iii) Let $d \geq 5$ and $\hat{v} \in U_\gamma^<(\hat{v}_0)$. Then, using Theorem 1, similarly as in (iii) one can show that the number ε_{\min} is an eigenvalue of the Schrödinger operator H_V .

(iv) Let $\hat{v} \in U_\gamma^<(\hat{v}_0)$. Then $\|B_V(\varepsilon_{\min})\| < \|B_{V_0}(\varepsilon_{\min})\| = 1$, i.e., all eigenvalues of the non-negative operator $B_V(\varepsilon_{\min})$ lie in the interval $[0, 1)$. Then by item (iv) of Theorem 1 the operator H_V has no eigenvalues in $(-\infty, \varepsilon_{\min})$.

References

1. J.I. Abdullayev, S.N. Lakaev. *Asymptotics of the discrete Spectrum of the three-particle Schrödinger difference operator on a lattice* // Theor. and Math. Phys. 136:3, 231–245 (2003).
2. S. Albeverio, S.N. Lakaev, K.A. Makarov, Z.I. Muminov. *The threshold effects for the two-particle Hamiltonians on lattices* // Comm. Math. Phys. 262:1, 91–115 (2006).
3. S. Albeverio, S.N. Lakaev, Z.I. Muminov. *Schrödinger operators on lattices. The Efimov effect and discrete spectrum asymptotics* // Ann. Henri Poincaré. 5, 743–772 (2004).
4. S. Albeverio, S.N. Lakaev, A.M. Khalkhujayev. *Number of eigenvalues of the three-particle Schrödinger operators on lattices* // Markov Proc. Relat. Fields. 18:3, 387–420 (2012).
5. V. Bach, W. de Siqueira Pedra, S.N. Lakaev. *Bounds on the discrete spectrum of lattice Schrödinger operators* // J. Math. Phys. 59:2, 022109 (2017).
6. P.A. Faria da Veiga, L. Ioriatti, M. O’Carroll. *Energy-momentum spectrum of some two-particle Hamiltonians* // Phys. Rev. E. 66:3, 016130 (2002).
7. M. Klaus. *On the bound state of Schrödinger operators in one dimension* // Ann. Phys. 108:2, 288–300 (1977).
8. M. Klaus, B. Simon. *Coupling constants thresholds in nonrelativistic quantum mechanics. I. Short-range two-body case* // Ann. Phys. 130:2, 251–281 (1980).
9. Yu.G. Kondratiev, R.A. Minlos. *One-particle subspaces in the stochastic XY model* // J. Statist. Phys. 87:3-4, 613–642 (1997).
10. S.N. Lakaev. *The Efimov effect in a system of three identical quantum particles* // Funct. Anal. Appl. 27:3, 15–28 (1993).
11. S.N. Lakaev, Sh.M. Tilavova. *Merging of eigenvalues and resonances of a two-particle Schrödinger operator* // Theor. and Math. Phys. 101:2, 235–252 (1994).
12. S.N. Lakaev, I.N. Bozorov. *The number of bound states of a one-particle Hamiltonian on a three-dimensional lattice* // Theor. and Math. Phys. 158:3, 425–443 (2009).
13. S.N. Lakaev, Sh.U. Alladustov. *Positivity of eigenvalues of the two-particle Schrödinger operator on a lattice* // Theor. and Math. Phys. 178:3, 390–402 (2014).
14. D.C. Mattis. *The few-body problem on a lattice* // Rev. Modern Phys. 58, 361–379 (1986).
15. R.A. Minlos, Y.M. Suhov. *On the spectrum of the generator of an infinite system of interacting diffusions* // Comm. Math. Phys. 206, 463–489 (1999).

16. A. Mogilner. *Hamiltonians in solid state physics as multi-particle discrete Schrödinger operators: Problems and results. Many-Particle Hamiltonians: Spectra and Scattering* // Advances in Soviet Mathematics, 5, eds. R. A. Minlos, AMS, Providence, RI, 139–194 (1991).
17. M. Reed, B. Simon. *Methods of modern mathematical physics. IV: Analysis of Operators* // Academic Press, New York, 1979.
18. A.V. Sobolev. *The Efimov effect. Discrete spectrum asymptotics* // Comm. Math. Phys. 156:1, 101–126 (1993).
19. H. Tamura. *The Efimov effect of three-body Schrödinger operators: Asymptotics for the number of negative eigenvalues* // Nagoya Math. J. 130, 55–83 (1993).
20. V. Hoang, D. Hundertmark, J. Richter, S. Vugalter. *Quantitative bounds versus existence of weakly coupled bound states for Schrödinger type operators* // arXiv:1610.09891v2 [math-ph], 22 May (2017).
21. D.R. Yafaev. *On the theory of the discrete spectrum of the three-particle Schrödinger operator* // Math. USSR-Sb. 94(136):4(8), 567–593 (1974).

UDC 517.518.5

ARNOL'DNING E_6 TIPIDAGI MAXSUSLIGI BILAN BOG'LANGAN TEBRANUVCHAN INTEGRALLAR HAQIDA

D. I. Akramova

Samarqand davlat universiteti,
akramova.shoda@mail.ru

Annotatsiya. Ushbu maqolada biz o'lchovlar Fur'e almashtirishining ma'lum daraja bilan yig'ilishi muammosini ko'rib chiqamiz. Uch o'lchovli Evklid fazosida, faza funksiyasi Arnol'dning E_6 tipidagi maxsusligiga ega bo'ladigan, sirtida mujassamlashgan o'lchovlarning Fur'e almashtirishi $p>3$ bo'lganda L^p fazoga qarashli bo'lishi ko'rsatgan. Bundan tashqari darajaning aniq ekanligi isbotlangan.

Kalit so'zlar: Tebranuvchan integrallar, Fur'e almashtirishi, sirtida mujassamlashgan o'lchovlar, oddiy maxsuslik, gradient ideal, kritik nuqtalarning karraliligi.

Об осциллирующих интегралах, связанных с особенностями типа E_6 Арнольда

Аннотация. В данной статье мы рассматриваем проблему интегрируемости преобразования Фурье мер с некоторой степенью. Мы покажем, что в трехмерном евклидовом пространстве преобразование Фурье меры, сосредоточенной на гиперповерхности фазовая функция которой имеет особенность Арнольда типа E_6 , принадлежит в L^p при $p>3$. К тому же доказана точность показателя.

Ключевые слова: Осциллирующие интегралы, преобразование Фурье, поверхностные меры, простая особенность, градиентный идеал, кратность критических точек.

On the oscillatory integrals related to the Arnold singularities of type E_6 .

Abstract. In this paper we consider the integrability problem for the Fourier transform of measures with some degree. We show that in three-dimensional Euclidean space the Fourier transform of the surface-carried measures belongs to the space L^p for $p>3$ in the case when the phase function associated to the surface has Arnol'd's E_6 type singularity. Moreover, the exponent is sharp.

Keywords: Oscillatory integrals, Fourier transform, surface-carried measures, simple singularities, gradient ideal, multiplicity of critical points.

Mathematics Subject Classification (2010): 42A38, 32D10(primary); 31C45 (secondary).

1. Umumiy masalaning qo'yilishi va asosiy ilmiy natija

Faraz qilaylik $S \subset \mathbb{R}^3$ silliq gipersirt va $\varphi \in C_0^\infty(S)$ compact tashuvchili (support) cheksiz silliq funksiya bo'lsin. Quyidagi ko'rinishdagi zaryadni qaraymiz: $d\mu(X) := \varphi(X)dS$, bunda dS S gipersirtning yuzasi orali berilgan o'lchov. Xususan, φ nomanfiy funksiya bo'lsa biz musbat Borel o'lchoviga ega bo'lamiz. Yuqorida aniqlangan $d\mu$ zaryadning (o'lchovning) Fur'e almashtirishi quyidagi ko'rinishdagi sirt integrali orqali aniqlanadi:

$$\widehat{d\mu}(\xi) := \int_S e^{iX \cdot \xi} d\mu(X), \quad (1)$$

Bunda $X \cdot \xi$ X va ξ vektorlarning skalyar ko'paytmasi. Shuni ta'kidlash joizki bu integral $d\mu$ zaryadga mos umumlashgan funktsiyaning taqsimot ma'nosidagi Fur'e almashtirishiga mos keladi (qarang [11]). Aslida klassik Paley-Wiener teoremasiga ko'ra kompakt tashuvchili istalgan taqsimotning Fur'e almashtirishi C^n fazoga analitik davom etadigan cheksiz silliq funktsiyaga mos keluvchi regulyar taqsimot bo'ladi. O'zimizga bir oz erk berib bunday taqsimotning Fur'e almashtirishi analitik funktsiya bo'ladi deyishimiz mumkin.

Bizni asosan $\widehat{d\mu(\xi)}$ funktsiyaning cheksizdagi xarakteri qiziqtiradi. Umumiy holda kompakt tashuvchili taqsimotning cheksizdagi xarakteri ixtiyoriy darajali tartibda bo'lishi mumkin. Buni $D^\alpha \delta$ (bunda D^α α – tartibli xususiy hosila va δ Dirak "del'ta"si). Lekin kompakt tashuvchili (bu sirt integrali orqali aniqlangan bo'lishi ham shart emas) zaryadning Fur'e almashtirishi doimo chegaralangan funktsiya bo'ladi. Bu tasdiq zaryad uchun Han yoyilmasi deb ataluvchi yoyilmadan osongina kelib chiqadi.

Bu ishda qaraladigan asosiy masalani keltiramiz: *Quyidagi*

$$\{p \in [1, \infty) : \forall \varphi \in C_0^\infty(S) \text{ funktsiya uchun ushbu munosabat bajariladi: } \widehat{d\mu} \in L^p(\mathbb{R}^{n+1})\}$$

to'planning aniq quyi chegarasi p_S ni toping, bunda $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$ $p(1 \leq p < \infty)$ – daraja bilan integrallanuvchi o'lchovli funktsiyalar sinflari fazosi, agar $p = \infty$, bo'lsa u holda biz muhim qiymatlari to'plami chegaralangan funktsiyalar fazosiga ega bo'lamiz, ya'ni muhim chegaralangan funktsiyalar fazosini qaraymiz.

Keyinchalik biz p_S sonini S sirtida mujassamlashgan $d\mu$ zaryadning aniq yig'ilish ko'rsatkichi deb ataymiz.

Eslatma. *Bu masalada S sirt gipersirt bo'lishi shart emas, ya'ni sirtning koo'lchovi birdan katta bo'lishi ham mumkin. Bundan tashqari nisbatan oson bo'lgan chegarasi yetarlicha silliq bo'lgan kompakt sohalar xarakteristik funktsiyasi uchun ham shunga o'xshash masalani qarash mumkin. Chegarasi C^1 – silliq sohalar uchun shunga o'xshash masala [9] ishda qaralgan va masalaning tugal yechimga yaqin yechimi olingan. Umumiy holda bu masala yechilmagan. Bu masalaning yechimi bir necha sohalar xususan analitic sonlar nazariyasida paydo bo'ladigan Terri muammosi ham shu shaklda ifodalanishi mumkin, bundan tashqari bu kabi masala Garmonik analiz va matematik fizika masalalarida ham katta rol o'ynaydi [15].*

Bu ishda biz Arnol'dning sodda deb ataluvchi E_6 tipdagi maxsusligiga ega funktsiyaning grafigi shaklida berilgan uch o'lchovli fazodagi sirtlar uchun yuqorida keltirilgan masalani qaraymiz. Agar φ funktsiyaning tashuvchisi sirt E_6 tipdagi maxsuslikka ega nuqtaning yetarlicha kichik atrofida mujassamlashgan bo'lsa, u holda Duistermaat tomonidan [12] ishda isbotlangan tekis bahodan osongina $p_S \leq 3h(\varphi)$ baho kelib chiqadi, bunda $h(\varphi)$ berilgan φ funktsiyaning A.N. Varchenko tomonidan (qarang [17]) kiritilgan balandligi. Bizning holda $h(\varphi) = 12/7$. Shunday qilib biz osongina $p_S \leq 36/7$ bahoga ega bo'lamiz. Ammo, bu baho aniq bahodan ancha yiroq. Yana ham aniqroq aytadigan bo'lsak $p_S = 3h(\varphi)$ teglik o'rinli bo'lishi uchun $h(\varphi) = 1$, ya'ni φ funktsiya bilan berilgan sirtning Gauss egriligi, zichlik funktsiyasi noldan farqli bo'lgan har bir nuqtada noldan farqli bo'lishi zarur va yetarlidir.

Biz φ funktsiya nolning yetarli kichik atrofida aniqlangan va bu nuqtada E_6 tipdagi maxsuslikka ega bo'lganda $p_S = 3$ tenglikning o'rinli bo'lishini ko'rsatamiz. Bundan tashqari biz $p_S \geq 3$ tengsizlik ixtiyoriy silliq sirtlar uchun bajarilishini ko'rsatamiz.

Asosiy Teorema. *Faraz qilaylik $\varphi(x_1, x_2)$ silliq funktsiya quyidagi shartlarni qanoatlantirsin: $\varphi(0) = 0, \nabla \varphi(0) = 0$ va $(0,0)$ nuqtada bu funktsiya E_6 tipdagi maxsuslikka ega bo'lsin. Agar $S \subset \mathbb{R}^3$ funktsiya $x_3 = \varphi(x_1, x_2)$ shaklda berilgan bo'lsa, u holda $(0,0,0)$ nuqtaning shunday U atrofi topiladiki,*

istalgan $\varphi \in C_0^\infty(U)$ funktsiya uchun $\widehat{d\mu} \in L^p(\mathbb{R}^3)$ munosabat ixtiyoriy $p > 3$ uchun o'rinli bo'ladi.

Bundan tashqari $\varphi(0) > 0$ bo'lib uning tashuvchisi nolning yetarli kichik atrofida joylashgan bo'lsa $d\mu$ funksiya $L^3(\mathbb{R}^3)$ fazoning elementi bo'lmaydi. Boshqacha so'zlar bilan aytganda S sirt yuqoridagi shartlarni qanoatlantiruvchi ϕ funksiyaning grafigi bo'lsa $p_S = 3$ tenlik o'rinli bo'ladi.

2 Masalaning qisqacha tarixi va dolzarbligi.

Zaryadlar Fur'e almashtirishining yig'ilishi masalasining dolzarbligi bir necha sabablarga ega:

1) **Terri muammosi:** Faraq qilaylik $Q := [0,1]^k \subset \mathbb{R}^k$ kub va $p(x,a)$ ko'effitsentlari $a \in \mathbb{R}^n$ fazoga qarashli bo'lgan, (x_1, \dots, x_k) o'zgaruvchilarga bog'liq ko'phad bo'lsin. Quyidagi integral

$$\Theta_p := \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_Q e^{2\pi i p(x,a)} dx \right|^p da$$

integralga maxsus integral deyiladi.

Bu integralning p sonining qanday qiymatlarda yaqinlashishi haqidagi masala Terri muammosi deb yuritiladi [1].

Agar $p(x,a)$ ko'phad

$$p(x,a) := a_1 x_1 + \dots + a_k x_k + \dots$$

ko'rinishda bo'lsa biz bu fazali trigonometrik integralni $\chi_Q \delta_S$ (Bunda χ_Q Q kubning xarakteristik funksiyasi, δ_S p ko'phadni aniqlovchi monomlar orqali aniqlangan silliq sirt ustidagi del'ta funksiya) taqsimotning Fur'e almashtirishi shaklida yozishimiz mumkin.

Quyidagi tasdiq Terri muammosi bilan biz qarayotgan muammo orasidagi bog'liqlikni ko'rsatadi:

1-tasdiq. Agar $0 \leq \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ berilgan funksiya uchun ixtiyoriy $x \in Q$ nuqtada $\varphi(x) = 1$

tenglik bajarilsa hamda $\varphi \delta_S \in L^q(\mathbb{R}^n)$ ($q > 1$) munosabat o'rinli bo'lsa, u holda istalgan $q \leq p$ bo'lganda maxsus integral Θ_p yaqinlashuvchi bo'ladi.

1-tasdiqning isboti. $a \in \mathbb{R}^n$ vektorni $a = (a', a'')$ shaklida yozib olamiz, bunda $a' := (a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{R}^k$ va $a'' \in \mathbb{R}^{n-k}$. Istalgan $x \in Q$ uchun $\varphi(x) = 1$ bo'lgani bois Biz quyidagi ayniyatni yozishimiz mumkin:

$$\int_Q e^{2\pi i p(x,a)} dx = \int_Q e^{2\pi i p(x,a')} \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^k} e^{2\pi i p(x,a')} \chi_Q(x) \varphi(x) dx.$$

Endi $p(x,a)$ funksiyaning ko'rinishidan

$$p(x,a) = (a', x) + p_1(x, a'')$$

shaklda yozamiz, bunda (a', x) a' va x vektorlarning skalyar ko'paytmasi. Shunday qilib

$$J(a', a'') = \int_{\mathbb{R}^k} e^{2\pi i (x, a')} e^{2\pi i p_1(x, a'')} \varphi(x) \chi_Q(x) dx = \int_{\mathbb{R}^k} e^{2\pi i (x, a')} f_1(x, a'') f_2(x) dx,$$

bunda

$$f_1(x, a'') := e^{2\pi i p_1(x, a'')} \varphi(x), \quad f_2(x) = \chi_Q(x).$$

Singulyar integral operatorlar nazariyasidan ma'lumki ([16]119 betdagi 4-teoremaga qarang), istalgan $1 < p < \infty$ uchun

$$\int_{\mathbb{R}^k} |J(a', a'')|^p da' \leq C_p \int_{\mathbb{R}^k} \left| \int_{\mathbb{R}^k} e^{2\pi i (x, a')} e^{2\pi i p_1(x, a'')} \varphi(x) dx \right|^p da'$$

tengsizlik bajariladi.

Shuni ta'kidlaymizki $e^{2\pi i p_1(x, a'')} \varphi(x)$ funksiya cheksiz marta differensiallanuvchi bo'lgani bois istalgan tayinlangan a'' uchun uning Fur'e almashtirishi Schwartz funksiyasi bo'ladi va tayinlangan a'' uchun albatta a' bo'yicha istalgan $r \geq 1$ uchun r – daraja bilan integrallanuvchi bo'ladi.

Ammo, uning integrali albatta a'' ga bog'liq bo'ladi.

Suning uchun endi biz $q \leq p$ deb olamiz va 1-tasdiqning integrallanuvchilik shartidan foydalanamiz va osongina:

$$\int_{\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}} |J(a', a'')|^p da \leq C_p \int_{\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}} \left| \int_{\mathbb{R}^k} e^{2\pi i(x, a')} e^{2\pi i p_1(x, a'')} \varphi(x) dx \right|^p da$$

tengsizlikka kelamiz. Shunday qilib biz 1-tasdiqni isbotladik.

Bundan tashqari, standard birning yoyilmasidan foydalanib biz φ ning tashuvchisi yetarlicha kichik deb faraz qilishimiz ham mumkin. Shunday qilib biz Terri muammosini biz qo'yilgan asosiy muammoga, ya'ni amplitudasi chesiz silliq hamda tashuvchisi yetarlicha kichik bo'lgan tebranuvchan integral orqali aniqlangan funksiyaning biror daraja bilan integrallanishi masalasiga keltirdik.

Endi yana bir masalani keltiramiz. Faraz qilaylik $E(x)$ biror silliq funksiya hamda $a \in \mathbb{R}$ uning kritik qiymatlar to'plamidan tashqarida yotsin, ya'ni ixtiyoriy $x \in E^{-1}(a)$ uchun $\nabla E(x) \neq 0$ bo'lsin. U holda oshkormas funksiya haqidagi teorema ko'ra $S_a := \{x: E(x) = a\}$ sirt cheksiz silliq sirt bo'ladi. Xususan $E(x) = \cos(x_1) + \dots + \cos(x_k)$ bo'lsa $E(x)$ funksiya diskret Schrödinger operatori uchun dispersion munosabat va S_a sirtga Ferma sirti deyiladi. Bu holda S_a sirtida mujassamlashgan o'lchivlar uchun yig'ilish masalasi ($k = 3$ bo'lgan holda [3] ishda o'rganilgan va bu baho Schrödinger operatori bilan bog'langan singulayar integralning xarakterini o'rganishga qo'llanilgan.

Bu kabi o'lchovlarning tekis baholari ham keng qo'llanilgan.

Asosiy masala yechimining yana bir qo'llanilishi Fur'e almashtirishini toraytirish ("Fourier restriction problem") haqidagi quyidagi a-prior baho orqali ifodalanuvchi masaladir: Faraz qilaylik $S \subset \mathbb{R}^n$ biror tayinlangan silliq sirt (gipersirt bo'lishi shart emas) va φ nomanfiy kompakt tashuvchili funksiya bo'lsin. Bu masala quyidagicha ifodalanadi:

$$\left(\int_S |\hat{f}(\xi)|^q \varphi(\xi) dS(\xi) \right)^{\frac{1}{q}} \leq C_{p,q} \mathbf{P}f\mathbf{P}_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

tengsizlik istalgan Schwartz funksiyasi uchun o'rinli bo'ladigan barcha (p, q) juftliklar to'plamini toping, bunda $C_{p,q}$ faqat (p, q) juftlikka bog'liq bo'lgan son.

Bu masala hozirgacha yechilmagan masalalardan biri hisoblanadi ([15], [8] ga qarang).

Yuqoridagi asosiy masalaning yechimi (p, q) sonlariga chegaralash haqidagi oxirgi tengsizlik o'rinli bo'lishi uchun ba'zi zaruriy shartlarni keltirib chiqaradi.

3 Arnol'dning E_6 maxsusligi haqida

Biz bu bo'limda E_6 maxsuslik haqidagi ba'zi ma'lumotlarni keltiramiz. Faraz qilaylik $p_k(x_1, x_2)$ darajasi $k \geq 0$ bo'lgan bir jinsli k – darajali ko'phad bo'lsin. Biz $m_{s_1}(p_k)$ orqali nolmas p_k ko'phadning, markazi koordinatalar boshida bo'lgan birlik aylana boshida nollari tartiblarining eng kattasini belgilaymiz. Masalan, $p_2(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$ bo'lsa $m_{s_1}(p_2) = 1$ va $p_2(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ bo'lsa $m_{s_1}(p_2) = 0$, hamda $p_2(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^2$ bo'lsa $m_{s_1}(p_2) = 2$ bo'ladi.

Faraz, qilaylik $\phi(x_1, x_2)$ cheksiz silliq funksiya bo'lib ixtiyoriy $|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 \leq 2$ multiindeks uchun $D^\alpha \phi(0) = 0$ shart bajarilsin. U holda $\phi(x_1, x_2)$ funksiya Teylor qatori uchun

$$\phi(x_1, x_2) = p_3(x_1, x_2) + p_4(x_1, x_2) + \dots,$$

yoyilma o'rinli bo'ladi.

2-tasdiq. Yuqoridagi ϕ funksiya koordinatalar boshida E_6 tipidagi maxsuslikka ega bo'lishi uchun $m_{s_1}(p_3) = 3$ va $\text{Res}(p_3, p_4) \neq 0$ bo'lishi zarur va yetarlidir, bunda $\text{Res}(p_3, p_4)$ p_3, p_4 ko'phadlarning rezultanti. Boshqacha so'zlar bilan aytganda ϕ funksiya koordinatalar boshida E_6 tipidagi maxsuslikka ega bo'lishi uchun $m_{s_1}(p_3) = 3$ va p_3, p_4 ko'phadlar S^1 aylana ustida umumiy nolga ega bo'lmasliklari zarur va yetarli.

2-tasdiqning isboti. Albatta bu tasdiq Arnol'dning umumiy nazariyasidan kelib chiqadi. Biz o'quvchilarga qulay bo'lishi uchun 2- tasdiqning elementar va bevosita isbotini keltiramiz. Faraz qilaylik $m_{s_1}(p_3) = 3$ va p_3, p_4 ko'phadlar S^1 aylana ustida umumiy nolga ega bo'lmasin. Agar $m_{s_1}(p_3) = 3$ bo'lsa u holda aqalli bittasi noldan farqli bo'lgan shunday b_1, b_2 haqiqiy sonlari topiladiki $p_3(x_1, x_2) = (b_1x_1 + b_2x_2)^3$ tenglik o'rinli bo'ladi. Biz quyidagi teskarlanuvchi chiziqli almashtirishni qo'llaymiz: $y_1 = -b_2x_1 + b_1x_2$, $y_2 = b_1x_1 + b_2x_2$. Belgilashlarni soddalashtirish uchun yangi y o'zgaruvchilarni yana x orqali va bu koordinatalarda yozilgan yangi funksiyani yana ϕ orqali belgilab quyidagini hosil qilamiz:

$$\phi(x_1, x_2) = x_2^3 + p_4(x_1, x_2) + \dots,$$

Endi 2-tasdiqning sharti $p_4(x_1, 0) = c_0x_1^4$ va $c_0 \neq 0$ shaklida yoziladi. Biz agar zarurat bo'lsa chiziqli almashtirishni bagarib

$$p_4(x_1, 0) = c_0x_1^4 + c_2x_1^2x_2^2 + c_3x_1x_2^3 + c_4x_2^4, \quad (2)$$

ya'ni $x_1^3x_2$ monom oldidagi koeffitsient nolga teng holga keltirishimiz mumkin.

Endi p_4 (2) ko'rinishga egaligini hisobga olib $\partial_2^2\phi(x_1, x_2) = 0$ tenglamani qaraymiz. Oshkormas funksiya haqidagi teorema ko'ra bu tenglama $(0,0)$ nuqtaning yetarli kichik atrofida $x_2 = x_1^m\omega(x_2)$ ko'rinishdagi yechimga ega bo'ladi, bunda $m \geq 2$ va ω silliq funksiya. Agar yechim tekis funksiya bo'lmasa $\omega(0) \neq 0$ deb olamiz, aks holda u cheksiz silliq bo'lib biz $m \geq 2$ sonini xohlaganicha katta deb olishimiz mumkin va yana ω silliq bo'lib, qo'shimcha ravishda $\omega(0) = 0$ shart bajariladi.

Endi ϕ funksiyani $(x_2 - x_1^m\omega(x_1))^3$ ga bo'lamiz ([5] va [10] monografiyalardagi Veyershtassning bo'lish haqidagi teremasiga qarang) va quyidagi natijaga kelamiz:

$$\phi(x_1, x_2) = b(x_1, x_2)(x_2 - x_1^m\omega(x_1))^3 + x_2^2b_2(x_1) + x_2x_1^{k_1}b_1(x_1) + x_1^4b_0(x_1),$$

bunda $b_j, j = 0, 1, 2$ silliq funksiyalar bo'lib $b_0(0) = c_0 \neq 0$ va $b(0,0) = 1$. Endi $x_1^m\omega(x_1)$ funksiyaning aniqlanishini e'tiborga oladigan bo'lsak $b_2 \equiv 0$ tenglikka kelamiz, bundan tashqari yuqoridagi p_4 ko'phadning (2) shaklidan $k_1 \geq 4$ ekanligi kelib chiqadi. Shunday, qilib

$$\phi(x_1, x_2) = b(x_1, x_2)(x_2 - x_1^m\omega(x_1))^3 + x_2x_1^{k_1}b_1(x_1) + x_1^4b_0(x_1),$$

tenglikka kelamiz.

Nihoyat, $k_1 \geq 4$ ekanligini hisobga olib

$$y_1 = x_1 |b_0(x_1)|^{\frac{1}{4}} \sqrt[4]{1 + x_2x_1^{k_1-4} \frac{b_1(x_1)}{|b_0(x_1)|}}, \quad y_2 = \sqrt[3]{b(x_1, x_2)(x_2 - x_1^m\omega(x_1))}, \quad (3)$$

almashtirishni olamiz. Teskari akslantirish haqidagi teorema ko'ra bu akslantirish $(0,0)$ nuqtaning biror atrofida teskariga ega va teskarisi ham cheksiz differentsiallanuvchi bo'ladi. Osongina ko'rish mumkinki (y_1, y_2) koordinatalarda ϕ quyidagi shaklga ega bo'ladi:

$$\phi(x_1(y_1, y_2), x_2(y_1, y_2)) = y_2^3 + \text{sign}(b_0(0,0))y_1^4. \quad (4)$$

Diffeomorf almashtirish orqali (4) ko'rinishga keluvchi funksiyalar Arnol'dning E_6 tipidagi maxsusligi deyiladi.

Shunday qilib biz ϕ funksiya uchun $m_{s_1}(p_3) = 3$ bo'lib (albatta $p_k = 0(k \leq 2)$ shart ostida) p_3, p_4 ko'phadlar S^1 ustida umumiy nolga ega bo'lmasa u holda ϕ funksiya koordinatalar boshida E_6 tipdagi maxsuslikka ega ekanligini ko'rsatdik.

2-tasdiqning isbotini yakunlash uchun uning teskarinsini ko'rsatamiz: Ya'ni agar ϕ koordinatalar boshida E_6 tipdagi maxsuslikka ega bo'lsa, u holda yuqoridagi shartlar bajarilishini ko'rsatamiz. Avvalo, shuni ta'kidlaymizki, agar ϕ ikki o'zgaruvchili funksiya bo'lsa bu funksiyaning maxsus nuqtadagi

Hessianing rangi (xuddi shunday korangi) diffeomorf almashtirishga bo'g'liq emas. Shu boisdan biz $0 \leq k \leq 2$ uchun $p_k = 0$ ekanligiga kelamiz. Ikkinchi tomondan ixtiyoriy diffeomorf akslantirish p_3 ko'phadga chiziqli akslantirish sifatida ta'sir qiladi. Chiziqli akslantirish esa ravshanki $m_{s_1}(p_3)$ ni o'zgartirmaydi. Shuning uchun agar zarurat bo'lsa biz chiziqli akslantirishni qo'llab $p_3(x_1, x_2) = x_2^3$ deb faraz qilishimiz mumkin.

Nihoyat $p_4(x_1, 0) = c_0 x_1^4$ va $c_0 \neq 0$ ekanligini ko'rsatish qoldi xolos.

Buning uchun bizga ba'zi tushinchalar kerak bo'ladi [2]. Faraz qilaylik ϕ koordinatalar boshining biror atrofida aniqlangan C^∞ funksiya bo'lib $\phi(0) = 0, \nabla\phi(0) = 0$ bo'lsin. Quyidagi halqaga $I_{\nabla\phi} := \partial_1\phi C^\infty(\mathbb{R}^2) + \partial_2\phi C^\infty(\mathbb{R}^2)$ gradiyent ideal deb ataladi, bu erda $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ koordinatalar boshida aniqlangan C^∞ funksiyalarning ekvivalentlik sinflaridan tuzilgan algebra. Ikki f_1, f_2 funksiyalar koordinatalar boshining biror atrofida aynan teng bo'lsa ularga ekvivalent funksiyalar deb ataladi.

Maxsuslikning lokal algerasi deb $Q_\phi := C^\infty(\mathbb{R}^2)/I_{\nabla\phi}$ faktor algebraga aytiladi. Agar bu faktor algebra chekli \mathbb{R} -modul strukturasi ega bo'lsa, ya'ni o'zimizga bir oz erk berib chekli o'chovli chiziqli fazo bo'lsa, u holda $\dim_{\mathbb{R}} Q_\phi = k$ soniga $x = 0$ kritik nuqtaning karraliligi deb ataladi va unga chekli karrali kritik nuqta deyiladi. Aks holda kritik nuqta cheksiz karrali kritik nuqta deyiladi. Masalan $\phi(x_1, x_2) = x_1^2$ bo'lsa, ya'ni u x_2 o'zgaruvchiga bog'liq bo'lmasa, $x = 0$ cheksiz karrali kritik nuqta bo'ladi.

Gradient idealning ta'rifidan kelib chiqadiki istalgan $F : (\mathbb{R}^2, 0) \mapsto (\mathbb{R}^2, 0)$ koordinatalar boshining biror atrofida diffeomorf akslantirish bo'lib $F(0) = 0$ shart bajarilsa

$$I_{\nabla\phi} = I_{\nabla(\phi \circ F)}, \quad Q_\phi = Q_{\phi \circ F}$$

tengliklar o'rinli bo'ladi. Xususan, kritik nuqtaning karrasi diffeomorf akslantirishda o'zgaraydi.

Shuning uchun biz $\phi(x_1, x_2) = x_2^3 + x_1^4$ deb olishimiz mumkin ($\phi(x_1, x_2) = x_2^3 - x_1^4$ hol shunga o'xshash tavsiflanadi).

Bu holda $I_{\nabla\phi} = \langle x_2^2, x_1^3 \rangle$, ya'ni gradient ideal yasovchilari x_2^2, x_1^3 bo'lgan idealdir. Hamda maxsuslikning lokal algerasi Q_ϕ ni $\{1, x_1, x_1^2, x_2, x_1 x_2, x_1^2 x_2\}$ bazisga ega bo'lgan chiziqli fazo deyishimiz mumkin. Demak $k = 6$ bo'lib shuning uchun ham E_6 orqali belgilangan, ya'ni E ning indeksi kritik nuqtaning karralik ko'rsatkichini bildiradi.

Endi 1- tasdiqning isbotiga qaytamiz. Isbot teskarisini faraz qilish orqali amalga oshiriladi. Faraz qilaylik $p_3(x_1, x_2) = x_2^3$ va $p_4(x_1, 0) \equiv 0$ bo'lsin.

U holda yana $\partial_2^2\phi(x_1, x_2) = 0$ tenglamaning $x_1^m \omega(x_1)$ yechimini olib va $(x_2 - x_1^m \omega(x_1))^3$ ga bo'lib

$$\phi(x_1, x_2) = b_3(x_1, x_2)(x_2 - x_1^m \omega(x_1))^3 + x_2 x_1^{k_1} b_1(x_1) + x_1^{k_0} b_0(x_1)$$

munosabatga kelamiz, bunda $k_1 \geq 3$ va $k_0 \geq 5$. Yoki $x_2 - x_1^m \omega(x_1) \mapsto x_2$ almashtirish olib

$$\phi(x_1, x_2) = b_3(x_1, x_2)x_2^3 + x_2 x_1^{k_1} b_1(x_1) + x_1^{k_0} b_0(x_1)$$

bu erda $b_3(0, 0) = 1$ va $k_1 \geq 3$ hamda $k_0 \geq 5$.

Endi, ikki holni alohida qarab chiqamiz. Faraz qilaylik $k_1 = 3$ va $b_1(0) \neq 0$ hamda $k_0 \geq 5$ bo'lsin u holda $\phi(x_1, x_2)$ quyidagi shaklda yoziladi:

$$\phi(x_1, x_2) = x_2^3 + x_2 x_1^3 b_1(0) + \dots,$$

bu erda "... " $x_1^{l_1} x_2^{l_2}$ shaklidagi $2l_1/9 + l_2/3 > 1$ shartni qanoatlantiruvchi monomlarning formal yig'indisidan iborat. Shuning uchun $1, x_1, x_2, x_2^2, x_1 x_2, x_1 x_2^2, x_1^2$ monomlar Q_ϕ fazoda chiziqli erkli bo'ladi.

Xuddi shunday $k_1 > 3$ va $3k_1 < 2k_0$ bo'lgan holda ham bu monomlar o'sha fazoda chiziqli erkli bo'ladi. $3k_1 \geq 2k_0$ bo'lganda esa $1, x_1, \dots, x_1^{k_0-2}, x_2, x_2x_1, \dots, x_2x_1^{k_0-2}$ monomlar Q_ϕ fazoda chiziqli erkli monomlar sistemasini tashkil qiladi ([2] 169- betga qarang). Ikkala holda ham $\dim_{\mathbb{R}} Q_\phi \geq 7$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Shuning uchun ϕ bu holda E_6 tipidagi maxsuslikka ega bo'lishi mumkin emas, aks holda biz $6 = \dim_{\mathbb{R}} Q_\phi \geq 7$ ziddiyatga kelamiz. 2-tasdiq isbot bo'ldi.

2-tasdiqdan quyidagi natijaga kelamiz.

3- Natija. Agar ϕ koordinatalar boshida E_6 tipidagi maxsuslikka ega bo'lsa, u holda u chiziqli almashtirish orqali quyidagi shaklda yoziladi:

$$\phi(x_1, x_2) = b_3(x_1, x_2)(x_2 - x_1^m \omega(x_1))^3 + x_2 x_1^k b_1(x_1) + x_1^4 b_0(x_1)$$

bu erda b_3, b_1, b_0, ω silliq funksiyalar bo'lib, $b_3(0,0) = 1, b_0(0) \neq 0$ hamda $m \geq 2, k_1 \geq 4$ shartlar bajariladi.

4 Rendel maksimal funksiyalarining yig'ilishi masalasi

Ma'lumki $\widehat{d\mu}(\xi)$ quyidagi karrali integral shaklida yoziladi:

$$\widehat{d\mu}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{i(\xi_3 \phi(x_1, x_2) + x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2)} \varphi(x_1, x_2, \phi(x_1, x_2)) \sqrt{1 + |\nabla \phi(x_1, x_2)|^2} dx_1 dx_2. \quad (5)$$

Bizning farazimizga ko'ra φ funksiyaning tashuvchisi koordinatalar boshining yetarli kichik atrofida joylashgan va $\nabla \phi(0) = 0$. Shu boisdan aniqlik uchun $|\xi_3| \leq \max\{|\xi_1|, |\xi_2|\}$ bo'lganda faza funksiyasi deb ataluvchi quyidagi

$$\Phi(x, s) := \phi(x_1, x_2) + s_1 x_1 + s_2 x_2, \quad (6)$$

(bunda $s_j = \xi_j / \xi_3, j = 1, 2$) funksiya uchun $\max\{|s_1|, |s_2|\} \geq 1$ bo'lib biror $\delta > 0$ topilib, ixtiyoriy $(x_1, x_2) \in \text{supp}(\varphi(\cdot, \phi(\cdot)))$ nuqta uchun $|\nabla \Phi(x, s)| \geq \delta$ tengsizlik bajariladi. Bu tengsizlikka asosan,

bo'laklab integrallash formulasidan foydalanib katta $|\xi|$ larda $\widehat{d\mu}(\xi) = O(|\xi|^{-N})$ munosabatga ega bo'lamiz. Shuning uchun biz bundan keyin $\max\{|s_1|, |s_2|\} \leq 1$ deb faraz qilamiz va (5) ni quyidagicha yozib olamiz:

$$J(\lambda, s) := \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\lambda \Phi(x, s)} a(x) dx, \quad (7)$$

bunda

$$a(x) = a(x_1, x_2) := \varphi(x_1, x_2, \phi(x_1, x_2)) \sqrt{1 + |\nabla \phi(x_1, x_2)|^2}$$

amplituda deb ataluvchi funksiya.

Biz ishning qolgan qismida $J(\lambda, s)$ tebranuvchan integralning λ, s parametrlarga nisbatan xarakterini o'rganamiz. Buning uchun Rendel funksiyasi deb ataluvchi funksiyani kiritamiz [14]:

$$m(s) := \sup_{|\lambda| > 0} |\lambda| |J(\lambda, s)|. \quad (8)$$

Bu funksiya Borel ma'nosida o'lchovli funksiya bo'ladi.

4-teorema. Agar ϕ funksiya koordinatalar boshida E_6 tipidagi maxsuslikka ega bo'lsa, u holda nol nuqtaning shunday U atrofi topiladiki, istalgan $a \in C_0^\infty(U)$ funksiya uchun $m \in L_{loc}^{3-0}(\mathbb{R}^2)$ munosabat o'rinli bo'ladi.

Bu erda biz tabiiy ravishda aniqlanadigan $L_{loc}^{3-0}(\mathbb{R}^2) = \bigcap_{p < 3} L_{loc}^p(\mathbb{R}^2)$ belgilashdan foydalandik.

Eslatma. 4-teoremaning tasdig'i aniqdir. Ya'ni agar $\phi(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4$ hamda $a(0) > 0$ bo'lib, uning tashuvchisi koordinatalar boshining yetarli kichik atrofida joylashgan bo'lsa, u holda $m \notin L_{loc}^3(\mathbb{R}^2)$ ekanligini ko'rsatish mumkin. Bundan tashqari amplitudaning tashuvchisi nolning yetarli

kichik atrofida joylashgan holda hamda $|s| > 1$ shartda $m(s)$ chegaralangan funksiya bo'ladi. Shuning uchun $|s| \leq 1$ va hatto $|s|$ yetarlicha kichik son deb faraz qilishimiz ham mumkin.

4-teoremani isbot qilish uchun singulyar integral tenglamalar nazariyasida keng qo'llaniladigan birning yoyilmasidan foydalanamiz.

Faraz qilaylik $\kappa_1 = 1/4$ va $\kappa_2 = 1/3$ va musbat r soni uchun δ_r quyidagi formula bilan aniqlangan cho'zishni belgilaymiz: $\delta_r(x) := (r^{\kappa_1} x_1, r^{\kappa_2} x_2)$.

Vazn deb ataluvchi κ – juftlikka mos "masofa"ni quyidagicha aniqlaymiz:

$$\rho_\kappa(x_1, x_2) := (x_1^8 + x_2^6)^{\frac{1}{2}}.$$

Faraz qilaylik β quyidagicha aniqlangan nomanfiy silliq funksiya bo'lsin

$$\beta(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } \rho_\kappa(x) \leq 1, \\ 0 & \text{if } \rho_\kappa(x) \geq 2. \end{cases} \tag{9}$$

Islangan natural $k \in \mathbf{N}$ soni uchun χ_k funksiyani quyidagicha aniqlaymiz: $\chi_k(x) = \beta(\delta_{2^{k-1}}(x)) - \beta(\delta_{2^k}(x))$. U holda $supp(\chi_k) \subset D$ bunda D quyidagicha aniqlangan halqa:

$D := \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : \frac{1}{2} \leq \rho_\kappa(x_1, x_2) \leq 2\}$. Bundan tashqari quyidagi formula o'rinni:

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \chi_k(x) = \beta(\delta_{2^{k_0-1}}(x)), \quad \text{bunda } x \neq 0. \tag{10}$$

Shuni ta'kidlaymizki $\{0 < \rho_\kappa(x) < 2^{-k_0}\}$ sohada (10) qator lokal chekli yig'indidir, ya'ni ixtiyoriy $x^0 \neq 0$ nuqtaning shunday $U(x^0)$ atrofi topiladiki, quyidagi to'plam $\{k \in \mathbf{N} : U(x^0) \cap supp(\chi_k) \neq \emptyset\}$ faqat chekli sondagi elementlarga ega bo'ladi. Shuning uchun ham (10) qator $\{0 < \rho_\kappa(x) < 2^{-k_0}\}$ to'plamda lokal tekis yaqinlashadi va uning yig'indisi cheksiz marta differentsiallanuvchi funksiya bo'ladi.

Aniqlik uchun $J(\lambda, s)$ tebranuvchan integral amplitudasining tashuvchisi $\{\rho_\kappa(x) < 2^{-k_0-1}\}$ to'plamda yotadi deb faraz qilamiz. Nihoyat birning yoyilmasi bo'lgan (10) tenglikdan foydalanib quyidagiga ega bo'lamiz:

$$J(\lambda, s) = \sum_{k=k_0}^{\infty} J_k(\lambda, s), \tag{11}$$

bunda

$$J_k(\lambda, s) := \int_{\mathbf{R}^2} a(x) \chi_k(x) e^{i\lambda \Phi(x,s)} dx, \quad \text{qandayki } k = k_0, k_0 + 1, \dots$$

$J_k(\lambda, s)$ integralda cho'zish orqali berigan almashtirishni bajaramiz: $\delta_{2^k} x \rightarrow x$ va quyidagini olamiz:

$$J_k(\lambda, s) := 2^{-k|\kappa|} \int_{\mathbf{R}^2} a(\delta_{2^{-k}}(x)) \chi_1(x) e^{i\lambda 2^{-k} \Phi_k(x,\sigma)} dx,$$

bunda

$$|\kappa| := \kappa_1 + \kappa_2, \Phi_k(x, \sigma) := \phi_k(x_1, x_2) + \sigma_1 x_1 + \sigma_2 x_2,$$

bu erda

$$\begin{aligned} \phi_k(x_1, x_2) := & b(\delta_{2^{-k}}(x)) (x_2 - 2^{(\kappa_2 - m\kappa_1)k} x_1^m \omega(2^{-\kappa_1 k} x_1))^3 + \\ & 2^{(1-\kappa_2 - 4\kappa_1)k} x_2 x_1^4 \beta_1(2^{-\kappa_1 k} x_1) + x_1^4 \beta_0(2^{-\kappa_1 k} x_1) \text{ va } \sigma_j := 2^{(1-\kappa_j)k} s_j \quad (j = 1, 2). \end{aligned}$$

Shuni ta'kidlaymizki, $J_k(\lambda, s)$ integral amplitudasining tashuvchisi D halqada yotadi va $k \geq k_0$ hamda k_0 yetarlicha katta natural son. Shuning uchun ham biz $\phi_k(x_1, x_2)$ funksiyani quyidagi, nolda yakkalangan kritik nuqtaga ega bo'lgan $b(0,0)x_2^3 + x_1^4 \beta_0(0)$ ko'phadning kichik deformatsiyasi deb

qarashimiz mumkin. Shuning uchun ham C_1 va k_0 musbat sonlari topiladiki $|\sigma| > C_1$ va $k \geq k_0$ bo'lganda quyidagi baho o'rinli bo'ladi:

$$|J_k(\lambda, s)| \leq \frac{C2^{-k|\kappa|} PaP_{C^1}}{1 + |\lambda 2^{-k} \sigma|}, \quad (12)$$

bunda $P \cdot P_{C^1}$ C^1 fazoning tabiiy normasi. Yuqoridagiga o'xshash shunday musbat son $\varepsilon > 0$ topiladiki $|\sigma| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilganda:

$$|J_k(\lambda, s)| \leq \frac{C2^{-k|\kappa|} PaP_{C^1}}{1 + |\lambda 2^{-k}|} \quad (13)$$

baho o'rinli bo'ladi.

Endi $J_k(\lambda, s)$ integralning xarakterini $\sigma \in \Sigma := \{\varepsilon \leq |\sigma| \leq C_1\}$ shartlarda o'rganamiz. Bu holda standard Σ kompaktni chekli qoplamasidan foydalanamiz.

5-lemma. *Shunday musbat k_0 soni topiladiki, ixtiyoriy $k \geq k_0$ bo'lganda shunday $\psi_k \in L^{3-0}(\Sigma)$ funksiya mavjud va bu funksiya orqali quyidagi baho:*

$$|J_k(\lambda, s)| \leq \frac{C2^{(1-|\kappa|)k} \psi_k(\sigma) PaP_{C^2}}{|\lambda|}, \quad (14)$$

o'rinli bo'ladi, bundan tashqari istalgan tayinlangan $1 \leq p < 3$ soni uchun ψ_k funksiyaning $L^p(\Sigma)$ normasi $k \geq k_0$ ga nisbatan tekis chegaralangan bo'ladi.

Isbot. Faraz qilaylik, $\sigma^0 = (\sigma_1^0, \sigma_2^0) \in \Sigma$ ixtiyoriy tayinlangan nuqta bo'lsin. Avvalo σ^0 nuqtaning ikkala komponentasi, ya'ni $\sigma_j^0 \neq 0 (j = 1, 2)$ noldan farqli deb faraz qilamiz. U holda quyidagi funksiya

$$b(0,0)x_2^3 + x_1^4 \beta_0(0) + \sigma_1^0 x_1 + \sigma_2^0 x_2 \quad (15)$$

ko'pi bilan ikkita xosmas kritik nuqtaga ega bo'ladi. Shuning uchun shunday musbat k_0 soni va σ^0 nuqtaning shunday $V(\sigma^0)$ atrofi topiladiki $k \geq k_0$ va $\sigma \in V(\sigma^0)$ bo'lganda quyidagi baho o'rinli bo'ladi:

$$|J_k(\lambda, s)| \leq \frac{C2^{(1-|\kappa|)k} PaP_{C^2}}{|\lambda|}. \quad (16)$$

Endi faraz qilaylik $\sigma_1^0 = 0$ bo'lsin. U holda Σ to'plamning aniqlanishiga ko'ra: $\sigma_2^0 \neq 0$. Bundan kelib chiqadiki $b(0,0)\sigma_2^0 < 0$ shart bajarilganda (15) funksiya ikkita A_3 tipidagi maxsuslikka ega bo'ladi. Agar $b(0,0)\sigma_2^0 > 0$ bo'lsa, u holda faza funksiyasi kritik nuqtalarga ega bo'lmaydi. So'nggi holda bo'laklab integrallash formulasini qo'llab (16) shakldagi bahoga kelamiz.

Shuning uchun shunday musbat δ_1, δ_2, k_0 sonlari topiladiki istalgan $k \geq k_0$ bo'lganda $\psi_{k\sigma^0} \in L^{3-0}((-\delta_1, \delta_1) \times (\sigma_2^0 - \delta_2, \sigma_2^0 + \delta_2))$ funksiya topilib ixtiyoriy tayinlangan $1 \leq p < 3$ uchun quyidagi integral

$$\int_{\{|\sigma_1| < \delta_1\}} (\psi_{k\sigma^0}(\sigma_1, \sigma_2))^p d\sigma_1 \quad (17)$$

$k \geq k_0, \sigma_2 \in (\sigma_2^0 - \delta_2, \sigma_2^0 + \delta_2)$, o'zgaruvchilarga nisbatan tekis chegaralangan bo'lib quyidagi baho o'rinli bo'ladi:

$$|J_k(\lambda, s)| \leq \frac{2^{(1-|\kappa|)k} \psi_{k\sigma^0}(\sigma_1, \sigma_2) PaP_{C^2}}{|\lambda|}.$$

$\varepsilon \leq |\sigma_2| \leq C_1$ to'plam kompakt bo'lganligi bois shunday musbat k_0 soni va $k \geq k_0$ soniga bog'liq $\psi_{k_0} \in L^{3-0}((-\delta_1, \delta_1) \times [\varepsilon, C_1])$ funksiya topiladiki ixtiyoriy $1 \leq p < 3$ bo'lganda (17) shaklidai ψ_{k_0} funksiyaning integrali $k \geq k_0, \sigma_2 \in [\varepsilon, C_1]$ o'zgaruvchilarga nisbatan tekis chegaralangan bo'ladi.

Shunga o'xshash agar $\sigma_2^0 = 0$ bo'lsa, u holda faza funksiyasi A_2 tipdagi maxsuslikning \mathbf{R}_+ versal deformatsiyasi bo'ladi ([2]ga qarang). Shuning uchuin ham shunday musbat son k_0 va istalgan $k \geq k_0$ uchun shunday $\tilde{\psi}_{k_0} \in L^{4-0}([\varepsilon, C_1] \times (-\delta_2, \delta_2))$ funksiya topiladiki ixtiyoriy tayinlangan $1 \leq p < 4$ uchun quyidagi integral

$$\int_{\{|\sigma_2| < \delta_2\}} (\tilde{\psi}_{k_0}(\sigma_1, \sigma_2))^p d\sigma_2 \tag{18}$$

$k \geq k_0, \sigma_1 \in [\varepsilon, C_1]$ o'zgaruvchilarga nisbatan tekis chegaralangan bo'ladi.

O'z-o'zidan ravshanki quyidagicha aniqlangan funksiya

$$\psi_k(\sigma) := \mathbf{PaP}_{C^2} (C\chi_{[\delta_1, C_1]^2}(\sigma) + \chi_{(-\delta_1, \delta_1) \times [\varepsilon, C_1]}(\sigma)\psi_{k_0}(\sigma) + \chi_{[\delta_1, C_1] \times (-\delta_2, \delta_2)}(\sigma)\tilde{\psi}_{k_0}(\sigma))$$

5-lemma tasdiqlarini qanoatlantiradi. Bu erad $\chi_A - A$ to'plamning xarakteristik funksiyasi. 5-lemma isbot bo'ldi.

4-teoremaning isboti. Faraz qilaylik $V \subset \mathbf{R}^2$ nol nuqtaning biror chegaralangan atrofi bo'lsin va $1 \leq p < 3$ tayinlangan son bo'lsin. U holda quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\int_V (\psi_k(2^{(1-\kappa_1)k} s_1, 2^{(1-\kappa_2)k} s_2))^p ds_1 ds_2 = 2^{(k|-2)k} \int_{\mathbf{R}^2} (\psi_k(\sigma_1, \sigma_2))^p d\sigma_1 d\sigma_2 \leq C_p 2^{(k|-2)k}.$$

Nihoyat quyidagi funksiyaning aniqlaymiz:

$$\Psi_k(s) := 2^{(1-|\kappa|)k} C\chi_{|(2^{(1-\kappa_1)k} s_1, 2^{(1-\kappa_2)k} s_2)| < \varepsilon} (s)\mathbf{PaP}_{C^1} + \frac{C\chi_{|(2^{(1-\kappa_1)k} s_1, 2^{(1-\kappa_2)k} s_2)| > C_1} (s)\mathbf{PaP}_{C^1}}{|\sigma(s)|} + \psi_k(2^{(1-\kappa_1)k} s_1, 2^{(1-\kappa_2)k} s_2)$$

Ravshanki $2 < p < 3$ bo'lganda quyidagi munosabat o'rinli bo'ladi:

$$\int_V (\Psi_k(s_1, s_2))^p ds_1 ds_2 = 2^{(1-|\kappa|)kp + (k|-2)k} \int_{\mathbf{R}^2} (\psi_k(\sigma_1, \sigma_2))^p d\sigma_1 d\sigma_2 \leq C_p 2^{(1-|\kappa|)kp + (k|-2)k}.$$

Endi $|\kappa| = \frac{7}{12} < 1/2$ bo'laning uchun quyidagi qator

$$\Psi(s_1, s_2) := \sum_{k=k_0}^{\infty} \Psi_k(s_1, s_2)$$

$2 < p < 3$ shart bajarilganda L^p fazoda yaqinlashadi. Bundan tashqari V to'plam chekli o'lchovga ega bo'lgani uchun $\Psi \in L^{3-0}(V)$. Bu 4-teorema isbotini yakunlaydi.

5 Asosiy teoremaning isboti.

4-teoremadan $\widehat{d\mu}(\xi)$ uchun quyidagi baho kelib chiqadi:

$$|\widehat{d\mu}(r\omega)| \leq \frac{M(\omega)}{r+1}, \tag{19}$$

bu erda $\omega \in S^2$ bunda S^2 markazi koordinatalar boshida bo'lgan birlik sfera, $M \in L^{3-0}(S^2)$. Bundan tashqari klassik J. J. Duistermaat [12] teoremasiga ko'ra

$$|\widehat{d\mu}(r\omega)| \leq \frac{c}{(r+1)^{7/12}}, \tag{20}$$

Endi biz (19) va (20) baholarni interpolatsiya qilib

$$|\widehat{d\mu}(r\omega)| \leq \frac{c^{1-\alpha} M^\alpha(\omega)}{(r+1)^{\frac{7(1-\alpha)+\alpha}{12}}}, \tag{21}$$

bahoga ega bo'lamiz, bunda $0 \leq \alpha \leq 1$.

Faraz qilaylik $p > 3$ ixtiyoriy tayinlangan son bo'lsin. U holda shunday $0 \leq \alpha < 1$ sonini topish mumkinki $p\alpha < 3$ va $(7(1-\alpha)/12+\alpha)p > 3$ tengsizliklar bajariladi. Haqiqatan, ham agar $p > 36/7$ bo'lsa $\alpha = 0$ deb olish yetarli. Endi $p = 36/7$ deb olsak $0 < \alpha$ yetarlicha kichik sonni olishimiz mumkin, masalan $\alpha = 0.1$ deb olish yetarli. Nihoyat, $3 < p < 36/7$ sonini olaylik. U holda biz

$$0 < \frac{12}{5} \left(3 - \frac{7p}{12} \right) < 3$$

tengsizlikka ega bo'lamiz. Endi

$$0 < \frac{12}{5p} \left(3 - \frac{7p}{12} \right) < \alpha < \frac{3}{p} < 1$$

deb olish yetarli.

Shunday qilib biz istalgan $p > 3$ soni uchun $\widehat{d\mu} \in L^p(\mathbb{R}^3)$ munosabat o'rinli bo'lishini isbot qildik.

Nihoyat, agar $\varphi(0) > 0$ va φ funksiyaning tashuvchisi nol nuqtaning yetarli kichik atrofida joylashgan bo'lsa $\widehat{d\mu}$ funksiya $L^3(\mathbb{R}^3)$ fazoga qarashli emasligini ko'rsatamiz.

Bu munosabatni isbotlash uchun quyidagi umumiy holda bajariladigan tasdiqdan foydalanamiz.

6- lemma. Agar $J(\lambda, s)$ tebranuvchan integralda faza ϕ va a amplituda funksiyalari \mathbb{R}^2 fazo koordinatalar boshining biror atrofida cheksiz marta differensiallanuvchi va $a(0,0) > 0$ shart bajarilib amplitudaning tashuvchisi nol nuqtaning yetarli kichik atrofida joylashgan bo'lsa u holda nol nuqtaning shunday V atrofi topiladiki bu atrof uchun quyidagi munosabat o'rinli bo'ladi:

$$\int_V |J(\lambda, s)|^2 ds = \frac{c}{\lambda^2} + O(\lambda^{-5/2}), \quad \text{bunda } \lambda \rightarrow +\infty, \tag{22}$$

bundan tashqari $c \neq 0$.

6-lemmaning isboti. Aslida bu kabi natija Maslov kanonik operatorining unitarligi nomi bilan mashhur [12]. Biz bu lemmaning elementar isbotini keltiramiz.

χ orqali nomanfiy nolning yetarli kichik atrofida aynan birga teng bo'lgan kompakt tashuvchili funksiyani (cut-off function deb ataladigan funksiyani) belgilaymiz.

Quyidagi munosabat o'z-o'zidan ravshan:

$$|J(\lambda, s)|^2 = \int_{\mathbb{R}_x^2 \times \mathbb{R}_y^2} e^{i\lambda(\phi(x_1, x_2) - \phi(y_1, y_2) + s_1(x_1 - y_1) + s_2(x_2 - y_2))} a(x_1, x_2) a(y_1, y_2) dx_1 dx_2 dy_1 dy_2.$$

Endi biz quyidagi integralni qaraymiz:

$$I(\lambda) := \int_{\mathbb{R}^2} \chi(s) |J(\lambda, s)|^2 ds = \int_{\mathbb{R}_x^2 \times \mathbb{R}_y^2 \times \mathbb{R}_s^2} e^{i\lambda\Phi(x, y, s)} a(x) a(y) \chi(s) dx dy ds,$$

Bu erda

$$\Phi(x, y, s) := \phi(x_1, x_2) - \phi(y_1, y_2) + s_1(x_1 - y_1) + s_2(x_2 - y_2).$$

Endi $I(\lambda)$ integralda o'zgaruvchilarni quyidagicha almashtiramiz: $z_1 = x_1 - y_1, z_2 = x_2 - y_2$ va o'sha integralni yangi o'zgaruvchilarda yozamiz:

$$I(\lambda) = \int_{\mathbb{R}_y^2} a(y) dy \int_{\mathbb{R}_z^2 \times \mathbb{R}_s^2} e^{i\lambda\Phi(z, y, s)} a(z + y) \chi(s) dz ds,$$

Bu erda

$$\Phi(z, y, s) := \phi(z_1 + y_1, z_2 + y_2) - \phi(y_1, y_2) + s_1 z_1 + s_2 z_2.$$

Endi ichki integralni qaraymiz:

$$I_{in}(\lambda, y) := \int_{\mathbb{R}_z^2 \times \mathbb{R}_s^2} e^{i\lambda\Phi(z, y, s)} a(z + y) \chi(s) dz ds.$$

Faza funksiyasi $\Phi(z, y, s)$ y parametriga bog'liq quyidagi kritik nuqtaga ega bo'ladi: $z^c(y) = 0, s^c(y) = -\nabla\phi(y)$. Bundan tashqari $\det Hess\Phi(z^c(y), y, s^c(y)) = 1$, va kritik nuqtada Hessian matritsasining signaturasi nolga teng va yana $\Phi(z^c(y), y, s^c(y)) = 0$. Shuning uchun agar a va χ funksiyalarning tashuvchilari yetarlicha kichik bo'lsa odatdagi stationary faza usuliga ko'ra ([4] ga qarang) quyidagi asymptotik yoyilmaga ega bo'lamiz:

$$I_{in}(\lambda, y) := c \frac{a(y)\chi(s^c(y))}{|\lambda|^2} + O(|\lambda|^{-\frac{5}{2}}),$$

bunda $c \neq 0$ biror o'zgarmas. Bu sonning aniq qiymatini ham ko'rsatishimiz mumkin. Ammo, bu hozircha bizga shart emas. Shuni ta'kidlash joizki $O(|\lambda|^{-\frac{5}{2}})$ qoldiq had $y \in \text{supp}(a)$ ga nisbatan tekis munosabatdir. Ya'ni shunday C soni topiladiki ixtiyoriy $y \in \text{supp}(a)$ uchun $|O(|\lambda|^{-\frac{5}{2}})| \leq C|\lambda|^{-\frac{5}{2}}$ tengsizlik bajariladi.

Biz χ funksiyani shunday tanlaymizki istalgan $y \in \text{supp}(a)$ uchun $\chi(s^c(y)) = 1$ bo'ladi.

Nihoyat olingan asymptotik munosabatni integrallab

$$I(\lambda) = c \frac{\int_{\mathbb{R}^2} a^2(y) dy}{|\lambda|^2} + O(|\lambda|^{-\frac{5}{2}})$$

izlangan munosabatga keldik.

Bu 6-lemmani isbot qiladi, haqiqatan ham biz V atrofda $\chi(s) = 1$ deb olsak hamda a funksiyaning tashuvchisi yetarlicha kichik bo'lsa u holda $s \in \mathbb{R}^2 \setminus V$ uchun dastlabki faza funksiyasi $\Phi(x, s) \in \text{supp}(a)$ to'plamda kritik nuqtalarga ega bo'lmaydi. Shuning uchun biz

$$\int_V |J(\lambda, s)|^2 ds = \int_{\mathbb{R}^2} \chi(s) |J(\lambda, s)|^2 ds + O(|\lambda|^{-N}) = I(\lambda) + O(|\lambda|^{-N}),$$

bunda $N \geq 3$ istalgan son. Oxirgi tenglik 6-lemma isbotini yakunlaydi.

Nihoyat, asosiy teorema isbotining yakuniy qismiga o'tamiz. Endi ω nuqta $(0,0,1)$ nuqtaning

yetarlicha kichik atrofida o'zgaradi deb faraz qilib $\widehat{d\mu}(\xi)$ o'lchov Fur'e almashtirishini tebranuvchan integral $J(\lambda, s)$ shaklida yozib olamiz, bunda $\lambda := \xi_3, s_j = \frac{\xi_j}{\lambda}, j = 1, 2$ va $s \in V$, bunda V nol nuqtaning yetarli kichik atrofi. Agar a nomanfiy funksiya bo'lib $a(0) > 0$ shart bajarilsa, u holda 6-lemmani inobatga olib yetarli katta λ lar uchun navbatdagi quyi bahoni olamiz:

$$\int_V |J(\lambda, s)|^2 ds \geq \frac{C}{|\lambda|^2},$$

bunda C biror musbat son.

Boshqa tomondan $2 \leq p$ bo'lganda Hölder tengsizligini qo'llab quyidagiga kelamiz:

$$\int_V |J(\lambda, s)|^p ds \geq C \left(\int_V |J(\lambda, s)|^2 ds \right)^{\frac{p}{2}} \geq \frac{C}{|\lambda|^p}.$$

Pirovard natijada, $p \leq 3$ bo'lganda

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} |\widehat{d\mu}(\xi)|^p d\xi &\geq \int_1^\infty \lambda^2 d\lambda \int_V |J(\lambda, s)|^p ds \geq \\ &\int_1^\infty \lambda^2 d\lambda \left(\int_V |J(\lambda, s)|^2 ds \right)^{\frac{p}{2}} \geq C \int_1^\infty \lambda^{2-p} d\lambda = \infty \end{aligned}$$

munosabatga kelamiz.

$\widehat{d\mu(\xi)}$ chegaralangan funksiya bo'lgani bois $p \leq 3$ bo'lganda $\widehat{d\mu(\xi)} \notin L^p(\mathbb{R}^3)$ munosabatga kelamiz. Asosiy teorema isbot bo'ldi.

References

1. Arkhipov G.I., Karatsuba A.A. and Chubarikov V.N., *Trigonometric integrals*. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 43(5), 971-1003 1197 (Russian); English translation in Math. USSR-Izv., 15(1980), pp 21-239.
2. Arnol'd V. I., Gusen-zade S.M., Varchenko A.N., *Singularities of differentiable maps, Part I*, M.: Nauka, 1982.
3. Erdős, L' and Salmhofer, M., Decay of the Fourier transform of surfaces with vanishing curvature. Math. Z. 257 (2007), no. 2, 261–294.
4. Fedoryuk M.V., *Perevals method*, M.: Nauka, 1977.
5. Hörmander L., *Analysis of linear partial differential operators, part I, Distribution Theory and Fourier Analysis*, Second edition, Springer-Verlag, 1989.
6. Ikromov I. A., Damped oscillatory integrals and maximal operators, *Mathematical notes*, vol. 78, pages 833-852, 2005.
7. Ikromov I. A., Müller D., Kempe M., Damped oscillatory integrals and boundedness of maximal operators associated to mixed homogeneous hypersurfaces, *Duke Math.J.* vol. 126, No.3, pages, 471-490, 2005.
8. Ikromov, I. A., Müller, D., *Fourier restriction for hypersurfaces in three dimensions and Newton polyhedra*, Princeton University press, *Annals of Mathematics Study*, No. 194, Princeton, 2016.
9. Lebedev V.V., On Fourier transform of characteristic functions of domains with C^1 – smooth boundary. *Funkts. Anal. Prilozhen.* 2013, V. 47, No. 1. p. 33-46.
10. Malgrange B., *Ideals of differentiable functions*, Tata Institute, Bombay, and Oxford University Press, 1966.
11. Palamodov V. P., *Generalized functions and harmonic analysis, Modern problems of Mathematics, Fundamental directions*, V. 72, M. 1991, p. 5-134.
12. Duistermaat J.J., *Oscillatory integrals, Lagrange immersions and Unfoldings of singularities*. *Comm. Pure Appl. Math.*, 1974, V. 27, No. 2, p. 207-281.
13. Popov D. A., Estimates with constant for some classes oscillating integrals. *UMN.*, Vol. 52, No. 1(313), 1997, pages 77-148.
14. Randol B., On the asymptotic behavior of the Fourier transform of the indicator function of a convex set. *Trans. AMS*, 139, (1970), 279-285.
15. Stein E. M., *Harmonic Analysis Real-Valued Methods, Orthogonality, and oscillatory Integrals*, Princeton, Princeton Univ.Press, 1993.
16. Stein E. M., *Singular Integrals and differentiability properties of functions*, Princeton, Princeton Univ.Press, 1970.
17. Varchenko A.N., *Newton polyhedra and estimates for oscillatory integrals*. *Funkts. Anal. Prilozhen.* 18. No. 3. (1976), 175–196.

УДК: 519.8

ЛОГИЧЕСКИЙ МЕТОД НАХОЖДЕНИЯ МАКСИМАЛЬНЫХ СОВМЕСТНЫХ ПОДСИСТЕМ СИСТЕМ БУЛЕВЫХ УРАВНЕНИЙ

А.В. Кабулов¹, Э.Урунбаев², М.А.Бердимуродов¹

¹Национальный университет Узбекистана

²Самаркандский государственный университет

Аннотация. Решается задача поиска максимальной совместной подсистемы систем булевых уравнений. Предлагается алгоритм нахождения максимального верхнего нуля монотонной булевой функции. Исследуется и разрабатывается эффективная процедура вычисления значений монотонных функций f на наборах n - мерного куба. Разрабатывается алгоритм решения систем булевых уравнений на основе поиска максимального верхнего нуля монотонных функций алгебры логики.

Ключевые слова: Систем булевых уравнений, монотонной булевой функции, максимального верхнего нуля, совместной подсистемы.

Mantiqiy tenglamalar sistemasining maksimal qo'shma kichik sistemalarini topishning mantiqiy usuli

Annatsiya. Bul tenglamalar sistemasida maksimal bir biriga bog'liq bo'lgan qism sistemalarni topish masalasi qaraladi. Monoton bul funksiyasining maksimal yuqori nolini topish uchun algoritm taklif etiladi. n - o'lchovli kub to'plamlarida f monoton funksiyalar qiymatlarini hisoblashning samarali usuli o'rganiladi va ishlab chiqiladi. Mantiq algebrasida monoton funksiyalarning maksimal yuqori nolini topish asosida bul tenglamalar sistemalarini yechish uchun algoritm ishlab chiqilmoqda.

Kalit so'zlar: Bul tenglamalar sistemasi, Monoton bul funksiya, maksimal yuqori nol, bir biriga bog'liq bo'lgan qism sistemalar.

A logical method for finding maximum compatible subsystems of systems of boolean equations

Abstract. The problem of finding the maximum joint subsystem of Boolean equation systems is solved. An algorithm for finding the maximum upper zero of a monotone Boolean function is proposed. An efficient procedure for calculating the values of monotone functions f on sets of a n -dimensional cube is investigated and developed. An algorithm for solving systems of Boolean equations based on the search for the maximum upper zero of monotone functions of the logic algebra is developed.

Keywords: Systems of Boolean equations, Boolean monotone functions, maximum upper zero, compatible subsystem.

Введение

Новой областью приложения методов алгебры логики, обозначившейся в последнее время, является проблема распознавания множества объектов и явлений, которая может быть сведена к решению систем логических уравнений. В настоящей работе описаны основные принципы решения систем логических уравнений и строятся алгоритмы получения решений максимальных совместных подсистем булевых уравнений. Предлагается алгоритм нахождения максимального верхнего нуля монотонной булевой функции. Исследуется и разрабатывается эффективная процедура вычисления значений монотонных функций на наборах n -мерного куба. Разрабатывается алгоритм решения систем булевых уравнений на основе поиска максимального верхнего нуля монотонных функций алгебры логики.

1. Задача поиска максимального верхнего нуля монотонных булевых функций. Пусть E_n^2 – n -мерный двоичный куб. Нормой $|\tilde{\alpha}|$ набора $\tilde{\alpha}$ в E_n^2 назовем число единичных элементов. Множество всех наборов E_n^2 с нормой j назовем j -м уровнем куба.

Число $A_{\tilde{\alpha}} = \sum \tilde{\alpha}_\varphi 2^{V-\varphi}$ считаем номером $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. Будем говорить, что наборы $\tilde{\alpha}$ n -го уровня упорядочены в лексикографическом порядке, если они расположены в порядке убывания номеров $A_{\tilde{\alpha}}$.

Считаем, что набор $\tilde{\alpha}$ следует непосредственно за $\tilde{\beta}$ на κ -м уровне, $\kappa = 1, 2, \dots, n$, если $A_{\tilde{\beta}} = A_{\tilde{\alpha}}$ и на существует такого $\tilde{\gamma}$, где $|\tilde{\gamma}| = \kappa$, что $A_{\tilde{\beta}} \leq A_{\tilde{\gamma}} \leq A_{\tilde{\alpha}}$.

Пусть M_n – множество всех монотонных булевых функций от n -переменных. Набор $\tilde{\alpha} \in E_n^2$ назовем верхним нулем функции $f \in M_n$, если $f(\tilde{\alpha}) = 0^n$ и для любого набора $\tilde{\beta} \in E_n^2$ из $\tilde{\alpha} \leq \tilde{\beta}$ следует, что $f(\tilde{\beta}) \neq 0$. Верхний нуль функций $f \in M_n$ называется её максимальным верхним нулем (м.в.н.), если для любого верхнего нуля (нижней единицы) $\tilde{\beta}$ функции f выполняется условие $|\tilde{\beta}| \leq |\tilde{\alpha}|$.

Пусть произвольная функция $f \in M_n$ задана при помощи оператора A_f , который по любому набору $\alpha \in \tilde{M}$ выдает значение $f(\tilde{\alpha})$.

Задача поиска м.в.н. функций из M_n состоит в следующем. Если некоторая функция $f \in M_n$ задана оператором A_f , то требуется минимальным числом обращений к A_f найти хотя бы один м.в.н. функции $f = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Задача поиска м.в.н. монотонных булевых функций в Шенноновской постановке описана в [1]. Там же предлагается эффективный алгоритм A_K .

Опишем модификацию A_M алгоритма A_K , отличающуюся от A_K лишь тем, что он использует лексикографический порядок расположения наборов уровней E_n^2 .

Алгоритм A_M состоит из двух этапов.

1-й этап. На первом шаге алгоритма вычисляем значение f на наборе $\tilde{\alpha}_1$ с наибольшим номером $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ -го уровня.

Пусть на j -м шаге вычислено значение f на некотором наборе $\tilde{\alpha}_j$ $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - j + 1$ -го уровня, $1 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Если $f(\tilde{\alpha}_j) = 1$, то на $(j+1)$ -м шаге вычисляем значение f на наборе $\tilde{\alpha}_{j+1}$ с наибольшим номером $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - j$ -го уровня. При условии, что $f(\tilde{\alpha}_j) = 0$ переходим ко второму этапу алгоритма. Если на $(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1)$ -м шаге получено $f(\tilde{\alpha}_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}) = 1$, то $f \equiv 1$ и алгоритм заканчивает работу.

2-й этап. Пусть к началу второго этапа алгоритма с сделано $\tilde{\tau} + 1$ шагов на уровне $0 \leq \tau \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, т.е. вычислены значения $f(\tilde{\alpha}_1) = f(\tilde{\alpha}_2) = \dots = f(\tilde{\alpha}_\tau) = 1$ и $f(\tilde{\alpha}_{\tau+1}) = 0$ где $\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_{\tau+1}$ с наибольшими номерами $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - \tau$ -уровней соответственно.

Тогда на $(\tau + 2)$ -м шаге вычисляем значение f на наборе $\tilde{\alpha}_{\tau+2}$ $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - \tau + 1$ -го уровня, непосредственно следующем за $\tilde{\alpha}_\tau$ в лексикографическом порядке, на котором значение f еще не определено. Причем, если $\tau = 0$, то за $\tilde{\alpha}_{\tau+2}$ берем крайний левый набор уровня $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - \tau + 1$.

Пусть на j -м шаге ($j \geq \tau + 2$) вычислено значение f на некотором наборе $\tilde{\alpha}_j$ j -го уровня, где $j \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - \tau + 1$. Если $f(\tilde{\alpha}_j) = 1$, то на $(j+1)$ -м шаге вычисляем значение f на наборе $\tilde{\alpha}_{j+1}$ j -го уровня, непосредственно следующем в лексикографическом порядке за $\tilde{\alpha}_j$. Если такого набора не существует, то алгоритм заканчивает работу. Если же $f(\tilde{\alpha}_j) = 0$, то на $j+1$ -м шаге вычисляем значение f на наборе $\tilde{\alpha}_{j+1}$ $j+1$ -го уровня, непосредственно следующем в лексикографическом порядке за набором $\tilde{\alpha}$ с наименованием номеров $j+1$ -го уровня таким, что $f(\tilde{\alpha}) = 1$. Причем, если набора $\tilde{\alpha}$ не существует, то за $\tilde{\alpha}_{j+1}$ следует набор с наибольшим номером $j+1$ -го уровня. В случае, когда не существует набора $\tilde{\alpha}_{j+1}$, удовлетворяющего указанным свойствам, алгоритм останавливается.

$$\left. \begin{aligned} f_{l_1}(y_1, \dots, y_m) = 1 \\ \dots \\ f_{l_t}(y_1, \dots, y_m) = 1 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

подсистема системы (1).

Рассмотрим матрицу $\|a_{ij}\|_{t \times t}$:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{если } f_{l_i} \cdot f_{l_j} \neq 0 \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}.$$

Очевидно, что матрица $\|a_{ij}\|_{i \times j}$ симметрична относительно дивгонали и если система уравнений (2) совместна, то $f_{l_i} \cdot f_{l_j} \neq 0, i, j = \overline{1, t}$ и соответственно в этом случае $\|a_{ij}\|_{t \times t}$ – единичная матрица. В случае, когда в матрицу $\|a_{ij}\|_{t \times t}$ найдется хотя бы один элемент $a_{ij} = 0$ система несовместна.

Положим, что высказывания $f_j, i = \overline{1, m}$ системы (1) заданы в базисе $\{-x, x_1 \ \& \ x_2, x_1 \vee x_2\}$. Причем, каждое высказывание f_j есть д.н.ф. n_j . Пусть подсистема (2) имеет вид

$$\left. \begin{aligned} U_{11} \vee U_{12} \vee \dots \vee U_{1P_1} = 1 \\ U_{21} \vee U_{22} \vee \dots \vee U_{2P_2} = 1 \\ \dots \\ U_{t1} \vee U_{t2} \vee \dots \vee U_{tP_t} = 1 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Определим условия совместности системы (3). Нетрудно заметить, что система (3) совместна в том и только в том случае, если существуют элементарные конъюнкции (э.к.) $U_{1j_1}, U_{2j_2}, \dots, U_{tP_t}$, т.е.

$$\&_{\kappa=1} U_{\kappa j_{\kappa}} \neq 0. \quad (4)$$

Предлагаем одну из эффективных процедур (П)[3] проверки выполнения условий (4). Представим д.н.ф. $n_{lj}, j = \overline{1, t}$ системы (3) в виде ортогональной д.н.ф. $n_{lj} = \kappa_{j1} \vee \dots \vee \kappa_{jt}$. Индукцией по $i, j = \overline{1, t-1}$ определяем совместность системы (3).

1-й шаг индукции. Для э.к. $\kappa_{1j}, j = \overline{1, t}$ д.н.ф. n_{l1}^0 фиксируем э.к. $U_1, U_2, \dots, U_{\kappa}$ в д.н.ф. n_{l2}^1 таких, что $U_i \cdot U_{1j} = 0, j = \overline{1, \kappa}$. Пусть $\tilde{T}_j = \{U_1, \dots, U_{\kappa}\}$, где $a_i = U_i \kappa_{1j}, i = \overline{1, \kappa}$. Причем, если для очередного U_i имеет место $(\kappa_{1j} \rightarrow U_j)$, то $\tilde{T}_j = \{a_1\}$, где $a_1 = \kappa_{1j} \cdot U_i = \kappa_{1j}$. Положим $T_1 = \bigvee_{j=1}^{\eta} T_j$. В случае, когда $T_2 = 0$, алгоритм заканчивает работу и система (3) становится несовместной.

Пусть на $(i-1)$ -м шаге построено множество T_{i-1} э.к.

i-й шаг индукции. Для всех э.к. U из T_{i-1} формируем множество T_a э.к. $a, a = U \cdot B$, где B – э.к. в д.н.ф. n_{li+1}^0 и $B \cdot U \neq 0$. В случае, когда $U \rightarrow B \equiv 1 \ T_a = 0$, где $a_1 = U \cdot B = a$.

Пусть множество $T_i = \bigvee_{a \in T_{i-1}} T_a$. Если $T_i = 0$, то алгоритмы заканчивает свою работу и система (3) оказывается несовместной.

Пусть после просмотра $(t - 1)$ -го шага индукции построено множество T_{t-1} э.к. такое, что $T_{t-1} \neq \emptyset$. Отсюда следует, что система (3) совместна.

Таким образом, общий алгоритм определения совместности подсистемы (2) системы (1), заданной в виде (3), состоит из двух этапов. На первом этапе проверяем единичность матрицы $\|a_{ij}\|_{t \times t}$. Если $\|a_{ij}\|_{t \times t}$ – единичная, то переходим ко второму этапу, на котором к системе (3) применяем процедуру П.

Приближенный алгоритм поиска. Пусть

$$m = \begin{cases} f_1 = 1, \\ \dots \\ f_m = 1 \end{cases} \quad \text{и}$$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{если } f_i \cdot f_j \neq 0, \\ 0 & \text{в противном случае, } i, j = 1, 2, \dots, m. \end{cases}$$

Пусть $M_{i_1 \dots i_K}$ – квадратичная подматрица матрицы $M = \|a_{ij}\|_{m \times m}$ составленная a_{ij} , где $i, j = i_1, \dots, i_K$.

Единичную подматрицу $M_{i_1 \dots i_K}$ назовем максимальной, если любая другая квадратичная подматрица, содержащая $M_{i_1 \dots i_K}$, не является единичной. Считается, что $M_{i_1 \dots i_K}$ соответствует подмножеству

$$m_{i_1 \dots i_K} = \begin{cases} f_{i_1} = 1, \\ \dots \\ f_{i_K} = 1 \end{cases}$$

на m , а $m_{i_1 \dots i_K}$ задается монотонной функцией $g(y_{i_1}, \dots, y_{i_K})$

Декомпозиция метода поиска максимальных совместных подсистем состоит в следующем.

1-й этап. Находим все максимальные единичные подматрицы матрицы $\|a_{ij}\|$.

2-й этап. Для всех максимальных подматриц $M_{i_1 \dots i_K}$ строим систему

$$m = \begin{cases} f_{i_1} = 1, \\ \dots \\ f_{i_K} = 1 \end{cases}$$

и применяя алгоритм A_n , находим м.в.н. монотонной булевой функций, соответствующей m .

Приближенный алгоритм состоит из двух шагов. На первом шаге строим максимальную единичную подматрицу $M_{i_1 \dots i_K}$. Этот шаг включает в себя два этапа. На первом этапе выявляется

i -я строка и i -й столбец с наименьшим числом единиц и следует переход ко второму этапу. На втором этапе удаляем из M i -ю строку и i -й столбец. Если M – единичная матрица, то алгоритм заканчивает работу. В противном случае переходим к первому этапу.

На втором шаге применяя алгоритм A_M , ищем м.в.н. $g(y_{i_1}, \dots, y_{i_K})$.

Методы решения систем булевых уравнений.

Метод изображающих чисел. Известно, что булева функция считается заданной, если можно указать значения истинности этой функции при всех возможных комбинациях значений

высказывание f_{i_j} является зависимой функцией системы (4).

Построение алгоритма поиска решений максимальных совместных подсистем системы включает следующие этапы:

1) вычисление изображающих чисел высказываний;

2) формирование максимальных совместных подсистем с помощью алгоритма A_x . Для анализа совместимости каждой подсистемы

$$f_{j_1}(x_1, \dots, x_n) = 1,$$

$$f_{j_2}(x_1, \dots, x_n) = 1,$$

.....

$$f_{j_k}(x_1, \dots, x_n) = 1$$

проверяем справедливость тождества

$$\prod_{i=1}^K \Delta f_{j_i} \equiv \tilde{0}.$$

Если это тождество выполнено, то выделенная подсистема несовместна, и наоборот;

3) вычисление логического произведения изображающих чисел всех высказываний максимальных совместных подсистем;

4) формирование множества M - всех столбцов (наборов) табл. 2.5.1, соответствующих единичным координатам произведения всех изображающих высказываний.

Ясно, что совокупность M является решением данной подсистемы системы.

Метод логических преобразований. Изложим второй метод решений систем булевых уравнений, который основан на аналитическом преобразовании логических высказываний.

Известно, что решение заданной максимальной совместной подсистемы

$$f_{j_1}(x_1, \dots, x_n) = 1,$$

$$f_{j_2}(x_1, \dots, x_n) = 1,$$

.....

$$f_{j_k}(x_1, \dots, x_n) = 1,$$

системы эквивалентно нахождению решений уравнения

$$\prod_{i=1}^K f_{i_j}(x_1, \dots, x_n) = 1.$$

Для логического умножения двух высказываний f и g , как нетрудно заметить, удобным является представление их в виде д.н.ф.

Рассмотрим алгоритм, вычисляющий произведение двух булевых функций. Пусть требуется найти произведение функций (высказываний) f_1, f_2 , заданных в виде д.н.ф. Представим каждую функцию в виде таблиц (f_1) и (f_2) (рис.1), заполнив разряды колонок числами 0,1 и 2. Каждой колонке таблицы $(f_i), i = 1, 2$, соответствуют элементарные конъюнкции д.н.ф. реализующей f_i элементу x_j соответствует значение - 1, \bar{x}_j - 0, а на место отсутствующих элементов записывается 2, причем число колонок таблицы (f_i) равно числу элементарных конъюнкций д.н.ф., реализующей f_i . Чтобы получить произведение д.н.ф. функций f_1 и f_2 все колонки таблицы(рис1) (f_1) поразрядно сравниваются с колонками таблицы (f_2) .

0	2	0		1		0	2	(α)
1	1	2		2		1	1	$(\alpha+1)$
0	0	1		0		2	0	$(\alpha+2)$
.....								
2	1	2		0		2	1	β
2	0	0		1		1	2	$\beta + 1$
0	0	1		2		0	0	

Рис.1. Умножение д.н.ф. булевских функций.

Пусть колонки α и β

α_1	α_2		α_n
β_1	β_2		β_n

принадлежат соответственно таблицам f_1 и f_2 .

Определение. Колонки α и β называются сравнимыми, если $\alpha_i + \beta_i \neq 1$ для всех $i = \overline{1, n}$.

Ясно, что для э.к. K_α, K_β , соответствующих сравнимым колонкам α, β , имеет место выражение $K_\alpha \cdot K_\beta \neq 0$.

Нетрудно заметить, что если колонки α и β несравнимы, то $K_\alpha \cdot K_\beta \equiv 0$.

Будем говорить, что сравнимые колонки α и β перемножаются поразрядно; в результате получается колонка

γ	γ_1	γ_2		-	-	-		γ_n
----------	------------	------------	--	---	---	---	--	------------

такая, что $\gamma_i = \min(\alpha_i, \beta_i), i = \overline{1, n}$.

Ясно, что э.к. K_γ , соответствующая γ , такова, что $K_\gamma = K_\alpha \cdot K_\beta$. Перемножая все сравнимые колонки α и β таблиц (f_1) и (f_2) соответственно, получаем таблицу (f_1, f_2) , которая представляет собой произведение двух булевых функций, заданных в д.н.ф.

Для упрощения получаем таблицу (f_1, f_2) попарно различные колонки α и β этой таблицы сравниваются между собой с учётом следующих условий:

а) если в колонке α все клетки (координаты), содержащие нули и единицы, совпадают с соответствующими клетками (координатами) колонки β , то α исключается из таблицы (т. е. α, β - сравнимые колонки и $\alpha_i \leq \beta_i$ для всех $i = \overline{1, n}$ где α_i, β_i - значения i -х клеток α, β соответственно);

б) в случае, когда существует одна и только одна i -я клетка (координата), такая, что $\alpha_i + \beta_i = 1$, в таблицу добавляется колонка

γ	γ_1	γ_2		-	-	-		γ_n
----------	------------	------------	--	---	---	---	--	------------

где $\gamma_i = \min(\alpha_i, \beta_i)$, для $j \neq i, k = \overline{1, n}, \gamma_i = 2$;

в) если существует одна и только одна i -я координата, такая, что $\alpha_i + \beta_i = 1$ и $\alpha_j = \beta_j$; для всех $i = \overline{1, n}$ и $j \neq i$, то колонки α и β исключаются из таблицы $(f_1 * f_2)$ и добавляется колонка

γ	γ_1	γ_2		-	-	-		γ_n
----------	------------	------------	--	---	---	---	--	------------

где $\gamma_i = 2$ и $\gamma_i = \alpha_i = \beta_i$, для всех $j = \overline{1, n}, j \neq i$.

Нетрудно заметить, что условие а) соответствует операции поглощения э.к. $A \vee A \cdot B = A$, а условие б) - операции обобщенного склеивания $A \cdot \bar{x} \vee B \cdot x = A \cdot \bar{x} \vee B \cdot x \vee A \cdot B$ (склеивания $A \cdot \bar{x} \vee A \cdot x = A$).

Процедура сокращения производится над всеми колонками таблицы результатов $(f_1 \cdot f_2)$ до тех пор, пока дальнейшие упрощения станут невозможными. В результате получим таблицу колонок, соответствующую сокращенной д.н.ф. (слабо сокращенной д.н.ф.) функции $f_1 \cdot f_2$.

Построение алгоритма поиска решений максимальных совместных подсистем системы (1) включает следующие этапы:

- 1) преобразование высказываний в уравнениях системы (1) из формул в базисе D^1 в д.н.ф.;
- 2) построение максимальных совместных подсистем системы (1) с помощью алгоритма $A\chi$.

Для анализа совместности заданной подсистемы

$$f_{j_1}(x_1, \dots, x_n) = 1,$$

$$f_{j_2}(x_1, \dots, x_n) = 1,$$

.....

$$f_{j_k}(x_1, \dots, x_n) = 1$$

проверяем справедливость тождества

$$\prod_{i=1}^k f_{j_i} \equiv 0 \quad (5)$$

Известно, что заданная подсистема несовместна в том и только в том случае, если имеет место тождество (5);

- 3) удаление уравнений с зависимыми высказываниями;
- 4) переход из максимальных совместных подсистем уравнений системы (1) вида

$$\begin{cases} f_{j_1}(x_1, \dots, x_n) = 1, \\ f_{j_2}(x_1, \dots, x_n) = 1, \\ \dots\dots\dots \\ f_{j_k}(x_1, \dots, x_n) = 1 \end{cases} \quad (6)$$

к уравнению

$$\prod_{i=1}^k f_{j_i}(x_1, \dots, x_n) = 1. \quad (7)$$

с помощью алгоритма умножения функций алгебры логики, заданных в виде д.н.ф.

Пусть

$$\prod_{i=1}^k f_{j_i}(\tilde{x}) = K_1 \vee \dots \vee K_l,$$

где K_i - э.к. и $K_i = x_{t_1}^{\sigma_1} \cdot \dots \cdot x_{t_p}^{\sigma_p}, i = \overline{1, l}$.

Выпишем решения уравнения (7) следующим образом. Для каждого уравнения $K_i(x_1, \dots, x_n) = 1, i = \overline{1, l}$, строим $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ так, что $\alpha_{t_1} = \sigma_1, \alpha_{t_2} = \sigma_2, \dots, \alpha_{t_p} = \sigma_p$ и остальные координаты равны двум, где под двоичными координатами подразумевается 0 или 1.

Заключение

Решена задача поиска максимальной совместной подсистемы систем булевых уравнений. Предложен алгоритм нахождения максимального верхнего нуля монотонной булевой функции.

Разработана эффективная процедура вычисления значений монотонных функций f на наборах n -мерного куба. Разработан алгоритм решения систем булевых уравнений на основе поиска максимального верхнего нуля монотонных функций алгебры логики.

Литература

1. Катериночкина Н.Н. Поиск максимального верхнего нуля монотонной функции алгебры логики. ДАН СССР, т.224, 1973, №3.
2. Журавлев Ю.И. Об алгебраическом подходе к решению задач распознавания или классификации. В об.: Проблемы кибернетики. М.: Наука, 1973, вып. 33.
3. Кабулов А.В., Игамбердыев Т.М. Об одном подходе к решению систем логических уравнений. Вопросы вычислительной и прикладной математики. –Тошкент: РИСО АН УзССР, 1984, вып. 74.
4. Kabulov A., Urumbayev E., Ashurov A. Logical method for constructing the optimal corrector of fuzzy heuristic algorithms. International Conference on Information Science and Communications Technologies: Applications, Trends and Opportunities, ICISCT 2019

UDK: 517.9

MODELING THE EFFECT OF THE TWO-FOLD NON-LINEAR HEAT DISSIPATION EQUATION ON BIOLOGICAL POPULATION WITH AMBIENT DENSITY

A.U. Mamatov

National university of Uzbekistan
mmtovabrorjon1995@gmail.com

Abstract. This work is devoted to modeling the effect of the two-time linear heat dissipation equation on the biological population with ambient density. In the process of work, an autonomous solution was built to solve the equation of heat dissipation without a line. The following results were obtained from this work: front-end evaluation for the two-time linear heat dissipation equation, localization process was observed, finite velocity was calculated as approximate, new effects were observed, program code was created and process modeled in C# programming language in accordance with the obtained automodel solution. All results were compared.

Keywords: Two-time linear heat dissipation equation, front, localization, finit acceleration, atomodel solution.

Ikki karra chiziqsiz issiqlik tarqalish tenglamasining muhit zichligi bilan biologik populatsiyaga ta'sirini modellashtirish

Annotatsiya. Bu ish ikki karra chiziqsiz issiqlik tarqalish tenglamasining muhit zichligi bilan biologik populatsiyaga ta'sirini modellashtirishga bag'ishlangan. Ishni bajarish jarayonida chiziqsiz issiqlik tarqalish tenglamasini yechish uchun avtomodel yechim qurildi. Ushbu ishdan quyidagi natijalar olindi: ikki karra chiziqsiz issiqlik tarqalish tenglamasi uchun front baholandi, lokalizatsiya jarayoni kuzatildi, finit tezligi taqribiy hisoblandi, yangi effektlar kuzatildi, olingan avtomodel yechimga mos ravishda C# dasturlash tilida dastur kodi yaratildi va jarayon modellashtirildi. Barcha natijalar taqqoslandi.

Kalit so'zlar: Ikki karra chiziqsiz issiqlik tarqalish tenglamasi, front, lokalizatsiya, finit tezlig, atomodel yechim.

Моделирование воздействия уравнения теплоотдачи без двойной линии на биологическую популяцию с плотностью среды

Аннотация. Это работа посвящена моделированию влияния уравнения теплоотдачи без двойной линии на биологическую популяцию с плотностью окружающей среды. В процессе выполнения работы было построено автомодельное решение для решения уравнения нелинейного рассеивания тепла. Из этого исследования были получены следующие результаты: оценен фронт для двухмерного нелинейного уравнения теплоотдачи, отслежен процесс локализации, вычислена частота финиша, наблюдаются новые эффекты, создан программный код на языке программирования C# в соответствии с полученным автомодельным решением и смоделирован процесс. Все результаты сравнивались.

Ключевые слова: Двухстороннее уравнение рассеивания тепла, фронт, локализация, конечная скорость, автомодельное решение.

Consider the equation in area $Q = \{(t, x): 0 < t < T, a < x < b, c < y < d\}$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla(u^{m-1} |\nabla u^k|^{p-2} \nabla u^l) + \text{div}(v(t)u) + \gamma(t)u + \varepsilon b(t)u^q, \quad x \in R^N \tag{1}$$

with the initial (Cauchy conditions)

$$u(x,0) = u_0(x) \geq 0, \quad a < x < b, \quad c < y < d \tag{2}$$

and boundary conditions

$$\begin{cases} u(t, a) = \varphi_1(t) \\ u(t, b) = \varphi_2(t) \end{cases}, \begin{cases} u(t, c) = \phi_1(t) \\ u(t, d) = \phi_2(t) \end{cases}, t > 0 \tag{3}$$

Here $u(x, t)$ - the temperature, $b(t)u^q$ - the power of a volume absorption of a heat ($\varepsilon = -1$) or power of a source ($\varepsilon = +1$); $v(t)$ – speed of convective transfer, the function is $\gamma(t)$ the coefficient the power of the source, $u_0(x)$ is the energy of the heat source at the initial time;

To investigating different qualitative properties of the solutions of the problem Cauchy and boundary value problem for particular value of numerical parameters devoted many works. For instance in the case $m = k, l = 1, 0 < q < 1$ by analyzing an exact solution [2] when

$$q = \frac{p - [m(p-1) - 1]}{p-1}, \quad 1 < m < 2, \quad p > m(p-1) - 1$$

establish the following properties of solutions: *an inertial effect of a finite velocity of propagation of thermal disturbances, spatial heat localization and finite time localization solution effect*[1]. Considered the problem of the effect of an instantaneous concentrated heat source in incompressible nonlinear medium with a power dependence of a coefficient of heat conduction on temperature in presence of volume absorption of thermal energy, whose power depends on temperature and explicitly on time by a power law.

In literature the cases $\varepsilon = -1, \varepsilon = +1$ separately studied, since property of solutions are different.

In this paper we find the exact solution of the problem (1) for sufficiently arbitrary function $v(t)$ and $b(t), \gamma(t)$. An estimation of weak solution of the Cauchy problem for a class having a physical meaning is taken, and set the exact behavior of front thermal perturbations propagation. If the initial value $u(x,0) = u_0(x)$ is appropriately smooth, there are papers in devoting to the solvability of the Cauchy problem of (1).

For this goal after transformations

$$u(t, x) = \bar{u}(t)w(\tau(t), \xi) \tag{4}$$

where

$$\tau(t) = \int_0^t \left[e^{(m+k(p-2))-2 \int_0^\eta \gamma(y)dy} d\eta \right], \quad (\xi) = \int_0^t v(y)dy - x, \quad \bar{u}(t) = e^{-\int_0^t \gamma(y)dy} \tag{5}$$

It is easy to notice that after the transformation

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = \nabla_\xi (w^{m-1} |\nabla_\xi w^k|^{p-2} \nabla_\xi w) + b_1(\tau)w^q; \tag{6}$$

Where

$$f(t) = e^{(k(p-2)+m)-1 \int_0^t \gamma(y)dy} b(t), \quad f^{-1}(t) = b_1(\tau)$$

Notice that transformations (4) not changed an initial value i.e.

$$u(0, x) = w(0, x) = u_0(x)$$

In the work [2], when

$$b(t) = b\tau^\alpha, \quad b > 0, \alpha > 0, u_0(x) = P\delta(x)$$

Estimate of the problem Cauchy (1) for the critical case $m + k(p - 2) - 1 = 0$ established. The results of the numerical experiments are discussed.

Where $\delta(x)$ Dirac's delta function characterizing the initial temperature distribution concentrated heat source, placed at the origin, $P > 0$ the power of source, it was established that in this problem there is a manifestation of the following non-linear effects: inertia effect of the finite speed of thermal perturbation of a

propagation, the effect of the spatial localization of heat and the effect finite time of a thermal structure absorbing medium existence[5].

Estimate of the Cauchy problem (1) is given in the following theorem

Theorem. Let

$$q > m + k(p - 2) + p/N, u(t, x) \leq \bar{u}(t) [T_0 + (q - 1) \int_0^t b_1(y) dy]^{-\frac{1}{q-1}} \bar{f}(\xi)$$

$$b_1(\tau) u^{q-(k(p-2)+m)} \tau(t) < N/2, \bar{f}(\xi) = (a - b^{p/(p-1)})^{p-1/(k(p-2)+m-1)}, \xi = |x| \tau^{1/p}$$

Fujita type Global solution of the problem[1]

$$0 < q < 1, u_0(x) \leq z(0, r), z(\tau, r) = a(\tau) (f(\tau) - r^{p/(p-1)})_+^{(p-1)/(k(p-2)+m-2)}$$

$$\frac{da}{d\tau} + \gamma\gamma_1 [(\gamma\gamma_1 + N)] a^{k(p-2)+m-1} \leq 0,$$

$$\gamma\gamma_1 a(\tau) \frac{df}{d\tau} + \varepsilon b_1(\tau) a^q - (\gamma\gamma_1)^2 a^{k(p-2)+m-1} f(\tau) \leq 0.$$

Then for a weak solution problem (1), we have the estimate $u(\tau, x) \leq z(\tau, r)$ in Q , where the functions $a(\tau), f(\tau)$ defined by formulas (3), (0.11).

In $\bar{\Omega}$, we construct a two-dimensional grid \bar{w}_h by X with step $h = \frac{b-a}{N}$, a grid \bar{w}_l by step $l = \frac{d-c}{M}$, and a time grid \bar{w}_τ by step $\tau = \frac{T}{L}$, $T > 0$:

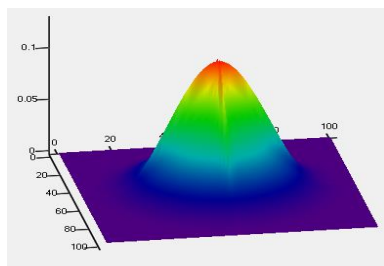
For the numerical solution of the problem (1)-(3), the method of variable directions is used in combination with the integro-interpolation method (balance method)[3], written for elementary volumes of the grid area [4].

The resulting scheme is nonlinear with respect to the desired function and the iteration method is used to find its solution. For the linearization of the diffusion part, the Picard method (simple iteration) is used, and for the linearization of the right part, the Picard, Newton, and special methods are used.

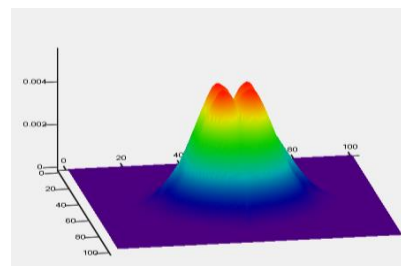
A computational algorithm has been developed. When developing software that illustrates the simulation process of solution behavior over time (visualization), the Visual Studio 2019 C# environment was used with the inclusion of the Open GL graphics library.

The results of computational experiments show that all iterative methods are suitable for the constructed scheme. To achieve the same accuracy, the Newton method requires fewer iterations than the Picard method. In some cases, the number of iterations is almost twice, and the maximum number of iterations is 3-4 times less than in other methods. Since power-law nonlinearity is present in the right-hand side of equation (1), naturally the special method gives better results than the Picard method.

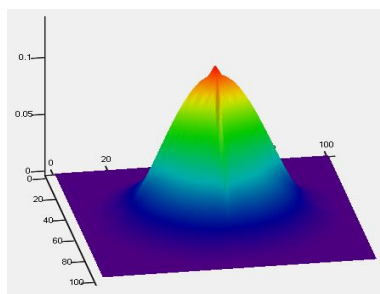
As a test example, we used solutions of equation (1) obtained by the methods of reference equations and nonlinear splitting [2]. Figures 1-4 show the calculation results for different values of parameters m, l, p, k, q and time.



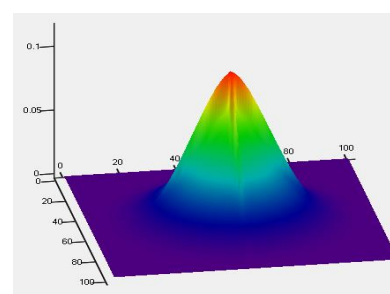
Pic. 1. $p=2.5, m=1.4, k=1, l=1, t=0.48$



Pic. 2. $p=2.2, m=1.4, k=1.1, l=1, t=0.98$



Pic. 3. $p=2.5, m=2, k=1.4, l=1.2, t=0.02$



Pic. 4. $p=2.1, m=2, k=1.5, l=1.4, t=0.94$

References

1. Арипов М.М. Метод эталонных уравнений для решений нелинейных краевых задач. – Ташкент: ФАН, 1988. 137с.
2. Хайдаров А. Разработка разностных схем и численное моделирование задач нелинейной теплопроводности с градиентной нелинейностью. //Международная конференция Современные проблемы алгоритмизации и программирования, –Ташкент, 2004,– с.273-278.
3. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977, 656с.
4. Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. – М.: Наука, 1987, 480с.
5. Калашников А.С. О характере распространения возмущений в задачах нелинейной теплопроводности с поглощением. // ЖБМ и МФ, 1974, т. 14, № 4, с.891-905.

UDC:517.9

A METHOD FOR FINDING A UNIMODULAR MATRIX OF A POWER TRANSFORMATION USING CONTINUED FRACTIONS IN THREE-DIMENSIONAL SPACE

A. A. Azimov

Samarkand state university

Azimov_Alijon_Akhmadovich@mail.ru

Abstract. When real problems are translated into mathematical language, many of them can be expressed as nonlinear equations. Then the study of these problems is reduced to the solution of equations or the study of their properties. Methods of Power geometry, which includes Newton polyhedra and power transformations, led to solve and resolve these nonlinear equations and their systems in the vicinity of a singular point. This article studies the construction of a unimodular matrix of Power transformation in three-dimensional space by methods of number theory.

Keywords: Unimodular matrix, Power geometry, Newton polyhedra.

Метод нахождения унимодулярной матрицы степенного преобразования с использованием непрерывных дробей в трехмерном пространстве

Аннотация. Когда реальные проблемы переводятся на математический язык, многие из них могут быть выражены в виде нелинейных уравнений. Тогда исследование этих проблем приводятся к решению уравнений или изучению их свойств. Методы степенной геометрии, которые включают в себя многогранники Ньютона и степенные преобразования, посвящены решению этих нелинейные уравнений и систем таких уравнений в окрестности особой точки. В данной статье изучается построение унимодулярной матрицы степенного преобразования в трехмерном пространстве методами теории чисел.

Ключевые слова: Унимодулярная матрица, степенная геометрия, многогранник Ньютона.

Uch o'Ichovli fazoda, darajali almashtirish unimodulyar matrirtsasining uzluksiz kasrlar yordamida topish usuli

Annotatsiya. Hayotda uchraydigan masalalarni matematika tiliga ko'chirilganda ulardan ko'pchiligini chiziqli bo'lmagan tenglamalar ko'rinishida ifodalash mumkin. Unda bu muammolarni tadqiq qilish ana shu tenglamalarning yechimi va xossalarini o'rganishga olib keladi. Nyuton ko'pyoqligi va darajali almashtirishni o'z ichiga olgan darajali geometriya usuli ushbu nochiziqli tenglamalar va ularning maxsus nuqta atrofidagi sistemasini yechishga bag'ishlangan. Ushbu maqolada, darajali almashtirishli unimodulyar matrirsani uch o'Ichovli fazoda, sonlar nazariyasi usullari yordamida qurish o'rganilayapti.

Kalit so'zlar: Unimodulyar matrirtsa, Darajali almashtirish, Nyuton ko'pyoqlisi.

1. Введение

Методами степенной геометрии, которые включают в себя многогранники Ньютона, степенные преобразования (см. [1,2,3]), в последнее время изучаются задачи из многих областей математики. Например, задачи математического анализа, дифференциальных уравнений, небесной механики, робототехники, прикладной математики. И. Ньютон в 1669-году для определения показателей главных членов алгебраических функций ввёл ломанные линии по показателям степеней. В последствии эти ломанные линии назывались диаграммой Ньютона. В многомерном

случае впервые 1962 году А.Брюно (см. [1]) ввел многогранники Ньютона для дифференциальных уравнений. Позднее этот метод был распространен для алгебраических нелинейных уравнений [3]. Вейерштрасс, Брюно и Солеев предложили метод разрешения особенностей алгебраических кривых, нахождение ветви-решения, который сохранял целостность показателей степени. Это удалось сделать за счет применения степенного преобразования.

Помимо линейных задач в механике, физике, гидродинамике, биологии и других областях, встречаются нелинейные уравнения и их системы. Нелинейные задачи делятся на локальные и глобальные. Решения систем уравнений, рассматриваемые в локальных задачах, изучаются в окрестности какой-либо конкретной точки. Глобальные задачи занимают поиск решений рассматриваемых уравнений или систем уравнений, которые принадлежат определенному множеству. В последующие годы при решении этих двух видов задач были достигнуты большие результаты с использованием геометрии показателей степеней. Основой этой геометрии является многогранник Ньютона, нормальные конусы его граней, степенные и логарифмические преобразования. Для решения нелинейных алгебраических и дифференциальных уравнений разработаны универсальные алгоритмы. В настоящее время решение уравнений на основе таких алгоритмов является одним из актуальных вопросов.

2. Подстановка задачи.

Рассмотрим систему нелинейных полиномиальных уравнений

$$f_i(X) = \sum_j a_{ij} X^{Q_j^i} = 0, \quad \text{где } Q_j^i \in S_i, \quad i = 1, 2, \quad a_{ij} = \text{const} \in \mathbb{R} \quad (1)$$

$$X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \quad Q_j^i = (q_{1j}^i, q_{2j}^i, q_{3j}^i) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{и} \quad X^{Q_j^i} = x_1^{q_{1j}^i} x_2^{q_{2j}^i} x_3^{q_{3j}^i}.$$

Здесь S_i – носители, множество показателей степеней соответствующих полиномов. Пусть X^0 особая точка системы уравнений (1). Для разрешения особенности в малой окрестности этой точки строятся соответствующие многогранники Ньютона M_i и по ним выделяют укороченные системы (см. [4,5])

$$\hat{f}_i(X) = \sum_j a_{ij} X^{Q_j^i} = 0, \quad i = 1, 2 \quad (2)$$

Полиномы этих укороченных нелинейных систем квазиоднородные. Для упрощения и решения таких систем используется степенные преобразования

$$\log X = \alpha \log Y. \quad (3)$$

В этой работе рассматривается следующая задача: Найти матрицы степенных преобразований (3). При этом исследовать только унимодулярные матрицы α , (α_{ij} – целые и $\det \alpha = \pm 1$).

Методы

Рассмотрим нелинейную систему полиномиальных уравнений (1). Пусть для каждого полинома построены многогранники Ньютона M_i и соответствующие их элементы выделены. По нормальным конусам этих граней строятся нормальные конусы укороченных системы (2) (см. [3]). Размерности конусов укороченных систем будут нульмерные, одномерные и двумерные и т.д.

Теорема. Пусть один из многочленов укороченной системы (2) $f(X)$ – многочлен размера $d < n$. В этом случае существует матрица α и степенное преобразование с матрицей α а также такой вектор $T \in \mathbb{R}^n$, что после степенного преобразования (3) в (2) будет

$$X^T f(X) = g(y_1, y_2, \dots, y_d) \quad (4)$$

Если показатели степени $f(X)$ целые, то существует унимодулярная матрица α . [2].

Рассмотрим способ нахождения матрицы степенного преобразования.

Пусть в \mathbb{R}^3 задано следующий алгебраический полином

$$f(X) = \sum f_Q X^Q, \quad (5)$$

где $X = (x_1, x_2, x_3)$, и пусть $S = (Q_1, Q_2, Q_3)$ носитель этого полинома, т.е. многочлен состоит из трех мономов. Введем следующие обозначения,

$$Q_2 - Q_1 = k_1 \cdot \overline{Q_1} = k_1 \cdot (a_1, a_2, a_3) \\ Q_3 - Q_1 = k_2 \cdot \overline{Q_1} = k_2 \cdot (b_1, b_2, b_3)$$

где k_1 и k_2 – НОД координат векторов $Q_2 - Q_1$ и $Q_3 - Q_1$ соответственно.

$$M_1 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \quad M_2 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \quad M_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

Предположим, что $(M_1, M_2) = 1$, то есть наибольший общий делитель равен 1. В этом случае всегда найдутся такие целые числа q_1 и q_2 , что выполняется равенство:

$$q_1 \cdot M_2 - q_2 \cdot M_1 = 1 \quad (6)$$

Рассмотрим следующие две системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3 = 1 \\ b_1 z_1 + b_2 z_2 + b_3 z_3 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3 = 0 \\ b_1 z_1 + b_2 z_2 + b_3 z_3 = 1 \end{cases}$$

Решая эти системы уравнений по отдельности, мы находим следующие фундаментальные системы решений:

$$\begin{aligned} z_1^1 &= q_1 a_3, & z_2^1 &= q_2 a_3, & z_3^1 &= -a_1 q_1 - a_2 q_2 \\ z_1^2 &= -q_1 b_3, & z_2^2 &= -q_2 b_3, & z_3^2 &= b_1 q_1 + b_2 q_2 \end{aligned}$$

Если запишем эти решения в виде столбцов и прибавим M_1, M_2 и M_3 в качестве третьего столбца, получим следующую матрицу:

$$\alpha = \begin{pmatrix} q_1 a_3 & -q_1 b_3 & M_1 \\ q_2 a_3 & -q_2 b_3 & M_2 \\ \delta_1 & \delta_2 & M_3 \end{pmatrix} \tag{7}$$

Здесь $\delta_1 = -(a_1 q_1 + a_2 q_2), \delta_2 = b_1 q_1 + b_2 q_2$

Подтверждение. (7) – унимодулярная матрица.

Доказательство. Вычисляем $\det \alpha$.

$$\begin{aligned} \det \alpha &= -M_3 q_1 q_2 a_3 b_3 + (a_1 q_1 + a_2 q_2) \cdot q_1 b_3 M_2 + (b_1 q_1 + b_2 q_2) \cdot q_2 a_3 M_1 - (a_1 q_1 + a_2 q_2) \cdot \\ &- q_2 b_3 M_1 - (b_1 q_1 + b_2 q_2) \cdot q_1 a_3 M_3 + M_1 q_1 q_2 a_3 b_3 = q_1 M_2 (a_1 q_1 b_3 + a_2 q_2 b_3 - a_3 b_1 q_1 - a_3 b_2 q_2) - \\ &- q_2 M_1 (b_1 q_1 + b_2 q_2) \cdot q_1 a_3 M_3 + M_1 q_1 q_2 a_3 b_3 = q_1 M_2 (a_1 q_1 b_3 + a_2 q_2 b_3 - a_3 b_1 q_1 - a_3 b_2 q_2) = \\ &= q_1 M_2 (q_1 (a_1 b_3 - a_3 b_1) - q_2 (a_3 b_2 - a_2 b_3)) - q_2 M_1 \cdot (q_1 (a_1 b_3 - a_3 b_1) - q_2 (a_3 b_2 - a_2 b_3)) = \\ &= (q_1 M_2 - q_2 M_1) \cdot (-q_1 M_2 + q_2 M_1) = 1 \cdot (-1) = -1. \end{aligned}$$

Теорема. Если $\text{НОД}(M_1, M_2) = 1$, то после степенного преобразования с унимодулярной матрицей (7), уравнение (5) переходит в следующее уравнение:

$$g(Y) = f_1 + f_2 y_2^{k_1} + f_3 y_1^{k_2} = 0 \tag{8}$$

Доказательство. Разделим обе части алгебраического уравнения (5) на X^{Q_1} .

$$f_1 + f_2 X^{Q_2 - Q_1} + f_3 X^{Q_3 - Q_1} = 0 \tag{9}$$

Применим степенное преобразование с матрицей (7) к (9).

$$\begin{cases} x_1 = y_1^{a_1 a_3} \cdot y_2^{-q_1 b_3} \cdot y_3^{M_1} \\ x_2 = y_1^{q_2 a_3} \cdot y_2^{-q_2 b_3} \cdot y_3^{M_2} \\ x_3 = y_1^{\delta_1} \cdot y_2^{\delta_2} \cdot y_3^{M_3} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} g(Y) &= f_1 + f_2 \left[y_1^{q_1 a_3 \cdot a_1 + q_2 a_3 a_2 + \delta_1 a_3} \cdot y_2^{-q_1 b_3 a_1 - q_2 b_3 a_2 + \delta_2 a_3} \cdot y_3^{a_1 M_1 + a_2 M_2 + a_3 M_3} \right]^{k_1} + \\ &+ f_3 \left[y_1^{q_1 a_3 \cdot b_1 + q_2 a_3 b_2 + \delta_1 b_3} \cdot y_2^{-q_1 b_3 b_1 - q_2 b_3 b_2 + \delta_2 b_3} \cdot y_3^{b_1 M_1 + b_2 M_2 + b_3 M_3} \right]^{k_2} \end{aligned} \tag{10}$$

Отдельно упростим показатели степеней (10):

$$\begin{aligned} q_1 a_3 a_1 + q_2 a_3 a_2 - a_1 a_3 q_1 - a_2 a_3 q_2 &= 0 \\ -q_1 b_3 a_1 - q_2 b_3 a_2 + q_1 a_3 \cdot b_1 + q_2 a_3 b_2 &= q_1 (a_3 b_1 - a_1 b_3) - q_2 (a_2 b_3 - b_2 a_3) = q_1 M_2 - q_2 M_1 = 1 \\ a_1 M_1 + a_2 M_2 + a_3 M_3 &= a_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + a_2 \cdot \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_1 a_3 \cdot b_1 + q_2 a_3 b_2 - q_2 b_3 a_2 - q_1 b_3 a_1 &= q_1 (a_3 b_1 - a_1 b_3) - q_2 (a_2 b_3 - b_2 a_3) = q_1 M_2 - q_2 M_1 = 1. \\ -q_1 b_3 b_1 - q_2 b_3 b_2 + q_1 b_3 b_1 + q_2 b_3 b_2 &= 0 \\ b_1 M_1 + b_2 M_2 + b_3 M_3 &= 0 \end{aligned}$$

Следовательно, (10) выглядит так:

$$g(Y) = f_1 + f_2 y_2^{k_1} + f_3 y_1^{k_2} = 0$$

Теорема доказана.

3. Результаты и обсуждения

Общее состояние трехмерных матричных непрерывных дробей задается алгоритмом, определяемым вектором $J = (\lambda, \mu, \xi) \in R^3$

$$J_n = S_n \cdot J_{n-1}, \quad n > 1 \tag{11}$$

$$\text{и} \quad S_n = B_n \cdot D_n, \quad B_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a_n \\ 0 & 1 & -b_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{12}$$

$J_n = S_n \cdot \dots \cdot S_1 \cdot J = A_n^{-1} \cdot J$, т.е. $A_n^{-1} = S_n \cdot \dots \cdot S_1$ и $J = A_n \cdot J_n$, где

A_n – унимодулярная матрица с целыми элементами; по формулам последовательно находится вектор $J_n = (\lambda_n, \mu_n, \xi_n)$.

D_n – это верхняя треугольная матрица, по диагонали которой расположены единицы, а её обратная является матрицей с положительными элементами. (Не все элементы могут быть всегда положительными, как мы видим в примере 5). А B_n – матрица подстановки.

Пусть даны числа λ, μ, ξ , расположенные по правилу:

$$\lambda \geq \mu \geq \xi > 0 \tag{13}$$

Из этого отмечаем

$$a = \left[\frac{\lambda}{\xi} \right], b = \left[\frac{\mu}{\xi} \right] \tag{14}$$

и сделаем следующую замену:

$$\lambda' = \lambda - a \cdot \xi, \beta' = \mu - b \cdot \xi, \xi' = \xi \tag{15}$$

Мы можем найти унимодулярную матрицу на основе трех условий:

1⁰ Если $\xi = 0$, то мы разлагаем λ, μ в соответствии с алгоритмом Евклида [6],

$$\text{т.е. } D_k = \begin{pmatrix} 1 & -a_n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ где } a_n = \left[\frac{\lambda}{\mu} \right]$$

2⁰ Если на первом шаге найдены a и b и выполнено условие $(\lambda', \mu', \xi') = (0, 0, 1)$, то унимодулярная матрица будет $A^{-1} = D$, т.е. $D^{-1} = A$.

3⁰ Если за несколько k -шагов конец вектора $(\lambda^k, \mu^k, \xi^k)$ переходит в вектор $(0, 0, \pm 1)$, то

$$A_n^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot S_n \cdot \dots \cdot S_1 \tag{16}$$

формула для нахождения унимодулярной матрицы.

Этот результат обеспечивает основу для упрощения решения данного нелинейного уравнения или системы уравнений.

Теперь рассмотрим несколько примеров для каждого условия.

Пример № 1:

$$H = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}; \quad \det H = (-1) \cdot x_1 + (-2) \cdot x_2 + (-2) \cdot x_3$$

Сформируем вектор: $(-1, -2, -2)$.

$$c = \left[\frac{\lambda}{\xi} \right] = 0; \quad b = \left[\frac{\mu}{\xi} \right] = 1;$$

$$\begin{cases} \lambda' = \lambda - c \cdot \xi = 1 - 0 \cdot (-2) = -1 \\ \mu' = \mu - b \cdot \xi = -2 - (-2) \cdot 1 = 0 \Rightarrow (-1, 0, -2) \\ \xi' = \xi = -2 \end{cases}$$

$$(-1, 0, -2) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (-2, -1, 0)$$

$\lambda_1 = -2, \mu_1 = -1, \xi_1 = 0$ здесь $c_1 = \left[\frac{\lambda_1}{\mu_1} \right] = 2;$

$$D_1 = \begin{pmatrix} 1 & -c_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S_1 = B \cdot D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$S_2 = B_1 \cdot D_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = S_2 \cdot S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Приходим к унимодулярной матрице с положительными элементами:

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. В этом примере мы использовали первое свойство.

Пример № 2:

$$H = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}; \det H = x_1 + 2x_2 + x_3; \text{Сформируем вектор: } (1,2,1).$$

$$\lambda = 1, \mu = 2, \xi = 1 \\ c = \begin{bmatrix} \lambda \\ \xi \end{bmatrix} = 1; b = \begin{bmatrix} \mu \\ \xi \end{bmatrix} = 2;$$

$$\begin{cases} \lambda' = \lambda - c \cdot \xi = 1 - 1 \cdot 1 = 0 \\ \mu' = \mu - b \cdot \xi = 2 - 2 \cdot 1 = 0 \Rightarrow (0,0,1). \\ \xi' = \xi = 1 \end{cases}$$

На первом шаге найдем c и b и получим вектор $(0,0,1)$. Тогда унимодулярная матрица будет

$$D^{-1} = A, \text{ т.е. приходим к унимодулярной матрице с положительными элементами: } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; A = D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ В этом примере мы использовали второе свойство.}$$

Пример № 3:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}; \det H = (-1) \cdot x_1 + (-1) \cdot x_2 + (-3) \cdot x_3;$$

Сформируем вектор: $(-1, -1, -3)$.

$$\lambda = -1, \mu = -1, \xi = -3 \\ c = \begin{bmatrix} \lambda \\ \xi \end{bmatrix} = 0; b = \begin{bmatrix} \mu \\ \xi \end{bmatrix} = 0; S_1 = B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda' = \lambda - c \cdot \xi = -1 - 0 \cdot (-3) = -1 \\ \mu' = \mu - b \cdot \xi = -1 - 0 \cdot (-3) = -1 \Rightarrow (-1, -1, -3) \\ \xi' = \xi = -3 \end{cases}$$

$$(-1, -1, -3) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (-3, -1, -1);$$

$$\lambda_1 = -3, \mu_1 = -1, \xi_1 = -1 \text{ здесь } c_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \xi_1 \end{bmatrix} = 3; b_1 = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \xi_1 \end{bmatrix} = 1$$

$$D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & -b_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S_2 = B_1 \cdot D_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda'' = \lambda_1 - c_1 \cdot \xi_1 = -3 - 3 \cdot (-1) = 0 \\ \beta'' = \mu_1 - b_1 \cdot \xi_1 = -1 - 1 \cdot (-1) = 0 \Rightarrow (0,0,-1) \\ \xi'' = \xi = -1 \end{cases}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot S_2 \cdot S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \text{ приходим к унимодулярной матрице с положительными элементами:}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

В этом примере мы использовали третье свойство.

Пример № 4: $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}; \det H = (-6) \cdot x_1 + 15 \cdot x_2 + (-6) \cdot x_3$ Сформируем вектор:

$(-3)(2, -5, 2)$.

$$c = \begin{bmatrix} \lambda \\ \xi \end{bmatrix} = 1; b = \begin{bmatrix} \mu \\ \xi \end{bmatrix} = -3;$$

$$\begin{cases} \lambda' = \lambda - c \cdot \xi = 2 - 1 \cdot 2 = 0 \\ \mu' = \mu - b \cdot \xi = -5 - (-3) \cdot 2 = 1 \Rightarrow (0,1,2) \\ \xi' = \xi = 2 \end{cases}$$

$$(0,1,2) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (2,0,1)$$

$\lambda_1 = 2, \mu_1 = 0, \xi_1 = 1$ здесь $c_1 = \left[\frac{\lambda_1}{\xi_1}\right] = 2; b_1 = \left[\frac{\mu_1}{\xi_1}\right] = 0$

$$D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & -b_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S_2 = B_1 \cdot D_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda'' = \lambda_1 - c_1 \cdot \xi_1 = 2 - 2 \cdot 1 = 0 \\ \mu'' = \mu_1 - b_1 \cdot \xi_1 = 0 - 0 \cdot 1 = 0 \Rightarrow (0,0,1) \\ \xi'' = \xi = 1 \end{cases}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot S_2 \cdot S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Приходим к унимодулярной матрице с положительными элементами: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. В этом

примере мы использовали третье свойство.

Пример № 5: Найдите решение нелинейного алгебраического уравнения.

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^5 x_3^2 + x_1^6 x_2^3 x_3^7 + x_1^{10} x_2^3 x_3^3 = 0$$

$$Q_2 - Q_1 = (6,3,7) - (5,0,2) = (1,3,5)$$

$$Q_3 - Q_1 = (10,3,3) - (5,0,2) = (5,3,1)$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}; \det C = (-12)x_1 + 24x_2 + (-12)x_3;$$

Сформируем вектор: $(-12)(1, -2, 1)$.

$$\lambda = 1, \mu = -2, \xi = 1$$

$$c = \left[\frac{\lambda}{\xi}\right] = 1; b = \left[\frac{\mu}{\xi}\right] = -2;$$

$$\begin{cases} \lambda' = \lambda - c \cdot \xi = 1 - 1 \cdot 1 = 0 \\ \mu' = \mu - b \cdot \xi = -2 - (-2) \cdot 1 = 0 \Rightarrow (0,0,1) \\ \xi' = \xi = 1 \end{cases}$$

На первом шаге найдем c и b и приходим к вектору $(0,0,1)$. Тогда унимодулярная матрица будет

$$D^{-1} = A, \text{ т.е. получим унимодулярную матрицу: } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; A = D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В этом примере мы использовали второе свойство.

$$x_1 = y_1 y_3$$

$$x_2 = y_2 y_3^{-2}$$

$$x_3 = y_3$$

Если эту замену переменных подставим в данное уравнение, получим следующее:

$$y_1 y_3^7 + y_1^6 y_2^3 y_3^7 + y_1^{10} y_2^3 y_3^7 = 0$$

Если этот многочлен сократить на $y_1 y_3^7$, то получим:

$$1 + y_1^5 y_2^3 + y_1^9 y_2^3 = 0. \text{ Следовательно: } y_2 = -\frac{1}{y_1} \sqrt[3]{\frac{1}{y_1^2 + y_1^6}}$$

Заключение

В ходе исследования были получены и изучены следующие результаты:

-Изучена методика нахождения унимодулярной матрицы степенного преобразования.

-Изучено применение унимодулярной матрицы степенного преобразования на конкретных примерах.

Литература

1. Брюно А.Д. Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. М.: Наука 1998
2. Брюно А.Д., Солеев А. Локальная униформизация ветвей пространственной кривой и многогранники Ньютона // Алгебра и анализ. 1991. Т. 3, вып. 1. С. 67--102.
3. Солеев А. Алгоритм вычисления многогранников Ньютона // Доклады АН Узбекистана, N 5, 1982. С. 14--16.
4. Akhmadjon Soleev. Power geometry in local resolution of singularities of an algebraic curve. WORLD SCIENCE № 6(58) vol.1, June 2020. P.21-26.
5. Soleev A., Soleeva N. Power geometry and algebraic equations // AIP Conference Proceedings, 1557, 85, 2013.
6. Хинчин А.Я. Цепные дроби, М.: Физматгиз, 1961.

УДК517.946

КРИТЕРИЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ

О.И.Махмудов, И. Э. Ниёзов

Самаркандский государственный университет

Аннотация. Рассматривается задача аналитического продолжения решения системы уравнений термоупругости в пространственной области по его значениям и значениям его напряжений на части границы этой области, т.е. задача Коши. Задача некорректна. Если S вещественно аналитична, теорема Коши-Ковалевской применяется к S , гарантирующему существование локального решения. Мы рассматриваем специальную структуру уравнения термоупругости для получения явных условий глобальной разрешимости и аппроксимационного решения.

Ключевые слова: Задача Коши, систем теории упругости, эллиптическая система, некорректная задача, матрица Карлемана, регуляризация.

Termoelastiklik nazariyasi sistemasi uchun Koshi masalasining yechilishi shartlari

Annotasiya. Bu ishda termoelastiklik nazariyasi tenglamalari sistemasi yechimini maxsus sohada yechimning soha chegarasining musbat o'lchovli qismida berilganiga ko'ra sohaning ichiga toppish masalasi qaraladi. Bunday masalaga Koshi masalasi deyiladi. Masalaning yechilish ifhmkfhh qaraladi

Kalit so'zlar: momentarily elastiklik nazariya sisistemasi, integral formula, Karl eman funksiyasi, Karl eman matritsasi, Koshi masalasi.

A criterion for the solvability of the Cauchy problem for the system of thermoelasticity equations

Abstract. In this paper, we considered the problem of analytical continuation of the solution of the system equations of the thermoelasticity in bounded domain from its values and values of its strains on part of the boundary of this domain, i.e., the Cauchy's problem and we give a criterion for the solvability of the Cauchy problem.

Keywords: Cauchy problem, system theory of elasticity, elliptic system, ill-posed problem, Carleman matrix, regularization.

1 Введение

В работе предлагается явная формула восстановления решения систем термоупругости в пространственной области по её значениям и значениям её напряжений на части границы этой области и приводится критерий разрешимости поставленной задачи.

Решение задачи Коши для одномерной системы уравнений Коши-Римана впервые получил Т. Карлеман в 1926 г [1]. Им была предложена идея введения в интегральную формулу Коши дополнительной функции, позволяющей путем предельного перехода погасить влияние интегралов по части границы, где значения продолжаемой функции не заданы. Идею Карлемана развили

Г.М.Голузин и В.И. Крылов (1933) [2], которые нашли общий способ получения формул Карлемана для одномерной системы уравнений Коши-Римана.

На основе результатов Карлемана и Голузина-Крылова М.М. Лаврентьев ввел понятие функции Карлемана для одномерной системы уравнений Коши-Римана. Метод Лаврентьева [3] состоит в аппроксимации ядра Коши на дополнительной части границы области вне носителя данных задачи Коши.

Функция Карлемана задачи Коши для уравнения Лапласа - это фундаментальное решение, зависящее от положительного числового параметра, стремящегося к нулю вместе со своей производной по нормали на части границы области вне носителя данных Коши, когда параметр стремится к нулю. При помощи функции Карлемана и интегральной формулы Грина получается формула Карлемана, которая дает точное решение задачи Коши, когда данные заданы точно. Построение функции Карлемана позволяет также строить регуляризацию, когда данные Коши заданы приближенно. Существование функции Карлемана следует из аппроксимационной теоремы С.Н.Мергеляна (1956).

В 1959 г. В.А.Фок и Ф.М.Куни нашли применение формулы Карлемана для одномерной системы уравнений Коши-Римана. В случае, когда часть границы области является отрезком действительной оси, используя формулу Карлемана, они нашли критерий разрешимости задачи Коши для системы уравнений Коши-Римана на плоскости. Аналог формулы Карлемана и критерии разрешимости задачи Коши для аналитических функций многих переменных получен в работе А.А.Гончара (1985), Л.А.Айзенберга (1990), А.М.Кытманова (1991), для гармонических функций в работе Ш.Я.Ярмухамедова, Н.Н.Тарханова (1995). Для систем теории упругости аналог формулы Карлемана и критерии разрешимости задачи Коши рассмотрены в работах авторов [4]-[11]

Система уравнений термоупругости эллиптическая. Соответственно задача Коши для таких систем является некорректной. Решение может существовать, тогда оно единственно, но не устойчиво, т.е. решение не устойчиво относительно малого изменения данных. В некорректных задачах существование решения и принадлежности её к классу корректности предполагается в априори.

В данной работе на основе метода функции Карлемана строится регуляризованное решение задачи Коши для системы уравнений термоупругости,

Пусть $x = (x_1, x_2, x_3)$ и $y = (y_1, y_2, y_3)$ точки вещественного евклидова пространства R^3 , D – ограниченная односвязная область в R^3 с кусочно-гладкой границей ∂D и S – гладкая часть ∂D , лежащая на верхней полуплоскости $y_3 > 0$.

Пусть 4- компонентная вектор-функция $U(x) = (u_1(x), u_2(x), u_3(x), u_4(x))$ удовлетворяет в области D системе уравнений термоупругости [12]:

$$B(\partial_x, \omega)U(x) = 0, \tag{1.1}$$

где

$$\begin{aligned} B(\partial_x, \omega) &= \| B_{kj}(\partial_x, \omega) \|_{4 \times 4}, \\ B_{kj}(\partial_x, \omega) &= \delta_{kj}(\mu\Delta + \rho\omega^2) + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j}, \quad k, j = 1, 2, 3, \\ B_{k4}(\partial_x, \omega) &= -\gamma \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad k = 1, 2, 3, \\ B_{4j}(\partial_x, \omega) &= -i\omega\eta \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2, 3, \\ B_{44}(\partial_x, \omega) &= \Delta + \frac{i\omega}{\theta}, \end{aligned}$$

δ_{kj} - символ Кронеккера, $i = \sqrt{-1}$, коэффициенты $\lambda, \mu, \rho, \omega, \theta$, характеризующие среды, удовлетворяют условиям $\mu > 0, \lambda + 2\mu > 0, \theta > 0, \rho > 0, \gamma\eta > 0$.

Уравнение (1.1) можно написать в виде системы

$$\begin{cases} \mu \Delta u + (\lambda + \mu) \text{grad div } u - \gamma \text{grad } v + \rho \omega^2 u = 0 \\ \Delta v + \frac{i\omega}{\theta} v + i\omega\eta \text{div } u = 0, \end{cases} \tag{1.2}$$

где $U(x) = (u(x), v(x)), u(x) = (u_1(x), u_2(x), u_3(x))$.

Вектор-функцию $U(y)$ называем регулярной в D , если она непрерывна вместе со своими частными производными второго порядка в D и первого порядка на $\bar{D} = D \cup \partial D$.

Постановка задачи.

Требуется определить регулярное решение U системы (1.1) в области D , исходя из её данных Коши, заданных на S :

$$U(y) = f(y), \quad R(\partial_y, v(y))U(y) = g(y), \quad y \in S, \tag{1.3}$$

где $R(\partial_y, v(y))$ – оператор напряжения, определяемый равенством

$$R(\partial_y, v(y)) = \|R_{kj}(\partial_y, v(y))\|_{4 \times 4} = \begin{pmatrix} T & -\gamma v_1 \\ & -\gamma v_2 \\ & -\gamma v_3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial v} \end{pmatrix},$$

здесь $T = T(\partial_y, v(y)) = \|T_{kj}(\partial_y, v(y))\|_{3 \times 3}$,

$$T_{kj}(\partial_y, v(y)) = \lambda v_k(y) \frac{\partial}{\partial y_j} + \mu v_j(y) \frac{\partial}{\partial y_k} + (\lambda + \mu) \delta_{kj} \frac{\partial}{\partial v(y)}, \quad k, j = 1, 2, 3,$$

$v(y) = (v_1(y), v_2(y), v_3(y))$ – внешний единичный вектор нормали к поверхности ∂D в точке y , где $f(y) = (f_1(y), \dots, f_4(y))$ и $g(y) = (g_1(y), \dots, g_4(y))$ – заданные непрерывные вектор-функции на S .

Для решения данной задачи в рассматриваемой односвязной области используется метод функции Карлемана, т.е. строится матрица Карлемана и с помощью этой матрицы дается формула нахождения решения внутри области.

2 Построение матрицы Карлемана

Известно, что для регулярного решения системы (1.1) верно интегральное представление [12], т.е.

$$2U(x) = \int_{\partial D} (\Psi(x - y, \omega) \{R(\partial_y, v(y))U(y)\} - \{\tilde{R}(\partial_y, v(y))\tilde{\Psi}(y - x, \omega)\}^* U(y)) ds_y, \quad x \in D, \tag{2.1}$$

где, «*» означает операцию транспонирования, а $\Psi(x - y, \omega)$ – матрица фундаментальных решений матрица фундаментальных решений системы термоупругих колебаний [12],

$$\tilde{\Psi}_{kj}(x, \omega) = \Psi_{jk}(-x, \omega) \text{ и}$$

$$\Psi(x, \omega) = \| \Psi_{kj}(x, \omega) \|_{4 \times 4},$$

здесь,

$$\begin{aligned} \Psi_{kj}(x, \omega) &= \sum_{q=1}^3 \{ (1 - \delta_{k4})(1 - \delta_{j4}) (\frac{\delta_{kj}}{2\pi\mu} \delta_{3q} - \alpha_q \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j}) + \\ &+ \beta_q [i \omega \eta (1 - \delta_{j4}) \frac{\partial}{\partial x_j} - \gamma (1 - \delta_{k4}) \frac{\partial}{\partial x_k}] + \delta_{k4} \delta_{j4} \gamma_q \} \frac{\exp(i\lambda_q |x|)}{|x|}, \\ \alpha_q &= \frac{(-1)^q (1 - i \omega \theta^{-1} \lambda_q^{-2}) (\delta_{1q} + \delta_{2q})}{2\pi(\lambda + 2\mu)(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} - \frac{\delta_{3q}}{2\pi\rho\omega^2}, \quad \sum_{q=1}^3 \alpha_q = 0, \\ \beta_q &= \frac{(-1)^q (\delta_{1q} + \delta_{2q})}{2\pi(\lambda + 2\mu)(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)}, \quad \sum_{q=1}^3 \beta_q = 0, \\ \gamma_q &= \frac{(-1)^q (\lambda_q^2 - k_1^2) (\delta_{1q} + \delta_{2q})}{2\pi(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)}, \quad \sum_{q=1}^3 \gamma_q = 1, \\ k_1^2 &= \frac{\rho\omega^2}{\lambda + 2\mu}, \quad \lambda_2^2 = \frac{\rho\omega^2}{\mu} \end{aligned}$$

λ_1^2 и λ_2^2 определяются из уравнений

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = \frac{i\omega}{\theta} + \frac{i\omega\eta}{\lambda + 2\mu} + k_1^2, \quad \lambda_1^2 \lambda_2^2 = \frac{i\omega}{\theta} k_1^2$$

и предполагается, что $\lambda_1^2 \neq \lambda_2^2$, а

$$\tilde{R}(\partial_y, v(y)) = \| \tilde{R}_{kj}(\partial_y, v(y)) \|_{4 \times 4} = \begin{pmatrix} T & -i\omega\eta v_1 \\ & -i\omega\eta v_2 \\ & -i\omega\eta v_3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial v} \end{pmatrix},$$

Следуя [13], приведем

Определение 2.1 Матрицей Карлемана задачи (1.1), (1.3) называется 4×4 матрица, $\Pi(y, x, \omega, \sigma)$, зависящая от двух точек y, x и положительного числового параметра σ , удовлетворяющая следующим двум условиям:

$$1) \Pi(y, x, \omega, \sigma) = \Psi(x - y, \omega) + G(x - y, \sigma),$$

где матрица $G(x - y, \sigma)$ удовлетворяет по переменной y системе (1.1) всюду в области D ;

$$2) \int_{\partial D \setminus S} (|\Pi(y, x, \omega, \sigma)| + |R(\partial_y, v(y))\Pi(y, x, \omega, \sigma)|) ds_y \leq \varepsilon(\sigma),$$

где $\varepsilon(\sigma) \rightarrow 0$ при $\sigma \rightarrow \infty$; $|\Pi|$ евклидова норма матрицы $\Pi = \| \Pi_{kj} \|$ т.е., $|\Pi| = \sqrt{\sum_{k,j=1}^4 (\Pi_{kj})^2}$. В частности $|U| = \sqrt{\sum_{k=1}^4 u_k^2}$.

Известно, что для U и \tilde{U} регулярных в D и $B\tilde{U}, \tilde{B}\tilde{U}$ – абсолютно интегрируемых в D вектор-функций верна формула [12]:

$$\begin{aligned} & \int_D [U(y)\{\tilde{B}(\partial_y, \omega)\tilde{U}(y)\} - \tilde{U}(y)\{B(\partial_y, \omega)U(y)\}] dy = \\ & = \int_{\partial D} [U(y)\{\tilde{R}(\partial_y, v(y))\tilde{U}(y)\} - \tilde{U}(y)\{R(\partial_y, v(y))U(y)\}] ds_y, \end{aligned}$$

где

$$\tilde{B}(\partial_x, \omega) = \| \tilde{B}_{kj}(\partial_x, \omega) \|_{4 \times 4}, \quad \tilde{B}_{kj}(\partial_x, \omega) = B_{jk}(-\partial_x, \omega).$$

Подставляя в это равенство вместо $\tilde{U}(y)$ и $U(y)$ соответственно $G(x - y, \sigma)$ и регулярное решение $U(y)$ системы (1.1), имеем

$$0 = \int_{\partial D} [G(x - y, \sigma)\{R(\partial_y, v(y))U(y)\} - \{\tilde{R}(\partial_y, v(y))\tilde{G}(y - x, \sigma)\}^* U(y)] ds_y. \quad (2.2)$$

Прибавляя (2.1) и (2.2) получим

Теорема 2.2 *Всякое регулярное решение $U(x)$ системы (1.1) в области D определяется формулой*

$$\begin{aligned} 2U(x) = & \int_{\partial D} [\Pi(y, x, \omega, \sigma)\{R(\partial_y, v(y))U(y)\} - \\ & - \{\tilde{R}(\partial_y, v(y))\tilde{\Pi}(y, x, \omega, \sigma)\}^* U(y)] ds_y, \quad x \in D, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $\Pi(y, x, \omega, \sigma)$ - матрица Карлемана, и $\tilde{\Pi}(y, x, \omega, \sigma) = \tilde{\Psi}(y - x, \omega) + \tilde{G}(y - x, \sigma)$.

С целью построения приближенного решения задачи (1.1), (1.3) построим матрицу Карлемана следующим образом:

$$\begin{aligned} \Pi(y, x, \omega, \sigma) = & \| \Pi_{kj}(y, x, \omega, \sigma) \|_{4 \times 4}, \\ \Pi_{kj}(y, x, \omega, \sigma) = & \sum_{q=1}^3 \{ (1 - \delta_{k4})(1 - \delta_{j4}) (\frac{\delta_{kj}}{2\pi\mu} \delta_{3q} - \alpha_q \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j}) + \\ & + \beta_q [i\omega\eta(1 - \delta_{j4}) \frac{\partial}{\partial x_j} - \gamma(1 - \delta_{k4}) \frac{\partial}{\partial x_k}] + \delta_{k4} \delta_{j4} \gamma_q \} \Phi(y, x, \sigma, i\lambda_q), \quad k, j = 1, 2, 3, \\ \Pi_{4j}(y, x, \omega, \sigma) = & \sum_{q=1}^3 \{ i\beta_q \omega \eta (1 - \delta_{j4}) \frac{\partial}{\partial x_j} + \delta_{j4} \gamma_q \} \Phi(y, x, \sigma, i\lambda_q), \quad j = 1, 2, 3, \\ \Pi_{k4}(y, x, \omega, \sigma) = & \sum_{q=1}^3 \{ -\beta_q \gamma (1 - \delta_{k4}) \frac{\partial}{\partial x_k} + \delta_{k4} \gamma_q \} \Phi(y, x, \sigma, i\lambda_q), \quad k = 1, 2, 3, \\ \Pi_{44}(y, x, \omega, \sigma) = & \sum_{q=1}^3 \gamma_q \Phi(y, x, \sigma, i\lambda_q), \end{aligned} \quad (2.4)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(y, x, \sigma, \Lambda) = & \frac{1}{-2\pi^2 \exp(\sigma x_3^2)} \int_0^\infty \text{Im} \frac{\exp(\sigma w^2) \cos(\Lambda u) du}{w - x_3 \sqrt{u^2 + \alpha^2}} \\ w = & i\sqrt{u^2 + \alpha^2} + y_3, \quad \alpha^2 = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2, \quad \alpha > 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Из результатов работы [13] вытекает

Лемма 2.3 *Функция $\Phi(y, x, \sigma, \Lambda)$, определяемая формулой (2.5), представима в виде*

$$1) \quad \Phi(y, x, \sigma, i\Lambda) = \frac{\exp(i\Lambda r)}{4\pi r} + \varphi(y, x, \sigma, \Lambda), \quad r = |y - x|, \quad (2.6)$$

где $\varphi(y, x, \sigma, \Lambda)$ – некоторая функция, определенная для всех значений и удовлетворяющая уравнению Гельмгольца, $\Delta(\partial_y)\varphi + \Lambda^2\varphi = 0, \quad y \in D, \quad \Lambda^2 > 0,$

$$2) \quad \int_{\partial D \setminus S} (|\Phi(y, x, \sigma, i\Lambda)| + |\frac{\partial \Phi(y, x, \sigma, i\Lambda)}{\partial v}|) ds_y \leq C(\Lambda, D)\sigma \exp(-\sigma x_3^2), \quad (2.7)$$

где $C(\Lambda, D)$ некоторая ограниченная функция, не зависящая от σ , а

$$\Delta(\partial_y) = \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_3^2}.$$

Функцию $\Phi(y, x, \sigma, \Lambda)$ назовем функцией Карлемана для уравнения Гельмгольца. Приведем некоторые свойства функции Карлемана.

Функция $\Phi(y, x, \sigma, \Lambda)$ при $x \neq y$ дважды непрерывно дифференцируема по y и имеют место следующие неравенства

$$\begin{aligned} |\Phi(y, x, \sigma, i\Lambda)| & \leq C_1 r^{-1} \exp \sigma (y_3^2 - x_3^2), \\ |\frac{\partial \Phi(y, x, \sigma, i\Lambda)}{\partial y_k}| & \leq C_2 r^{-2} \sigma \exp \sigma (y_3^2 - x_3^2), \quad k = 1, 2, 3, \\ |\frac{\partial^2 \Phi(y, x, \sigma, i\Lambda)}{\partial y_k \partial y_j}| & \leq C_3 r^{-3} \sigma^2 \exp \sigma (y_3^2 - x_3^2), \quad k, j = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Из леммы 2.3 получим

Лемма 2.4 Матрица $\Pi(y, x, \omega, \sigma)$ – определенная формулами (2.4), (2.5) является матрицей Карлемана задачи (1.1), (1.3).

Proof. В силу равенств (2.4)-(2.6) имеем

$$\Pi(y, x, \omega, \sigma) = \Psi(x - y, \omega) + G(y, x, \sigma),$$

где

$$\begin{aligned} \Psi(x - y, \omega) &= \| \Psi_{kj}(x - y, \omega) \|, \\ \Psi_{kj}(x, \omega) &= \sum_{q=1}^3 \{ (1 - \delta_{k4})(1 - \delta_{j4}) \left(\frac{\delta_{kj}}{2\pi\mu} \delta_{3q} - \alpha_q \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j} \right) + \\ &+ \beta_q [i \omega \eta (1 - \delta_{j4}) \frac{\partial}{\partial x_j} - \gamma (1 - \delta_{k4}) \frac{\partial}{\partial x_k}] + \delta_{k4} \delta_{j4} \gamma_q \} \frac{\exp(i\lambda_q |x|)}{|x|}, \\ G(y, x, \sigma) &= \| G_{kj}(y, x, \sigma) \|, \\ G_{kj}(y, x, \sigma) &= \sum_{q=1}^3 \{ (1 - \delta_{k4})(1 - \delta_{j4}) \left(\frac{\delta_{kj}}{2\pi\mu} \delta_{3q} - \alpha_q \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j} \right) + \\ &+ \beta_q [i \omega \eta (1 - \delta_{j4}) \frac{\partial}{\partial x_j} - \gamma (1 - \delta_{k4}) \frac{\partial}{\partial x_k}] + \delta_{k4} \delta_{j4} \gamma_q \} \varphi(y, x, \sigma, \Lambda). \end{aligned}$$

Непосредственным вычислением можно убедиться, что матрица $G(y, x, \sigma)$ по переменной y удовлетворяет системе (1.1) всюду в D .

Используя (2.4), (2.5) и (2.7) получим

$$\int_{\partial D \setminus S} (|\Pi(y, x, \omega, \sigma)| + |R(\partial_y, v(y))\Pi(y, x, \omega, \sigma)|) ds_y \leq C(x) \sigma^3 \exp(-\sigma x_3^2), \quad (2.9)$$

где $C(x)$ некая ограниченная внутри D функция, не зависящая от σ .

Положим

$$\begin{aligned} 2U_\sigma(x) &= \int_S [\Pi(y, x, \omega, \sigma)\{R(\partial_y, v(y))U(y)\} - \\ &- \{\tilde{R}(\partial_y, v(y))\tilde{\Pi}(y, x, \omega, \sigma)\}^* U(y)] ds_y, \quad x \in D. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Верна теорема

Теорема 2.5 Пусть $U(x)$ – регулярное решение уравнения (1.1) в области D , удовлетворяющее условию

$$|U(y)| + |R(\partial_y, v(y))U(y)| \leq M, \quad y \in \partial D \setminus S. \quad (2.11)$$

Тогда для $\sigma \geq 1$ справедлива оценка

$$|U(x) - U_\sigma(x)| \leq M C_1(x) \sigma^3 \exp(-\sigma x_3^2),$$

где $C_1(x) = C \int_{\partial D_\rho} \frac{ds_y}{r^2}$.

Proof. По формуле (2.3) и (2.10) имеем

$$\begin{aligned} |U(x) - U_\sigma(x)| &\leq \frac{1}{2} \left| \int_{\partial D \setminus S} [\Pi(y, x, \omega, \sigma)\{R(\partial_y, v(y))U(y)\} - \right. \\ &- \left. \{\tilde{R}(\partial_y, v(y))\tilde{\Pi}(y, x, \omega, \sigma)\}^* U(y)] ds_y \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\partial D \setminus S} [|\Pi(y, x, \omega, \sigma)| + |R(\partial_y, v(y))\Pi(y, x, \omega, \sigma)|] \\ &+ [|U(y)| + |R(\partial_y, v(y))U(y)|] ds_y \end{aligned}$$

Теперь на основе (2.11) и (2.9) мы получим требуемое неравенство.

Следствие 2.6 При условии теоремы справедливы следующие эквивалентные формулы продолжения

$$\begin{aligned} U(x) &= \lim_{\sigma \rightarrow \infty} U_\sigma(x) = \frac{1}{2} \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \int_S [\Pi(y, x, \omega, \sigma)\{R(\partial_y, v(y))U(y)\} - \\ &- \{\tilde{R}(\partial_y, v(y))\tilde{\Pi}(y, x, \omega, \sigma)\}^* U(y)] ds_y, \quad x \in D. \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} U(x) &= \frac{1}{2} \int_S [\Pi(y, x, \omega)\{R(\partial_y, v(y))U(y)\} - \\ &- \{\tilde{R}(\partial_y, v(y))\tilde{\Pi}(y, x, \omega)\}^* U(y)] ds_y + \frac{1}{2} \int_0^\infty Q(x, \omega, \sigma) d\sigma, \quad x \in D. \end{aligned} \quad (2.13)$$

где

$$\begin{aligned} Q(x, \omega, \sigma) &= \int_S [P(y, x, \omega, \sigma)\{R(\partial_y, v(y))U(y)\} - \\ &- \{\tilde{R}(\partial_y, v(y))\tilde{P}(y, x, \omega, \sigma)\}^* U(y)] ds_y, \quad x \in D, \\ P(y, x, \omega, \sigma) &= \frac{\partial}{\partial \sigma} \Pi(y, x, \omega, \sigma) = \| \frac{\partial}{\partial \sigma} \Pi_{kj}(y, x, \omega, \sigma) \| . \end{aligned} \quad (2.14)$$

$\Pi(y, x, \omega)$ – матрица построенная по формуле (2.4) и (2.5) при $\Phi(y, x, i\Lambda) = \frac{\exp(i\Lambda r)}{4\pi r}$.

Эквивалентность формул продолжения (2.12) и (2.13) вытекает из формулы

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} U_\sigma(x) = \int_0^\infty \frac{dU_\sigma(x)}{d\sigma} d\sigma + U_0(x).$$

Справедливость перестановки порядка интегрирования основывается на улучшении порядка особенности подинтегральной функции при дифференцировании по параметру σ .

На основе формулы продолжения (2.12) и (2.13) приведем критерий разрешимости задачи Коши (1.1), (1.3). Для этого обозначим через S_0 внутренние точки поверхности S , т.е. поверхность без края.

Теорема 2.7 Пусть $S \in C^2, f \in C^1(S), g \in C(S)$. Для того чтобы существовало регулярное решение $U(x)$ системы (1.1) в области D с условием (1.3) на S_0 , необходимо и достаточно выполнение условия

$$|\int_0^\infty \partial_x^p Q(x, \omega, \sigma) d\sigma| < \infty, \quad |p| \leq 2, \tag{2.15}$$

где p – мультииндекс, равномерно на каждом компакте $K \in D, x \in K$. Если эти условия выполнены, то решения определяются двумя эквивалентными формулами (2.12), (2.13).

Proof. Необходимость. Пусть существует регулярное решение $U(x)$ системы (1.1) удовлетворяющее условиям $U(y) = f(y), R(\partial_y, v(y))U(y) = g(y), y \in S_0$, где $f \in C^1(S), g \in C(S)$. Пусть $\varepsilon > 0$. Обозначим $S_\varepsilon = S \setminus \{y \in R^3: y_3 < \varepsilon\}, D_\varepsilon = D \setminus \{y \in R^3: y_3 \leq \varepsilon\}$. Граница D_ε состоит из гладкой поверхности S_ε и плоского куска P_ε , параллельного плоскости $(0y_1y_2)$. В области D_ε функция

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \Phi(y, x, \sigma, \Lambda) = \frac{1}{-2\pi^2 \exp(\sigma x_3^2)} \int_0^\infty \operatorname{Im} \frac{(w+x_3)\exp(\sigma w^2)}{\sqrt{u^2+\alpha^2}} \cos \Lambda u du,$$

где

$$w = i\sqrt{u^2 + \alpha^2} + y_3, \quad \alpha^2 = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2, \quad \alpha > 0,$$

регулярна по y во всем пространстве, следовательно все элементы матрицы $\frac{\partial}{\partial \sigma} \Phi(y, x, \sigma, \Lambda)$ являются регулярными. Исходя из формул (2.4), (2.5) и благодаря аналогу неравенств (2.8) и (2.9), проинтегрировав равенство (2.14) по x и оценивая полученные равенства, получим

$$|\partial_x^p Q(x, \omega, \sigma)| \leq \int_{S_\varepsilon} [|\partial_x^p P(y, x, \omega, \sigma)| + |\tilde{R}(\partial_y, v(y))\partial_x^p \tilde{P}(y, x, \omega, \sigma)|] \times \\ \times [|f(y)| + |g(y)|] ds_y \leq C(x) \sigma^5 \exp(-\sigma x_3^2), \quad |p| \leq 2, \quad x_3 > 0,$$

где

$$C(x) = C \int_0^\infty \frac{\sin \sqrt{u^2 + \alpha^2}}{\sqrt{u^2 + \alpha^2}} du,$$

а C ограниченная величина зависящая только от коэффициентов системы (1.1).

Таким образом из последнего неравенства в виду того, что правая часть не зависит от ε , переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, имеем

$$|\partial_x^p Q(x, \omega, \sigma)| \leq C(x) \sigma^5 \exp(-\sigma x_3^2), \quad |p| \leq 2, \quad x_3 > 0. \tag{2.16}$$

Теперь из (2.16) получим (2.15). Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $S \in C^2, f \in C^1(S), g \in C(S)$ и верно неравенство (2.15). Покажем что существует регулярное решение $U(x)$ системы (1.1) такое, что $U(y) = f(y), R(\partial_y, v(y))U(y) = g(y), y \in S_0$. Рассмотрим функцию $U(x)$, заданную двумя эквивалентными формулами вида (2.12) и (2.13). Первое слагаемое в правой части формулы (2.13) задает две функции, которые являются регулярными решениями эллиптической системы (1.1) соответственно в областях D и $R_+^3 \setminus \bar{D}$, такими, что разности их предельных значений по нормальям и их напряжений ($x^{(1.1)}, x^{(2)}$ две точки на нормали, симметричные относительно точки $y \in S_0$, при стремлении к y) на S_0 равняются вектор-функциям $f(y)$ и $g(y)$ соответственно, причем, если одна из этих функций непрерывна в соответствующей области вплоть до S_0 , то другая тоже обладает данным свойством. Второе слагаемое в правой части (2.13) в силу (2.15) является регулярным решением системы (1.1) в R_+^3 . Итак, правая часть формулы (2.13) задает два регулярных решения $U_1(x)$ и $U_2(x)$ в областях D и $R_+^3 \setminus \bar{D}$, соответственно таких, что для всякой точки $y \in S_0$ верно (в указанном смысле) равенство

$$\begin{cases} U_1^+(y) - U_2^-(y) = f(y) \\ R(\partial_y, v(y))U_1^+(y) - R(\partial_y, v(y))U_2^-(y) = g(y), \end{cases} \tag{2.17}$$

причем, если одна из этих функций непрерывна в соответствующей области вплоть до S_0 , то другая тоже обладает данным свойством [14]. Далее заметим, что из формулы (2.12) и неравенств (2.9) вытекает, что $U_2(x) = 0$ при $x_3 > \sup\{y_3: y \in \bar{D}\}$. Тогда, согласно теореме о единственности (так как решение эллиптических систем является аналитическим [15]) $U_2(x) \equiv 0, x \in R_+^3 \setminus \bar{D}$. Теперь из (2.17) получается утверждение теоремы 2.7.

References

1. Carleman T. Les fonctions quasi analytiques:-Paris, Gauthier-Villars, 1926.-115 p.
2. Голузин Г.М., Крылов В.И. Обобщенная формула Carleman'a и ее приложение к аналитическому продолжению функций. // Мат. сб., 1933. - Т. 40. - № 2. - С. 144 - 149.

3. Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1962. 92 с.
4. Махмудов О.И., Ниёзов И.Э. Регуляризация решения задачи Коши для системы теории упругости в бесконечной области. Математические заметки. 2000.Т. 68, № 4, с 548-553.
5. Makhmudov O., Niyozov I. Regularization of a Solutions to the Cauchy Problem for Systems of Elasticity Theory. More progresses on Analysis. Proceeding of the International 5th ISAAK Congress, Editors H.G.W. Begehr, 2009(Singapore)
6. Makhmudov O., Niyozov I., Tarkhanov N. The Cauchy Problem of Couple-Stress Elasticity. Contemporary Mathematics.AMS, V455, 2008. pp.297-310.
7. Makhmudov O., Niyozov I. The Cauchy problem for the Lamé system in infinite domains in R^m . Journal of inverse and Ill-Posed Problems.V14. N9.2006. pp.905-924(20).
8. Makhmudov O., Niyozov I. Regularization of a solution to the Cauchy Problem for the System of Thermoelasticity. Contemporary Mathematics.AMS, Primary V382, 2005,74F05, 35Q72. pp.285-289.
9. Махмудов О.И., Ниёзов И.Э. Об одной задаче Коши для системы уравнений теории упругости. Дифференциальные уравнения. 2000.Т.36, №5, с. 674-678.
10. Махмудов О.И., Ниёзов И.Э. Регуляризация решения задачи Коши для системы теории упругости. Сибирский Математический журнал. 1998. Т.39, №2, с. 369-376.
11. Makhmudov O. I., Niyozov I. E. Cauchy Problem for Dynamic Elasticity Equations.Differential Equations, 2020, Vol. 56, No. 9, pp. 1130–1139.
12. Купрадзе В.Д. и др. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости / В.Д. Купрадзе, Т.Г.Гегелия, М.О.Башелейтвили, Т.В. Бурчуладзе. - М.: Наука, 1976.-663 с.
13. Ярмухамедов Ш.Я. О задаче Коши для уравнения Лапласа //ДАН СССР. 1977. Т.235. № 2.С.281-283.
14. Шлапунов А.А. О задаче Коши для уравнения Лапласа. Сиб.мат.журн.1992. Т.33. №3.С.205-215.
15. И.Г.Петровский. Лекции об уравнениях с частными производными. Москва, (1961).

УДК 517.518.5

MUAVR-LAPLASNING LOKAL VA INTEGRAL LIMIT TEOREMALARI

K. Kuliev¹, G.Kuliyeva², M.Maxmadiyorova¹

¹Samarqand davlat universiteti, ²TATU Samarqand filiali
komilkuliev@gmail.com, kulievag@mail.ru

Annotatsiya. Agar biror A hodisa ustida o'tkazilayotgan tajribalar soni n yetarlicha katta bo'lsa u holda shu hodisaning m marta ro'y berish ehtimoli $P_n(m)$ taqriban Laplas funksiyasi yordamida hisoblanadi. Ushbu ishda ehtimollik va taqribiy qiymat orasidagi farq baholanadi.

Kalit so'zlar: Lokal limit teorema, integral limit teorema, Bernulli formulasi, Laplas funksiyasi, bog'liq bo'lmagan tajribalar ketma-ketligi.

Локальная и интегральная предельная теорема Муавра-Лапласа

Аннотация. Если число испытаний n события A достаточно большое, то вероятность $P_n(m)$ появления события m раз приближенно вычисляется с помощью функции Лапласа. В этой работе оценивается погрешность между вероятности и приближенной значением.

Ключевые слова: Локальная предельная теорема, интегральная предельная теорема, формула Бернулли, функция Лапласа, последовательность независимых события.

Local and integral limit theorems of De Moivre-Laplace

Abstract. If the number of experiences n on a event A is large enough then the probability $P_n(m)$ of occurrences m times of the event is approximately calculated by using Laplace's function. In this work it is estimated the difference between the probability and the approximate value.

Keywords: Local limit theorem, integral limit theorem, Bernoulli's formula, Laplace's function, sequence of independent events.

1-§. Kirish

Faraz qilaylik, biror A hodisa ustida ketma-ket n ta bog'liq bo'lmagan tajriba o'tkazilgan bo'lsin. Bizni shu n ta tajribadan roppa-rosa m masida A hodisaning ro'y berish ehtimoli qiziqtiradi. Bu ehtimollikni mashhur Bernulli formulasi

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$$

yordamida aniq hisoblash mumkin. Lekin, Bernulli formulasini n katta qiymatlarida qo'llash qiyin, chunki formula katta sonlar ustida amallar bajarishni talab qiladi. (agar tajribalar soni n yetarlicha katta bo'lsa u holda Bernulli formulasini hisoblash qiyinlashadi.) Shuning uchun $P_n(m)$ ehtimolni Bernulli formulasini qo'llamasdan hisoblash mumkinmi? Boshqacha aytganda n katta qiymatlarida Bernulli formulasi uchun asimptotik formula topish masalasi quyiladi. Bu ehtimollikni hisoblash uchun Muavr 1730 yilda $p = 0,5$ bo'lgan holda, keyinroq Laplas $p \in (0, 1)$ bo'lgan holda asimptotik formulalar olishga muvaffaq bo'ldilar. Bu natija ehtimollar nazariyasida mashhur Muavr-Laplasning lokal limit teoremasi deb nomlanadi.

Amaliyotda juda ko'p masalalar shu teorema yordamida hal qilinadi. Yuqori aniqlikni talab qiladigan (aviatsiya, harbiy va tibbiyot) sohalarda bu teoremadan foydalanish tavsiya etilmaydi. (ba'zan masala yuzasidan aniq xulosa chiqarishga yetarli bo'la olmaydi, sababi.) Chunki bu teoremda Laplas funksiyasi yordamida topilgan ehtimollik haqiqiy ehtimollikdan qanchaga farq qilishi to'g'risida baho keltirilmagan. Bu ishda shunday baho to'g'risida so'z boradi. Muavr va Laplas asimptotik formulaning birinchi hadi bilan chegaralangan bo'lsa, biz uning ikkinchi hadini ham aniq topamiz, natijada aniqlik oshadi (xatolik kamayadi). Bundan tashqari biz ehtimolning aniq qiymati bilan, asimptotik formula yordamida hisoblangan taqribiy qiymat orasidagi farqni baholaymiz. Agar byurtmachini bu baho qanoatlantirsa, u bu formuladan foydalanishi mumkin. Masalan aviatsiya sohasida samolyot ishlab chiqaruvchi kompaniya 100 ta parvozdan (qo'nish jarayoni) 1 tasida avariya holati yuz berishi mumkin desa, bu kompaniya ishlab chiqargan samolyotlarni birorta mamlakatning aviakompaniyalari sotib olmaydi. Tovuq fermasiga borib ulgurji (optim) savdo qiluvchi tadbirkorga 100 ta tuxumdan 1 tasi singan bo'lishi mumkin desa, tadbirkor xarid qilishga rozilik bildiradi. Chunki 1 tasi singan tuxumni bahosini 5 ta tuxumni sotish natijasida qoplash mumkinligini biladi.

Biz Quyidagi belgilashlarni kiritaylik:

$$x_m = x_{m,n,p} = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

1-teorema. Agar n ta bog'liqmas tajribalarning har birida A hodisaning ro'y berish ehtimoli p ($0 < p < 1$) bo'lsa u holda $|x_m \cdot \sqrt{\frac{q}{np}}| < 1$, $|x_m \cdot \sqrt{\frac{p}{nq}}| < 1$ shartlarni qanoatlantiruvchi barcha n va m lar uchun

$$P_n(m) = \frac{\varphi(x_m)}{\sqrt{npq}} \left(1 + \frac{(q-p)}{2\sqrt{npq}} \left[\frac{x_m^3}{3} - x_m \right] \right) + \alpha_n(m) \quad (1)$$

o'rinli bo'ladi. Bu yerda

$$|\alpha_n(m)| \leq \frac{\varphi(x_m)}{n^2 \sqrt{pq}} \cdot \left[R_6(n, m) + \frac{\left(\frac{q-p}{2\sqrt{pq}} \left[\frac{x_m^3}{3} - x_m \right] + \frac{R_6(n, m)}{\sqrt{n}} \right)^2}{2} e^{\left(\frac{|q-p|}{2\sqrt{npq}} \left| \frac{x_m^3}{3} - x_m \right| + R_6(n, m) \right)} \right],$$

$$R_6(n, m) = \frac{1}{12} + \frac{x_m^4 q^2 + 6x_m^2 q + 1}{12p \left(1 - |x_m \sqrt{\frac{q}{np}}| \right)^3} + \frac{x_m^4 p^2 + 6x_m^2 p + 1}{12q \left(1 - |x_m \sqrt{\frac{p}{nq}}| \right)^3}.$$

Isbot. Teorema isbotida bizga matematik analiz fanidan ma'lum bo'lgan Stirling formulasi

$$k! = \sqrt{2\pi k} k^k \cdot e^{-k} \cdot e^{\theta_k}, \quad |\theta_k| \leq \frac{1}{12k}$$

dan foydalanamiz. Bunga asosan ushbu tenglikka

$$P_n(m) = \sqrt{\frac{n}{2\pi m(n-m)}} \cdot \frac{n^n}{m^m \cdot (n-m)^{n-m}} \cdot p^m \cdot q^{n-m} \cdot e^{\theta_{n,m}} \quad (2)$$

ega bo'lamiz, bu yerda $\theta_{n,m} = \theta_n - \theta_m - \theta_{n-m}$,

$$|\theta_{n,m}| \leq \frac{1}{12} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n-m} \right). \quad (3)$$

Agar $x_m = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}$ ekanligini e'tborga olsak u holda quyidagi tengliklar

$$m = np \left(1 + x_m \sqrt{\frac{q}{np}} \right), \quad n - m = nq \left(1 - x_m \sqrt{\frac{p}{nq}} \right) \quad (4)$$

ga ega bo'lamiz. (3) va (4) lardan ushbu baho kelib chiqadi

$$|\theta_{n,m}| \leq \frac{1}{12n} \left(1 + \frac{1}{p \left(1 - \frac{|x_m|}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{q}{p}} \right)} + \frac{1}{q \left(1 - \frac{|x_m|}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{p}{q}} \right)} \right).$$

Agar

$$A_n = \frac{n^n p^m q^{n-m}}{m^m (n-m)^{n-m}}$$

belgilash kiritsak u holda (4) ga asosan quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned} \ln A_n &= \ln \left(\frac{np}{m}\right)^m + \ln \left(\frac{nq}{n-m}\right)^{n-m} = -m \ln \frac{m}{np} - (n-m) \ln \frac{n-m}{nq} \\ &= -(np + x_m \cdot \sqrt{npq}) \cdot \ln \left(1 + x_m \cdot \sqrt{\frac{q}{np}}\right) - (nq - x_m \cdot \sqrt{npq}) \cdot \ln \left(1 - x_m \cdot \sqrt{\frac{p}{nq}}\right) \\ &= -np \left(1 + x_m \cdot \sqrt{\frac{q}{np}}\right) \cdot \ln \left(1 + x_m \cdot \sqrt{\frac{q}{np}}\right) - nq \left(1 - x_m \cdot \sqrt{\frac{p}{nq}}\right) \cdot \ln \left(1 - x_m \cdot \sqrt{\frac{p}{nq}}\right). \end{aligned} \quad (5)$$

Lagrang qoldiqli Teylor formulasiga asosan ushbu tenglikka ega bo'lamiz:

$$(1+t) \ln(1+t) = t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{12(1+\theta \cdot t)^3}.$$

Bu tenglikni $t = x_m \cdot \sqrt{\frac{q}{np}}$ va $t = -x_m \cdot \sqrt{\frac{p}{nq}}$ uchun ketma-ket qullasak natijada quyidagilarni hosil qilamiz:

$$\left(1 + x_m \cdot \sqrt{\frac{q}{np}}\right) \cdot \ln \left(1 + x_m \cdot \sqrt{\frac{q}{np}}\right) = x_m \cdot \sqrt{\frac{q}{np}} + \frac{x_m^2 \cdot q}{2np} - \frac{x_m^3}{3} \cdot \left(\frac{q}{np}\right)^{\frac{3}{2}} + R_1(n, m), \quad (6)$$

$$\left(1 - x_m \cdot \sqrt{\frac{p}{nq}}\right) \cdot \ln \left(1 - x_m \cdot \sqrt{\frac{p}{nq}}\right) = -x_m \cdot \sqrt{\frac{p}{nq}} + \frac{x_m^2 \cdot p}{2nq} + \frac{x_m^3}{3} \cdot \left(\frac{p}{nq}\right)^{\frac{3}{2}} + R_2(n, m), \quad (7)$$

bunda

$$|R_1(n, m)| = \frac{\frac{x_m^4 q^2}{n^2 p^2}}{12 \left|1 - \theta \cdot x_m \cdot \sqrt{\frac{q}{np}}\right|^3} \leq \frac{\frac{x_m^4 q^2}{n^2 p^2}}{12 \left(1 - \left|x_m \cdot \sqrt{\frac{q}{np}}\right|\right)^3}, \quad (8)$$

$$|R_2(n, m)| = \frac{\frac{x_m^4 p^2}{n^2 q^2}}{12 \left|1 - \theta \cdot x_m \cdot \sqrt{\frac{p}{nq}}\right|^3} \leq \frac{\frac{x_m^4 p^2}{n^2 q^2}}{12 \left(1 - \left|x_m \cdot \sqrt{\frac{p}{nq}}\right|\right)^3}. \quad (9)$$

Bulardan foydalanib (5) ni ushbu ko'rinishda yozish mumkin:

$$\begin{aligned} \ln A_n &= -np \cdot \left[x_m \cdot \sqrt{\frac{q}{np}} + \frac{x_m^2 \cdot q}{2np} - \frac{x_m^3}{3} \cdot \left(\frac{q}{np}\right)^{\frac{3}{2}} + R_1(n, m) \right] - nq \\ &\quad \cdot \left[-x_m \cdot \sqrt{\frac{p}{nq}} + \frac{x_m^2 \cdot p}{2nq} + \frac{x_m^3}{3} \cdot \left(\frac{p}{nq}\right)^{\frac{3}{2}} + R_2(n, m) \right] \\ &= -x_m \cdot \sqrt{npq} - \frac{x_m^2 \cdot q}{2} + \frac{x_m^3 \cdot q^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{np}} - np \cdot R_1(n, m) \\ &\quad + x_m \cdot \sqrt{npq} - \frac{x_m^2 \cdot p}{2} - \frac{x_m^3 \cdot p^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{nq}} - nq \cdot R_2(n, m) \\ &= -\frac{x_m^2}{2} + \left[\frac{x_m^3 \cdot q^{\frac{3}{2}}}{6\sqrt{np}} - \frac{x_m^3 \cdot p^{\frac{3}{2}}}{6\sqrt{nq}} - np \cdot R_1(n, m) - nq \cdot R_2(n, m) \right]. \end{aligned}$$

Buni soddalashtirib ushbu tenglikka ega bo'lamiz:

$$\ln A_n = -\frac{x_m^2}{2} + \left[\frac{x_m^3 \cdot (q-p)}{6\sqrt{npq}} - np \cdot R_1(n, m) - nq \cdot R_2(n, m) \right].$$

Yuqoridagidan tashqari bizlarga ushbu ifodaning ham ko'rinishini almashtirish talab etiladi:

$$\sqrt{\frac{n}{m(n-m)}} = e^{\frac{1}{2} \ln \frac{n}{m(n-m)}} = e^{\frac{1}{2} \ln \frac{n}{np(1+x_m \cdot \sqrt{\frac{q}{np}})nq(1-x_m \cdot \sqrt{\frac{p}{nq}})}} =$$

$$= e^{\frac{1}{2} \ln \frac{1}{npq}} \cdot e^{\frac{1}{2} \ln \frac{1}{(1+x_m \cdot \sqrt{\frac{q}{np}})(1-x_m \cdot \sqrt{\frac{p}{nq}})}} = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot e^{-\frac{1}{2} [\ln(1+x_m \cdot \sqrt{\frac{q}{np}}) + \ln(1-x_m \cdot \sqrt{\frac{p}{nq}})]}$$

Endi ushbu tenglikdan

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{(1+\theta \cdot t)^2}$$

foydalansak, natijada

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{n}{m(n-m)}} &= \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot e^{-\frac{1}{2} [x_m \cdot \sqrt{\frac{q}{np}} - x_m \cdot \sqrt{\frac{p}{nq}} + R_3(n,m) + R_4(n,m)]} \\ &= \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot e^{-\frac{x_m(q-p)}{2\sqrt{npq}} - \frac{1}{2} [R_3(n,m) + R_4(n,m)]}, \end{aligned}$$

bu yerda,

$$R_3(n, m) = \frac{\frac{x_m^2 q}{np}}{\left(1 - \theta \cdot x_m \sqrt{\frac{q}{np}}\right)^2} \leq \frac{\frac{x_m^2 q}{np}}{\left(1 - \left|x_m \sqrt{\frac{q}{np}}\right|\right)^2}, \tag{10}$$

$$R_4(n, m) = \frac{\frac{x_m^2 p}{nq}}{\left(1 - \theta \cdot x_m \sqrt{\frac{p}{nq}}\right)^2} \leq \frac{\frac{x_m^2 p}{nq}}{\left(1 - \left|x_m \sqrt{\frac{p}{nq}}\right|\right)^2}. \tag{11}$$

Natijada

$$\begin{aligned} P_n(m) &= \sqrt{\frac{n}{2\pi m(n-m)}} \cdot \frac{n^n}{m^m \cdot (n-m)^{n-m}} \cdot p^m \cdot q^{n-m} \cdot e^{\theta_{n,m}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2} \ln \frac{n}{m(n-m)}} \cdot e^{\ln A_n} \cdot e^{\theta_{n,m}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot e^{-\frac{x_m(q-p)}{2\sqrt{npq}} - \frac{1}{2} [R_3(n,m) + R_4(n,m)]} \cdot \\ &\quad \cdot e^{-\frac{x_m^2}{2} + \left[\frac{x_m^3(q-p)}{6\sqrt{npq}} - np \cdot R_1(n,m) - nq \cdot R_2(n,m)\right]} \cdot e^{\theta_{n,m}} = \\ &= \frac{e^{-\frac{x_m^2}{2}}}{\sqrt{npq}} \cdot \exp\left(\frac{(q-p)}{2\sqrt{npq}} \left[\frac{x_m^3}{3} - x_m\right] - \frac{1}{2} [R_3(n,m) + R_4(n,m)] - np \cdot R_1(n,m) - nq \cdot R_2(n,m) + \theta_{n,m}\right) \\ &\quad = \frac{\varphi(x_m)}{\sqrt{npq}} \cdot \exp\left(\frac{(q-p)}{2\sqrt{npq}} \left[\frac{x_m^3}{3} - x_m\right] + R_5(n,m)\right), \end{aligned}$$

Bun da

$$R_5(n, m) = -\frac{1}{2} [R_3(n, m) + R_4(n, m)] - np \cdot R_1(n, m) - nq \cdot R_2(n, m) + \theta_{n,m}.$$

Demak, quyidagi tenglik o‘rinli ekan:

$$P_n(m) = \frac{\varphi(x_m)}{\sqrt{npq}} \cdot \exp\left(\frac{(q-p)}{2\sqrt{npq}} \left[\frac{x_m^3}{3} - x_m\right] + R_5(n, m)\right).$$

Bu yerda $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} e^{\theta \cdot t}$ tenglikdan foydalanib ushbu ko‘rinishga ega bo‘lamiz:

$$P_n(m) = \frac{\varphi(x_m)}{\sqrt{npq}} \cdot \left[1 + \frac{(q-p)}{2\sqrt{npq}} \left[\frac{x_m^3}{3} - x_m\right] + R_5(n, m) + \frac{\left(\frac{(q-p)}{2\sqrt{npq}} \left[\frac{x_m^3}{3} - x_m\right] + R_5(n, m)\right)^2}{2} e^{\theta \cdot \left(\frac{(q-p)}{2\sqrt{npq}} \left[\frac{x_m^3}{3} - x_m\right] + R_5(n, m)\right)} \right].$$

Bundan bizlar ushbu bahoni hosil qilamiz:

$$\left| P_n(m) - \frac{\varphi(x_m)}{\sqrt{npq}} \left(1 + \frac{(q-p)}{2\sqrt{npq}} \left[\frac{x_m^3}{3} - x_m \right] \right) \right| \leq \frac{\varphi(x_m)}{\sqrt{npq}} \cdot \left[R_5(n, m) + \frac{\left(\frac{(q-p)}{2\sqrt{npq}} \left[\frac{x_m^3}{3} - x_m \right] + R_5(n, m) \right)^2}{2} e^{\theta \cdot \left(\frac{(q-p)}{2\sqrt{npq}} \left[\frac{x_m^3}{3} - x_m \right] + R_5(n, m) \right)} \right]. \quad (12)$$

Endi bizlar $R_5(n, m)$ uchun baho topamiz:

$$\begin{aligned} |R_5(n, m)| &\leq \frac{1}{2} [|R_3(n, m)| + |R_4(n, m)|] + np \cdot |R_1(n, m)| + nq \cdot |R_2(n, m)| + |\theta_{n,m}| \\ &\leq \frac{\frac{x_m^2 q}{np}}{2 \left(1 - \left| x_m \sqrt{\frac{q}{np}} \right| \right)^2} + \frac{\frac{x_m^2 p}{nq}}{2 \left(1 - \left| x_m \sqrt{\frac{p}{nq}} \right| \right)^2} + \frac{\frac{x_m^4 q^2}{np}}{12 \left(1 - \left| x_m \cdot \sqrt{\frac{q}{np}} \right| \right)^3} + \frac{\frac{x_m^4 p^2}{nq}}{12 \left(1 - \left| x_m \cdot \sqrt{\frac{p}{nq}} \right| \right)^3} \\ &\quad + \frac{1}{12n} \left(1 + \frac{1}{p \left(1 - \left| x_m \sqrt{\frac{q}{np}} \right| \right)} + \frac{1}{q \left(1 - \left| x_m \sqrt{\frac{p}{nq}} \right| \right)} \right) \\ &\leq \frac{1}{12n} + \frac{x_m^4 q^2 + 6x_m^2 q + 1}{12np \left(1 - \left| x_m \sqrt{\frac{q}{np}} \right| \right)^3} + \frac{x_m^4 p^2 + 6x_m^2 p + 1}{12nq \left(1 - \left| x_m \sqrt{\frac{p}{nq}} \right| \right)^3}, \end{aligned}$$

demak,

$$|R_5(n, m)| \leq \frac{1}{n} \left[\frac{1}{12} + \frac{x_m^4 q^2 + 6x_m^2 q + 1}{12p \left(1 - \left| x_m \sqrt{\frac{q}{np}} \right| \right)^3} + \frac{x_m^4 p^2 + 6x_m^2 p + 1}{12q \left(1 - \left| x_m \sqrt{\frac{p}{nq}} \right| \right)^3} \right] = \frac{R_6(n, m)}{n}.$$

Shunday qilib (12) dan ushbu bahoni

$$\left| P_n(m) - \frac{\varphi(x_m)}{\sqrt{npq}} \left(1 + \frac{(q-p)}{2\sqrt{npq}} \left[\frac{x_m^3}{3} - x_m \right] \right) \right| \leq \frac{\varphi(x_m)}{n^{\frac{3}{2}} \sqrt{pq}} \cdot \left[R_6(n, m) + \frac{\left(\frac{(q-p)}{2\sqrt{pq}} \left[\frac{x_m^3}{3} - x_m \right] + \frac{R_6(n, m)}{\sqrt{n}} \right)^2}{2} e^{\left(\frac{|q-p|}{2\sqrt{npq}} \left| \frac{x_m^3}{3} - x_m \right| + R_6(n, m) \right)} \right]$$

hosil qildik.

Teorema isbot bo'ldi.

1-izoh. 1- teoramadagi ushbu

$$P_n(m) \approx \frac{\varphi(x_m)}{\sqrt{npq}} \left(1 + \frac{(q-p)}{2\sqrt{npq}} \left[\frac{x_m^3}{3} - x_m \right] \right)$$

formuladan quyidagi natijalarni hosil qilamiz:

a. Agar $p = q$ bo'lsa, u holda adabiyotlarda keltirilganidek [Sirojdinov, Mamatov] Muavr-Laplas teoremasidagi haqiqiy ehtimollik $P_n(m)$ asimptotik ehtimollik $\frac{\varphi(x_m)}{\sqrt{npq}}$ ga ancha yaqin bo'ladi. Aniqrog'i orasidagi xatolik $\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ tartibida bo'ladi.

b. 1-teoremadan ma'lum buldiki, agar x_m ning qiymati 0 yoki $\sqrt{3}$ ga teng yoki ularga juda yaqin bo'lsa ham yuqoridagidek tasdiq o'rinli bo'ladi.

2-izoh. Yuqoridagi teoremada bizlar ushbu

$$\left| x_m \cdot \sqrt{\frac{p}{nq}} \right| < 1 \quad \text{va} \quad \left| x_m \cdot \sqrt{\frac{q}{np}} \right| < 1$$

shartlar bajarilishini faraz qilgandik. Bu shartlarni amaliyotda tekshirish qulay bo'lishi uchun $x_m = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}$ ekanligini hisobga olsak, masala shartlari quyidagi sistema yechimini qanoatlantirishi zarur bo'lishi kelib chiqadi:

$$\begin{cases} n(p - q) < m < n \\ 0 < m < 2np \end{cases}$$

Bundan ko'rinadiki, agar p ehtimollik 0 yoki 1 sonlariga yaqin bo'lsa u holda m ro'y berishlar soni nisbatan kam qiymatlarni qabul qilar ekan va aksinchai, agar p ehtimollik $\frac{1}{2}$ ga yaqin bo'lsa u holda m ro'y berishlar soni ancha ko'p bo'lar ekan.

Masalalar yechishda qulaylik tug'dirish uchun

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

funksiya uchun jadval tuzilgan.

[3-4] adabiyotlarda katta sondagi tajribalar uchun Bernulli formulasini hisoblashda ushbu taqribiy formuladan foydalaniladi:

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x).$$

Gap shundaki, 1-teoremani qullash natijasida bu ehtimollikni yetarlicha aniqlik bilan hisoblash mumkinligini quyidagi misolda ko'ramiz.

Misol. A hodisaning 900 ta bog'liqmas sinovning har birida ro'y berish ehtimoli $p = 0,8$ ga teng bo'lsa, A hodisaning 750 marta ro'y berish ehtimolini toping.

Yechish: $n = 900$, $m = 750$, $p = 0,8$, $q = 0,2$. Ushbu qo'sh tengsizlik berilgan kattaliklar teorema shartini qanoatlantirishini ko'rsatadi, ya'ni

$$\begin{cases} 900 \cdot 0,6 < 750 < 900 \\ 0 < 750 < 2 \cdot 900 \cdot 0,8 \end{cases}$$

Hamda,

$$x_m = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{750 - 900 \cdot 0,8}{\sqrt{900 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = 2,5$$

va jadvaldan

$$\varphi(2,5) \approx 0,0175$$

1-teoremaga ko'ra berilgan ehtimollik tahminan quyidagiga tengdir:

$$P_{900}(750) \approx \frac{1}{\sqrt{900 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} \varphi(2,5)(1 - 0,067) = 0,001360625.$$

Ikkinchi tomondan, Muavr-Laplasning lokal teoremasidan foydalanib hisolangan ehtimol $P_{900}(750) \approx \frac{1}{\sqrt{900 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} \varphi(2,5) = 0,00146$ ekanligini ko'rsatadi.

Endi, Bernulli formulasini aniq hisoblaganda ushbu tenglikka

$$P_n(m) = \frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot p^m \cdot q^{n-m} = \frac{900!}{750!(900-750)!} \cdot 0,8^{750} \cdot 0,2^{900-750} = 0,00136$$

ega bo'lamiz. Maqoladagi 1-teoremaga ko'ra taqribiy va aniq qiymat orasidagi farq 0,000000625 ni tashkil qildi. Agar klassik formula bilan hisoblasak, farq 0.000100625 ga teng chiqadi. Bu o'z navbatida 1-teoremadagi formula yuqoridagi misol uchun ancha aniq hisoblashini ko'rsatadi.

2-§. Muavr-Laplasning integral limit teoremasi

Faraz qilaylik, bizdan n ta bog'liqmas tajribalarda biror A hodisasining kami bilan m_1 ko'pi bilan m_2 marta ro'y berish ehtimolligini $P_n(m_1, m_2)$ ni topish talab qilinsin. Bernulli formulasiga asosan:

$$P_n(m_1, m_2) := P(m_1 \leq m \leq m_2) = \sum_{m=m_1}^{m=m_2} P_n(m). \quad (13)$$

Agar n , m_1 va m_2 lar yetarlicha katta bo'lsa, (13) ifodaning qiymatini hisoblash texnik qiyinchiliklarga olib keladi. Shuning uchun ham $P_n(m_1, m_2)$ ehtimollik uchun asimptotik formula topish zaruriyati tug'iladi.

3.1-teorema (Muavr-Laplasning integral limit teoremasi). Agar n ta bog'liqmas tajribalarning har birida biror A hodisaning ro'y berish ehtimoli p ($0 < p < 1$) bo'lsa u holda

$$P_n(m_1, m_2) = \int_a^b \varphi(x) dx + \alpha_n(m_1, m_2)$$

Bu yerda

$$|\alpha_n(m_1, m_2)| \leq \frac{2 + C}{\sqrt{npq}} + \frac{2|q - p|}{npq}$$

Munosabat a va b larda ($-\infty < a \leq b < \infty$) nisbatan tekis bajariladi. Bu yerda,

$$a = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad b = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

$$C = \max_{x_m \in [a, b]} \varphi(x_m) \cdot \left[R_6(n, m) + \frac{\left(\frac{|q-p|}{2\sqrt{npq}} \frac{x_m^3}{3} - x_m + \frac{R_6(n, m)}{\sqrt{n}} \right)^2}{2} e^{\left(\frac{|q-p|}{2\sqrt{npq}} \frac{x_m^3}{3} - x_m + R_6(n, m) \right)} \right].$$

Isbot. Muavr-Laplasning lokal limit teoremasiga asosan a va b lar chekli bo'lganda

$$P_n(m_1, m_2) = P\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) =$$

$$= \sum_{x_m \in [a, b]} P_n(m) = \sum_{x_m \in [a, b]} \left[\frac{\varphi(x_m)}{\sqrt{npq}} \left(1 + \frac{(q-p)}{2\sqrt{npq}} \left[\frac{x_m^3}{3} - x_m \right] \right) + \alpha_n(m) \right] = R_n + T_n$$

bu yerda

$$R_n = \sum_{x_m \in [a, b]} \frac{\varphi(x_m)}{\sqrt{npq}} \left(1 + \frac{(q-p)}{2\sqrt{npq}} \left[\frac{x_m^3}{3} - x_m \right] \right), \quad T_n = \sum_{x_m \in [a, b]} \alpha_n(m).$$

Quyidagi ayirmani qaraymiz:

$$\Delta x_m = x_{m+1} - x_m = \frac{m+1 - np}{\sqrt{npq}} - \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{1}{\sqrt{npq}}$$

Bunga asosan

$$R_n = \sum_{x_m \in [a, b]} \varphi(x_m) \left(1 + \frac{(q-p)}{2\sqrt{npq}} \left[\frac{x_m^3}{3} - x_m \right] \right) \Delta x_m$$

bo'ladi. Demak

$$\left| R_n - \int_a^b \varphi(x) \left(1 + \frac{(q-p)}{2\sqrt{npq}} \left[\frac{x^3}{3} - x \right] \right) dx \right|$$

$$= \left| \sum_{x_m \in [a, b]} \varphi(x_m) \left(1 + \frac{(q-p)}{2\sqrt{npq}} \left[\frac{x_m^3}{3} - x_m \right] \right) \Delta x_m - \int_a^b \varphi(x) \left(1 + \frac{(q-p)}{2\sqrt{npq}} \left[\frac{x^3}{3} - x \right] \right) dx \right|$$

$$\leq \left| \sum_{x_m \in [a, b]} \varphi(x_m) \left(1 + \frac{(q-p)}{2\sqrt{npq}} \left[\frac{x_m^3}{3} - x_m \right] \right) \Delta x_m - \sum_{x_m \in [a, b]} \int_{x_m}^{x_{m+1}} \varphi(x) \left(1 + \frac{(q-p)}{2\sqrt{npq}} \left[\frac{x^3}{3} - x \right] \right) dx \right| \leq$$

$$\leq \sum_{x_m \in [a, b]} \left| \varphi(x_m) \left(1 + \frac{(q-p)}{2\sqrt{npq}} \left[\frac{x_m^3}{3} - x_m \right] \right) \Delta x_m - \int_{x_m}^{x_{m+1}} \varphi(x) \left(1 + \frac{(q-p)}{2\sqrt{npq}} \left[\frac{x^3}{3} - x \right] \right) dx \right| \leq$$

$$\leq \sum_{x_m \in [a, b]} \left| \varphi(x_m) \Delta x_m - \int_{x_m}^{x_{m+1}} \varphi(x) dx \right| +$$

$$+ \frac{|q-p|}{2\sqrt{npq}} \sum_{x_m \in [a, b]} \left| \varphi(x_m) \left[\frac{x_m^3}{3} - x_m \right] \Delta x_m - \int_{x_m}^{x_{m+1}} \varphi(x) \left[\frac{x^3}{3} - x \right] dx \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{npq}} \sum_{x_m \in [a, b]} |\varphi(x_m) - \varphi(x_{m+1})| + \frac{|q-p|}{2npq} \sum_{x_m \in [a, b]} \left| \varphi(x_m) \left[\frac{x_m^3}{3} - x_m \right] - \varphi(\xi_{m+1}) \left[\frac{\xi_{m+1}^3}{3} - \xi_{m+1} \right] \right| \leq$$

$$\leq \frac{2\varphi(0)}{\sqrt{npq}} + \frac{|q-p|}{2npq} \text{Var}_{[a, b]} \left(\varphi(x) \left[\frac{x^3}{3} - x \right] \right) =$$

$$\leq \frac{2}{\sqrt{npq}} + \frac{2|q-p|}{npq}.$$

Yuqorida φ funksiyaning monotonligidan foydalandik, bundan tashqari va $\varphi(x) \left[\frac{x^3}{3} - x \right]$ funksiya variatsiyasini hisoblashda uning monoton intervallarini aniqladik

$$\left(-\infty, -\sqrt{3+\sqrt{6}} \right) \cup \left(-\sqrt{3-\sqrt{6}}, \sqrt{3-\sqrt{6}} \right) \cup \left(\sqrt{3-\sqrt{6}}, \infty \right)$$

da kamayuvchi, hamda qolgan qismida

$$\left(-\sqrt{3+\sqrt{6}}, -\sqrt{3-\sqrt{6}} \right) \cup \left(\sqrt{3-\sqrt{6}}, \sqrt{3+\sqrt{6}} \right)$$

o'suvchidir. Natijada

$$Var_{[a,b]} \left(\varphi(x) \left[\frac{x^3}{3} - x \right] \right) \leq Var_R \left(\varphi(x) \left[\frac{x^3}{3} - x \right] \right) \leq 4$$

bahoni hosil qilamiz. Endi T_n ni quyidagicha baholaymiz:

$$\begin{aligned} |T_n| &\leq \sum_{x_m \in [a,b]} \frac{\varphi(x_m)}{n^{\frac{3}{2}} \sqrt{pq}} \cdot \left[R_6(n,m) + \frac{\left(\frac{|q-p|}{2\sqrt{pq}} \left| \frac{x_m^3}{3} - x_m \right| + \frac{R_6(n,m)}{\sqrt{n}} \right)^2}{2} e^{\left(\frac{|q-p|}{2\sqrt{npq}} \left| \frac{x_m^3}{3} - x_m \right| + R_6(n,m) \right)} \right] \\ &\leq \max_{x_m \in [a,b]} \frac{\varphi(x_m)}{n^{\frac{3}{2}} \sqrt{pq}} \cdot \left[R_6(n,m) + \frac{\left(\frac{|q-p|}{2\sqrt{pq}} \left| \frac{x_m^3}{3} - x_m \right| + \frac{R_6(n,m)}{\sqrt{n}} \right)^2}{2} e^{\left(\frac{|q-p|}{2\sqrt{npq}} \left| \frac{x_m^3}{3} - x_m \right| + R_6(n,m) \right)} \right] \sum_{x_m \in [a,b]} 1 \leq \\ &\leq \max_{x_m \in [a,b]} \frac{\varphi(x_m)}{\sqrt{npq}} \cdot \left[R_6(n,m) + \frac{\left(\frac{|q-p|}{2\sqrt{pq}} \left| \frac{x_m^3}{3} - x_m \right| + \frac{R_6(n,m)}{\sqrt{n}} \right)^2}{2} e^{\left(\frac{|q-p|}{2\sqrt{npq}} \left| \frac{x_m^3}{3} - x_m \right| + R_6(n,m) \right)} \right] \\ &\leq \frac{C}{\sqrt{npq}}. \end{aligned}$$

Bu yerda,

$$C = \max_{x_m \in [a,b]} \varphi(x_m) \cdot \left[R_6(n,m) + \frac{\left(\frac{|q-p|}{2\sqrt{pq}} \left| \frac{x_m^3}{3} - x_m \right| + \frac{R_6(n,m)}{\sqrt{n}} \right)^2}{2} e^{\left(\frac{|q-p|}{2\sqrt{npq}} \left| \frac{x_m^3}{3} - x_m \right| + R_6(n,m) \right)} \right].$$

Demak,

$$|T_n| \leq \frac{C}{\sqrt{npq}}$$

va

$$\left| R_n - \int_a^b \varphi(x) dx \right| \leq \frac{2+C}{\sqrt{npq}} + \frac{|q-p|}{2npq} Var_{[a,b]} \left(\varphi(x) \left[\frac{x^3}{3} - x \right] \right).$$

Bundan quyidagi baho hosil bo'ladi:

$$|\alpha_n(m_1, m_2)| \leq \left| R_n - \int_a^b \varphi(x) dx \right| \leq \frac{2+C}{\sqrt{npq}} + \frac{|q-p|}{2npq} Var_{[a,b]} \left(\varphi(x) \left[\frac{x^3}{3} - x \right] \right)$$

Adabiyotlar

1. A.Abdushukurov, T. Zuparov. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika. Darslik. Toshkent, "Tafakkur-Bo'stoni", 2015 y.
2. S.H.Sirojdinov, M.Mamatov. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika. Darslik. Toshkent, "O'qituvchi", 1980 y.
3. A.A.Abdushukurov, T.A.Azlarov, A.A.Djamirzayev. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistikadan misol va masalalar to'plami, Toshkent, "Universitet", 2003 y.
4. V.Ye.Gmurman. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistikadan masalalar yechishga doir qo'llanma, Toshkent, "O'qituvchi", 1980 y.

УДК 517.957

ИЗОСПЕКТРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ НА КОНЕЧНОМ ОТРЕЗКЕ

О.Э.Мирзаев

Самаркандский государственный университет

Аннотация. В настоящей работе предлагается алгоритм построения семейства разных краевых задач Штурма – Лиувилля с одинаковым спектром.

Ключевые слова: задача Штурма – Лиувилля, интегральное уравнение, нормирующие константы, собственные значения.

Chekli kesmadagi Shturm-Liuvill izospektral operatorlari

Annotatsiya. Ushbu maqolada spektrlari bir xil bo'lgan har xil Shturm – Liuvill chegaraviy masalalari oilasini qurish algoritmi taklif qilingan.

Kalit so'zlar: integral tenglama, normallovchi o'zgarmaslar, Shturm-Liuvill masalasi, xos qiymat.

Isospectral Sturm-Liouville operators on the finite segment

Abstract. In the paper an algorithm for constructing a family of different Sturm-Liouville boundary-value problems with a same spectrum is presented.

Keywords: eigenvalues, normalizing constants, integral equation, Sturm-Liouville problems.

1. Введение

Настоящая работа посвящена обратной спектральной задаче об описании всех краевых задач Штурма-Лиувилля на конечном отрезке с одним и тем же спектром. Такие краевые задачи называются изоспектральными и были изучены в работах Е.Исаксона, Р.Макина, В.Долберга и Е.Трубовица. В настоящее время имеются разные методы решения обратных спектральных задач: метод оператора преобразования (т.е. метод Гельфанда-Левитана), метод спектральных отображений, метод эталонных моделей и другие (см. [1]-[13]). В.А.Марченко показал, что оператор Штурма-Лиувилля на конечном отрезке определяется однозначно по его собственным значениям и последовательности нормирующих констант, т.е. по спектральной функции. И.М.Гельфандом и Б.М.Левитаном были найдены необходимые и достаточные условия восстановления краевых задач Штурма-Лиувилля по ее спектральным функциям. При построении изоспектральных краевых задач Штурма-Лиувилля с заданным спектром $(n+1/2)^2$, $n \geq 0$ нами использован метод Гельфанда-Левитана. Этот метод основан на восстановлении потенциала и краевых условий по спектральным данным с помощью интегрального уравнения Фредгольма второго рода с параметром.

Определение 1.1. Краевые задачи Штурма-Лиувилля с граничными условиями

$$L^0 y \equiv -y'' = \lambda y, \quad (0 < x < \pi), \quad y'(0) = 0, \quad y(\pi) = 0 \quad (1.1)$$

и

$$Ly \equiv -y'' + q(x)y = \lambda y, \quad (0 < x < \pi), \quad y'(0) - hy(0) = 0, \quad y(\pi) = 0 \quad (1.2)$$

называются изоспектральными, если они имеют одинаковые собственные значения, т.е. $\sigma(L) = \sigma(L^0) = \{(n+1/2)^2, n \geq 0\}$. Здесь $q(x) \in C[0, \pi]$ - действительная функция на отрезке $[0, \pi]$, h конечное действительное число.

В данной работе восстанавливается семейство краевых задач $L = L(q(x), h, \infty)$ Штурма-Лиувилля с граничными условиями (1.2), спектры которых удовлетворяют условию $\sigma(L) = \{\lambda_n\}_{n=0}^\infty = \{(n+1/2)^2, n \geq 0\}$.

2. Некоторые сведения об обратной спектральной задаче.

Рассмотрим следующую краевую задачу

$$L(q(x), h, \infty)y \equiv -y'' + q(x)y = \lambda y, \quad (0 < x < \pi), \quad (2.1)$$

$$y'(0) - hy(0) = 0, \quad (2.2)$$

$$y(\pi) = 0, \quad (2.3)$$

где $q(x) \in C[0, \pi]$, λ - спектральный параметр.

Обозначим через $\varphi(x, \lambda)$ решение уравнения (2.1), удовлетворяющее начальным условиям:

$$\varphi(0, \lambda) = 1, \quad \varphi'(0, \lambda) = h. \tag{2.4}$$

Хорошо известно [3], что решение $\varphi(x, \lambda)$ задачи (2.1), (2.4) существует и единственно, а также для каждого фиксированного $x \in [0, \pi]$ является целой функцией по λ . Кроме того, имеет место интегральное представление

$$\varphi(x, \lambda) = \cos \sqrt{\lambda} x + \int_0^x K(x, t) \cos \sqrt{\lambda} t dt, \tag{2.5}$$

$$K(x, x) = h + \frac{1}{2} \int_0^x q(t) dt. \tag{2.6}$$

Очевидно, что $\varphi(x, \lambda)$ при любом λ удовлетворяет граничному условию (2.2). Поэтому собственные значения $\lambda_n, n = 0, 1, 2, \dots$ задачи (2.1)-(2.3) суть корни уравнения

$$\Delta(\lambda) \equiv \varphi(\pi, \lambda) = 0, \tag{2.7}$$

а соответствующая собственная функция $y_n(x)$ равна $\varphi(x, \lambda_n), n = 0, 1, 2, \dots$. Положим

$$\alpha_n = \int_0^\pi \varphi^2(x, \lambda_n) dx. \tag{2.8}$$

Числа α_n называются нормировочными числами краевой задачи (2.1)-(2.3). Набор чисел $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n=0}^\infty$ будем называть в дальнейшем спектральными данными задачи (2.1)-(2.3).

Теорема 2.1. Для спектральных данных $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n=0}^\infty$ задачи (2.1)-(2.3) справедливы равенства

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{1}{2} + \frac{c}{(n+1/2)\pi} + \frac{\gamma_n}{n}, \quad \{\gamma_n\} \in l_2, \quad \alpha_n = \frac{\pi}{2} + \frac{\beta_n}{n}, \quad \{\beta_n\} \in l_2, \quad c = h + \frac{1}{2} \int_0^\pi q(t) dt. \tag{2.9}$$

Хорошо известно, что собственные функции, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны и для произвольных функций $f(x) \in L^2(0, \pi)$ имеет место

$$f(x) = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{\alpha_n} \left(\int_0^\pi f(t) \varphi(t, \lambda_n) dt \right) \varphi(x, \lambda_n). \tag{2.10}$$

Отсюда получим символическое равенство:

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{\varphi(t, \lambda_n) \varphi(x, \lambda_n)}{\alpha_n} = \delta(t-x), \tag{2.11}$$

где $\delta(x)$ - дельта функция Дирака.

В частности, при $q(x) \equiv 0, h = 0$ имеем

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{\alpha_n^0} \cos(n+1/2)x \cos(n+1/2)t = \delta(t-x), \tag{2.12}$$

где

$$\alpha_n^0 = \frac{\pi}{2}, \quad n \geq 0. \tag{2.13}$$

Теорема 2.2. (В.А.Марченко [1]). Потенциал $q(x)$ и коэффициент h краевой задачи (2.1)-(2.3) определяется однозначно по спектральным данным $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n=0}^\infty$.

Лемма 2.1. Имеет место тождество

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{\varphi(x, \lambda_n)}{\alpha_n} \cos \sqrt{\lambda_n} t = 0, \quad 0 < t < x. \tag{2.14}$$

Теорема 2.3. (И.М.Гельфанд, Б.М.Левитан [2]). Ядро $K(x, t)$ оператора преобразования (2.5) удовлетворяет интегральному уравнению

$$K(x, t) + F(x, t) + \int_0^x K(x, s) F(s, t) ds = 0, \quad (0 < t < x), \tag{2.15}$$

где

$$F(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\alpha_n} \cos \sqrt{\lambda_n} x \cos \sqrt{\lambda_n} t - \frac{1}{\alpha_n^0} \cos(n+1/2)x \cos(n+1/2)t \right\}. \quad (2.16)$$

Теорема 2.4. (И.М.Гельфанд, Б.М.Левитан [2]). Для того чтобы последовательность вещественных чисел $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ были спектральными данными некоторой кривой задачи вида (2.1)-(2.3) с $q(x) \in L^2(0, \pi)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (2.9).

Итак, пусть $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяют условиям (2.9). Построим функции $F(x, t)$ по формуле (2.16) и рассмотрим семейство интегральных уравнений (2.15) относительно $K(x, t)$.

Теорема 2.5. ([12]) При каждом фиксированном $x \in (0, \pi)$ интегральное уравнение (2.16) имеет единственное решение $K(x, t) \equiv K_x(t)$.

Теперь, решая уравнение (2.15) находим $K(x, t)$. Далее определим функцию $\varphi(x, \lambda)$ по формуле (2.5). Тогда функция $\varphi(x, \lambda)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$-\varphi'' + q(x)\varphi = \lambda\varphi, \quad (0 < x < \pi) \quad (2.17)$$

и начальным условиям

$$\varphi(0, \lambda) = 1, \quad \varphi'(0, \lambda) = K(0, 0) = -F(0, 0) = h, \quad (2.18)$$

где

$$q(x) = 2 \frac{d}{dx} K(x, x). \quad (2.19)$$

3. Алгоритм восстановления изоспектральных краевых задач.

1) Пусть

$$\lambda_n = (n+1/2)^2, \quad n \geq 0; \quad \alpha_n = a_n, \quad n = \overline{0, k-1}, \quad \alpha_n = \frac{\pi}{2}, \quad n \geq k \quad (3.1)$$

где a_0, a_1, \dots, a_{k-1} - заданные положительные числа.

Очевидно, что последовательность $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$, определенная равенствами (3.1) удовлетворяет условиям теоремы 2.4. Поэтому существует единственная краевая задача $L(q(x), h, \infty) = L(a_0, a_1, \dots, a_{k-1})$ вида (2.1)-(2.3) с коэффициентами

$$q(x) = q(x, a_0, a_1, \dots, a_{k-1}) \in L^2(0, \pi), \quad h = h(a_0, a_1, \dots, a_{k-1}). \quad (3.2)$$

В этом случае спектр $L(a_0, a_1, \dots, a_{k-1})$ семейства краевых задач удовлетворяет равенствам

$$\sigma(L(a_0, a_1, \dots, a_{k-1})) = \{(n+1/2)^2, n \geq 0\}.$$

Далее находим коэффициенты (3.2) краевых задач

$$L(a_0, a_1, \dots, a_{k-1})y = -y'' + q(x, a_0, a_1, \dots, a_{k-1})y = \lambda y, \quad (3.3)$$

$$y'(0) - h(a_0, a_1, \dots, a_{k-1})y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0. \quad (3.4)$$

Сперва определим $F(x, t)$ по формулам (2.16) и (3.1)

$$F(x, t) = \sum_{n=0}^{k-1} b_n \cos(n+1/2)x \cos(n+1/2)t \quad (3.5)$$

где

$$b_n = \frac{1}{\alpha_n} - \frac{1}{\alpha_n^0}, \quad \alpha_n^0 = \frac{\pi}{2}, \quad n \geq 0. \quad (3.6)$$

Затем, подставляя (3.5) в интегральное уравнение (2.15) получим

$$K(x, t) = -F(x, t) - \int_0^x K(x, s)F(s, t)ds = -\sum_{n=0}^{k-1} b_n \varphi(x, \lambda_n) \cos(n+1/2)t, \quad (3.7)$$

где

$$\varphi(x, \lambda_n) = \cos(n+1/2)x + \int_0^x K(x, s) \cos(n+1/2)s ds. \quad (3.8)$$

Далее, учитывая формулы (2.18) и (2.19) находим коэффициенты первого граничного условия (3.4) и уравнения (3.3)

$$h = h(a_0, a_1, \dots, a_{k-1}) = -F(0, 0) = -\sum_{n=0}^{k-1} b_n \quad (3.8')$$

$$q(x) = q(x, a_0, a_1, \dots, a_{k-1}) = -2 \sum_{n=0}^{k-1} b_n (\cos(n+1/2)x \varphi(x, \lambda_n))' . \quad (3.9)$$

Теперь, подставляя формулу (3.7) в (3.8) имеем

$$\varphi(x, \lambda_n) = \cos(n+1/2)x - \sum_{p=0}^{k-1} \{b_p \varphi(x, \lambda_p)\} \int_0^x \cos(n+1/2)s \cos(p+1/2)s ds, \quad n = \overline{0, k-1}. \quad (3.10)$$

2) Пусть последовательность положительных чисел $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ определена соотношениями

$$\lambda_n = (n+1/2)^2, \quad n \geq 0; \quad \frac{1}{\alpha_n} = \frac{1}{\alpha_n^0} + \frac{\beta_n}{n+1/2}, \quad (3.11)$$

где β_n удовлетворяет условию

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta_n}{n+1/2} < \infty \quad (3.12)$$

и α_n^0 определена по формуле (2.13).

Легко заметить, что данная последовательность $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяет условиям теоремы

2.4. Поэтому существует единственная краевая задача $L(q(x), h, \infty) \equiv L(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k, \dots)$ вида (2.1)-(2.3) с коэффициентами

$$q(x) = q(x, \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k, \dots), \quad h = h(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k, \dots) \quad (3.13)$$

спектры которых равны $(n+1/2)^2, n \geq 0$, т.е.

$$\sigma(L(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k, \dots)) = \{(n+1/2)^2, n \geq 0\}.$$

Теперь находим коэффициенты (3.13) краевых задач

$$L(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k, \dots)y = -y'' + q(x, \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k, \dots)y = \lambda y, \quad 0 < x < \pi \quad (3.14)$$

$$y'(0) - h(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k, \dots)y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0. \quad (3.15)$$

Для этого определим $F(x, t)$ по формулам (2.16) и (3.11)

$$F(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta_n}{n+1/2} \cos(n+1/2)x \cos(n+1/2)t. \quad (3.16)$$

Подставляя (3.16) в интегральное уравнение Гельфанда-Левитана (2.15) получим

$$K(x, t) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta_n}{n+1/2} \cos(n+1/2)t \varphi(x, \lambda_n) \quad (3.17)$$

где

$$\varphi(x, \lambda_n) = \cos(n+1/2)x + \int_0^x K(x, s) \cos(n+1/2)s ds. \quad (3.18)$$

Известно, что функция $\varphi(x, \lambda)$, определенная по формуле (2.5), удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$-\varphi'' + q(x, \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k, \dots)\varphi = \lambda \varphi \quad (3.19)$$

и начальным условиям

$$\varphi(0, \lambda) = 1, \quad \varphi'(0, \lambda) = h,$$

где коэффициент $q(x, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k, \dots)$ определяется по формуле:

$$q(x, \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k, \dots) = 2 \frac{d}{dx} K(x, x). \quad (3.20)$$

Теперь, подставляя формулы (3.17) в (3.18) имеем

$$\varphi(x, \lambda_n) = \cos(n+1/2)x - \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{\beta_k}{n+1/2} \varphi(x, \lambda_k) \right\} \int_0^x \cos(n+1/2)s \cos(k+1/2)s ds, \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.21)$$

Далее, из формулы (3.17) и (3.20) получим

$$h = h(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots) = K(0, 0) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta_n}{n+1/2},$$

$$q(x, \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n, \dots) = -2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta_n}{n+1/2} (\cos(n+1/2)x \varphi(x, \lambda_n))',$$

где функция $\varphi(x, \lambda_n)$, $n \geq 0$ определена по формуле (3.21).

Таким образом, построено семейство граничных задач Штурма-Лиувилля, собственные значения которых совпадают с заданными числами $\lambda_n = (n+1/2)^2, n \geq 0$.

Литература

1. Марченко В.А. Некоторые вопросы теории дифференциального оператора второго порядка // Труды Москва.Матем.Об.ва. 1952.Т1. С.327-420.
2. Гельфанд И.М., Левитан Б.М. Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции // Изв.АН СССР. сер. матем. Москва. 1951. Т.15. №4. С.309-360.
3. Левитан Б.М., Саргсян И.С. Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака. М.: Наука.1988.
4. Isaacson E.L., Trubowitz E. The inverse Sturm- Liouville problem I // Comm. Pure Appl. Math. 1983. V. 36. P.767-783.
5. Isaacson E.L., McKean H.P., Trubowitz E. The inverse Sturm-Liouville problem II // Comm. Pure Appl. Math. 1984. V.37. P.1-11.
6. Dahlberg B.E., Trubowitz E. The inverse Sturm-Liouville problem III // Comm. Pure Appl. Math. 1984. V.37. P. 255-267.
7. Poschel J., Trubowitz E. Inverse spektral theory. Academic Press, New York. 1987.
8. Савчук А.М., Шкаликов А.А. О свойствах отображений, связанных с обратными задачами Штурма-Лиувилля // Тр. МИАИ. 2002. Т. 260. С. 227-247.
9. Юрко В.А. Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: Физматлит. 2007. 284 с.
10. Jodeit M., Levitan B.M. The isospectality problem for the classical Sturm-Liouville equation // Advances in differential equations. 1997., V.2., № 2, -p.297-318.
11. Ashrafyan Y.A., Harutyunyan T.N. Inverse Sturm-Liouville problems with fixed boundary conditions // Electronic Journal of differential equations, (2015), vol.2015, №27, p.1-8.
12. A. B. Hasanov Shturm-Liuvill chegaraviy masalalari nazariyasiga kirish. I. "Fan". Toshkent – 2011.
13. A. B. Hasanov Oddiy differensial tenglamalar nazariyasiga kirish. "Turon-iqbol". Toshkent – 2019.

UDC 517.518.5

ON PROPERTIES OF SOME SINGULAR SURFACES

S. E. Usmanov

Samarkand state university
usmanov-salim@mail.ru

Abstract. In this paper it is considered some singular surfaces in \mathbb{R}^3 given by parametric equations. It is proved that at least one of the principal curvatures does not vanish at each regular point of these surfaces.

Key words: fractional power series, regular point, singular point, singular surface, principal curvature.

О свойствах некоторых сингулярных поверхностей

Аннотация. В этой статье рассматриваются некоторые сингулярные поверхности в пространстве \mathbb{R}^3 , заданные параметрическими уравнениями. Доказано, что хотя бы одна из главных кривизн отлична от нуля в каждой неособой точке этих поверхностей.

Ключевые слова: дробно степенной ряд, регулярная точка, сингулярная точка, сингулярная поверхность, главная кривизна.

Ba'zi singulyar sirtlarning xossalari haqida

Annotasiya. Ushbu ishda \mathbb{R}^3 fazoda parametrik tenglamalar bilan berilgan ba'zi singulyar sirtlar qaralgan. Bu sirtlarning har bir regular nuqtasidagi bosh egriliklaridan kamida bittasi noldan farqli bo'lishi isbotlangan.

Kalit so'zlar: kasr darajali qator, regular nuqta, singulyar nuqta, singulyar sirt, bosh egrilik.

1. Introduction

Many questions of harmonic analysis, boundedness problems for some maximal operators associated with hypersurfaces are related to geometric properties of surfaces. Studying some properties of surfaces plays important role for investigation many problems of harmonic analysis, see, for example, [[1]-[8]].

In this work we consider some surfaces in the space \mathbb{R}^3 which have singularities on the coordinate planes. To state further comments we need to give some notions. Firstly, following [9] we can define fractional power series given below.

Definition 1. Given an open, connected set $\bar{V} \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ such that $0 \in \bar{V}$, we say that f is a fractional power series on V if there is an open set $W \subseteq \mathbb{R}^n$, containing \bar{V} , a positive integer $N \geq 1$ and a real analytic function g on $\Phi_N^{-1}(W)$ such that $f = g \circ \Phi_{1/N}$ on V , where $\Phi_N : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ is a function, given by $\Phi_N(x) = (x_1^N, x_2^N, \dots, x_n^N)$.

Statement of the problem

We study some singular surfaces in \mathbb{R}^3 . Coordinates (x_1, x_2, x_3) of radius vector's

$$\bar{r} = \bar{r}(u_1, u_2) = \bar{r}(x_1(u_1, u_2), x_2(u_1, u_2), x_3(u_1, u_2)),$$

at each point (u_1, u_2) are defined by the following parametric equations

$$x_1(u_1, u_2) = u_1^{a_1} u_2^{a_2} g_1(u_1, u_2), x_2(u_1, u_2) = u_1^{b_1} u_2^{b_2} g_2(u_1, u_2), x_3(u_1, u_2) = u_1^{c_1} u_2^{c_2} g_3(u_1, u_2), \tag{1}$$

where $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ are non negative rational numbers, $u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, \{g_i(u_1, u_2)\}_{i=1}^3$ are fractional power series such that $g_i(0,0) \neq 0$.

To make further statements by A we denote the following matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix},$$

and its determinant by $B = \det A$ and $\bar{c} = (c_1, c_2)$.

It is well-known that regularity of every point of the surfaces (1) is defined by the following definition.

Definition 2. A point $P = (x_1, x_2, x_3) = (x_1(u_1, u_2), x_2(u_1, u_2), x_3(u_1, u_2))$ is said to be nonsingular (regular) point of the surfaces (1), if the matrix

$$C = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_3}{\partial u_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \frac{\partial x_3}{\partial u_2} \end{pmatrix}$$

has rank two on a point (u_1, u_2) (see. [9], chapter 2, § 7).

It is not difficult to see that all points of the surfaces (1) lying in a small neighborhood of zero outside the coordinate planes are regular points under the condition $B \neq 0$. Note that all points of these surfaces lying on coordinate planes are singular points (see lemma 1).

In the present work we investigate properties of main curvatures of singular surfaces given by the parametric equations (1). More precisely, we investigate curvatures of the surfaces (1) in a small neighborhood of singular points.

2. Some auxiliary results

Lemma 1. Under the condition $B \neq 0$ all points of the surfaces (1) in a neighborhood of the origin outside the coordinate planes are regular points.

Proof. Indeed, among second order determinants, obtained from the matrix C , at least one is nonzero in a neighborhood of zero. Let us calculate first of them

$$M_1(u_1, u_2) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} \end{vmatrix} = u_1^{a_1+b_1-1} u_2^{a_2+b_2-1} (B g_1(u_1, u_2) g_2(u_1, u_2) + \tilde{g}(u_1, u_2)),$$

where $\tilde{g}(u_1, u_2) = u_1 \left(b_2 g_2(u_1, u_2) \cdot \frac{\partial g_1(u_1, u_2)}{\partial u_1} - a_2 g_1(u_1, u_2) \cdot \frac{\partial g_2(u_1, u_2)}{\partial u_1} \right) +$
 $+ u_2 \left(a_1 g_1(u_1, u_2) \cdot \frac{\partial g_2(u_1, u_2)}{\partial u_2} - b_1 g_2(u_1, u_2) \cdot \frac{\partial g_1(u_1, u_2)}{\partial u_2} \right) +$
 $+ u_1 u_2 \left(\frac{\partial g_1(u_1, u_2)}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial g_2(u_1, u_2)}{\partial u_2} - \frac{\partial g_1(u_1, u_2)}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial g_2(u_1, u_2)}{\partial u_1} \right).$

If $B \neq 0$, then in a neighborhood of zero outside the coordinate planes we have $M_1(u_1, u_2) \neq 0$, i.e., $rank(C) = 2$. This completes the proof of the lemma 1.

Let $h_1(z_1, z_2), h_2(z_1, z_2)$ be positive fractional power series and $\hat{g}_1(z_1, z_2) = g_1(z_1 h_1(z_1, z_2), z_2 h_2(z_1, z_2)), \hat{g}_2(z_1, z_2) = g_2(z_1 h_1(z_1, z_2), z_2 h_2(z_1, z_2))$ be fractional power series in a small neighborhood of the origin in \mathbb{R}^2 , where $z_1 \geq 0, z_2 \geq 0$.

Let us consider the following system of equations

$$\begin{cases} (h_1(z_1, z_2))^{a_1} (h_2(z_1, z_2))^{a_2} \hat{g}_1(z_1, z_2) = 1 \\ (h_1(z_1, z_2))^{b_1} (h_2(z_1, z_2))^{b_2} \hat{g}_2(z_1, z_2) = 1 \end{cases} \quad (2)$$

and prove the following necessary condition.

Lemma 2. If $B \neq 0$, then the system (2) has an unique solution in a small neighborhood of the origin in \mathbb{R}^2 than (h_1, h_2) in a class of fractional power series .

Proof. Without loss of generality we may assume that $g_1(0,0) = 1, g_2(0,0) = 1$. Using the denotions $h_1(z_1, z_2) = v_1, h_2(z_1, z_2) = v_2$ in (2), we obtain

$$\begin{cases} v_1^{a_1} v_2^{a_2} \tilde{g}_1(z, v) = 1 \\ v_1^{b_1} v_2^{b_2} \tilde{g}_2(z, v) = 1, \end{cases} \quad (3)$$

where $\tilde{g}_1(z, v) = \hat{g}_1(z_1 v_1, z_2 v_2), \tilde{g}_2(z, v) = \hat{g}_2(z_1 v_1, z_2 v_2)$ are fractional power series.

Consider now the Jacobian

$$J = v_1^{a_1+b_1-1} v_2^{a_2+b_2-1} \begin{vmatrix} a_1 v_1^{a_1-1} v_2^{a_2} \tilde{g}_1(z, v) + v_1^{a_1} v_2^{a_2} \frac{\partial \tilde{g}_1(z, v)}{\partial v_1} & a_2 v_1^{a_1} v_2^{a_2-1} \tilde{g}_1(z, v) + v_1^{a_1} v_2^{a_2} \frac{\partial \tilde{g}_1(z, v)}{\partial v_2} \\ b_1 v_1^{b_1-1} v_2^{b_2} \tilde{g}_2(z, v) + v_1^{b_1} v_2^{b_2} \frac{\partial \tilde{g}_2(z, v)}{\partial v_1} & b_2 v_1^{b_1} v_2^{b_2-1} \tilde{g}_2(z, v) + v_1^{b_1} v_2^{b_2} \frac{\partial \tilde{g}_2(z, v)}{\partial v_2} \end{vmatrix}$$

of the system (3) than (v_1, v_2) .

It is not difficult to see that $\frac{\partial \tilde{g}_1(0,0,1,1)}{\partial v_1} = 0$. With analogous way, we can verify that $\frac{\partial \tilde{g}_1(0,0,1,1)}{\partial v_2} = 0, \frac{\partial \tilde{g}_2(0,0,1,1)}{\partial v_1} = 0, \frac{\partial \tilde{g}_2(0,0,1,1)}{\partial v_2} = 0$. If $v_1 = 1, v_2 = 1$ then since $g_1(0,0) = 1,$

$g_2(0,0) = 1$, then we have $J = B^T \neq 0$ for the Jacobian of the system (3) at the point $(0,0,1,1)$, where T denotes the transposition of the determinant J . Therefore, by the implicit function theorem the system (3) has a unique solution in the class of fractional power series in a small neighborhood of the origin in \mathbb{R}^2 . Proof is completed.

We now state some necessary facts known from differential geometry which will be used in proving of a main result.

As usual, we have the first and second quadratic forms of the surfaces given by (1) of the following forms

$$G(u, du) = g_{11}(u_1, u_2)du_1^2 + 2g_{12}(u_1, u_2)du_1du_2 + g_{22}(u_1, u_2)du_2^2,$$

$$L(u, du) = l_{11}(u_1, u_2)du_1^2 + 2l_{12}(u_1, u_2)du_1du_2 + l_{22}(u_1, u_2)du_2^2,$$

respectively. Coefficients of the quadratic forms are calculated by the following formulas

$$g_{ij} = g_{ij}(u_1, u_2) = (\bar{r}_i \bar{r}_j), l_{ij} = l_{ij}(u_1, u_2) = (\bar{r}_{ij}, \bar{m}), \tag{4}$$

where $\bar{r}_i = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u_i}$, $\bar{r}_{ij} = \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial u_i \partial u_j}$, $i, j = 1, 2$, \bar{m} is an unit normal vector at each point of the surfaces (1).

Next, we use the change of variables

$$u_1 = u_1(z_1, z_2), u_2 = u_2(z_1, z_2) \tag{5}$$

in (1), where $u_1(z_1, z_2), u_2(z_1, z_2)$ are differentiable functions in a neighborhood of zero in \mathbb{R}^2 .

Remark 1. For the surfaces (1) the equalities $|\tilde{L} - k\tilde{G}| = 0$ and $|L - kG| = 0$ are equivalent equations, where \tilde{G} and \tilde{L} are matrices of the first and second quadratic forms of the surfaces (1) after the variable conversion (5).

Indeed, after applying the change of coordinates (5) matrix g_{ij} is transformed by rules of tensors

$$\tilde{g}_{ij}(z_1, z_2) = \sum_{k,l} g_{kl}(u_1, u_2) \frac{\partial u_k}{\partial z_i} \frac{\partial u_l}{\partial z_j}, \quad k, l = 1, 2$$

or in the matrix form $\tilde{G} = J^T G J$. Analogously, we have $\tilde{L} = J^T L J$, where J is a Jacobi matrix of the transformation (5), (see [10], chapter 3, § 16).

Obviously, principal curvatures of the surfaces (1) are defined as solutions of the equation $|L - kG| = 0$ (see [10], chapter 2, § 8). It is not difficult to show that the following equality

$$|\tilde{L} - k\tilde{G}| = J^2 |L - kG|$$

holds true for the surfaces (1).

Thus, the last equation shows correctness of the Remark 1.

3. Main results

The main result of this paper is the following statement.

Theorem. Let $\{g_i(u_1, u_2)\}_{i=1}^3$ be fractional power series defined in a small neighborhood of the origin in \mathbb{R}^2 , such that $g_i(0,0) \neq 0$. Assume that for the singular surfaces (1) hold the following relations

$$B \neq 0, A^{-1}c \neq (1,0), A^{-1}\bar{c} \neq (0,1).$$

Then at least one of the principal curvatures does not vanish at each regular point of these surfaces.

Proof. Due to the lemma 2 there exist positive fractional power series $h_1(z_1, z_2), h_2(z_1, z_2)$ such that, the functions $\{x_i(u_1, u_2)\}_{i=1}^3$ in (1) have the following forms:

$$\hat{x}_1(z_1, z_2) = z_1^{a_1} z_2^{a_2}, \quad \hat{x}_2(z_1, z_2) = z_1^{b_1} z_2^{b_2}, \quad \hat{x}_3(z_1, z_2) = z_1^{c_1} z_2^{c_2} \phi(z_1, z_2) \tag{6}$$

after the change of variables

$$u_1 = z_1 h_1(z_1, z_2), u_2 = z_2 h_2(z_1, z_2). \tag{7}$$

Here $\phi(z_1, z_2) = (h_1(z_1, z_2))^{c_1} (h_2(z_1, z_2))^{c_2} g_3(z_1 h_1(z_1, z_2), z_2 h_2(z_1, z_2))$ are fractional power series.

Next, using the power transformations (see [11], page 60) of variables as

$$z_1 = t_1^n, z_2 = t_2^n$$

in (6) such that $na_i \geq 3, nb_i \geq 3, nc_i \geq 3$, we have

$$\tilde{x}_1(t_1, t_2) = t_1^{na_1} t_2^{na_2}, \quad \tilde{x}_2(t_1, t_2) = t_1^{nb_1} t_2^{nb_2}, \quad \tilde{x}_3(t_1, t_2) = t_1^{nc_1} t_2^{nc_2} \hat{\phi}(t_1, t_2). \quad (8)$$

Here n is any real number and (t_1, t_2) belongs to a small neighborhood of the origin, $\hat{\phi}(t_1, t_2) = \phi(t_1^n, t_2^n)$ is fractional power series in a small neighborhood of zero in \mathbb{R}^2 .

The direct computations for the normal vector \bar{N} at any regular point of the surfaces given by (8) show that

$$\bar{N} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial \tilde{x}_1}{\partial t_1} & \frac{\partial \tilde{x}_2}{\partial t_1} & \frac{\partial \tilde{x}_3}{\partial t_1} \\ \frac{\partial \tilde{x}_1}{\partial t_2} & \frac{\partial \tilde{x}_2}{\partial t_2} & \frac{\partial \tilde{x}_3}{\partial t_2} \end{vmatrix} = p_1(t_1, t_2)e_1 - p_2(t_1, t_2)e_2 + p_3(t_1, t_2)e_3, \quad (9)$$

where e_1, e_2, e_3 is standard orthonormal basis in \mathbb{R}^3 ,

$$p_1(t_1, t_2) = \left(n^2 B_1 \hat{\phi}(t_1, t_2) + nb_1 t_2 \frac{\partial \hat{\phi}(t_1, t_2)}{\partial t_2} - nb_2 t_1 \frac{\partial \hat{\phi}(t_1, t_2)}{\partial t_1} \right) \cdot t_1^{nb_1+nc_1-1} t_2^{na_2+nc_2-1},$$

$$p_2(t_1, t_2) = \left(n^2 B_2 \hat{\phi}(t_1, t_2) + na_1 t_2 \frac{\partial \hat{\phi}(t_1, t_2)}{\partial t_2} - na_2 t_1 \frac{\partial \hat{\phi}(t_1, t_2)}{\partial t_1} \right) \cdot t_1^{na_1+nc_1-1} t_2^{na_2+nc_2-1},$$

$$p_3(t_1, t_2) = n^2 B t_1^{na_1+nb_1-1} t_2^{na_2+nb_2-1},$$

$$B_1 = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad B_2 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

By (9), after straightforward computations for the unit normal vector \bar{m} at the point (t_1, t_2) we obtain

$$\bar{m} = (F(t_1, t_2))^{-1} (p_1(t_1, t_2)e_1 - p_2(t_1, t_2)e_2 + p_3(t_1, t_2)e_3), \quad (10)$$

where

$$F(t_1, t_2) = \sqrt{(p_1(t_1, t_2))^2 + (p_2(t_1, t_2))^2 + (p_3(t_1, t_2))^2}.$$

By means of the conditions $t_1 t_2 \neq 0$, $p_3(t_1, t_2) \neq 0$ we can find that $F(t_1, t_2) \neq 0$.

Obviously, the following equalities

$$a_1 B_1 - b_1 B_2 + c_1 B = 0, \quad (11)$$

$$a_2 B_1 - b_2 B_2 + c_2 B = 0 \quad (12)$$

hold for the numbers B, B_1, B_2 .

According to the relations (4), (9), (10), (11) and (12) we compute coefficients l_{ij} of the second quadratic form of the surfaces given by (8) and obtain

$$l_{11}(t_1, t_2) = n^2 (F(t_1, t_2))^{-1} \left(n^2 (a_1^2 B_1 - b_1^2 B_2 + c_1^2 B) \hat{\phi}(t_1, t_2) + w_1(t_1, t_2) \right) \cdot t_1^{d_1-3} t_2^{d_2-1},$$

$$l_{22}(t_1, t_2) = n^2 (F(t_1, t_2))^{-1} \left(n^2 (a_2^2 B_1 - b_2^2 B_2 + c_2^2 B) \hat{\phi}(t_1, t_2) + w_2(t_1, t_2) \right) \cdot t_1^{d_1-1} t_2^{d_2-3},$$

$$l_{12}(t_1, t_2) = n^2 (F(t_1, t_2))^{-1} \left(n^2 (a_1 a_2 B_1 - b_1 b_2 B_2 + c_1 c_2 B) \hat{\phi}(t_1, t_2) + w_3(t_1, t_2) \right) \cdot t_1^{d_1-2} t_2^{d_2-2},$$

where $d_1 = n(a_1 + b_1 + c_1)$, $d_2 = n(a_2 + b_2 + c_2)$,

$$w_1(t_1, t_2) = (nb_1^2 a_2 - na_1^2 b_2 + (2c_1 + 1)B) \cdot t_1 \frac{\partial \hat{\phi}(t_1, t_2)}{\partial t_1} + na_1 b_1 (a_1 - b_1) t_2 \frac{\partial \hat{\phi}(t_1, t_2)}{\partial t_2} + B t_1^2 \frac{\partial^2 \hat{\phi}(t_1, t_2)}{\partial t_1^2},$$

$$w_2(t_1, t_2) = na_2 b_2 (b_2 - a_2) t_1 \frac{\partial \hat{\phi}(t_1, t_2)}{\partial t_1} + (na_2^2 b_1 - na_1 b_2^2 + B(2c_2 + 1)) \cdot t_2 \frac{\partial \hat{\phi}(t_1, t_2)}{\partial t_2} + B t_2^2 \frac{\partial^2 \hat{\phi}(t_1, t_2)}{\partial t_2^2},$$

$$w_3(t_1, t_2) = (na_2b_2(b_1 - a_1) + c_2B) \cdot t_1 \frac{\partial \hat{\phi}(t_1, t_2)}{\partial t_1} + (na_1b_1(a_2 - b_2) + c_1B) \cdot t_2 \frac{\partial \hat{\phi}(t_1, t_2)}{\partial t_2} + Bt_1t_2 \frac{\partial^2 \hat{\phi}(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}.$$

If one of the numbers $a_i a_j B_1 - b_i b_j B_2 + c_i c_j B$ is not equal to zero, then corresponding coefficient l_{ij} does not vanish in a small neighborhood of the origin outside the coordinate planes. Now suppose that the equalities

$$a_i a_j B_1 - b_i b_j B_2 + c_i c_j B = 0$$

hold for each $i, j = 1, 2$.

Next, we make up the following systems of equations regarding B_1, B_2, B :

$$\begin{cases} a_1 B_1 - b_1 B_2 + c_1 B = 0 \\ a_2 B_1 - b_2 B_2 + c_2 B = 0 \\ a_1^2 B_1 - b_1^2 B_2 + c_1^2 B = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 B_1 - b_1 B_2 + c_1 B = 0 \\ a_2 B_1 - b_2 B_2 + c_2 B = 0 \\ a_2^2 B_1 - b_2^2 B_2 + c_2^2 B = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 B_1 - b_1 B_2 + c_1 B = 0 \\ a_2 B_1 - b_2 B_2 + c_2 B = 0 \\ a_1 a_2 B_1 - b_1 b_2 B_2 + c_1 c_2 B = 0 \end{cases}$$

Now let us consider the following determinants of these systems

$$D_1 = c_1(c_1 - a_1)B - b_1(b_1 - a_1)B_2,$$

$$D_2 = c_2(c_2 - a_2)B - b_2(b_2 - a_2)B_2,$$

$$D_3 = c_1(c_2 - a_2)B - b_1(b_2 - a_2)B_2,$$

respectively. Due to the conditions

$$B \neq 0, A^{-1}\bar{c} \neq (1, 0), A^{-1}\bar{c} \neq (0, 1)$$

it is not difficult to show that at least one of the determinants D_1, D_2, D_3 is not equal to zero. This contradicts to the condition $B \neq 0$. Consequently, at least one of the coefficients $a_i a_j B_1 - b_i b_j B_2 + c_i c_j B$ does not vanish. Hence, at least one of the coefficients l_{ij} is not equal to zero at each regular point (t_1, t_2) of the surfaces (8) in a small neighborhood of the origin in \mathbb{R}^3 , when $t_1 t_2 \neq 0$.

Thus, the singular surfaces given by parametric equations in (8), as well as by means of the Remark 1, singular surfaces given by (1) have at least one non vanishing principal curvature at each regular point of these surfaces lying in a small neighborhood of the origin in \mathbb{R}^3 . Theorem is proved.

Corollary 1. Let $\{g_i(u_1, u_2)\}_{i=1}^3$ be fractional power series in a small neighborhood of the origin in \mathbb{R}^2 , such that $g_i(0, 0) \neq 0$. If for the singular surfaces (1) hold the relations

$$B \neq 0 \text{ and } (a_1 c_2 + a_2 c_1)^2 B B_1 \neq (a_1 b_2 + a_2 b_1)^2 B_1 B_2 + (b_1 c_2 + c_1 b_2)^2 B B_2,$$

then Gauss curvature does not vanish at every regular point of these surfaces.

Corollary 2. Let $\{g_i(u_1, u_2)\}_{i=1}^3$ be fractional power series in a small neighborhood of the origin in \mathbb{R}^2 , and $g_i(0, 0) \neq 0$. Assume that for the singular surfaces (1) the relations

$$B \neq 0, A^{-1}\bar{c} \neq (1,0), A^{-1}\bar{c} \neq (0,1)$$

hold. Then mean curvature does not vanish at each regular point of these surfaces.

Remark 2. If for the surfaces (1) substitute the conditions

$$B \neq 0, A^{-1}\bar{c} \neq (1,0), A^{-1}\bar{c} \neq (0,1)$$

by $B \neq 0, a_1 + a_2 > c_1 + c_2, b_1 + b_2 > c_1 + c_2$, then the statements of the theorem and corollaries 1,2 remain true.

Remark 3. If for the surfaces (1) substitute the conditions

$$B \neq 0, A^{-1}\bar{c} \neq (1,0), A^{-1}\bar{c} \neq (0,1)$$

by $B_1 \neq 0, B_2 \neq 0, -B_1 \neq B, B_2 \neq B$, then the statements of the theorem and corollaries 1,2 remain true.

References

1. E.M.Stein. Maximal functions. Spherical means. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 73(7):2174-2175, 1976.
2. A.P.Tomas. A restriction theorem for the Fourier transform Bull. Amer. Math. Soc. 81 (1975), 477-478.
3. A.Greenleaf. Principal curvature and harmonic analysis. Indiana Univ. Math. J. 30(4): 519-537, 1981.
4. C.D.Sogge. Maximal operators associated to hypersurfaces with one nonvanishing principal curvature. In Fourier analysis and partial differential equations, Stud. Adv. Math., pages 317-323. CRC, Boca Raton, FL, 1995.
5. I.A.Ikromov, M.Kempe, D.Müller. Estimates for maximal functions associated to hypersurfaces in \mathbb{R}^3 and related problems of harmonic analysis. Acta Math. 204 (2010),151-271.
6. I.A.Ikromov, D.Müller. Uniform estimates for the Fourier transform of surface carried measures in \mathbb{R}^3 and an application to Fourier restriction. J. Fourier Anal. Appl., 17 (2011), no. 6, 1292-1332.
7. I. A. Ikromov, S. E. Usmanov. On boundedness of maximal operators associated with hypersurfaces. Contemporary Mathematics. Fundamental Directions, 2018, Vol. 64, No. 4, 650–681. Peoples' Friendship University of Russia.
8. S.E.Usmanov. Boundedness of maximal operators associated with singular surfaces. Uzbek mathematical Journal, Tashkent, 2017, No. 2, p. 156-164.
9. Collins T., Greenleaf A., Pramanik M. A multi-dimensional resolution of singularities with applications to analysis, Amer. J. of Math. (2013), no. 5, 1179-1252.
10. B.A.Dubrovin, S.P.Novikov, A.T.Fomenko. Contemporary geometry. Moscow, Nauka, 1979.
11. A.D. Bruno. Power geometry in algebraic and differential equations. Moscow, Nauka, 1998.
12. This work was supported by the Executive Committee for the Coordination of Science and Technology of the Council of Ministers of the Republic of Uzbekistan, under the grant F-4-69.

УДК 514.13

СЕЧЕНИЕ СФЕРЫ С ПЛОСКОСТЬЮ В ИЗОТРОПНОМ ПРОСТРАНСТВЕ \mathbb{R}_3^2

А. Артикбаев¹, Ш. Исмоилов²

¹Ташкентский институт инженеров железнодорожного транспорта

²Национальный университет Узбекистана
aartykbaev@mail.ru, ismoilovsh94@mail.ru,

Аннотация. В статье изучены свойства сечения параболоида вращения с плоскостью. Параболоид вращения рассмотрен как сфера изотропного пространства \mathbb{R}_3^2 . Доказано, что площадь сечения является положительно определенной аддитивной функцией.

Ключевые слова: параболоид, плоскость, изотропное пространство, сечение, сужение, аддитивность, вполне аддитивность.

R_3^2 – Izotrop fazoda sferani tekislik bilan kesish

Annotatsiya. Ushbu maqolada paraboloidni tekislik bilan kesimini xossalari o'rganiladi. Paraboloidni R_3^2 – izotrop fazo sferasi ekanligi ko'rsatilgan. Kesimning proyektiviyasi yuzi musbat va to'la additiv funktsiya ekanligi isbotlangan.

Kalit so'zlar: paraboloid, tekislik, izotrop fazo, kesim, kesim proyeksiyasi, additiv, to'la additiv.

Sphere with a plane in isotropic spaces R_3^2

Abstract. The article examines the properties of the plane cross section of the paraboloid. The paraboloid is considered as a sphere of the isotropic space of R_3^2 . Proved, that the section area is a positive definite additive function.

Keywords: paraboloid, plane, isotropic space, section, contraction, additivity, completely additivity.

Рассмотрим трехмерное аффинное пространство A_3 . Пусть $X\{x_1, y_1, z_1\}$ и $Y\{x_2, y_2, z_2\}$ векторы пространства A_3 в системе координат $O\{e_1, e_2, e_3\}$.

Скалярным произведением вектором X и Y назовем число, определяемое следующим правилом:

$$(X, Y)_1 = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$$

в случае, когда $(X, Y)_1 \neq 0$ и

$$(X, Y)_2 = z_1 \cdot z_2$$

если $(X, Y)_1 = 0$

Определение 1 [4]. Аффинное пространство A_3 в котором скалярное произведение векторов вычисляется по формуле (1), называется изотропным пространством R_3^2 .

Изотропное пространство является представителем полуевклидовых пространств [5],[6].

Норма вектора $|\vec{x}|$ определяется как корень из скалярного квадрата вектора, а расстояние между двумя точками - как норма вектора, соединяющего эти точки [2].

Таким образом, расстояние между точками $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ в пространстве R_3^2 вычисляется по формуле

$$|\overline{AB}| = (AB)_1 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

если $(AB)_1 \neq 0$, $|\overline{AB}| = (AB)_2 = |z_2 - z_1|$, $(AB)_1 = 0$.

Если использовать метод наложенного пространства, т.е. точки и векторы пространства считать соответственно точками и векторами евклидова пространства R_3 , тогда расстояние, определяемое по формуле (2), будет длиной проекции евклидова отрезка AB на плоскость Oxy , перпендикулярной оси Oz . Если $(AB)_1 = 0$, то точки лежат на прямой, и второе расстояние $(AB)_2$ совпадает с евклидовым расстоянием между точками A и B .

Очевидно, когда и $(AB)_2 = 0$, точки A и B совпадают.

Как нам известно из [4] сфера в R_3^2 имеет два вида, отличительные друг от друга по форме и соответственно, определяются различными уравнениями. Если, $Oxyz$ – система координат изотропного пространства, сфера определяемое по метрике изотропного пространства, центром в начале координат и радиусом r задается уравнением $x^2 + y^2 = r^2$. Эту сферу называем метрической сферой. Метрическая сфера направляющая которой окружность радиуса r на плоскости $z = 0$ и образующими параллельно оси Oz .

Второй вид сферы R_3^2 – это параболоид вращения $2az = x^2 + y^2$ она определяется как поверхность имеющая постоянную нормальную кривизну во всех направлениях [4]. Чтобы различить его от метрической сферы назовем изотропной сферой пространства R_3^2 .

Изотропная сфера однозначно проектируется на плоскость $z = 0$. Причем плоскость $z = 0$, можно считать сферой бесконечного радиуса. Это соответствует свойству сферы евклидового пространства. Любую плоскость изотропного пространства не параллельной оси Oz можно считать сферой изотропного пространства бесконечного радиуса.

Учитывая, что мы часто пользуемся проектированием точек пространства R_3^2 на плоскость $z = 0$, в направлении оси Oz , эту проекцию мы называем сужением.

Определение 2. Проекция X^* точки $X \in R_3^2$ на плоскость $z = 0$, в направлении оси Oz назовем сужением точки X .

Когда $X \in F$ и $X^* \in F^*$, то F^* называется сужением F .

Пусть, единичная изотропная сфера в R_3^2 задана уравнением

$$2z = x^2 + y^2 \quad (1)$$

и плоскость

$$z = Ax + By + C \quad (2)$$

Приведем некоторые свойства сечения сферы (1) с плоскостью (2).

Лемма 1. При $C \geq -\frac{1}{2}(A^2 + B^2)$, изотропная сферы и плоскость пересекаются, причем когда $C = -\frac{1}{2}(A^2 + B^2)$ плоскость касается сфере изотропного пространства. Доказательство леммы следует из решении системы

$$\begin{cases} 2z = x^2 + y^2 \\ z = Ax + By + C \end{cases}$$

Система эквивалентна уравнению:

$$(x - A)^2 + (y - B)^2 = A^2 + B^2 + 2C$$

Лемма 2. Сечение сферы изотропного пространства с плоскостью (2), всегда является эллипсом.

Действительно сечение изотропной сферы (1) с плоскостью, заданной уравнением (3) на плоскости $z = 0$, является окружностью с радиусом $r = \sqrt{A^2 + B^2 + 2C}$ и центром в точке $(A, B, 0) \in R_3^2$. Эта окружность определяет направляющую некоторой метрической сферы изотропного пространства, которая аффинную представляет собой круговой цилиндр. Значит сечения изотропной сферы совпадает с сечением метрического цилиндра с плоскостью (2). Очевидно, это сечение является эллипсом.

Когда $A = B = 0$ и $C > 0$, сечения изотропной сферы, с плоскостью $z = H$, будет окружностью радиуса $r = \sqrt{2C}$, с центром на оси Oz в точке $(0, 0, H)$. Сужение этого сечения, окружность радиуса $\sqrt{2C}$ и с центром в начале координат $O(0, 0, 0)$.

Сечение изотропной сферы с плоскостью назовем чем плоскость $z = H$, если для точки (x_0, y_0, z_0) сечения выполняется условие $x_0 \leq H$.

Лемма 3. Если $z = Ax + By + C_1$, и $z = Ax + By + C_2$ два сечения изотропной сферы и $C_1 > C_2 > -\frac{1}{2}(A^2 + B^2)$, то сужения второго сечение содержится в сужение первого сечения.

Это следует из того, что сужения являются концентрическими окружностями на плоскости $z = 0$, с центром в точке $(A, B, 0)$ и радиусом $r_1 = \sqrt{2C_1}$ больше чем радиус $r_2 = \sqrt{2C_2}$.

Лемма 4. Если $0 \leq A^2 + B^2 + 2C \leq 2H$, то сужение сечения плоскостей $z = Ax + By + C$, содержится в сужении сечения плоскостью $z = H$.

Справедливость леммы 4 следует из неравенства, как следствие леммы 3

$$(x - A)^2 + (y - B)^2 = A^2 + B^2 + 2C \leq 2H.$$

При этом окружность радиуса, $r = \sqrt{2H}$ с центром в начале координат является сужением сечения изотропной сферы плоскостью $z = H$ (рис 1)

Из леммы 4, получается сужения любого сечения сферы плоскостями ниже, чем плоскость $z = H$ содержится в окружности $x^2 + y^2 = 2H$.

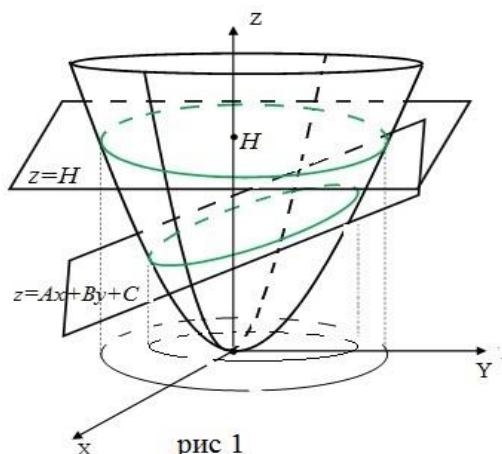


рис 1

Пусть плоскость, пересекающая сферу изотропного пространства задана уравнением (2) и сужение сечения имеет уравнение (3), Обозначим через σ – площадь этой окружности. Тогда $\sigma = \pi(A^2 + B^2 + 2C)$;

Если плоскость α параллельна плоскости заданной уравнением (2), то она имеет уравнение

$$\alpha: z = Ax + By + C_1.$$

Лемма 5. Функция $\sigma(A, B, C)$ – монотонная по переменной C .

Доказательство леммы 5 следует из того, что когда A, B – не меняются, сужения на параллельных плоскостях являются концентрическими окружностями с центром в точке $(A, B, 0)$, а радиус окружности $r = \sqrt{A^2 + B^2 + 2C}$. Отсюда площадь окружности $S = \sigma(A, B, C) = \pi \cdot (A^2 + B^2 + 2C)$ – линейно зависит от переменной C . Следовательно монотонно зависит от величины C .

Когда $C = -\frac{1}{2}(A^2 + B^2)$ плоскость

$$z = Ax + By - \frac{1}{2}(A^2 + B^2)$$

будет касательной к изотропному конусу в точке $\left(A, B, \frac{1}{2}(A^2 + B^2) \right)$ и $\sigma \equiv 0$.

Рассмотрим множество Z_i плоскостей пересекающихся с плоскостью $z = H$ по прямой l , которая касается окружности сечения изотропной сферы в точке $\left(A_0, B_0, \frac{1}{2}(A_0^2 + B_0^2) \right)$.

Пусть плоскость α_0 касательная плоскость изотропной сферы принадлежит этому множеству.

Выделим из z_i множества, подмножеству $\{\alpha_k\}$ плоскостей пересекающие изотропную сферу ниже плоскости $z = H$. Из множества $\{\alpha_k\}$ выбираем последовательность плоскостей α_n , $n = 1, 2, \dots$ причем $\alpha_1 : z = H$.

Лемма 6. Если последовательность плоскостей α_n стремится к плоскости α_0 , то центры окружностей сужений стремятся к точке $(A_0, B, 0)$.

Доказательство. Пусть на $z = H$ касательная прямая имеют уравнение $l: ax + by - 2H = 0$, где $a^2 + b^2 = 2H$. Рассмотрим последовательность точек $(0, 0, z_n)$ таких, что $z_1 = H$, и $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = -H$. Тогда, плоскости из множества α_n проходящей через точки $(0, 0, z_n)$ имеет уравнение

$$z = \frac{a(H - z_n)}{2H}x + \frac{b(H - z_n)}{2H}y + z_n.$$

Соответствующие центры окружностей являющиеся сужением пересечения плоскости с параболоидом имеет координаты $\left(\frac{a(H - z_n)}{2H}, \frac{b(H - z_n)}{2H}, 0 \right)$ и радиус этой окружности

$$= \sqrt{\frac{(H - z_n)^2}{2H} + 2z_n}.$$

Легко доказать, что при $n \rightarrow \infty$, центры окружностей стремятся к точке $(a, b, 0)$ и радиус $r_n \rightarrow r = 0$. Лемма 6 доказана.

Теорема. Функция $\sigma(A, B, C)$ является вполне аддитивной функцией борелевских множеств.

Доказательство теоремы следует из леммы 4, 5 и 6. Вполне аддитивность функции борелевских множеств понимается в смысле А.Д.Александрова [1].

Литература

1. Александров А.Д., Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. Москва "ОГИЗ-ГОСТЕХИЗЛАТ 1948. стр.[153-163]
2. Артыкбаев А, Соколов Д.Д. Геометрия в целом в пространстве время. Ташкент, "Фан 1991. Стр.[122-129]
3. Артыкбаев А., Восстановление выпуклых поверхностей по внешней кривизне в галилеевом пространстве. // Математический сборник. 1982 стр. [214-220]
4. Б.А Розенфельд "Неевклидовы пространство"Москва (1969) стр.[85-88]
5. И.М.Яглом "Принцип относительности Галилея и неевклидова геометрия"[НАУКА] (Москова-1969) стр [70-77]

УДК 517.984

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОДНОЧАСТИЧНОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА НА РЕШЕТКЕ

У.Н.Кулжанов¹, Г.И.Исмоилов²

Самаркандский государственный университет,

Самаркандский филиал Ташкентского государственного экономического университета

uquljonov@bk.ru, golibjon.islomov.tdtu@gmail.com

Аннотация. В работе рассмотрен оператор Шредингера, соответствующий системе на одномерной решетке. Найдены собственные значения и собственные векторы этого оператора.

Ключевые слова: Гамильтониан, собственное значение, собственная функция, унитарные эквивалентные операторы.

Panjaradagi bir zarrachali Schryodinger operatorining spektral xossalari

Annotatsiya. Ushbu ishda bir o'ldamli panjaradagi sistemaga mos Shryodinger operatori o'rganilgan. Bu operatorning xos qiymatlari va ularga mos xos funksiyalari topilgan.

Kalit so'zlar: Hamiltonian, xos qiymat, xos funksiya, unitar ekvivalent operatorlar.

Spectral properties of single-particle Schrödinger operators on a lattice

Abstract. In this paper we consider the Schrödinger operator corresponding to the system on one – dimensional lattice. The eigen-values and eigenvectors of this operator are found.

Keywords: Hamiltonian, eigen-values, eigen funcion, unitary equivalence operators.

Актуальность задачи. Дискретные операторы Шредингера соответствующие гамильтонианам систем одно и двух квантовых частиц на целочисленной решетке изучены в работах [3-5; 9-13]. Наиболее ранние результаты, связывающие положительность и невырожденность собственного значения, восходят к фундаментальной теореме Перрона и Фробениуса: конечная матрица со строго положительными элементами имеет в качестве собственного значения единичной кратности свой спектральный радиус, причем соответствующий собственный вектор строго положителен (см. в [1,6,14]). Заметим, что в теореме Перрона-Фробениуса матрица не обязана быть самосопряженной. Эта теорема впервые появилась в работе [14] и затем в [6].

Обобщение теоремы Перрона-Фробениуса к квантовым системам восходят к работе Глимма-Жаффею [7]. Приложение к нерелятивистским системам сделано в работе Саймона, Хег Крона [16]. Эта теория сильно развилась, что позволило включить в рассмотрение некоторый класс интегральных операторов. В книге [15] доказана теорема типа Перрона-Фробениуса для гамильтониана N - частичной Шредингеровой системы с отделенным движением центра масс.

Постановка задачи. Через \mathbb{Z} обозначается одномерная решетка, $\ell_2(\mathbb{Z})$ - гильбертово пространство квадратично - суммируемых функций, определённых на \mathbb{Z} .

Невозмущенный оператор \hat{H}_0 одной частицы на решетке ассоциируется со следующим оператором в гильбертовом пространстве $\ell_2(\mathbb{Z})$:

$$(\hat{H}_0 f)(x) = \sum_{s \in \mathbb{Z}} \hat{\varepsilon}(s-x) f(s), \quad f \in \ell_2(\mathbb{Z})$$

где

$$\hat{\varepsilon}(s) = \begin{cases} 1, & s = 0 \\ -\frac{1}{2}, & s = \pm 2. \\ 0, & s \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 2\} \end{cases}$$

Полный гамильтониан $\hat{H}_{\mu\lambda}$, описывающий движение одной квантовой частицы на одномерной решетке во внешнем поле $\hat{V}_{\mu\lambda}$, определяется как ограниченное возмущение свободного гамильтониана \hat{H}_0 :

$$\hat{H}_{\mu\lambda} = \hat{H}_0 - \hat{V}_{\mu\lambda}.$$

Здесь $\hat{V}_{\mu\lambda}$ – оператор умножения на вещественную функцию

$$\hat{v}_{\lambda\mu}(s) = \begin{cases} \mu, & s = 0 \\ \lambda, & s = 1 \\ 0, & s \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}, \end{cases}$$

где $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0, \mu > 0$.

Собственные значение и собственные функции оператора Шредингера

Теперь переходим к импульсному представлению оператора $\hat{H}_{\mu\lambda}$. Переход к импульсному представлению осуществляется с помощью преобразования Фурье. Стандартное преобразования Фурье $\mathcal{F}: L_2(\mathbb{T}) \rightarrow \ell_2(\mathbb{Z})$ определяется по формуле

$$(Ff)(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(x,q)} f(q) dq, \quad x \in \mathbb{Z}, f \in L_2(\mathbb{T})$$

Импульсные представления операторов \hat{H}_0 и $\hat{V}_{\mu\lambda}$ имеют вид:

$$(H_0 f)(p) = \varepsilon(p) f(p), \quad \varepsilon(p) = 1 - \cos 2p,$$

$$(V_{\mu\lambda} f)(p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\mu + \lambda e^{i(p-q)}] f(q) dq, \quad f \in L_2(\mathbb{T}).$$

Заметим, что существенный спектр оператора $H_{\mu\lambda}$ не зависит от μ, λ и совпадает с отрезком $[0; 2]$, т.е. $\sigma_{ess}(H_{\mu\lambda}) = [0; 2]$.

Замечание. Функция $\varepsilon(p) = 1 - \cos 2p$ имеет единственный невырожденный минимум в точке $p = 0$ и $\varepsilon_{\min} = \min_{p \in \mathbb{T}} \varepsilon(p) = \varepsilon(0) = 0$.

Теорема. а) Если $\lambda \neq \mu$, то оператор $\hat{H}_{\mu\lambda}$ имеют два простых собственных значения и соответствующих собственных функции являются положительно в $\ell_2(\mathbb{Z})$.

б) Если $\lambda = \mu$, то оператор $\hat{H}_{\mu\lambda}$ имеет одно двукратным собственным значением и одно соответствующий собственным функции можно выбрать строго положительным.

Доказательство. Сначала рассмотрим уравнение для собственных значений:

$$H_{\mu\lambda}f(p) = zf(p), \quad z < 0. \tag{1}$$

Это уравнение равносильно уравнению

$$\varepsilon(p)f(p) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\mu + \lambda e^{i(p-q)}) f(q) dq = zf(p)$$

или

$$(1 - \cos 2p - z)f(p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\mu + \lambda e^{i(p-q)}] f(q) dq.$$

Введя обозначения

$$\begin{cases} c_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(q) dq \\ c_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-iq} f(q) dq, \end{cases} \tag{2}$$

получим следующий вид для собственной функции:

$$f(p) = \frac{\mu c_1}{1 - z - \cos 2p} + \frac{\lambda e^{ip} c_2}{1 - z - \cos 2p}. \tag{3}$$

Подставляя выражение собственной функция (3) в (2), получим линейную однородную систему уравнений относительно c_1 и c_2 :

$$\begin{cases} \left(1 - \frac{\mu}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dq}{1 - z - \cos 2q} \right) c_1 - \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{iq} dq}{1 - z - \cos 2q} c_2 = 0 \\ -\frac{\mu}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{iq} dq}{1 - z - \cos 2q} c_1 + \left(1 - \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dq}{1 - z - \cos 2q} \right) c_2 = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Существование нетривиальных решений уравнения (1) равносильно существованию нетривиальных решений системы уравнений (4). Система уравнений (4) имеет нетривиальные решения тогда и только тогда, когда определитель

$$\Delta_{\mu\lambda}(z) = \begin{vmatrix} 1 - \frac{\mu}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dq}{1 - z - \cos 2q} & -\frac{\lambda}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{iq} dq}{1 - z - \cos 2q} \\ -\frac{\mu}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{iq} dq}{1 - z - \cos 2q} & 1 - \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dq}{1 - z - \cos 2q} \end{vmatrix}$$

равен нулю. Вычислим интегралы, участвующие в определителе $\Delta_{\mu\lambda}(z)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dq}{1 - z - \cos 2q} &= \frac{1}{\sqrt{z^2 - 2z}}, \quad z < 0 \\ \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{iq} dq}{1 - z - \cos 2q} &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos q dq}{1 - z - \cos 2q} = 0, \quad z < 0. \end{aligned}$$

Из этих вычислений вытекает, что определитель $\Delta_{\mu\lambda}(z)$ есть произведение:

$$\Delta_{\lambda,\mu}(z) = \Delta_\lambda(z)\Delta_\mu(z), \quad \Delta_\nu(z) = 1 - \frac{\nu}{\sqrt{z^2 - 2z}}$$

Нули определителя $\Delta_{\lambda,\mu}(z)$ есть нули функций $\Delta_\lambda(z)$, $\Delta_\mu(z)$. Поэтому мы найдём нули функции $\Delta_\mu(z)$. Нетрудные вычисления показывают что нули функции $\Delta_\mu(z)$ равны:

$$z_1(\mu) = 1 - \sqrt{1 + \mu^2} \quad \text{и} \quad z_2(\mu) = 1 + \sqrt{1 + \mu^2}.$$

Так как $z_2(\mu) = 1 + \sqrt{1 + \mu^2} > 2$, то он не является собственным значением оператора $H_{\mu\lambda}$, а $z_1(\mu) = 1 - \sqrt{1 + \mu^2} < 0$ есть собственное значение и ему соответствует собственная функция

$$f_1(p) = \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2} - \cos 2p}.$$

Аналогично можно найти нули функции $\Delta_\lambda(z)$:

$$z_1(\lambda) = 1 - \sqrt{1 + \lambda^2} \quad \text{и} \quad z_2(\lambda) = 1 + \sqrt{1 + \lambda^2}.$$

Здесь только $z_1(\lambda)$ является собственным значением оператора $H_{\mu\lambda}$, и ему соответствует собственная функция

$$f_2(p) = \frac{\lambda e^{ip}}{\sqrt{1 + \lambda^2} - \cos 2p}.$$

Так как операторы $\hat{H}_{\mu\lambda}$ и $H_{\mu\lambda}$ является унитарно эквивалентными, числа $z_1(\mu) = 1 - \sqrt{1 + \mu^2}$ и $z_2(\lambda) = 1 - \sqrt{1 + \lambda^2}$ есть собственные значения оператора $\hat{H}_{\mu\lambda}$.

Теперь определим собственные функции $\hat{f}_1(x)$ и $\hat{f}_2(x)$ соответствующим значениям $z_1(\mu) = 1 - \sqrt{1 + \mu^2}$ и $z_2(\lambda) = 1 - \sqrt{1 + \lambda^2}$ с помощью вида функций $f_1(p)$ и $f_2(p)$. Сначала определим функцию $\hat{f}_1(x)$:

$$\begin{aligned} \hat{f}_1(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mu e^{-ixt}}{\sqrt{1 + \mu^2} - \cos 2t} dt = \\ &= \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1 + \mu^2}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ixt} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\cos 2t}{\sqrt{1 + \mu^2}} \right)^n dt. \end{aligned}$$

В последнем выражении используем формулу

$$\cos p = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}.$$

По ней и формуле бинома Ньютона получаем следующие равенства:

$$\begin{aligned} \hat{f}_1(x) &= \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1 + \mu^2}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ixt} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\cos 2t}{\sqrt{1 + \mu^2}} \right)^n dt = \\ &= \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{C_n^k}{2^n \sqrt{1 + \mu^2}^{n+1}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{it(4k-2n-x)} dt. \end{aligned}$$

Аналогично можно определить функцию $\hat{f}_2(x)$:

$$\hat{f}_2(x) = \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{C_n^k}{2^n \sqrt{1 + \lambda^2}^{n+1}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{it(4k-2n-x+1)} dt.$$

Так что соответствующие собственные функции, отвечающие собственным значениям $z_1(\mu)$ и $z_2(\lambda)$ имеют вид:

$$\hat{f}_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{\mu C_n^k}{2^n \sqrt{1 + \mu^2}^{n+1}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{it(4k-2n-x)} dt$$

и

$$\hat{f}_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{\lambda C_n^k}{2^n \sqrt{1 + \lambda^2}^{n+1}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{it(4k-2n-x+1)} dt.$$

Из формулы (1) и положительности чисел $\frac{\mu C_n^k}{2^n \sqrt{1 + \mu^2}^{n+1}}$ и $\frac{\lambda C_n^k}{2^n \sqrt{1 + \lambda^2}^{n+1}}$ вытекает, что $\hat{f}_1(x) > 0$, при $x = 2m \in \mathbb{Z}$ и $\hat{f}_1(x) = 0$, при $x = 2m + 1 \in \mathbb{Z}$. Аналогично вытекает, что $\hat{f}_2(x) > 0$, при $x = 2m + 1 \in \mathbb{Z}$ и $\hat{f}_2(x) = 0$, при $x = 2m \in \mathbb{Z}$. Видно, что они являются положительными функциями в $\ell_2(\mathbb{Z})$. Но они не являются строго положительными.

Если $\mu > \lambda$, то $z_1(\mu) < z_2(\lambda)$, т.е. $z_1(\mu) = \inf \sigma(\hat{H}_{\mu\lambda})$. Но соответствующая собственная функция $\hat{f}_1(x)$ не является строго положительной. Если $\mu = \lambda$, то $z_1(\mu) = z_2(\lambda)$. В этом случае нижний край $z_1(\mu)$ спектра оператора $\hat{H}_{\mu\lambda}$ являются двукратным собственным значением.

Теорема доказана.

Литература

1. S.Albeverio, S.N.Lakaev, K.A.Makarov and Z.I.Muminov, The Threshold effects for the two-particle Hamiltonians on lattices. Commun.Math.Phys. 91-115 pp. 2006.
2. Albeverio S., Lakaev S.N. and Muminov Z.I., Schroedinger operators on lattices. The Efimov effect and discrete spectrum asymptotics. Ann. Henri Poincar. 743-772 pp. 2004.
3. S.Albeverio, S.N.Lakaev and Z.I.Muminov, On the structure of the essential spectrum for the three-particle Schroedinger operators on lattices, Math. Nachr.No 7, 1-18 pp. 2007.
4. Р. Беллман, Введение в теорию матриц, Изд. "Наука". Москва, 376 ст. 1976.
5. Faria da Veiga P.A., Ioriatti L. and O'.Carroll , Energy-momentum spectrum of some two-particle lattice Schroedinger Hamiltonians. Phys. Rev. E, 3 - 9 pp. 2002.
6. F.G.Frobenius, Uber matrizen mit positive Elementen sit zunsber. Preus.Akad.Wiss Berlin. 471-476 pp. 1908.
7. J. Glimm, A. Jaffe, The $\lambda(\varphi^4)_2$ quantum field theory without. Cutoffs II.The field operators and the approximate vacuum.-Ann. Math. 362-401 pp. 1970.
8. I.Gohberg, S.Goldberg, M.A.Kaashoek.: Basic Classes of Linear Operators, BirkhauserVerlag, Basel, 278 pp. 2003.
9. Graf G.M. and Schenker D.: 2-magnon scattering in the Heisenberg model. Ann. Inst. H. Poincare Phys. Theor.91-107 pp. 1997.
10. Lakaev S.N.: The Efimov effect in a system of three identical quantumparticles. Funct.Anal.Appl. 166-175 pp.1993.
11. Lakaev S.N.: Discrete spectrum and resonances of the one-dimensional Schroedinger operator for small coupling constants. Teoret. Mat. Fiz., 381-386 pp. 1980.
12. Mattis D. C.: The few-body problem on a lattice. Rev. Modern Phys., 361-379 pp. 1986.
13. Mogilner A.: Hamiltonians in solid state physics as multi-particle discrete Schroedinger operators: Problems and results. Advances in Soviet Mathematics.139-194 pp. 1991.
14. O.Perron. Zurtheorie der matrizen.-Math. Ann. 64., 248-263 pp. 1907
15. Reed M. and Simon B.: Methods of modern mathematical physics. IV: Analysis of Operators. Academic Press, New York. 458 pp.1979.
16. B.Saymon, R.Hoegh-Krohn, Hyper contractive semi-groups and two-dimensional self-coupled bose fields. J. Func.Anal. 121-180 pp. 1972.

УДК 532.546

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ПЕРЕНОСА ВЕЩЕСТВА В ДВУМЕРНОЙ НЕОДНОРОДНОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЕ**Хужаёров Б.Х., Усмонов А.И., Қайтаров З.***Самаркандский государственный университет**b.khuzhayorov@mail.ru; a.usmonov.91@mail.ru; z.qaytarov@gmail.com*

Аннотация. Поставлена и численно решена задача переноса вещества в двумерной неоднородной пористой среде. Скорость фильтрации и гидродинамическая дисперсия задавались различными соотношениями, нелинейными и синусоидальными. На основе численных результатов определены поля концентрации при различных значениях исходных данных и различных зависимостях скорости фильтрации и гидродинамической дисперсии.

Ключевые слова: диффузия, гидродинамическая дисперсия, перенос вещества, пористая среда.

A numerical solution of the problem of solute transport in a two-dimensional nonhomogeneous porous medium

Abstract. The problem of solute transport in a two-dimensional nonhomogeneous porous medium is posted and numerically solved. The filtration velocity and hydrodynamic dispersion were set by various relations, nonlinear and sinusoidal. Based on the numerical results, the concentration fields are determined for different values of the initial data and different relations of the filtration velocity and hydrodynamic dispersion.

Keywords: diffusion, hydrodynamic dispersion, porous medium, solute transport.

Икки ўлчовли биржинсли бўлмаган ғовак мухитда модда кўчиш масаласини сонли ечиш

Аннотация. Икки ўлчовли биржинсли бўлмаган ғовак мухитда модда кўчиши масаласи кўйилган ва сонли ечилган. Фильтрация тезлиги ва гидродинамик дисперсия ночизикли ва синусоидал кўринишдаги муносабатларда берилган. Сонли натижалар асосида гидродинамик дисперсия ва фильтрация тезлиги турли боғланишларида ҳамда берилган маълумотларнинг турли қийматларда концентрация майдонлари аниқланган.

Калит сўзлар: Диффузия, гидродинамик дисперсия, ғовак мухит, модда кўчиши.

Введение. Задачи переноса веществ и фильтрации неоднородных жидкостей имеют большое практическое значение во многих отраслях техники и технологии. Многие природные и технологические процессы связаны с фильтрацией неоднородных жидкостей и переносом веществ в неоднородных пористых средах. В отличие от однородных при фильтрации неоднородных жидкостей возникает ряд новых явлений, изучение которых очень важно для понимания механизмов фильтрационного процесса. В последнее время вопросы математического моделирования процессов переноса веществ интенсивно развиваются, в основном за рубежом. В принципе, подходы к моделированию основываются на законе баланса вещества в некотором контрольном объеме с использованием дополнительных феноменологических соотношений. Процесс переноса взвешенных в жидкости частиц в пористой среде определяется множеством факторов, таких как конвективный перенос, диффузия, гидродинамическая дисперсия, адсорбция, осаждение в порах, освобождение их с переходом в мобильное состояние и др. Конвективный перенос, диффузию, гидродинамическую дисперсию, локальное изменение концентрации можно описать уравнением сохранения массы [1, 2].

В [3] решена задача для одномерного уравнения адвекции-дисперсии с переменными коэффициентами, используя явную конечно-разностную схему, далее результаты были расширены на случай двумерного уравнения в полубесконечных средах [4]. Известно, что дисперсия вообще зависит от скорости потока [5]. В [6] считается, что дисперсия пропорциональна n -й степени скорости с показателем n в диапазоне от 1 до 2. Иногда выражения для скорости и дисперсии записываются в вырожденной форме [6]. В двумерном случае перенос растворенного вещества происходит как в продольном, так и в поперечном направлениях. Значительный перенос растворенного вещества отмечается вдоль поперечного направления даже при очень низкой поперечной скорости и дисперсности относительно их продольных аналогов. Это показывает, что двумерная модель является более подходящей, чем одномерная.

В [7] приведена математическая модель для двумерного переноса вещества в полубесконечной неоднородной пористой среде. Коэффициент дисперсии рассматривается как линейное кратное пространственно зависимой функции и скорости фильтрации. Рассмотрена экспоненциально убывающая и синусоидальная зависимость скорости фильтрация.

В данной работе рассматривается перенос вещества в двумерной пористой среде, где коэффициенты дисперсии и скорости фильтрации являются переменными в пространстве – временном масштабе.

Постановка и численное решение задачи. Рассмотрим двумерный объект, схема которого показана на рис. 1. Пусть в некоторой точке среды подается раствор с определенной концентрацией. Из такого точечного источника раствор распространяется в среду ($0 \leq x < \infty$; $0 \leq y < \infty$) по взаимно перпендикулярным направлениям x и y . Компоненты скорости потока по x и y направлениям в заданной точке области (x, y) обозначим соответственно через $u(x, t)$ и $v(y, t)$. Обе эти компоненты удовлетворяют закону Дарси.

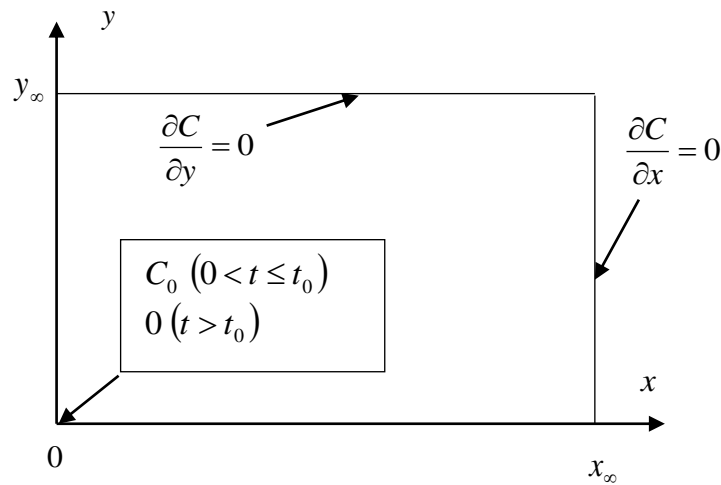


Рис.1. Схема двумерной среды, x_∞ и y_∞ выбираются так, чтобы было $\frac{\partial c}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial c}{\partial y} = 0$, соответственно [4].

Через $D_x(x, t)$ и $D_y(y, t)$ будем обозначать продольные и поперечные компоненты гидродинамической дисперсии соответственно по направлениям x и y [4,5]. Тогда линейное уравнение конвективной дисперсии в двумерном случае может быть написано в следующей форме:

$$\frac{\partial C(x, y, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x(x, t) \frac{\partial C(x, y, t)}{\partial x} - u(x, t) C(x, y, t) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_y(y, t) \frac{\partial C(x, y, t)}{\partial y} - v(y, t) C(x, y, t) \right), \tag{1}$$

где $C(x, y, t)$ - концентрация раствора, транспортируемого через среду, в точке (x, y) во время t .

Для того, чтобы решить двумерное уравнение адвекции-дисперсии (1) нужно задать начальные и граничные условия.

Первоначально пусть среда заполнена чистой (без вещества) жидкостью. Начиная с начального момента из точки $(0, 0)$ подается раствор с определенной концентрацией в течении определенного времени t_0 . На бесконечности по направлениям x и y принимаются условия отсутствия расхода вещества. Тогда начальное и граничные условия могут быть записаны в виде

$$C(x, y, t) = 0, \quad x \geq 0; \quad y \geq 0, \quad t = 0, \tag{2}$$

$$C(x, y, t) = \begin{cases} C_0, & x = 0; \quad y = 0; \quad 0 < t \leq t_0 \\ 0, & x = 0; \quad y = 0; \quad t > t_0 \end{cases} \tag{3}$$

$$\frac{\partial C(x, y, t)}{\partial x} = 0, \quad x \rightarrow \infty; \quad \frac{\partial C(x, y, t)}{\partial y} = 0, \quad y \rightarrow \infty; \quad t \geq 0, \quad (4)$$

где C_0 является концентрацией подаваемого в среду вещества.

Поскольку среда является неоднородной, две компоненты скорости, т.е. $u(x, t)$ и $v(y, t)$, считаются линейными функциями соответствующих координат x и y . Кроме того, скорости считаются зависящими от t , т.е. некоторая функциональная зависимость компоненты скорости от t учитывается. Таким образом, компоненты скорости движения жидкости принимаются в виде [4]

$$u(x, t) = u_0 f_1(mt)(1 + ax), \quad v(y, t) = v_0 f_1(mt)(1 + by), \quad (5)$$

где a и b - параметры неоднородности по продольному и поперечному направлениям, $f_1(mt)$ - известная функция, m - параметр, $u_0 = \text{const}$, $v_0 = \text{const}$. Различные значения a и b выражают различные характеристики неоднородности.

Известно, что коэффициенты диффузии (гидродинамической дисперсии) зависят от скорости движения жидкости. Здесь принимается следующая зависимость [4]

$$D_x(x, t) = D_{x0} f_2(mt)(1 + ax)^2, \quad D_y(y, t) = D_{y0} f_2(mt)(1 + by)^2, \quad (6)$$

где $f_2(mt)$ - заданная функция, $D_{x0} = \text{const}$, $D_{y0} = \text{const}$. Гарантируется, что $f(mt) = 1$ для $m = 0$ или $t = 0$.

В (5), (6) коэффициенты u_0 , v_0 , D_{x0} , D_{y0} , могут быть интерпретированы как однородные коэффициенты скорости движения и коэффициентов диффузии, соответственно по продольному и поперечному направлениям.

Систему (1) записываем в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial C(x, y, t)}{\partial t} = & \left(\frac{\partial D_x(x, t)}{\partial x} \frac{\partial C(x, y, t)}{\partial x} + D_x(x, t) \frac{\partial^2 C(x, y, t)}{\partial x^2} \right) - \\ & - \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} C(x, y, t) + u(x, t) \frac{\partial C(x, y, t)}{\partial x} \right) + \\ & + \left(\frac{\partial D_y(y, t)}{\partial y} \frac{\partial C(x, y, t)}{\partial y} + D_y(y, t) \frac{\partial^2 C(x, y, t)}{\partial y^2} \right) \\ & - \left(\frac{\partial v(x, t)}{\partial y} C(x, y, t) + v(x, t) \frac{\partial C(x, y, t)}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Используя выражения для скоростей движения (5) и диффузионных коэффициентов (6), уравнение (7) может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial C(x, y, t)}{\partial t} = & D_{x0} e^{mt} (1 + ax)^2 \frac{\partial^2 C(x, y, t)}{\partial x^2} + D_{y0} e^{mt} (1 + by)^2 \frac{\partial^2 C(x, y, t)}{\partial y^2} + \\ & + (D_{x0} \cdot 2a \cdot (1 + ax) e^{mt} - u_0 e^{-mt} (1 + ax)) \frac{\partial C(x, y, t)}{\partial x} + \\ & + (D_{y0} e^{mt} (1 + by)^2 - v_0 e^{-mt} (1 + by)) \frac{\partial C(x, y, t)}{\partial y} - \\ & - (a u_0 e^{-mt} + b v_0 e^{-mt}) C(x, y, t), \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned}
 u(x,t) &= u_0 f_1(mt)(1+ax), & v(y,t) &= v_0 f_1(mt)(1+by), \\
 D_x(x,t) &= D_{x0} f_2(mt)(1+ax)^2, & D_y(y,t) &= D_{y0} f_2(mt)(1+by)^2, \\
 \frac{\partial u}{\partial x} &= au_0 e^{-mt}, & \frac{\partial v}{\partial y} &= bv_0 e^{-mt} \\
 \frac{\partial D_x}{\partial x} &= D_{x0} \cdot 2a(1+ax) \cdot e^{mt}, & \frac{\partial D_y}{\partial y} &= D_{y0} \cdot 2b(1+by) \cdot e^{mt}. \\
 f_1(mt) &= e^{-mt}, & f_2(mt) &= e^{mt}.
 \end{aligned}$$

Вводятся следующие обозначения

$$\begin{aligned}
 L_1 &= D_{x0} e^{mt} (1+ax)^2, & L_2 &= D_{y0} e^{mt} (1+by)^2, \\
 L_3 &= D_{x0} 2a(1+ax) e^{mt} - u_0 (1+ax) e^{-mt}, \\
 L_4 &= D_{y0} 2b(1+by) e^{mt} - v_0 (1+by) e^{-mt}, \\
 L_5 &= -(au_0 + bv_0) e^{-mt}.
 \end{aligned} \tag{9}$$

Используя обозначения (9), уравнение (8) записываем в виде

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial C(x,y,t)}{\partial t} &= L_1 \frac{\partial^2 C(x,y,t)}{\partial x^2} + L_2 \frac{\partial^2 C(x,y,t)}{\partial y^2} + L_3 \frac{\partial C(x,y,t)}{\partial x} + \\
 &+ L_4 \frac{\partial C(x,y,t)}{\partial y} - L_5 C(x,y,t).
 \end{aligned} \tag{10}$$

Для решения уравнения (10) используем метод конечных разностей. Для этого, вводим следующую сетку [8]

$$\omega_{\tau h_1 h_2} = \left\{ (x_i, y_j, t_k), i = \overline{0, N}, j = \overline{0, R}, k = \overline{0, K}, x_i = ih_1, \right. \\
 \left. y_j = jh_2, t_k = k\tau, h_1 = \frac{x_\infty}{N}, h_2 = \frac{y_\infty}{R}, \tau = \frac{T}{K} \right\},$$

где τ, h_1, h_2 - шаги сетки по времени, по координатам x и y , соответственно.

Для аппроксимации (10) использована схема Кранка-Никольсона [8]

$$\left\{ \begin{aligned}
 \frac{C_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - C_{i,j}^k}{\tau/2} &= L_1 \frac{C_{i-1,j}^{k+\frac{1}{2}} - 2 \cdot C_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} + C_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}}}{h_1^2} + L_2 \frac{C_{i,j-1}^k - 2 \cdot C_{i,j}^k + C_{i,j+1}^k}{h_2^2} + \\
 &+ L_3 \frac{C_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} - C_{i-1,j}^{k+\frac{1}{2}}}{2 \cdot h_1} + L_4 \frac{C_{i,j+1}^k - C_{i,j-1}^k}{2 \cdot h_2} + L_5 \cdot C_{i,j}^k, \\
 \frac{C_{i,j}^{k+1} - C_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{\tau/2} &= L_1 \frac{C_{i-1,j}^{k+\frac{1}{2}} - 2 \cdot C_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} + C_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}}}{h_1^2} + L_2 \frac{C_{i,j-1}^{k+1} - 2 \cdot C_{i,j}^{k+1} + C_{i,j+1}^{k+1}}{h_2^2} + \\
 &+ L_3 \frac{C_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} - C_{i-1,j}^{k+\frac{1}{2}}}{2 \cdot h_1} + L_4 \frac{C_{i,j+1}^{k+1} - C_{i,j-1}^{k+1}}{2 \cdot h_2} + L_5 \cdot C_{i,j}^{k+\frac{1}{2}},
 \end{aligned} \right. \tag{11}$$

где $C_{i,j}^k$ - сеточная функция, соответствующая узловой точке (x_i, y_j, t_k) .

Из (11) видно, что ошибка аппроксимации схемы (11) имеет порядок $O(\tau, h_1^2, h_2^2)$.

Систему уравнений (11) записываем в виде

$$\begin{cases} A_1 C_{i-1,j}^{k+\frac{1}{2}} - B_1 C_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} + C_1 C_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} = -F_{1i}, \\ A_2 C_{i,j-1}^{k+1} - B_2 C_{i,j}^{k+1} + C_2 C_{i,j+1}^{k+1} = -F_{2j}, \end{cases} \tag{12}$$

где

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{\tau L_1}{2h_1^2} - \frac{\tau \cdot L_3}{4h_1}, \quad B_1 = 1 - \frac{\tau \cdot L_2}{2} + \frac{\tau \cdot L_1}{h_1^2}, \quad C_1 = \frac{\tau \cdot L_1}{2h_1^2} + \frac{\tau \cdot L_3}{4h_1}, \\
 F_{li} &= \frac{\tau \cdot L_2}{2h_2^2} (C_{i,j-1}^k - 2 \cdot C_{i,j}^k + C_{i,j+1}^k) + \frac{\tau \cdot L_4}{4h_2} (C_{i,j+1}^k - C_{i,j-1}^k) + C_{i,j}^k, \\
 A_2 &= \frac{\tau \cdot L_4}{2h_2^2} - \frac{\tau \cdot L_2}{4h_2}, \quad B_2 = 1 - \frac{\tau \cdot L_5}{2} + \frac{\tau \cdot L_2}{h_2^2}, \quad C_2 = \frac{\tau \cdot L_2}{2h_2^2} + \frac{\tau \cdot L_4}{4h_2}, \\
 F_{2j} &= \frac{\tau \cdot L_1}{2h_1^2} \left(C_{i-1,j}^{k+\frac{1}{2}} - 2 \cdot C_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} + C_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} \right) + \frac{\tau \cdot L_3}{4h_1} \left(C_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} - C_{i-1,j}^{k+\frac{1}{2}} \right) + C_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}.
 \end{aligned} \tag{13}$$

Используем следующие соотношения для решения (12) методом прогонки по направлениям

$$\begin{aligned}
 C_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} &= \alpha_{li,j+1} C_{i,j+1}^{k+\frac{1}{2}} + \beta_{li,j+1}, \\
 C_{i,j}^{k+1} &= \alpha_{2i,j} C_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} + \beta_{2i,j},
 \end{aligned} \tag{14}$$

где $\alpha_{li,j+1}, \beta_{li,j+1}, \alpha_{2i,j}, \beta_{2i,j}$ - прогоночные коэффициенты.

Тогда из (12) получим следующие рекуррентные формулы для прогоночных коэффициентов

$$\begin{cases} \alpha_{li+1,j} = \frac{C_1}{B_1 - A_1 \alpha_{li,j}}, & \beta_{li+1,j} = \frac{F_{li} + A_1 \beta_{li,j}}{B_1 - A_1 \alpha_{li,j}}, \\ \alpha_{2i,j+1} = \frac{C_2}{B_2 - A_2 \alpha_{2i,j}}, & \beta_{2i,j+1} = \frac{F_{2j} + A_2 \beta_{2i,j}}{B_2 - A_2 \alpha_{2i,j}}. \end{cases} \tag{15}$$

Начальное условие в разностной форме имеет вид

$$C_{i,j}^0 = 0, \quad x \geq 0; y \geq 0; t = 0. \tag{16}$$

Из граничных условий имеем

$$\begin{cases} C_{0,j}^{k+\frac{1}{2}} = (\bar{\alpha}_1)_{j+1} C_{0,j+1}^{k+\frac{1}{2}} + (\bar{\beta}_1)_{j+1}, \\ C_{i,0}^{k+1} = (\bar{\alpha}_2)_{i+1} C_{i+1,0}^{k+1} + (\bar{\beta}_2)_{i+1}, \end{cases} \tag{17}$$

из которых получаем

$$C_{i,R}^{k+\frac{1}{2}} = \frac{(\beta_1)_{i,R}}{1 - (\alpha_1)_{i,R}}; \quad C_{N,j}^{k+1} = \frac{(\beta_2)_{N,j}}{1 - (\alpha_2)_{N,j}}$$

$$\begin{cases} (\bar{\alpha}_1)_{j+1} = \frac{\bar{C}_1}{\bar{B}_1 - \bar{A}_1 (\bar{\alpha}_1)_j}; & (\bar{\beta}_1)_{j+1} = \frac{(\bar{F}_1)_j + \bar{A}_1 (\bar{\beta}_1)_j}{\bar{B}_1 - \bar{A}_1 (\bar{\alpha}_1)_j} \\ (\bar{\alpha}_2)_{i+1} = \frac{\bar{C}_2}{\bar{B}_2 - \bar{A}_2 (\bar{\alpha}_2)_i}; & (\bar{\beta}_2)_{i+1} = \frac{(\bar{F}_2)_j + \bar{A}_2 (\bar{\beta}_2)_i}{\bar{B}_2 - \bar{A}_2 (\bar{\alpha}_2)_i} \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned}
 \bar{A}_1 &= \frac{\tau \cdot M_1}{2h_2^2} - \frac{\tau \cdot M_2}{2h_2}; \quad \bar{B}_1 = 1 + \frac{\tau \cdot M_1}{h_2^2} - \frac{\tau \cdot M_3}{2}; \quad \bar{C}_1 = \frac{\tau \cdot M_1}{2h_2^2} + \frac{\tau \cdot M_2}{2h_2}; \\
 \bar{F}_{1j} &= C_{0,j}^k; \\
 \bar{A}_2 &= \frac{\tau \cdot N_1}{2h_1^2} - \frac{\tau \cdot N_2}{2h_1}; \quad \bar{B}_2 = 1 + \frac{\tau \cdot N_1}{h_1^2} - \frac{\tau \cdot N_3}{2}; \quad \bar{C}_2 = \frac{\tau \cdot N_1}{2h_1^2} + \frac{\tau \cdot N_2}{2h_1}; \\
 \bar{F}_{2j} &= C_{i,0}^{k+\frac{1}{2}},
 \end{aligned}$$

$$M_1 = D_{y_0} e^{mt} (1 + by)^2; \quad M_2 = (1 + by)(2bD_{y_0} e^{mt} + v_0 e^{-mt});$$

$$M_3 = -(au_0 + bv_0) e^{-mt}; \quad D_{y_0} e^{mt} (1 + by)^2;$$

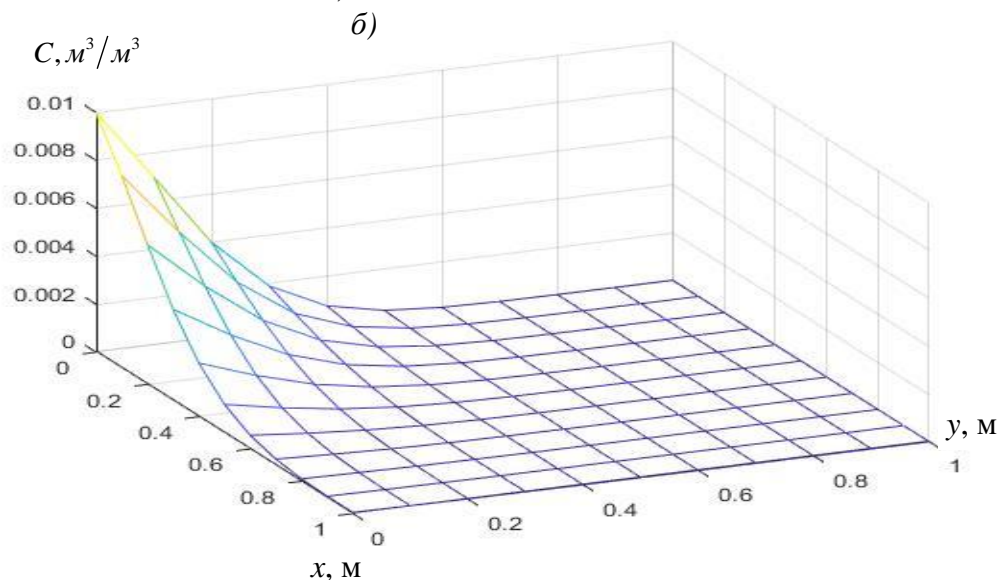
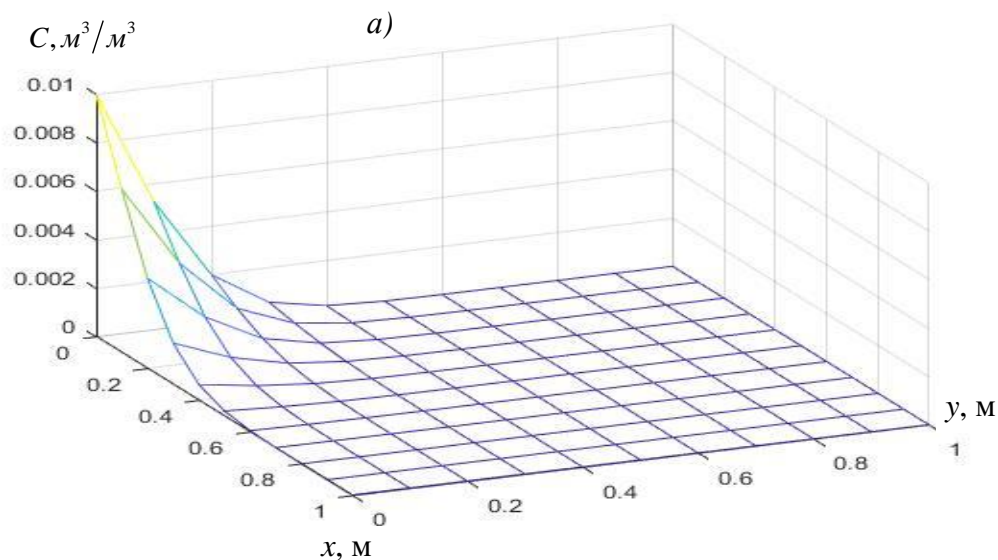
$$N_1 = D_{x_0} (1 + ax)^2 e^{mt}; \quad N_2 = (1 + ax)(2aD_{x_0} e^{mt} + u_0 e^{-mt});$$

$$N_3 = -(au_0 + bv_0) e^{-mt}.$$

Некоторые результаты численных расчетов показаны на рис.2-5. В расчетах использованы следующие значения исходных параметров:

$$D_{x_0} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}; \quad D_{y_0} = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}; \quad u_0 = 4 \cdot 10^{-6} \text{ м/с}; \quad v_0 = 2 \cdot 10^{-6} \text{ м/с}; \quad a = 10^{-4} \text{ м}^{-1}; \quad b = 10^{-4} \text{ м}^{-1};$$

$$C_0 = 0.01.$$



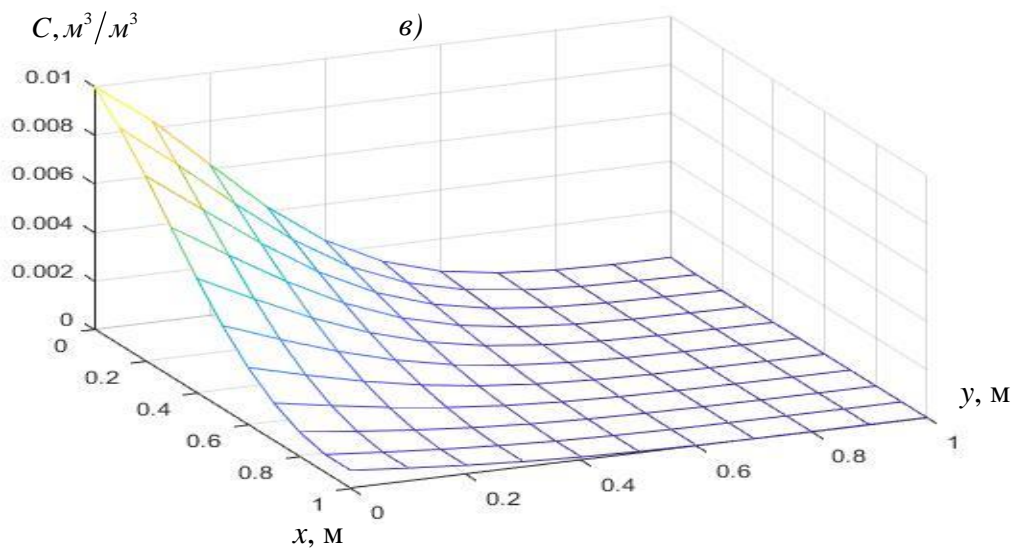
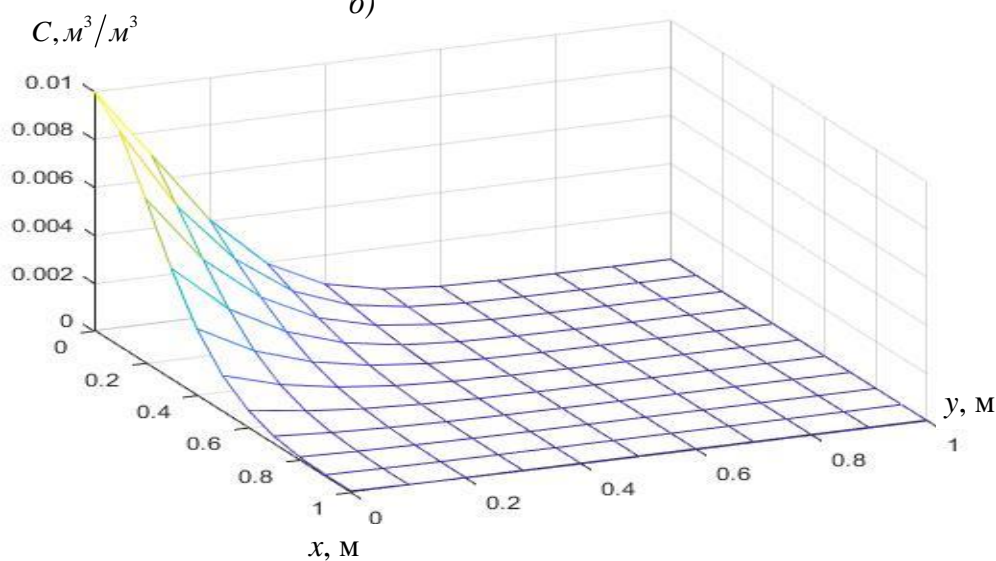
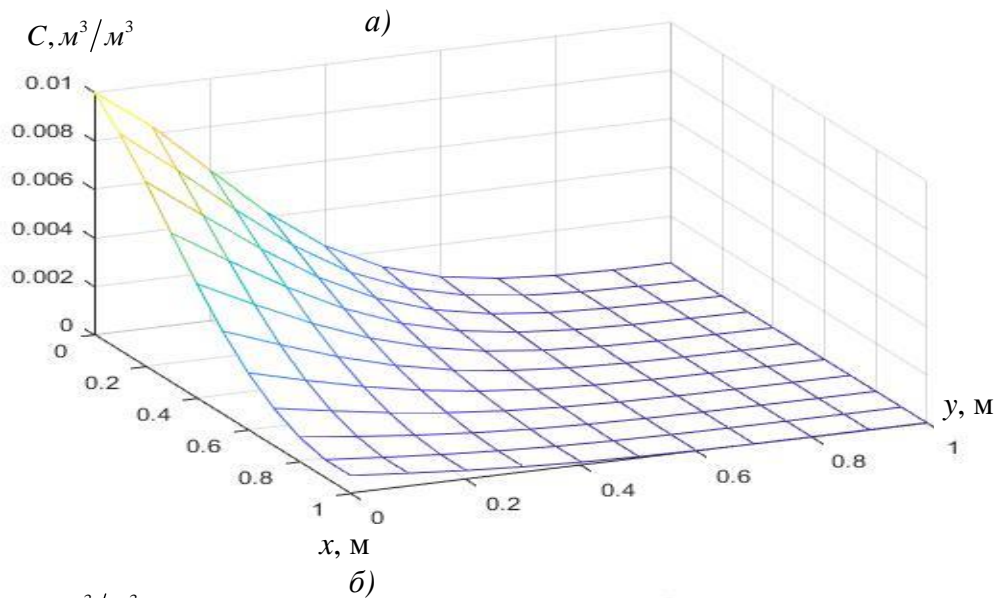


Рис.2. Профили концентрации для экспоненциальной формы функций $f_1(mt)$ и $f_2(mt)$ при $t = 9000c$ (a); $18000c$ (б); $36000c$ (в).



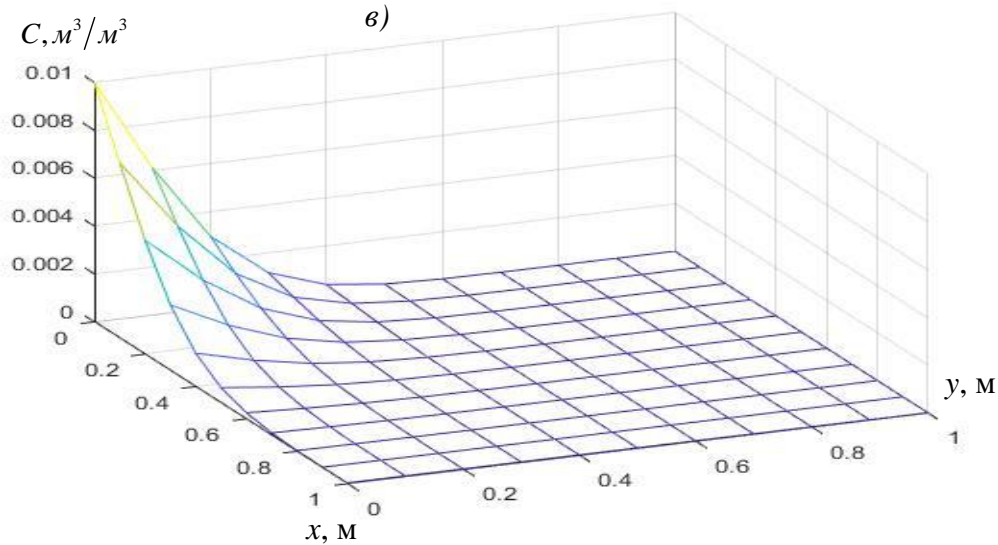
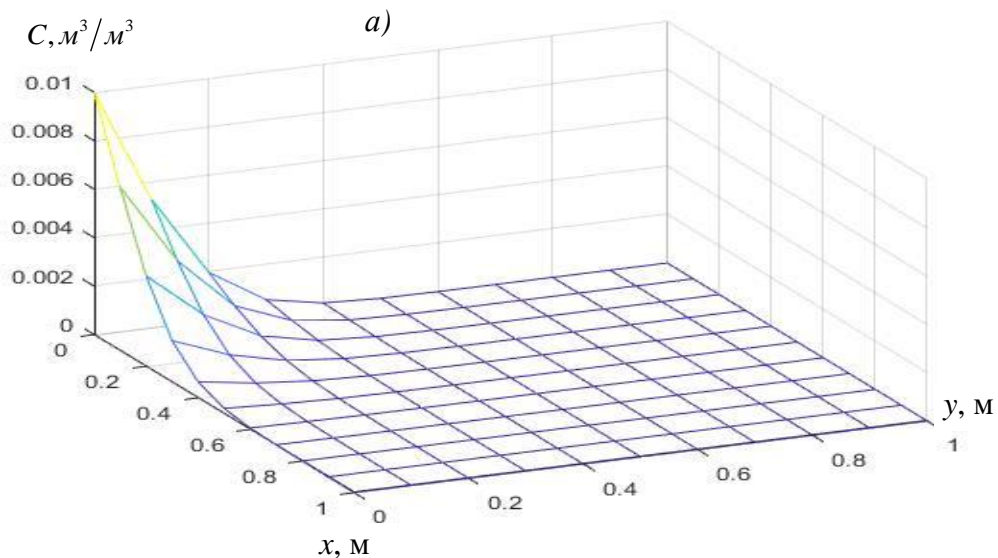


Рис.3. Профили концентрации для экспоненциальной формы функций $f_1(mt)$ и $f_2(mt)$ при, $t = 36000c$, $m = 10^{-9}$ (а); $m = 10^{-7}$ (б); $m = 10^{-5} c^{-1}$ (в).

Как видно из рис.2, 3, с увеличением времени t концентрационные профили распространяются по области по обоим направлениям, т.е. x и y . При этом профили распространяются интенсивнее по направлению x , т.к. значения u_0 и D_{x0} больше значений v_0 и D_{y0} . Данная ситуация соответствует случаю, когда как конвективный, так и диффузионные переносы по направлению x значительно опережают соответствующие переносы по направлению y . Однако, возможны и другие ситуации, когда оба вида переноса по направлениям могут иметь различные интенсивности.

Точно так же вместо функций $f_1(mt) = e^{-mt}$, $f_2(mt) = e^{mt}$ использовались синусоидальные функции, $f_1(mt) = 2 - \sin(mt)$, $f_2(mt) = 2 - \sin(mt)$ и получены численные результаты.

Рис. 3, 5 иллюстрируют влияние параметра m на распространение концентрации, рассчитанные для трёх разных величин $m = 10^{-9} c^{-1}$, $m = 10^{-7} c^{-1}$ и $m = 10^{-5} c^{-1}$. Как видно из графиков, распространение концентрации в определенных точках выше для меньшего параметра m и ниже для большего параметра m , но профили концентрации для синусоидальной формы уменьшаются несколько быстрее по сравнению с экспоненциальной формой как в продольном, так и в поперечном направлениях.



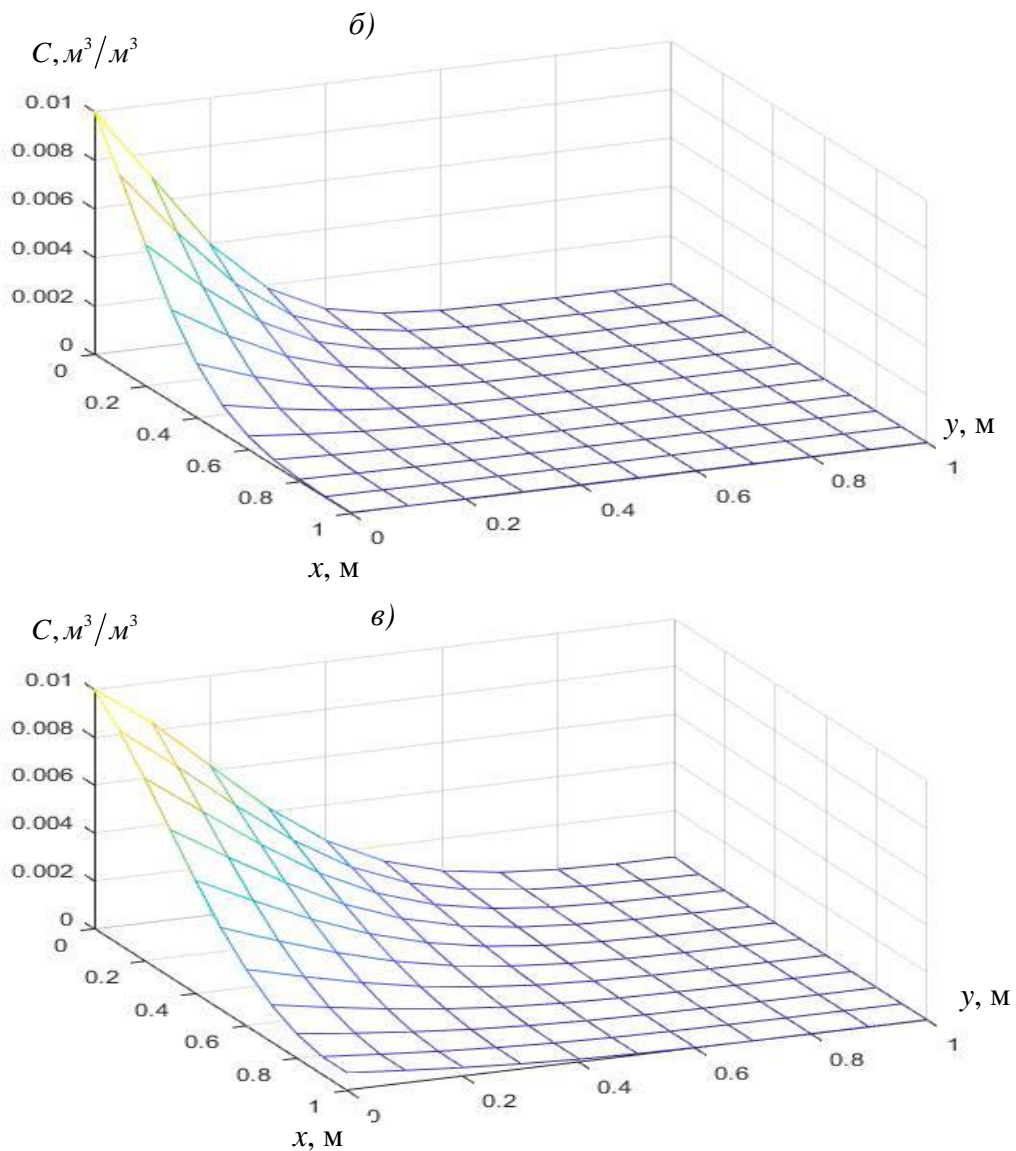
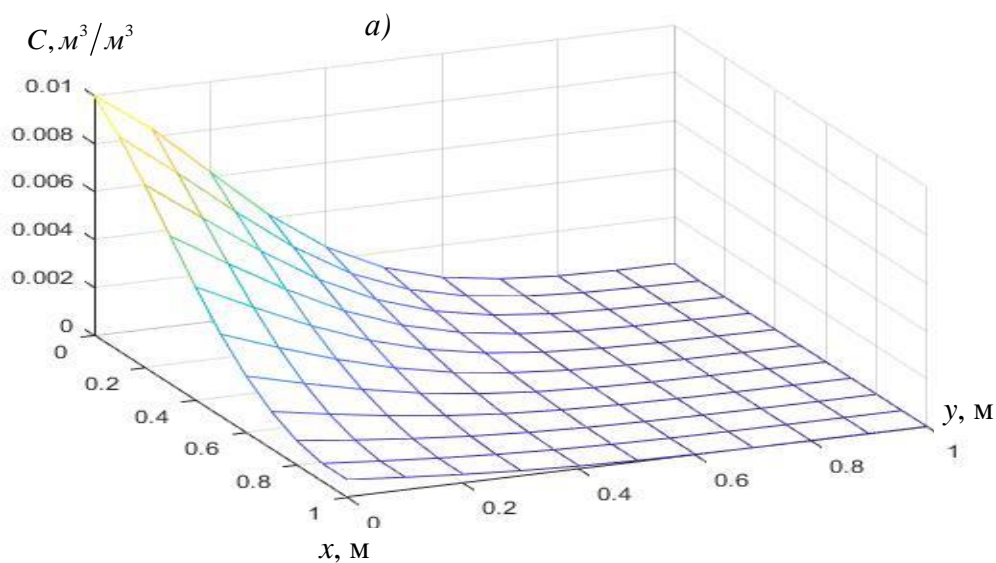


Рис.4. Профили концентрации для синусоидальной формы функций $f_1(mt)$ и $f_2(mt)$ при $m = 10^{-9} \text{ c}^{-1}$, $t = 9000$ (а); 18000 (б); 36000 с (в).



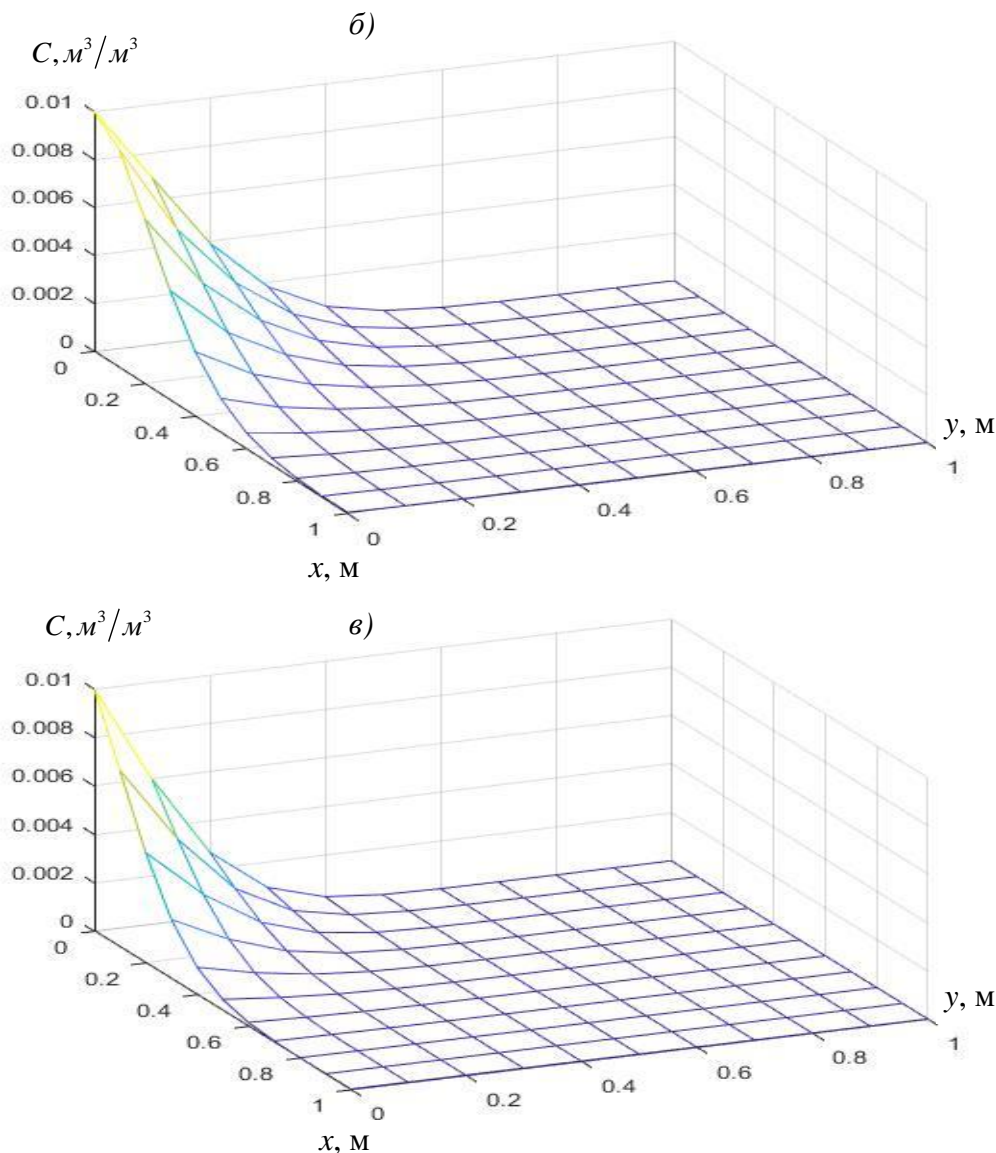


Рис.5. Профили концентрации для синусоидальной формы функций $f_1(mt)$ и $f_2(mt)$ при, $t = 36000c$, $m = 10^{-9}$ (а); $m = 10^{-7}$ (б); $m = 10^{-5} c^{-1}$ (в)

На рис. 6 показано изменение концентрации вещества во времени при разных значениях параметра m в разных фиксированных точках области, когда функции $f_1(mt)$ и $f_2(mt)$ заданы в синусоидальной форме. При сравнении рис 6а и рис 6б, хотя расстояния от $x = 0, y = 0$ до точек $x = 0,5, y = 0,2$ и $x = 0,2, y = 0,5$ одинаковы, на рис. рис 6а наблюдается более широкое распределение концентрации, поскольку коэффициент диффузии в направлении x больше, чем на рис 6б.

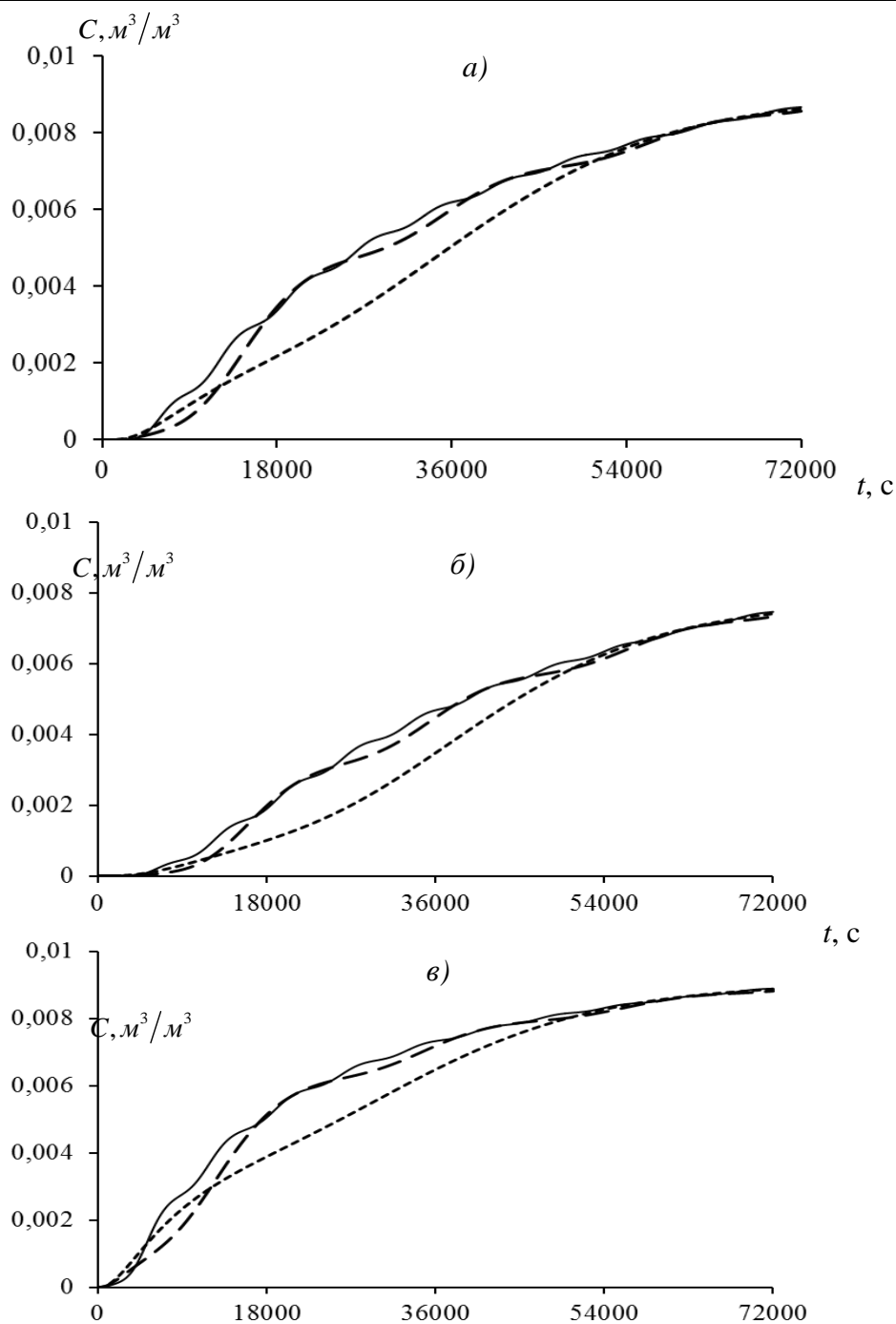


Рис.6. Динамика концентрации вещества для синусоидальной формы функций $f_1(mt)$ и $f_2(mt)$ при, $x=0,5, y=0,2$ (а); $x=0,2, y=0,5$ (б), $x=0,2, y=0,3$ (в).

----- $m=10^{-4}, y=0,5$
 - - - - - $m=3 \cdot 10^{-4}, y=0,1$
 ————— $m=9 \cdot 10^{-4}$

На рис. 7 показано изменение концентрации вещества во времени при разных значениях параметра D_{x0} в разных фиксированных точках области, когда функции $f_1(mt)$ и $f_2(mt)$ заданы в синусоидальной форме. При увеличении коэффициента продольной диффузии D_{x0} , в точке $x=0,5, y=0,2$ наблюдается более быстрое увеличение динамики концентрации вещества, и наоборот, в точке $x=0,2, y=0,5$ с увеличением значения y динамика концентрации взвешенных частиц замедляется при увеличении значения D_{x0} при больших временах (рис 7б с рис 7в). Это объясняется тем, что увеличение коэффициента продольной диффузии D_{x0} приводит к более

синусоидальной формы уменьшаются несколько быстрее по сравнению с экспоненциальной формой как в продольном, так и в поперечном направлениях.

Литература

1. Шехтман Ю.М. Фильтрация малоцентрированных суспензий. - М.: Изд-во АН СССР. 1961. - 212 с.
2. Хужаёров Б.Х. Фильтрация неоднородных жидкостей в пористых средах. Ташкент: Издательство «ФАН». 2012. – 280 с.
3. Savovic S., Djordjevich A. Finite difference solution of the one-dimensional advection-diffusion equation with variable coefficients in semi-infinite media // Int. J. Heat Mass Transfer 55 (2012) 4291-4294.Pp.
4. Savovic S., Djordjevich A. Numerical solution for temporally and spatially dependent solute dispersion of pulse type input concentration in semi-infinite media // Int. J. Heat Mass Transfer 60 (2013) 291–295 Pp.
5. Bear J. Dynamics of fluids in porous media. American Elsevier Publishing Company. 1972. – 764 p.
6. Yadav S.K., Kumar A., Kumar N. Horizontal solute transport from a pulse type source along temporally and spatially dependent flow: analytical solution // J. Hidrol. 412–413 (2012) 193–199 Pp.
7. Yadav R.R., Kumar L.K. Two-Dimensional Conservative Solute Transport with Temporal and Scale-Dependent Dispersion: Analytical Solution // International Journal of Advance in Mathematics. No 2 (2018): 90–111 Pp
8. Samarskii A. A. The Theory of difference schemes. Taylor & Francis Inc., New York, United States, 2001- 788 Pp.

УДК 532.546:622.2

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДАВЛЕНИЯ НА ПЛУНЖЕР ПРИ ЭКСПЛУАТАЦИИ СКВАЖИН, ДОБЫВАЮЩИХ НЕНЬЮТОНОВСКИЕ НЕФТИ

Ю. Гайбулов, М.С. Джаббаров

Самаркандский государственный архитектурно-строительный институт

Аннотация. В статье рассматривается математическое моделирование давления на плунжер при эксплуатации нефтяных скважин с глубинными насосами. Численными экспериментами изучено влияние вязкоупругих свойств, нефти и плотности нефти на изменение полного давления на плунжер.

Ключевые слова: давление на плунжер, вязкоупругая и вязкая жидкость, оригинал и изображение.

Stress modelling on the plunger at operation of the holes mining No newton oil

Abstract. In paper mathematical modelling of pressure on a plunger is considered at operation of oil wells with deep pumps. By numerical experiments study influence of viscoelastic properties, viscosities and an oil denseness on a total pressure variation on a plunger.

Keywords: pressure on a plunger, a viscoelastic and viscous liquid, a pre-image and a Laplace transform.

Nonyuton neftlar qazib olinadigan quduqlarni ekspluatatsiya qilishda plunjerga bosimni modellashtirish

Annotatsiya. Maqolada neft konlarini chuqurlikda joylashgan nasoslar yordamida ekspluatatsiya qilishda plunjerga bo'lgan bosimni matematik modellashtirish qaralgan. Sonli eksperimentlar yordamida neft qovushoq-elastik xossalari, qovushoqligi va zichligining plunjerga bosimga ta'siri o'rganilgan.

Kalit so'zlar: plunjerga bosim, qovushoq-elastik va qovushoq suyuqlik, original va tasvir.

Введение. При эксплуатации нефтяных скважин плунжерным лифтом часто выходят из строя отдельные его части. Основная причина этого связана, в основном, статической

нагрузкой от силы тяжести жидкости и сил инерции движущийся колонны штанг и столба жидкости в результате переменного ускорения движения шатунно – кривошипного механизма станка качалки.

В настоящей работе предлагается теоретический способ определения полного давления на плунжер с учетом вязкоупругих свойств добываемой нефти [2, 4, 10]. Изучено влияние релаксационных свойств жидкости на изменение давления на плунжер.

Постановка задачи. Рассмотрим задачу определения полного давления на плунжер, при ходе его вверх, в подъемной трубе, при эксплуатации нефтяных скважин плунжерным лифтом. Для математического моделирования процесса принимается общепринятое допущения относительно движения жидкости(нефти) в кольцевом пространстве между двумя цилиндрическими трубами, одна из которых движется относительно другой. Схема распределения скоростей жидкости в кольцевом пространстве между колонной труб и штанг относительно неподвижной системы показан на рис. 1.

Изменение давления на плунжер обусловлено инерцией жидкости, а полное давление на плунжер $p(t)$ будет

$$p(t) = \Delta p(t) + (L-h)\rho g + p_0, \quad (1)$$

где t – время; $\Delta p(t)$ – потери давления при нестационарном движении жидкости в подъемной трубе кольцевого сечения; p_0 – давление на устье; L – высота поднимаемого столба жидкости; h – глубина погружения глубинного насоса; ρ – плотность жидкости; g – ускорение свободного падения. Следуя работе [9], скорость движения плунжера $v_p(t)$ в период одного цикла T его движения принимается в виде

$$v_p(t) = \frac{24v_c}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n^3} \sin \frac{2\pi n t}{T}, \quad (0 \leq t \leq T), \quad (2)$$

где v_c – средняя скорость движения точки подвески штанг. Графики зависимости от времени скорости и ускорения плунжера для $T = 20c$, $v_c = 0.60$ м/с приведен на рис. 2.

Реологическое уравнение состояния жидкости принимается в виде реологической модели Максвелла [3, 10]

$$\left(1 + \lambda \frac{\partial}{\partial t}\right) \tau(r, t) = \mu \frac{\partial v}{\partial r}. \quad (3)$$

где r – радиальная координата; v – скорость жидкости; μ – динамическая вязкость; τ – касательное напряжение; λ - время релаксации. Уравнение (3) при $\lambda = 0$ выражает закон вязкого трения Ньютона, а при $\lambda > 0$ - модель вязкоупругой среды Максвелла.

С учетом уравнения движения

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\Delta p}{L} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\tau),$$

получим дифференциальное уравнение

$$\rho \left(1 + \lambda \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial v}{\partial t} = \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r}\right) + \left(1 + \lambda \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\Delta p}{L}, \quad (r_2 < r < R), \quad (4)$$

где r_2 – радиус штанга, R – радиус подъемной трубы.

Для определения потери давления в подъемной трубе $\Delta p(t)$ при нестационарном ламинарном движении жидкости используется уравнение баланса

$$Q = \pi(r_1^2 - r_2^2)v_p(t) = 2\pi \int_{r_2}^R r v(r, t) dr, \quad (5)$$

где r_1 – радиус плунжера, Q – расход жидкости. Начальные и граничные условия для уравнения (4) имеет вид

$$v(r, 0) = 0, \frac{\partial v(r, 0)}{\partial t} = 0, (r_2 \leq r \leq R); \tag{6}$$

$$v(r_2, t) = v_p(t), \quad v(R, t) = 0, \quad (t > 0). \tag{7}$$

В практике эксплуатации нефтяных скважин глубинными насосами в большинстве случаях радиальный зазор между трубой и колонной штанг можно рассматривать как плоскую трубу [7, 9]. Для данного случая уравнение (4), соотношение (5) и краевые условия (6) - (7) можно написать в следующем виде:

$$\rho \left(1 + \lambda \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial v}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \left(1 + \lambda \frac{\partial}{\partial z} \right) q(t) \tag{8}$$

$$Q = \pi(r_1^2 - r_2^2)v_p(t) = 2\pi \int_0^l (y + r_2)v(y, t)dt, \tag{9}$$

$$v(y, 0) = 0, (0 \leq y \leq l); \quad v(0, t) = v_0(t), \quad v(l, t) = 0, \quad (t > 0), \tag{10}$$

где $l = R - r_2$, $q(t) = \Delta p(t) / L$. Уравнение (8) и соотношения (9), (10) выражает математическую модель рассматриваемого процесса.

Решение задачи. Отметим, что данная задача для вязкой жидкости, приближенным методом Слезкина-Тарга решена в [5, 9], точное решение дано в работе [3].

Рассмотрим решение задачи для вязкоупругой жидкости(нефти) модели Максвелла. Сначала введем безразмерные величины

$$t' = \frac{\mu}{\rho l^2} t, \quad x = \frac{y}{l}, \quad T' = \frac{\mu}{\rho l^2} T, \quad \lambda' = \frac{\mu}{\rho l^2} \lambda, \quad \bar{v} = \frac{v}{v_c}, \quad \bar{v}_p = \frac{v_p}{v_c}, \quad \bar{q} = \frac{l^2}{\mu v_c} q. \tag{11}$$

С учетом (11) в безразмерных переменных получим уравнение

$$\left(1 + \lambda' \frac{\partial}{\partial t'} \right) \frac{\partial \bar{v}}{\partial t'} = \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \left(1 + \lambda' \frac{\partial}{\partial t'} \right) \bar{q}(t'), \quad (0 < x < 1), \tag{12}$$

с начальными и граничными условиями

$$\bar{v}(x, 0) = 0, \quad \bar{v}'_x(x, 0) = 0, \quad (0 \leq x \leq 1); \quad \bar{v}(0, t') = \bar{v}_p(t'), \quad \bar{v}(1, t') = 0. \tag{13}$$

Соотношение (9) в безразмерных переменных принимает вид

$$\frac{r_1^2 - r_2^2}{2l^2} \bar{v}_p(t') = \int_0^1 (x + \frac{r_2}{l}) \bar{v}(x, t') dx. \tag{14}$$

Для решения уравнения (12) с краевыми условиями (13) применяя интегральное преобразование Лапласа [6]

$$\tilde{v}(x, s) = \int_0^{+\infty} e^{-st'} \bar{v}(x, t') dt', \quad \tilde{v}_p(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st'} \bar{v}_p(t') dt', \quad \tilde{q}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st'} \bar{q}(t') dt'.$$

получим дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 \tilde{v}}{dx^2} - s(1 + \lambda' s) \tilde{v}(x, s) = -(1 + \lambda' s) \tilde{q}(s), \quad (0 < x < 1)$$

с условиями $\tilde{v}(0, s) = \tilde{v}_p(s)$, $\tilde{v}(1, s) = 0$. Решение его имеет вид

$$\tilde{v}(x, s) = \tilde{v}_p(s) \frac{shw(1-x)}{shw} + \frac{\tilde{q}(s)}{s} \left(1 - \frac{shw(1-x)}{shw} - \frac{shwx}{shw} \right), \tag{15}$$

где $w = \sqrt{s(1 + \lambda' s)}$. Подставляя (15) в изображение соотношения (14):

$$\frac{r_1^2 - r_2^2}{2l^2} \tilde{v}_p(s) = \int_0^1 (x + \frac{r_2}{l}) \tilde{v}(x, s) dx,$$

и вычисляя интегралы, для $\tilde{q}(s)$ получим формулу

$$\tilde{q}(s) = \frac{l}{l + 2r_2} \cdot s\tilde{v}_p(s) \cdot f(w), \tag{16}$$

где

$$f(w) = \frac{\varphi(w)}{\psi(w)}, \quad \varphi(w) = 1 - \frac{shw}{w} + \frac{r_2}{l}(1 - chw) + \frac{r_1^2 - r_2^2}{2l^2} wshw, \quad \psi(w) = 1 - chw + \frac{w}{2} shw.$$

С целью перехода в оригинал в (16), разложим функцию $f(w)$ в ряд, используя теорему Коши о разложении мероморфной функции на простые дроби [8]:

$$\begin{aligned} f(w) &= \frac{4f_0}{w^2} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{w^2 + a_k^2} + \frac{w_k \varphi_k}{\psi_k (w^2 + w_k^2)} \right] = \\ &= \frac{4f_0}{s(1 + \lambda' s)} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{s(1 + \lambda' s) + a_k^2} + \frac{w_k \varphi_k}{\psi_k (s(1 + \lambda' s) + w_k^2)} \right] \end{aligned}$$

где

$$f_0 = \frac{3}{l^2} (r_1^2 - r_2^2 - r_2 l) - 1; \quad a_k = 2k\pi;$$

$$\varphi_k = 1 - \frac{\sin w_k}{w_k} + \frac{r_2}{l} (1 - \cos w_k) + \frac{r_1^2 - r_2^2}{2l^2} w_k \sin w_k; \quad \psi_k = w_k \cos w_k - \sin w_k.$$

$w_k = 2z_k$, ($k = 1, 2, \dots$) - положительные корни уравнения $\psi(w) = 0$; z_k - положительные корни уравнения $tgz = z$;

Нетрудно показать, что оригинал $\Phi(t')$, соответствующий к $f(w)$ имеет вид

$$\Phi(t') = 4f_0(1 - e^{-2at'}) + 8e^{-at'} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\sin a\beta_k t'}{\beta_k} + \frac{w_k \varphi_k}{\psi_k} \cdot \frac{\sin ag_k t'}{g_k} \right], \tag{17}$$

где $a = \frac{1}{2\lambda'}$, $\beta_k = \sqrt{4\lambda' a_k^2 - 1}$, $g_k = \sqrt{4\lambda' w_k^2 - 1}$.

Используя теорему о композиции операционного исчисления, из (16) найдем $\bar{q}(t')$:

$$\begin{aligned} \bar{q}(t') &= \frac{4l}{l + 2r_2} \left\{ f_0 \bar{v}_p(t') - 4f_0 \int_0^{t'} e^{-az} \bar{v}_p'(t' - z) dz + \right. \\ &\left. + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{t'} \left(\frac{\sin a\beta_k z}{\beta_k} + \frac{\varphi_k w_k}{\psi_k} \frac{\sin ag_k z}{g_k} \right) e^{-az} \bar{v}_p'(t' - z) dz \right\}. \end{aligned} \tag{18}$$

где

$$\bar{v}_p(t') = \frac{24}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n^3} \sin \frac{2\pi n t'}{T'}, \quad \bar{v}_p'(t') = \frac{d\bar{v}_p(t')}{dt'} = \frac{48}{\pi^2 T'} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n^2} \cos \frac{2\pi n t'}{T'}$$

Формула (18) позволяет, при известной скорости движения плунжера найти полное давление на плунжер, используя соотношение

$$\Delta p(t) = \frac{\mu v_c L}{l^2} \bar{q}(t').$$

Результаты и выводы. С помощью полученных формул проведены численные эксперименты по расчету полного давления и скорости жидкости, используя следующие исходные данные: $L = 1000 \text{ м}$, $h = 100 \text{ м}$, $v_c = 0,60 \text{ м/с}$, $p_0 = 10^5 \text{ Па}$, $T = 20 \text{ с}$, $R = 0,030 \text{ м}$, $r_1 = 0,02988 \text{ м}$, $r_2 = 0,010 \text{ м}$, $\lambda = 0,5, 1 \text{ с}$.

Графики зависимости от времени скорости и ускорения плунжера показано на рис. 2.

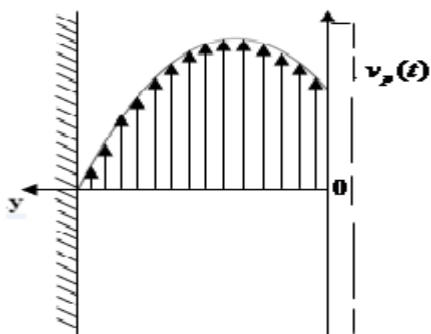


Рис.1. Распределение скоростей жидкости в кольцевом пространстве между колонной труб и штанг относительно неподвижной системы

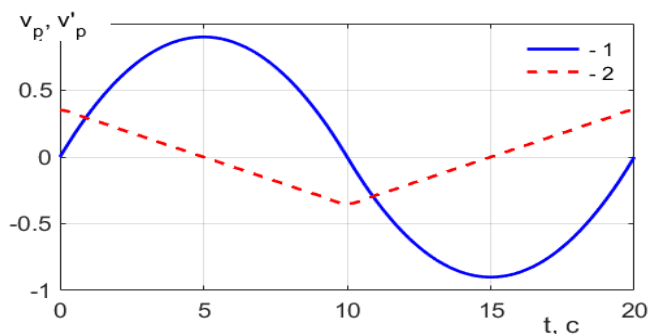


Рис. 2. Графики зависимости от времени скорости и ускорения плунжера.

1 – $v_p(t)$; 2 – $v'_p(t)$.

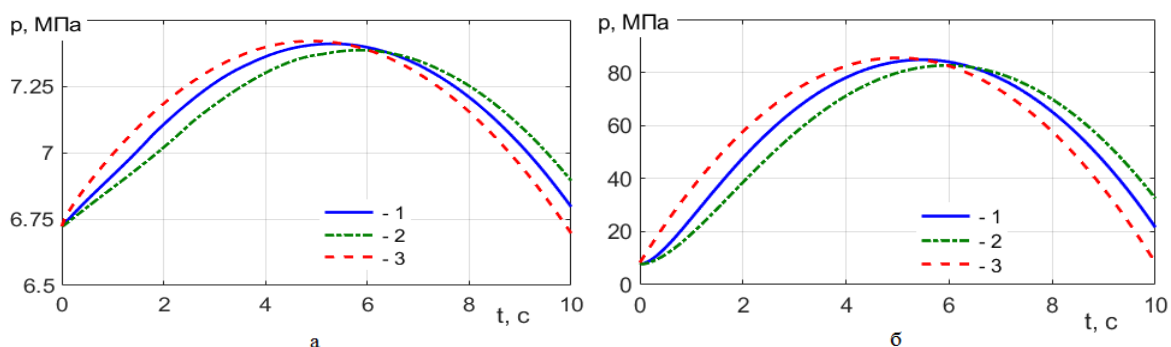


Рис. 3. Графики зависимости от времени полного давления на плунжер при его подъеме для: а - легкой нефти(месторождение Варик), б - тяжелой нефти(месторождение Коштар) при температуре 20⁰. 1 - $\lambda = 0.5$ c; 2 - $\lambda = 1$ c; 3 - $\lambda = 0$.

а. $\rho = 750 \text{ кг/м}^3$; $\mu = 0.047 \text{ Па} \cdot \text{с}$; б. $\rho = 930 \text{ кг/м}^3$; $\mu = 5.2 \text{ Па} \cdot \text{с}$.

На рис. 3 представлен графики зависимости от времени полного давления на плунжер при его подъеме вверх. Графики соответствуют следующим значениям времени релаксации: 1 - $\lambda = 0.5$ c; 2 - $\lambda = 1$ c; 3 - $\lambda = 0$ (ньютоновская вязкая жидкость).

В расчетах, для значений плотности и вязкости нефти использованы данные, приведенные в [9, 10] для легкой нефти (месторождения Варик) и тяжелой нефти (месторождения Коштар), при температуре 20⁰:

а. $\rho = 750 \text{ кг/м}^3$; $\mu = 0.047 \text{ Па} \cdot \text{с}$; б. $\rho = 930 \text{ кг/м}^3$; $\mu = 5.2 \text{ Па} \cdot \text{с}$.

Как следует из рис. 3. в начале хода плунжера вверх давление повышается и по мере движения плунжера давление уменьшается. Повышение давления обусловлено влиянием инерционных сил, возникающие в системе штанга-труба-жидкость в процессе работе глубинного насоса. Вязкоупругие свойства нефти в процессе разгоне приводит к отставанию значений полного давления относительно вязкой жидкости, а при замедлении подъема и в момент торможения спуска – наоборот, к опережению. С усилением вязкоупругих свойств разница между профилями давления вязкой и вязкоупругой жидкости возрастает, максимум давления смещается вправо по оси времени (рис. 3а).

Для тяжелой нефти Коштар(рис. 3б), где вязкость более сто раз больше, чем вязкость легкой нефти Варик, полное давление возрастает больше десяти раз. Вид профилей давления сохраняется. Характер влияния вязкоупругих свойств так же сохраняется, но степень его влияния усиливается. Это особенно заметно вначале и конце процесса подъема плунжера.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе приведенных выше рассуждений можно заключить, что в расчетах полного давления на плунжер, при эксплуатации нефтяных скважин, особенно, продуцирующих тяжелые нефти, необходимо учитывать вязкоупругие свойства нефти.

Литература

1. Акилов Ж.А., Ирматов Э.К. Хужаеров Б., Маматкулов М. Анализ влияния технологических параметров работы глубинно-насосных скважин на дебит продуцируемых ими неньютоновских и ньютоновских нефтей. “Геология и разработка нефтяных месторождений Средней Азии”. Труды СредАзНИПИнефть, вып.4, Грозный, 1977. - с. 63-69.
2. Акилов Ж.А., Ан В.В. Упруго-вязко-пластичные свойства нефтей некоторых месторождений Узбекистана. “Геология и разработка нефтяных месторождений Средней Азии”. Москва, ВНИИОЭНГ, 1974. – с. 52-56.
3. Акилов Ж., Джаббаров М.С., Гайбулов Ю.Ш. Моделирование давления на плунжер при эксплуатации нефтяных скважин с глубинными насосами. «Инновационные идеи, разработки в практику: проблемы и решения». Материалы международной научно-практической онлайн конференции. – Андижан, 2020. – с. 139-143.
4. Акилов Ж.А. Нестационарные движения вязкоупругих жидкостей. –Ташкент: Фан, 1982. – 104 с.
5. Гурбанов Р.С., Касимов А.Ф. Нестационарное движение жидкости в зазоре между плунжером и цилиндром глубинного насоса. – Изв. АН Азерб. ССР. - № 1, 1962. ДАН Азерб ССР. – т. 18. - № 7, 1962.
6. Диткин В.А., Прудников А.П. Операционное исчисление. М.: Наука, 1975. – 256 с.
7. Касимов А.Ф. Рассмотрение радиального зазора как плоской трубы. – ДАН Азерб ССР. – т. 18. - № 7, 1962.
8. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1987. - 688 с.
9. Мирзаджанзаде А.Х., Хасаев А.М. и др. Теория и практика применения глубинных насосов с гидравлическим затвором. – М.: Недра, 1968. – 158 с.
10. Хужаёров Б.Х. Реологические свойства смесей. – Самарканд, 2000. -216 с.

UDK: 532.546

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ФОРМИРОВАНИЯ ДВУХПОЯСНЫХ РЕШЕТЧАТЫХ СТРУКТУР

Суванкулов И.Ш., Муллажонова Н.Ж.

Самаркандский государственный университет,
suvonqulov_i@rambler.ru

Аннотация. Рассматривается вопрос статико-геометрического моделирования дискретного каркаса двухпоясных решетчатых структур. Приведена статическая модель равновесия системы.

Ключевые слова: моделирование, двухпоясная, структура, система, конструкция.

Икки қатламли сиртларни ҳосил қилишнинг битта усули ҳақида

Аннотация. Икки қатламли панжарали конструкцияларни статик-геометрик услубда моделлаштириш масалалари кўриб чиқилган. Тизим мувозанат ҳолатининг статик модели келтирилган.

Калит сўзлар: моделлаштириш, икки қатламли, тизим, конструкция.

On a method for forming two-belt lattice structures

Abstract. The question of static-geometric modeling of a discrete framework of two-belt lattice structures is considered. A static system equilibrium model is presented.

Key words: modeling, two-belt, structure, system, design.

Двухпоясная решетчатая конструкция представляет собой геометрически неизменяемую систему, состоящую из особым образом расположенных стержней, соединенных в узлах. Наличие двух поясов, удаленных друг от друга на требуемое расчетом расстояние, обеспечивает необходимую жесткость конструкции, и, как следствие, несущую способность.

Для конструирования решетчатых структур целесообразно применять способы дискретного моделирования, в частности, статико-геометрический.

Статико-геометрический подход к формированию точечных каркасов базируется на составлении конечно-разностных уравнений равновесия, описывающих напряженное состояние системы. Внутренние напряжения в стержнях и внешняя нагрузка на систему геометрически представляются как совокупность векторных усилий.

Статико-геометрический подход к моделированию дискретных структур может быть реализован с помощью различных физических моделей / 1 /. Одной из них является модель растянутой (сжатой) сети.

Условие равновесия узла произвольной сети имеет вид:

$$Q_i + \sum_{p=1}^n R_p = 0, \tag{1}$$

где Q_i - внешняя нагрузка на узел;

$R_1, R_2, \dots, R_p, \dots, R_n$ - напряжения в связях, сходящихся в данном узле.

В простых двухъярусных решетчатых структурах имеет место совместная работа двух сетчатых структур (поясов) посредством их объединения в одно целое при помощи между поясных связей. Поэтому в данном случае равновесие пары узлов будет описываться системой уравнений вида (рис. 1):

$$\begin{cases} Q_{i,j}^b + \sum_{t=1}^n R_{t,i,j}^{b,i \pm 1, j \pm 1} + P_{н,i,j}^{b,i,j} = 0, \\ Q_{i,j}^н + \sum_{t=1}^n R_{t,i,j}^{н,i \pm 1, j \pm 1} + P_{b,i,j}^{н,i,j} = 0, \end{cases} \tag{2}$$

$R_{t,i,j}^{b,i \pm 1, j \pm 1}$ и $R_{t,i,j}^{н,i \pm 1, j \pm 1}$ - усилия в связях соответственно верхнего и нижнего поясов структуры; P - усилия в между поясных связях; t - число связей одного пояса, сходящихся в узле.

В качестве внешней нагрузки, действующей на пару соответственных узлов верхнего и нижнего поясов структуры, выступает целый комплекс независимых силовых факторов:

$$Q_{i,j} = Q_{i,j}^{\Pi} + Q_{i,j}^{\text{P}} + Q_{i,j}^{\text{P. ст.}} + Q_{i,j}^{\text{И. об.}} + Q_{i,j}^{\text{Сн.}} + Q_{i,j}^{\text{Вт.}} + Q_{i,j}^{\text{Уз. эл.}} \tag{3}$$

где $Q_{i,j}^{\Pi}$ - вес покрытия верхнего и нижнего пояса;

$Q_{i,j}^{\text{P}}$ - вес распорных стоек (подвесок); p ст

$Q_{i,j}^{\text{P. ст.}}$ - вес ребер структуры;

$Q_{i,j}^{\text{И. об.}}$ - вес инженерного оборудования;

$Q_{i,j}^{\text{Сн.}}$ - снеговая нагрузка;

$Q_{i,j}^{\text{Вт.}}$ - ветровая нагрузка;

$Q_{i,j}^{\text{Уз. эл.}}$ - вес узлового элемента.

Определение величин, входящих в (3) проводится из следующих соотношений

$$Q_{i,j}^{\Pi} = \frac{1}{N} (S^n \delta^n \gamma^n), \tag{4}$$

где S^n - площадь покрытия;

δ^n - толщина покрытия;

γ^n - удельный вес покрытия;

N - количество узлов структуры.

Вес распорных стоек (подвесок) определяется по следующей формуле:

$$Q_{i,j}^P = S_{i,j}^P \gamma_{i,j}^P l_{H,i,j}^P, \tag{5}$$

где - $S_{i,j}^P$ поперечное сечение стойки (подвески);

$\gamma_{i,j}^P$ - удельный вес стойки (подвески);

$$l_{H,i,j}^P = \sqrt{(x_{i,j}^B - x_{i,j}^H)^2 + (y_{i,j}^B - y_{i,j}^H)^2 + (z_{i,j}^B - z_{i,j}^H)^2}, \tag{6}$$

Формула для определения веса ребер структуры имеет вид:

$$Q_{i,j}^{P.ct.} = \frac{S_{i,j}^{P.ct.} \gamma^{P.ct.}}{2} \left(\sum_{t=1}^n l_{i,+j}^{B,t} + \sum_{t=1}^n l_{i,j}^{H,t} \right) = 0 \tag{7}$$

где $S_{i,j}^{P.ct.}$ - поперечное сечение ребер;

$\gamma^{P.ct.}$ - удельный вес ребер;

n и m - количество ребер, сходящихся в соответствующих узлах верхнего и нижнего пояса.

Ветровые и снеговые нагрузки на узлах определяются в соответствии с действующими правилами.

Усилие, возникающее в связи, соединяющей соответствующие узлы верхнего и нижнего пояса, равны по модулю, но противоположно направлены.

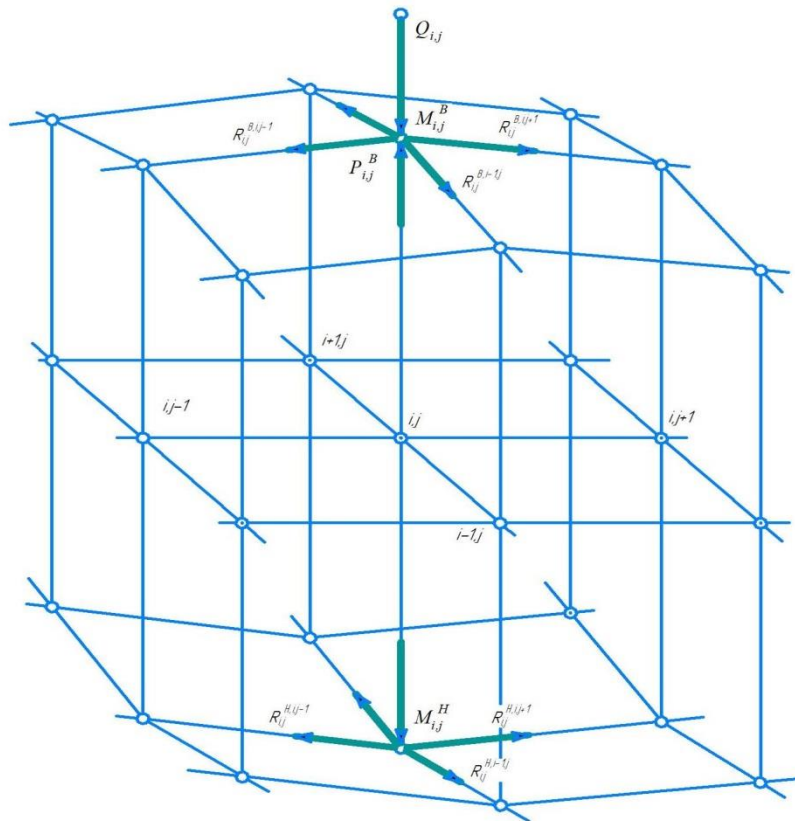


Рис. 1. Двухпоясная решетчатая структура с четырехугольными ячейками.

Статическая модель равновесия, описываемая (2) для каждого из случаев, показанных на рисунке 1. система векторных уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} Q_{i,j}^b + R_{i,j}^{b,i,j+1} + R_{i,j}^{b,i,j-1} + R_{i,j}^{b,i+1,j} + R_{i,j}^{b,i-1,j} + P_{i,j}^b = 0 \\ Q_{i,j}^H + R_{i,j}^{H,i,j+1} + R_{i,j}^{H,i,j-1} + R_{i,j}^{H,i+1,j} + R_{i,j}^{H,i-1,j} + P_{i,j}^H = 0 \end{cases} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} R_{i,j}^{b,i+1,j} &= f(x_{i,j}^b, y_{i,j}^b, z_{i,j}^b, x_{i+1,j}^b, y_{i+1,j}^b, z_{i+1,j}^b); \\ R_{i,j}^{b,i,j+1} &= f(x_{i,j}^b, y_{i,j}^b, z_{i,j}^b, x_{i,j+1}^b, y_{i,j+1}^b, z_{i,j+1}^b); \\ R_{i,j}^{b,i-1,j} &= f(x_{i,j}^b, y_{i,j}^b, z_{i,j}^b, x_{i-1,j}^b, y_{i-1,j}^b, z_{i-1,j}^b); \\ R_{i,j}^{b,i,j-1} &= f(x_{i,j}^b, y_{i,j}^b, z_{i,j}^b, x_{i,j-1}^b, y_{i,j-1}^b, z_{i,j-1}^b); \\ R_{i,j}^{H,i+1,j} &= f(x_{i,j}^H, y_{i,j}^H, z_{i,j}^H, x_{i+1,j}^H, y_{i+1,j}^H, z_{i+1,j}^H); \\ R_{i,j}^{H,i,j+1} &= f(x_{i,j}^H, y_{i,j}^H, z_{i,j}^H, x_{i,j+1}^H, y_{i,j+1}^H, z_{i,j+1}^H); \\ R_{i,j}^{H,i-1,j} &= f(x_{i,j}^H, y_{i,j}^H, z_{i,j}^H, x_{i-1,j}^H, y_{i-1,j}^H, z_{i-1,j}^H); \\ R_{i,j}^{H,i,j-1} &= f(x_{i,j}^H, y_{i,j}^H, z_{i,j}^H, x_{i,j-1}^H, y_{i,j-1}^H, z_{i,j-1}^H); \\ P_{i,j}^b &= F(x_{i,j}^b, y_{i,j}^b, z_{i,j}^b); \\ P_{i,j}^H &= F(x_{i,j}^H, y_{i,j}^H, z_{i,j}^H); \\ Q_{i,j} &= \varphi(x_{i,j}^b, y_{i,j}^b, z_{i,j}^b, x_{i,j}^H, y_{i,j}^H, z_{i,j}^H) \end{aligned} \quad (9)$$

При использовании для моделирования аппарата растянутых сетей величина усилия принимается пропорциональной длине связи. В этом случае геометрическая трактовка (2) имеет вид:

$$\begin{cases} \sum_{t=1}^n k(u_i^b - u_0^b) + \sum_{t=1}^n P_{i,j}^b + Q_{i,j}^b = 0, \\ \sum_{t=1}^n k(u_i^H - u_0^H) + \sum_{t=1}^n P_{i,j}^H + Q_{i,j}^H = 0, \end{cases} \quad (10)$$

- где u_0 — координаты центральных узлов расчетной звезды;
- u_I — координаты смежных узлов с центром ($i=1,2,3,..$)
- I, j - порядковые номера линий отсчета узлов звезды;
- U - обобщенное обозначение координат x, y, z .

Система уравнений (8) для каждой пары соответствующих узлов распадается на три системы (по числу координат).

Для простых структур с треугольными ячейками системы имеют вид:

$$\begin{cases} x_{i,j+1}^b + x_{i,j-1}^b + x_{i+1,j}^b + x_{i-1,j}^b + x_{i+1,j-1}^b + \\ x_{i-1,j+1}^b - 6x_{i,j}^b + k \sum_{t=1}^n P_{x,i,j}^{b,t} + kQ_{x,i,j}^b = 0, \\ x_{i,j+1}^H + x_{i,j-1}^H + x_{i+1,j}^H + x_{i-1,j}^H + x_{i+1,j-1}^H + \\ x_{i-1,j+1}^H - 6x_{i,j}^H + k \sum_{t=1}^n P_{x,i,j}^{H,t} + kQ_{x,i,j}^H = 0, \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 y_{i,j+1}^b + y_{i,j-1}^b + y_{i+1,j}^b + y_{i-1,j}^b + y_{i+1,j-1}^b + \\
 y_{i-1,j+1}^b - 6y_{i,j}^b + k \sum_{t=1}^n P_{y,i,j}^{b,t} + kQ_{y,i,j}^b = 0, \\
 y_{i,j+1}^H + y_{i,j-1}^H + y_{i+1,j}^H + y_{i-1,j}^H + y_{i+1,j-1}^H + \\
 y_{i-1,j+1}^H - 6y_{i,j}^H + k \sum_{t=1}^n P_{y,i,j}^{H,t} + kQ_{y,i,j}^H = 0, \\
 z_{i,j+1}^b + z_{i,j-1}^b + z_{i+1,j}^b + z_{i-1,j}^b + z_{i+1,j-1}^b + \\
 z_{i-1,j+1}^b - 6z_{i,j}^b + k \sum_{t=1}^n P_{z,i,j}^{b,t} + kQ_{z,i,j}^b = 0, \\
 z_{i,j+1}^H + z_{i,j-1}^H + z_{i+1,j}^H + z_{i-1,j}^H + z_{i+1,j-1}^H + \\
 z_{i-1,j+1}^H - 6z_{i,j}^H + k \sum_{t=1}^n P_{z,i,j}^{H,t} + kQ_{z,i,j}^H = 0,
 \end{array} \right. \quad (11)$$

Для простых структур с четырехугольными ячейками системы имеют вид:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 x_{i,j+1}^b + x_{i,j-1}^b + x_{i+1,j}^b + x_{i-1,j}^b \\
 -4x_{i,j}^b + k \sum_{t=1}^n P_{x,i,j}^{b,t} + kQ_{x,i,j}^b = 0, \\
 x_{i,j+1}^H + x_{i,j-1}^H + x_{i+1,j}^H + x_{i-1,j}^H \\
 -4x_{i,j}^H + k \sum_{t=1}^n P_{x,i,j}^{H,t} + kQ_{x,i,j}^H = 0, \\
 y_{i,j+1}^b + y_{i,j-1}^b + y_{i+1,j}^b + y_{i-1,j}^b \\
 -4y_{i,j}^b + k \sum_{t=1}^n P_{y,i,j}^{b,t} + kQ_{y,i,j}^b = 0, \\
 y_{i,j+1}^H + y_{i,j-1}^H + y_{i+1,j}^H + y_{i-1,j}^H \\
 -6y_{i,j}^H + k \sum_{t=1}^n P_{y,i,j}^{H,t} + kQ_{y,i,j}^H = 0, \\
 z_{i,j+1}^b + z_{i,j-1}^b + z_{i+1,j}^b + z_{i-1,j}^b \\
 -4z_{i,j}^b + k \sum_{t=1}^n P_{z,i,j}^{b,t} + kQ_{z,i,j}^b = 0, \\
 z_{i,j+1}^H + z_{i,j-1}^H + z_{i+1,j}^H + z_{i-1,j}^H \\
 -4z_{i,j}^H + k \sum_{t=1}^n P_{z,i,j}^{H,t} + kQ_{z,i,j}^H = 0,
 \end{array} \right. \quad (12)$$

Для простых структур с шестиугольными ячейками системы имеют вид:

$$\begin{cases}
 x_{i \pm 1, j}^b + x_{i, j \pm 1}^b + x_{i \pm 1, j \pm 1}^b \\
 -3x_{i, j}^b + k \sum_{t=1}^n P_{x, i, j}^{b, t} + kQ_{x, i, j}^b = 0, \\
 x_{i \pm 1, j}^H + x_{i, j \pm 1}^H + x_{i \pm 1, j \pm 1}^H \\
 -3x_{i, j}^H + k \sum_{t=1}^n P_{x, i, j}^{H, t} + kQ_{x, i, j}^H = 0, \\
 y_{i \pm 1, j}^b + y_{i, j \pm 1}^b + y_{i \pm 1, j \pm 1}^b - \\
 -3y_{i, j}^b + k \sum_{t=1}^n P_{y, i, j}^{b, t} + kQ_{y, i, j}^b = 0, \\
 y_{i \pm 1, j}^H + y_{i, j \pm 1}^H + y_{i \pm 1, j \pm 1}^H - \\
 -3y_{i, j}^H + k \sum_{t=1}^n P_{y, i, j}^{H, t} + kQ_{y, i, j}^H = 0, \\
 z_{i \pm 1, j}^b + z_{i, j \pm 1}^b + z_{i \pm 1, j \pm 1}^b - \\
 -3z_{i, j}^b + k \sum_{t=1}^n P_{z, i, j}^{b, t} + kQ_{z, i, j}^b = 0, \\
 z_{i \pm 1, j}^H + z_{i, j \pm 1}^H + z_{i \pm 1, j \pm 1}^H - \\
 -3z_{i, j}^H + k \sum_{t=1}^n P_{z, i, j}^{H, t} + kQ_{z, i, j}^H = 0,
 \end{cases} \quad (13)$$

Знак "+" или "-" в индексах при неизвестных системы (13) выбирается в зависимости от ориентации шестиугольной ячейки относительно линий отсчета узлов сети.

Составленные для всех незакрепленных узлов сети системы уравнений вида (11) - (13) решаются известными способами.

Важными достоинствами статико-геометрического способа формирования дискретных структур являются простота его применения (за счет линейных зависимостей, описывающих уравнения равновесия), а также широкие возможности управления формой конструкции.

Список литературы:

1. Ковалев С.Н. Формирование дискретных моделей поверхностей пространственных архитектурных конструкций: Дисс....докт.техн.наук. – М. : МАИ, 1986. - 348 с.
2. Ковалев С.Н. Формирование растянутой сети под действием нормальной нагрузки // Прикл. Геометрия и инж. Графика. – Киев: Будівельник, 1988. – Вып. 45. – с. 17-19.
3. Михайленко В.Е., Ковалев С.Н., Сазонов К.А. Форма образование большепролетных покрытий в архитектуре. - Киев: Высшая школа, 1987. -189 с.
4. Михайленко В.Е., Ковалев С.Н., Тукаев С.К. Особенности конструирования стержневых покрытий // Прикладная геометрия и инж. графика. – Киев:, 1979. – Высшая школа. 28. - С. 3 – 6.
5. Суванкулов И.Ш. Об одном способе формирования двухпоясного мембранного покрытия и управления ее формой // Прикл. геометрия и инж. графика. – Киев: Будівельник, 1988. – Вып. 46. – с. 96-98.
6. Суванкулов И.Ш. Приближенный способ формирования поверхности мембранного покрытия // Прикл. геометрия и инж. графика. – Киев: Будівельник, 1988. – Вып. 45. – с. 80-82.
7. Суванкулов И.Ш. Формирование мембранной оболочки с учетом усилий, возникающих в распорных стойках // Прикл. геометрия и инж. графика. – Киев: Будівельник, 1989. – Вып. 47. – с. 81-84.

UDK:004.9:616

**CNN (CONVOLUTIONAL NEURAL NETWORK) ORQALI TASVIR KASALLIK
DIAGNOSTIKASINI AMALGA OSHIRISH****Sh. X. Turaqulov***Samarqand davlat universiteti*

Annotatsiya. Ushbu maqolada kompyuter orqali tanib olish algoritmlari rentgenografiya tasvirlari asosida qurilgan, rentgenologlarga diagnostika jarayonini tezlashtirishga yordam beradigan qarorlarni qo'llab-quvvatlash mexanizmi sifatida foydalanish mumkin. Konvolyatsion neyron tarmoqlarni (CNN) baholash uchun miqdoriy tahlil COVID-19 rentgen tasvirini tahlil qilinib CNN strukturasi o'rganish tartibi kirish parametrlari kichikligi sababli qabul qilingan. Biz noravshan yorqinlashtirish mantiqiy apparati uordamida oddiy CNN arxitekturasini ham taklif qildik, bu esa oz sonli parametrlarga ega COVID-19ni oddiy rentgen nurlaridan farqlashda yaxshi natijalarga erishildi. CNNlar tomonidan foydalaniladigan kirish tasvirining qaroriga olib keladigan mintaqani vizual tekshirishi mumkin.

Kalit so'zlar: Coronavirus, noravshan mantiq apparati, Konvolyutsion neyron tarmoq(CNN), Chuqur o'rganish, sinflashtirish, qaror qabul qilish, qatlam, COVID-19.

Диагностика заболевания с помощью CNN (Сверточной Нейронной Сети)

Аннотация. В этой статье алгоритмы компьютерного распознавания построены на основе рентгенографических изображений и могут использоваться в качестве механизма поддержки принятия решений, чтобы помочь рентгенологам ускорить диагностический процесс. Количественный анализ рентгеновского изображения COVID-19 для оценки сверточных нейронных сетей (CNN), и процедура изучения структуры CNN была принята из-за малости входных параметров. Мы также предложили простую архитектуру CNN с помощью логического устройства диммерной логики, которая позволила добиться хороших результатов в отличии COVID-19 с небольшим количеством параметров от обычных рентгеновских лучей. Он может визуальнo проверять область, ведущую к разрешению входного изображения, используемого модель CNN.

Ключевые слова: коронавирус, непонятный логический аппарат, сверточная нейронная сеть (CNN), углубленное изучение, классификация, принятие решений, слой, COVID-19.

Diagnosing a disease using CNN (Convolutional Neural Network)

Abstract. This article explores computer recognition algorithms built from radiographic images and can be used as a decision support mechanism to help radiographers speed up the diagnostic process. Quantitative analysis of X-ray images of COVID-19 to evaluate convolutional neural networks (CNNs), and the procedure for examining the structure of CNNs was adopted due to the smallness of the input parameters. We also proposed a simple CNN architecture using a dimmer logic device, which made it possible to achieve good results in contrast to COVID-19 with a few parameters from conventional X-rays. It can visually inspect the area leading to the resolution of the input image used by CNN.

Keywords: coronavirus, incomprehensible logic apparatus, convolutional neural network (CNN), in-depth study, classification, decision making, layer, COVID-19.

I. KIRISH

COVID-19ni keltirib chiqaradigan virus bo'lgan og'ir koronavirus 2 (SARSCoV-2) o'tkir respirator sindromi pandemiyaga aylandi. 2019 yil dekabr oyida Xitoyning Uxan shahrida paydo bo'lgan [1]. Kasallik kuzatilgan holatlarda o'z vaqtida davolanadi. Ko'krak qafasining kompyuter tomografiyasi (KT) izlash uchun SARS-CoV-2 virusli infeksiyasi bilan bog'liqligi aniqlangan. Dastlabki tadqiqotlarda bemorlarning anormallik ko'rsatishi aniqlandi. COVID-19 ga xos bo'lgan ko'krak rentgenogrammalarida yuqumli kasallik, ba'zilar rentgenografiya tekshiruvini taklif qilindi[3]. Ko'krak qafasi uchun imkoniyatlar tayyor rentgenografiya ishlab chiqaradigan zamonaviy sog'liqni saqlash tizimlarida mavjud RT-PCR sinovlariga yaxshi qo'shimchani tekshirish va ba'zi holatlarda, hatto yuqori sezgirlik ko'rsatkichi ko'rsatilgan. Berilgan Xray vizual ko'rsatkichlari nozik bo'lishi mumkin;

rentgenologga duch keladi. Bu nozik o'zgarishlarni aniqlay olishda katta muammo keltirib chiqaradi va ularni to'g'ri talqin qilishni talab etadi. Shunday qilib, bu juda yuqori aniqlikda kompyuter yordamida diagnostika tizimlariga ega bo'lish uchun kerakli va talab qilingan rentgenologlarga vaqtni tejashga yordam beradigan va xarakterli bo'lgan rentgen o'zgarishlarini aniq talqin qilish xususiyatiga ega bo'lgan algoritmlar va dasturiy ta'minotlarni ishlab chiqarishni keltirib chiqaradi [4].

COVID-19 boshlanganidan beri tadqiqotchilar tezda ikkiga bo'lindi. Vaktsinani ishlab chiqarishga e'tibor qaratish orqali unga qarshi kurashish bo'yicha harakatlar bir qo'lda [5] va PCR yordamida COVID-19 ni aniqlash boshqa tomondan ko'rish tizimlari ishlab chiqarishga qaratilgan [3]. Bu erda biz tadqiqotlarni ko'rib chiqamiz. Yordam berish uchun va rentgenografiya tasvirlaridan foydalanishga bag'ishlangan COVID-19 holatlarini tashxislashda PCRni to'ldirilgan. Ali va boshq. [3] asosida chuqur konvolyatsion neyron tarmoq (CNN) qurish amalga oshirilgan. Diagnostika uchun ResNet50, InceptionV3 va Inception-ResNetV2 modellari COVID-19 ko'krak qafasi rentgen tasvirlarini normal holatga keltirish va COVID-19 sinflarini shakllantirishgan. Ular korrelyatsiya yordamida aniqlash haqida xabar berishdi. KT tasvir natijalari va PCR yondashuvi o'rtasida ko'krak qafasi rentgenogrammasidan 50 ta COVID-19 kasallarining tasvirlari olingan ochiq manbali GitHub ombori (doktor Jozef Koen) baham ko'rди [6]. Prabira va boshq. [7], COVID-19 ni aniqlash usulini taklif qildi. Ular GitHub-dan rentgen tasvirlarini yig'ishdi. Kaggle va Open-I ma'lumotlar to'plamini jamlab berishdi. Ular asosiy xususiyatni chiqarib olishdi. Bir qator CNN modellarining xaritalari va ResNet50 degan xulosaga kelishdi. Ishlatilgan rasmlarning kamligiga qaramay, yaxshiroq ishlaydi. Maghdid va boshq. [8] oddiy CNN-ni taklif qilishdi. 16 qatlamdan iborat faqat rentgen KT yordamida COVID-19 ni aniqlash uchun skanerlash va yaxshi ishlash haqida xabar berishdi, ammo ishlatilgan ma'lumotlar to'plami kichikligi sababli ularning ko'rinishi o'zgarishi xatolikka olib kelishi kuzatildi. Fei va boshqalarning ishida [9] segmentlarga yo'naltirilgan COVID-19 KT chuqur o'rganish yondashuvidan foydalangan holda tekshiriladi.

Asosiy qism

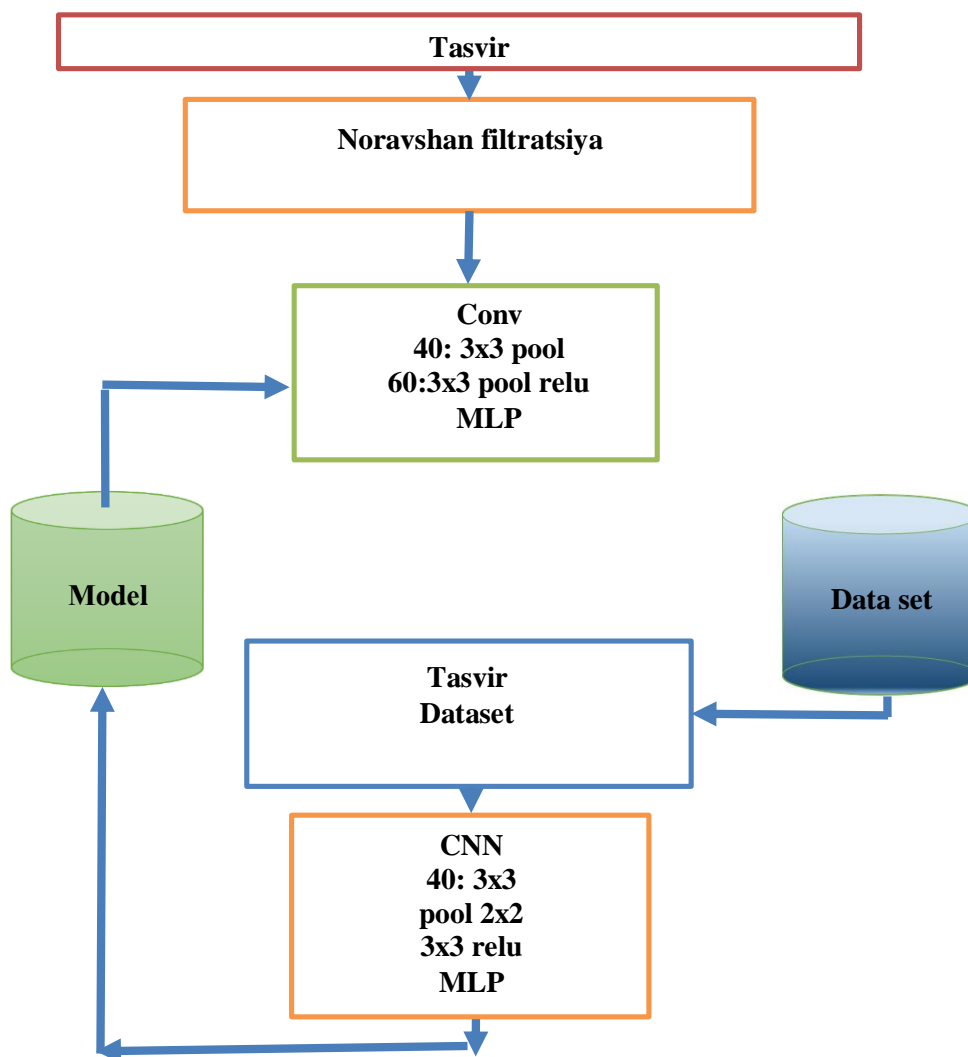
Ushbu ishimiz yuzasidan tadqiqotlar natijasida segmentatsiya yoki shovqinni kamaytirish amalga oshirildi va noravshan filtratsiya algoritmi bilan chegaradan chiqib ketish holatining oldi olinishi taklif qilindi. Segmentatsiya va filtratsiya jarayonlari CNNlar tomonidan qabul qilingan yakuniy qarorga ta'sir qiladi. Biz ushbu muammoni sifatini baholash orqali hal qilamiz. Sinfni faollashtirish yordamida CNN modellari tomonidan qabul qilingan qaror xaritalash [14] da kiritilgan. Ushbu maqolada CNN-ning mashhur modelini taqqoslaymiz va ularni ommaviy ma'lumotlar bazasida transferni o'rganish rejimida joylashtiramiz. So'nggi yillarda umuman chuqur o'rganish algoritmlaridan foydalanish va konvolyatsion neyron tarmoqlar (CNN) ko'pchilik masalalarda foydalanishga olib keldi. Turli xil kompyuterlarni ko'rish dasturlarida yutuqlari segmentatsiya, tanib olish va ob'ektning aniqlash masalalarida kuzatishimiz mumkin [15].

Ushbu tadqiqotda biz COVID-19 uchun CNN modelini ishlab chiqdik. Bunda ko'krak qafasi rentgenografiyasida tasvirlanganligini aniqlash lozim. COVID-19ni to'g'ri tasniflash va aniqlash uchun rentgenologlar oldin COVID-19 rentgen nurlarini oddiy ko'krak qafasi rentgenogrammasidan, so'ngra boshqa virusli va bakterial infeksiyalardan ajratish kerak. Bemorni to'g'ri ajratish va davolash uchun qaror qabul qilishga olib keladi. Shuning uchun quyidagi sinflar asosida tanib olish masalasini amalga oshirish uchun CNN strukturasi ishlab chiqamiz:

- a) Oddiy (ya'ni infeksiya yo'q);
- b) COVID-19;
- c) Virusli infeksiya (COVID-19 yo'q);
- d) Bakterial infeksiya.

Ushbu 4 holatdan foydalanishning asoslari rentgenologlarga yordam asosida sinflarga ajratilib olinadi.

Shu asosda tajribalardan kelib chiqib quyidagi algoritmlar ishlab chiqildi.



1-rasm. Tasvirni sinflashtirish algoritmi strukturasi

Ushbu strukturada birinchi konvulyatsiyada 40 ta filtr karta xosil qilinadi va ikkinchi konvulyatsiyada 60 ta 3x3 karta olinadi. 40 va 60 filtr kartalari kerakli belgilarni ajratib olishda kata ahamiyatga ega.

Tasvirida keraksiz nuqtalarning ko'pligi natijaga salbiy ta'sir ko'rsatib, biz kutgan natijaga olib kelmaydi. Shunday xolatlarining oldini olish maqsadida noravshan filtratsiya algoritmlaridan foydalandik.

Mancuso, M., Poluzzi, R. and Rizzotto, G. A. Fuzzy filter for dynamic range reduction and contrast enhancement [16] maqolasida noaniq qoida yondashuvi yordamida yorqinlik qiymatlari oralig'ining torayishini dinamik ravishda kamaytirish va tiniqligini oshirish uchun filtr taklif qilingan. Peli, T. and Lim, J. Adaptive filtering for image enhancement [17] usulida berilgan algoritmgaga asoslangan. Peng, S. and Lucke, L. Fuzzy filtering for mixed noise removal during image processing [18] maqolasida tasvirni qayta ishlash uchun chiziqli noravshan filtr taklif qilingan. O'rtacha filtrlar Gauss shovqinini samarali ravishda olib tashlashi ma'lum va o'rtacha filtr kabi tartibli statistikaga asoslangan filtrlar impuls shovqinini yo'qotish uchun samarali foydalaniladi. Ushbu ikkita filtrni birlashtirish uchun noravshan mantiq ishlatiladi [19].

Kompyuterga kiritilgan tasvirlar ko'pincha past tiniqligili ya'ni, ularning yorqinlikdagi o'zgarishlari uning o'rtacha qiymati bilan taqqoslaganda kichikdir. Bu holda yorqinlik qora rangdan oq rangga emas, kul rangdan biroz ochroq kul ranggacha o'zgaradi. Ya'ni, yorqinlikning haqiqiy diapazoni ruxsat etilganidan (kulrang shkaladan) ancha past bo'lib chiqadi. Qarama-qarshilikni oshirish vazifasi - tasvirning yorqinligini to'liq miqyosda "cho'zish"ni bildiradi.

Elementlar bo'yicha tasvirni qayta ishlashning mohiyati quyidagicha bo'lsin $f(x, y)$ va $g(x, y)$ boshlang'ich yorqinligi qiymatlari va tasvirni qayta ishlagandan so'ng olingan qiymatlar bo'lsin. Dekart koordinatalariniga mos ravishda olingan kadr nuqtasi x - Qator raqami va y - ustun raqamiga mos keladi.

Elementni oqilona qayta ishlash ushbu yorqinlik o'rtasida funktsional bog'liqlik mavjudligini anglatadi, ya'ni $g(x, y) = F(f(x, y))$ chiqish signalining qiymatini asl signal qiymati bilan aniqlashga imkon beradi.

Qarama-qarshilik vazifasi tasvirning dinamik diapazoniga va ko'rsatishni amalga oshiradigan ekranga mos kelishini yaxshilash bilan bog'liq. Agar har bir rasm namunasining raqamli namoyishi uchun 1 bayt (8 bit) xotira ajratilgan bo'lsa, u holda kirish yoki chiqish signallari 256 qiymatdan birini olishi mumkin. Odatda, operatsion diapazoni 0.255 ni tashkil etadi, 0 ko'rsatgich paytida qora darajaga to'g'ri keladi, 255 qiymati esa oq darajaga to'g'ri keladi. Aytaylik, asl tasvirning f_{\min} va f_{\max} qiymatlari mos ravishda minimal va maksimal yorqinligiga teng.

Agar ushbu parametrlar yoki ulardan biri yorqinlik oralig'ining chegara qiymatlaridan sezilarli darajada farq qilsa, u holda ko'rsatilgan tasvir noqulay, xiralashgan kuzatuvga o'xshaydi.

Tasvirni noravshan tasodifiy jarayonni amalga oshirish sifatida ko'rib chiqish qulay hisoblanadi. Tasodifiy vazifasini chiqarish uzluksiz tasvir joriy $f(x, y)$ funksiya bilan ifodalanadi. Tasodifiy jarayon $f(x, y)$ qo'shma ehtimollik zichligi $P[A]$ bilan to'liq tavsiflanadi.

Ushbu vazifani chiziqli qarama-qarshilikning element-element o'zgarishi yordamida hal qilish mumkin, ya'ni:

$$g(x, y) = af(x, y) + b$$

maydon ravshanligining noravshan qiymatlarini ba'zi bir standart qiymatlarga olib boradigan shunday a va b olingan bo'lsin. Bu erda $M[f(x, y)], \sigma[f(x, y)]$ taxminiy baholanadi, oldindan chiqish maydoni $M[g(x, y)], \sigma[g(x, y)]$ ni olish uchun a, b koeffitsientlar tanlanadi:

$$\begin{aligned} \bar{g}(x, y) &= \frac{f(x, y) - M[f(x, y)]}{\sigma[f(x, y)]} \cdot \sigma[g(x, y)] + M[g(x, y)] = \\ &= \frac{\sigma[g(x, y)]}{\sigma[f(x, y)]} f(x, y) + M[g(x, y)] - M[f(x, y)] \frac{\sigma[g(x, y)]}{\sigma[f(x, y)]} \\ a &= \frac{\sigma[g(x, y)]}{\sigma[f(x, y)]}; \quad b = M[g(x, y)] - M[f(x, y)] \frac{\sigma[g(x, y)]}{\sigma[f(x, y)]} \end{aligned}$$

bunda

$$M[f(x, y)] = \frac{\sum_{i=1}^k f_i(x, y) \cdot \mu_i^f(x, y)}{\sum_{i=1}^k \mu_i^f(x, y)} \quad M[g(x, y)] = \frac{\sum_{i=1}^k g_i(x, y) \cdot \mu_i^g(x, y)}{\sum_{i=1}^k \mu_i^g(x, y)}$$

$$g(x, y) = F(f(x, y)) = \begin{cases} 0, & \bar{g}(x, y) < 0, \\ \bar{g}(x, y), & 0 \leq \bar{g}(x, y) \leq 255 \\ 255, & \bar{g}(x, y) > 255 \end{cases}$$

Bunda μ diskret qiymatga ega. RGB dagi vektor qiymatlarini ajratib oladi.

Yorqinlikni oshirish noravshan algoritmi yordamida tasvir qayta ishlanadi. Yo'qotilgan xira nuqtalar yorqinlashtiriladi va cnn strukturasi yordamida sinflarga ajratiladi. 1-jadvalda natijalar tahlilini keltirib o'tdik.

Natijalar tahlili

Kasallik sinfi	O'qitilgan tasvir	Tanish foizi	Xatoligi foizi
Oddiy sog'lom	4000	91	9
Covid-19	3500	92	8
Virusli infeksiya	3000	90	10
Bakterial infeksiya	4000	91	9

Ushbu natijalar asosida KT rengen tasviri asosida tashxisni amalga oshirish imkoniyatiga ega bo'lamiz.

Xulosa

Ushbu maqolada noravshan filtratsiya asosida cnn strukturasi tashkil etildi. Dastlab tabiiy tasvir uchun taklif qilingan CNN strukturasi, rentgenologlarni COVID-19 kasalligi ko'krak qafasi rentgen tasvirlariga asoslangan tashxisiga yordam berish maqsadida ishlab chiqildi. Tashxisda yo'qotishlarning oldini olish maqsadida noravshan mantiq apparatidan foydalanildi. Tajribalar asosida olindan cnn strukturasi ishlab chiqildi va eksperimental natijalar olindi.

Adabiyotlar

1. Shan F, Gao Y, Wang J, Shi W, Shi N, Han M, et al. Lung infection quantification of COVID-19 in CT images with deep learning. arXiv e-prints. [Internet] 2020. <https://arxiv.org/abs/2003.04655>. Accessed 13 July 2020.
2. Wang L, Wong A. COVID-Net: A Tailored Deep Convolutional Neural Network Design for Detection of COVID-19 Cases from Chest X-Ray Images. arXiv e-prints [Internet]. 2020 March 01, 2020:[arXiv:2003.09871 p.]. Available from: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2020arXiv200309871W>.
3. T. Ai et al., "Correlation of Chest CT and RT-PCR Testing in Coronavirus Disease 2019 (COVID-19) in China: A Report of 1014 Cases," Radiology, p. 200642, Feb. [Internet] 2020. https://www.researchgate.net/publication/339516019_Correlation_of_Chest_CT_and_RT-PCR_Testing_for_Coronavirus_Disease_2019_COVID-19_in_China_A_Report_of_1014_Cases
4. I. D. Apostolopoulos and T. Bessiana, "Covid-19: Automatic detection from X-Ray images utilizing Transfer Learning with Convolutional Neural Networks," Phys. Eng. Sci. Med., <https://arxiv.org/abs/2003.11617> [Internet] Mar. 2020.
5. Oxford University, "COVID-19 vaccine development Oxford Vaccine Group." [Online]. Available: <https://www.ovg.ox.ac.uk/news/covid-19-vaccinedevelopment>. [Internet] [Accessed: 01-May-2020] .
6. J. P. Cohen, P. Morrison, and L. Dao, "COVID-19 Image Data Collection," arXiv, <https://arxiv.org/abs/2003.11597> [Internet] Mar. 2020.
7. P. Kumar and S. Kumari, "Detection of coronavirus Disease (COVID-19) based on Deep Features," preprints.org, no. <https://www.medrxiv.org/content/10.1101/2020.08.24.20181339v1.full.pdf> [Internet] March, p. 9, Mar. 2020.
8. H. S. Maghdid, A. T. Asaad, K. Z. Ghafoor, A. S. Sadiq, and M. K. Khan, "Diagnosing COVID-19 Pneumonia from X-Ray and CT Images using Deep Learning and Transfer Learning Algorithms," arXiv, [Internet] Mar. 2020. <https://arxiv.org/abs/2004.00038>
9. F. Shan et al., "Lung Infection Quantification of COVID-19 in CT Images with Deep Learning," arXiv, [Internet] Mar. 2020. <https://arxiv.org/abs/2003.04655>
10. X. Xu et al., "Deep Learning System to Screen Coronavirus Disease 2019 Pneumonia," arXiv, [Internet] Feb. 2020. <https://arxiv.org/abs/2002.09334>
11. S. Wang et al., "A deep learning algorithm using CT images to screen for Corona Virus Disease (COVID19)," medRxiv, [Internet] p. 2020.02.14.20023028, Apr. 2020. <https://www.medrxiv.org/content/10.1101/2020.02.14.20023028v5>
12. M. Farooq and A. Hafeez, "COVID-ResNet: A Deep Learning Framework for Screening of COVID19 from Radiographs," arXiv, [Internet] Mar. 2020. <https://arxiv.org/abs/2003.14395>

13.A. Narin, C. Kaya, and Z. Pamuk, "Automatic Detection of Coronavirus Disease (COVID-19) Using X-ray Images and Deep Convolutional Neural Networks," arXiv, [Internet] 2020. <https://arxiv.org/abs/2003.10849>

14.B. Zhou, A. Khosla, A. Lapedriza, A. Oliva, and A. Torralba, "Learning Deep Features for Discriminative Localization," in CVPR, 2016, pp. 2921–2929.

15.Y. Lecun, Y. Bengio, and G. Hinton, "Deep learning," Nature, vol. 521, no. 7553. Nature Publishing Group, pp. 436–444, 27-May-2015.

16.Mancuso, M., Poluzzi, R. and Rizzotto, G. A. (1994) Fuzzy filter for dynamic range reduction and contrast enhancement, Proc. IEEE Int. Conf. on Fuzzy Syst., IEEE Press, Piscataway, NJ, 264-267

17.Peli, T. and Lim, J. (1982). Adaptive filtering for image enhancement, Optical Engineering, 21, 108-112.

18.Peng, S. and Lucke, L. (1994). Fuzzy filtering for mixed noise removal during image processing, Proc. IEEE Int. Conf. on Fuzzy Syst., IEEE Press, Piscataway, NJ, 89-93.

19.Chi Z. Fuzzy algorithms: With Applications to Image Processing and Pattern Recognition. – London: Word Scientific, 1998. – 225 p.

UDK: 681.14

TANIB OLI SH MASALALARI UCHUN QATOR SEGMENTATSIYA MASALASI

S. N. Iskandarova¹, X. Z. Muxamadjonov²

¹*Muhammad al-Xorazmiy nomidagi Toshkent axborot texnologiyalar universiteti huzuridagi axborot-kommunikatsiya texnologiyalari ilmiy-innovatsion markazi*

²*Toshkent axborot texnologiyalari universitetining Farg'ona filiali*

Annatatsiya. Ushbu maqolada qo'lyozma matnlarni tanib olishda kompyuter ish faoliyati jarayonini kamaytirish maqsadida qator segmentatsiyalaridan foydalaniladi. Segmentatsiyalanmaydigan tanib olish neyron modellari uchun qator segmentatsiyasi talab etiladi. Qator segmentatsiyasi algoritmlari o'rganilib, umumiy matn uchun qator segmentatsiya algoritmi taklif qilingan va natijalar tahlili keltirilib o'tilgan.

Kalit so'zlar: segmentatsiya, qator segmentatsiya, so'z segmentatsiya, gorizont va vertical segmentatsiya, tanib olish, qo'l yozma matn.

Проблема строк сегментации для распознавания

Аннотация. В этой статье используется строк сегментов, чтобы сократить процесс распознавания рукописей. Для несегментированных моделей нейронов распознавания требуется строк сегментация. Были изучены алгоритмы сегментации строк, предложен ряд алгоритмов сегментации для всего текста и проанализированы результаты.

Ключевые слова: сегментация, строк сегментация, сегментация слов, горизонтальная и вертикальная сегментация, распознавание, рукописный текст.

The problem of segmentation strings for recognition

Abstract. This article uses line segmentation handwriting recognition process. For non-segmented recognition neuron models, line segmentation is required. Algorithms for line segmentation were studied, a number of segmentation algorithms were proposed for the entire text, and the results were analyzed.

Keywords: segmentation, line segmentation, word segmentation, horizontal and vertical segmentation, recognition, handwritten text.

KIRISH

Matni tanib olishda albatta gorizont va vertical segmentatsiyadan foydalaniladi. Matni bo'laklarga bo'lish kompyuter ishlash samaradorligini oshiradi va kam xatolikka olib keladi. Shu vaqtga qadar bir qancha olimlar qator segmentatsiyalari ustida ilmiy tadqiqotlar olib borishgan. Shu tadqiqotlarni tahlil qilib chiqish asosida zamonaviy darajadagi A* algoritmini tanlab olindi. A* algoritmi yo'llarni rejalashtirishga asoslangan [1] va uni birlashtirishni amalga oshiradi. Yuqori va pastki qo'lyozma matnlarni ajratib turadigan yaqin yo'llarni topish uchun har xil qiymatlardagi funktsiyalarga

ega bo'lgan usul xisoblanadi. Chiziq bilan bajariladigan birinchi qadam segmentatsiya algoritmi - potentsial nomzodlarni topish yuqori va pastki matn maydonlarini ajratuvchi satrlarning boshlang'ich nuqtalari deb olinadi. Ko'pincha, bu qadam gorizontaal proektsion profillardan foydalanadi. Qaysi qora nuqta miqdori x o'qi bo'yicha yig'iladi. Ko'p yoki oz bo'lgan matn maydonlarini ko'rsatadigan profilni olish qora nuqtaga qadar amalga oshiriladi. Bulacu va boshqalar [2] tekislangan holatlari uchun taklif qildi. Cho'qqilarni yanada aniqroq aniqlash uchun gorizontaal proektsion profil va binarizatsiya qilingan hujjat tasvirining tamon qirralari [3] da qo'lda yozilgan hujjat qismlarga bo'linib, so'ngra har bir bo'lakda tekislangan proektsion profil hisoblab chiqilgan. Proektsiya profilidagi tamon qirralari matn satrlarining boshlang'ich holati olingan. Shuningdek, [4] ning asoslari tamon chiziqalar qirralarini ajratish uchun boshlang'ich holatlarni aniqlash uchun ishlatiladi. Boshlang'ich holatlarni aniqlagandan so'ng, turli xil usullar yuqori va pastki matnlarni ajratuvchi qatorni topish taklif qilingan. [5] da tomchilatib yuborish usuli saqlanib qoladi qora nuqtalar aloqasi rivoji hisoblanadi. Boshlanish holatidan boshlab, avval boshlang'ich to'g'ri yo'l hosil bo'ladi. Keyin, hujjat tasvir 90 gradusga burilgan va sun'iy suv tomchisi sahifaning yuqoridan pastki qismiga ko'chirildi. Ushbu tomchi siyoh atrofida to'g'ri yo'l bo'ylab harakatlanishga harakat qiladi. Ma'lumotlar to'plamining bir qismidagi eksperimental natijalar "Gollandiya malikasi kabineti" deb nomlangan satrlarning 99,8% to'g'ri segmentlangan tashkil etganligini ko'rsatildi.

Garz va boshq. [6] binarizatsiya qilinmagan matn satrini segmentlarga ajratish algoritmini taklif qildi. Birinchidan, xarakterli qismlar qiziqish nuqtalari Gausslarning farqi (DoG) yordamida joylashgan mahalliy minimal va maksimal darajalar joylashgan filtr kulrang shkalada topilgan. Bu aniqlangan qiziqish nuqtalari keyin qismlarining eng muhim joylarini ifodalaydi. Matn xaritasi joylashgan matn atrofida hisoblab chiqilgan nuqtalari texnikasi deyiladi. O'tgan minimal qiymatlar bilan bog'langan yo'lni toping kam energiya qismlari. Ushbu uslub Saint Gall3 ma'lumotlar to'plamining 1431 matn satrida yaxshi natijalarga erishishga olib keldi.

Louloudis va boshq. [6] chiziqalarni segmentatsiyalashni amalga oshirish uchun Xou konvertatsiyasidan foydalanishni taklif qildi. Ushbu usulda o'rtacha umuman bog'langan komponentlarning kengligi va balandligi xisobga olinadigan hujjat hisoblanadi va matnni qismlarga ajratish uchun ishlatiladi. Qism-sohalar, qism-maydonlar yana teng ravishda bo'linadi. Ma'lum kattalikdagi bloklar, undan keyin siyohning tortish kuchi kiritiladi. Nihoyat, o to'plami butun gravitatsiya markazining nuqtalari to'g'ri topish uchun chiziqali Hough konvertatsiyasi bilan qayta ishlanadi. Ushbu usul aniqlanish tezligini ta'minladi va ICDAR 2007 qo'l yozma matnlar tanlovida 90,4% segmentatsiyasi natijasi bilan yuqori natija erishdi.

Ushbu oldingi usullar qancha yaxshi ishlashiga qaramay matn juda yaxshi shablon asosida tuzilgan, ular hanuzgacha noto'g'ri segmentatsiyaga olib kelinishi sababi bir qancha xatoliklarni keltirib chiqarmoqda.

ASOSIY QISM

Ushbu xatoliklarni xisobga olgan holda A^* yo'lni rejalashtirish algoritmi asosida yangi segmentatsiyasi usuli taklif qilingan. Ushbu usul yo'llarni rejalashtirish algoritmi bilan birlashtirilgan maqbul yo'lni aniqlash uchun bir qator funksiyalar taklif etilgan. Manmatha o'z tadqiqotlarida A^* algoritmi uchun yangi takliflar ishlab chiqqan va u kiritgan taklifning umumiy matn va xattot og'ib yozilish tartibi ishlab chiqildi.

Gauss o'zining noyob chiziqali shkala makonini yaratadi muayyan shartlar qo'yilganda tasvirni tanib olishga moslashtiradi[7]. Biz shuni bilamizki, shkala maydoni hujjatlarni tahlil qilish uchun ideal asos yaratadi. Biz hujjat deb hisoblashimiz uchun xususiyatlar ko'p miqyosda shakllanishi kerak. Turli hajmdagi belgilar mavjud va kattaroq so'zlar, iboralar, chiziqalar va boshqa tuzilmalar mavjudligi olinadi. Demak, biz shkala bor deb aytay olamiz unda biz hujjat rasmidan so'zlarni olishimiz mumkin. So'zlar kengligini shriftlarini boshqarishimiz mumkin.

Shuning uchun biz ushbu o'lchamdagi xususiyatlarni yaratadigan tasvirni taqdim etishni xohlaymiz.

Odamlar matnni bloklarga yozishga moyildirlar va ular odatda satrlar orasidagi bo'shliqdan foydalanadilar. Kulrang darajadagi rasmda bu xarakteristikani gistogramma sifatida ko'rish mumkin, ya'ni bir xil matn qatoriga mansub so'zlar ketma-ketligi tepalikni, qator oraligi esa bo'shliqni tashkil qiladi. Ushbu kuzatuvdan foydalanib, avval olingan gistogrammalar yordamida minimal qiymatga ega optimal yo'llarni topadigan kirish tasviridagi masofa funksiyalari hisoblanadi. Keyinchalik, hujjat nuqtalari bo'ylab yo'llari aniqlanadi. Gistogrammalar fonning skeletini hosil qiladi va teng masofada

joylashgan fon nuqtalaridan iborat bo'lib, so'zlarni hosil qiladi. Yo'qotishlar funksiyasiga ko'ra eng yaxshi yo'lni tanlash uchun yo'lni aniqlash algoritmidan foydalaniladi[8].

Ushbu bosqichning maqsadi - skeletlari bo'ylab ketma-ket ikkita matn satrlari orasidagi bo'shliqni ajratadigan yo'llarni topishdir. Mumkin bo'lgan boshlang'ich va so'nggi nuqtalar to'plamini olib, algoritm quyidagi jarayon yordamida dastlabki nuqtalarni so'nggi nuqtalar bilan bog'laydi. Yo'lni topish "silliliqlik" yo'li bo'yicha tuzilgan yo'qotishlar funksiyasini o'z ichiga olgan A-yulduz algoritmi bilan amalga oshiriladi.

Ushbu jarayonning birinchi bosqichi tasvirni skeletini, oldindan ishlov berish (ikkilik rasm) chiqishidan ajratib olishdir. Takroriy yo'qotish strategiyasidan foydalaniladi. Chiqish matn satrlari va so'zlar orqali o'tadigan turli xil yo'llarni o'z ichiga olgan ikkilik tasvirdir.

Skelet piksellari bitta, ikki yoki undan ortiq qo'shnilarga ega bo'lishiga qarab so'nggi piksellar, chekka piksellar deb belgilanadi. Yakuniy nuqtalar, agar ular rasmning chap yoki o'ng tomondagi ustunlariga tegishli bo'lsa, qo'shimcha ravishda boshlang'ich piksel yoki so'nggi piksel deb belgilanadi. Qolgan so'nggi piksellar oraliq so'nggi piksellar hisoblanadi. Piksel yorliqlarining tasviri (1-rasmda) keltirilgan.



1-rasm. Matn satrlarini segment natijalari

O'lchamni aniqlash algoritmi piksel yorliqlaridan foydalanadi. Har bir boshlang'ich nuqtasi uchun algoritm ushbu nuqtalarni so'nggi nuqta bilan minimali bilan bog'laydigan yo'lni qidiradi. Agar piksel oraliq so'nggi piksel bo'lsa, algoritm unga yaqin boshqa oraliq so'nggi pikselni qidiradi. Eng yaqin oraliq so'nggi piksellarni topish uchun biz eksperimental ravishda a piksel radius o'rnatdik. Agar piksel qatorning so'ngi pikseli bo'lsa, algoritm davom etishning eng yaxshi yo'lini tanlaydi.

Algoritm har bir qadamda yo'qotishlarni hisoblab chiqadi, bu norasmiy ravishda idealga qarab yo'lning og'ishini o'lchaydi. Yo'qotishlar funksiyasini shakllantirish muammosiz davom etish va ulanish printsiplariga amal qiladi. Yo'lning umumiy qiymati har bir qadamning individual yo'qotishlarini yig'indisidir.

Rasmiy ravishda, P yo'li skelet piksellarining ketma-ketligi sifatida tavsiflanadi $P = [p_{11}, p_{22}, \dots, p_{nm}]$. Bir nuqta berilgan p_{ij} dan o'tish qiymati p_{ij} va keying nuqta qiymati $p_{i+1\pm k, j+b}$, matndagi satrning k yuqoriga va pastga og'ishini ifodalaydigan natural son, b ustun bo'yicha ularni joyini belgilab berishga xizmat qiladi. Ulardan k ga chegara qo'yiladi. $c(p_{ij} \rightarrow p_{i+1\pm k, j+b})$ deb olganimizda quyidagicha ifodalaniladi:

Nol qiymati: 0,

agar p_{ij} oxirgi piksel bo'lsa yoki p_{ij} va $p_{i+1\pm k, j+b}$ bo'lsa chekka piksellar (1-tenglamaga qarang).

$$C_n(p_{ij}, p_{i+1\pm k, j+b}) = 0 \quad (1)$$

Oxirgi qiymati: agar p_{ij} oxirgi piksel bo'lsa, piksel qiymati koordinatalari va tasvirning oxiri orasidagi evklid masofasidan foydalanib hisoblanadi (2-tenglamaga qarang).

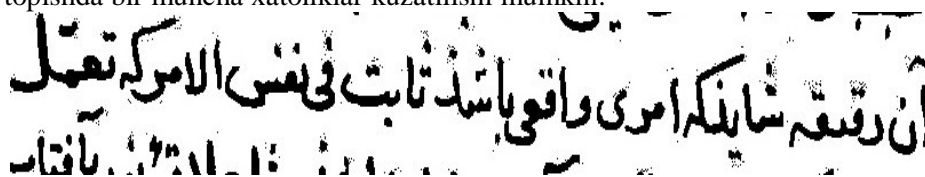
$$C_b(p_{ij}, p_{i+1\pm k, j+b}) = Euclidean(p_{ij}, p_{i+1\pm k, j+b}) \quad (2)$$

Virtual qiymat: Ikkala oraliq so'nggi piksellar orasidagi qiymat ularning koordinatalari orasidagi evklid masofasidir, ular orasidagi koordinatalar orasidagi to'g'ri chiziqni tortadigan oldingi piksellar soniga ko'paytiriladi (3-tenglamaga qarang).

$$C_v(p_{ij}, p_{i+1\pm k, j+b}) = \frac{Euclidean(p_{ij}, p_{i+1\pm k, j+b})}{count(PixelsForegr(p_{ij}, p_{i+1\pm k, j+b}))} \quad (3)$$

Agar yo'l virtual yo'l bo'lsa, unchalik og'irlik bermaydi, chunki g'oya haqiqiy yo'llarni topish va haqiqiy yo'l mavjud bo'lmagan yoki qiymatlari juda yuqori bo'lgan hollarda virtual yo'llardan foydalanib yangisini yaratishdan foydalaniladi.

Shuni xisobga olish kerakki arab grafikasida nuqtalarning ahamiyati kattadir shuni xisobga olgan holda, Manmatha algoritmidan shablon matniga moslanib, 100 piksel atrofida nuqtalar bog'lamini ketma-ketligini topishda bir muncha xatoliklar kuzatilishi mumkin:



2-rasm. A* algoritmi yordamida qator segmentatsiya natijasi

Ya'ni ortiqcha nuqtalarning paydo bo'lishi va qatorga tegishli bo'lgan nuqtalarning qolib ketishi natijalari olinadi. Bu esa tanib olish jarayonida o'z-o'zidan xatoliklarni keltirib chiqaradi. Shuni inobatga olgan holda quyidagi formula bo'yicha siljish parametrini belgilash taklif etiladi.

a piksel nuqtalar atrofini tekshirishni amalga oshiradi. a matndagi harf atrofi nuqtalarni qamrab olishga xizmat qiladi.

Matn satrlari segmentlanganidan so'ng, har bir satrning so'zlari Manmatha va Rotfeder[8] usuli yordamida ajratib olinadi. Kiritish kulrang o'lchovli tasvirlar har bir satr uchun u kulrang masshtabga aylantiriladi va so'z segmentatsiyasi algoritmgacha kirish sifatida ishlatiladi. Keyin chiziqli rasm anisotropik laplasiya filtri bilan filtrlanadi. Bloklar to'plamini yaratish uchun filtrlangan chiqish chegarasi ostiga olinadi. Bloklar ma'lum miqyosda so'zlarga ko'proq mos keladi. Ushbu o'lchov shkalasi bo'yicha optimallashtirish orqali avtomatik ravishda topiladi. Ushbu maqbul o'lchamdagi bloklar so'zlarga mos keladi. Keyingi ishlov berish oldindan ishlov berish bosqichida olingan ikkilik tasvirning chiqishi har bir satrdan birlashtirilgan komponentlar to'plamini (CC) o'z ichiga oladi. Ushbu qutini b_j deb olinsa, qiymatlari $CC\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, uni a_j bo'laklarga ajratish uchun

$$\frac{\max\{a_1, a_2, \dots, a_m\}}{a_j} > 0.1$$

va

$$0.99 > \frac{width(b_j)}{height(b_j)} > 0.5.$$

Haddan tashqari segmentatsiya muammosini hal qilish uchun bir xil satrda 10% dan ortiq ustma-ust keladigan ikkita quti (b_k, b_h) , b_k qutida $CC\{a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kn}\}$, b_h qutida esa $CC\{a_{h1}, a_{h2}, \dots, a_{hm}\}$ mavjud deb taxmin qilinadi. Ikkala quti ham bitta so'zga ruxsat beradi, agar (2.5) bo'lsa

$$\max\{a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kn}\} = \max\{a_{h1}, a_{h2}, \dots, a_{hm}\} \quad (4)$$

b_k ning eng katta maydoni b_h ning eng katta maydoniga teng bo'lishi kerak.

Matnni tanib olishda qator segmentatsiyasi muhim ahamiyatga ega va yuqorida hattotning o'g'ib yozishini hisobga olib yaratilgan algoritmi quyidagi blok sxema orqali ifodalaymiz.

Neyron tarmoq imkoniyatlaridan samarali foydalanish va natijalar tahlili olish imkoniyatlarini Python dasturlash muhitida foydalanishga ega bo'lamiz. Matnni tanishda har bitta qatorni gorizontaal segmentatsiya va so'z va harflarga ajratishda vertikal segmentatsiyadan foydalaniladi.

XULOSA

Ushbu maqolada minimal va masofaviy xarajatlar funktsiyasidan foydalanadigan yangi A yo'llarni rejalashtirish algoritmi taklif qilingan. Chiziq segmentatsiyasi agentini boshqarish a parameter bo'yicha harakatlanishi taklif etilib natijalar olingan. A* algoritmi tekislangan gorizontaal yordamida binarizatsiya qilingan rasmda hisoblanadi. Siyoh zichligi gistogrammasi, boshlanish holati aniqlanadi. Chiziqli segmentatsiyaning optimal yo'li A* yordamida hosil bo'ladi.

Adabiyotlar

1. N. Nilsson, Principles of Artificial Intelligence, ser. Symbolic Computation / Artificial Intelligence. Springer, 1982.
2. M. Bulacu, R. van Koert, L. Schomaker, and T. van Der Zant, "Layout analysis of handwritten historical documents for searching the archive of the cabinet of the dutch queen," in Document Analysis and Recognition, 2007. ICDAR '07. 9th International Conference on, vol. 1, 2007, pp. 357–361.
3. M. Arivazhagan, H. Srinivasan, and S. Srihari, "A statistical approach to line segmentation in handwritten documents. center of excellence for document analysis and recognition," in proceedings of Document Recognition and Retrieval XIV, SPIE, Tech. Rep., 2007
4. R. Chamchong and C. C. Fung, "Text line extraction using adaptive partial projection for palm leaf manuscripts from thailand," in Frontiers in Handwriting Recognition, 2012. ICFHR '12, 14th International Conference on, 2012, pp. 588–593
- A. Garz, A. Fischer, R. Sablatnig, and H. Bunke, "Binarization-free text line segmentation for historical documents based on interest point clustering," in Document Analysis Systems (DAS), 2012 10th IAPR International Workshop on, 2012, pp. 95–99.
5. G. Louloudis, B. Gatos, I. Pratikakis, and C. Halatsis, "Text line and word segmentation of handwritten documents," Pattern Recognition, vol. 42, no. 12, pp. 3169–3183, 2009.
6. Johansen, editor. Proceedings of the Copenhagen Workshop on Gaussian Scale-Space Theory, May 10–13 1996. Technical Rapport 96/19 ISSN 01078283.
7. Wshah, S., Shi, Z., Govindaraju, V.: Segmentation of Arabic handwriting based on both contour and skeleton segmentation. In: International Conference Document Analysis and Recognition, pp. 793–797 (2009)
8. R. Manmatha and J. Rothfeder, "A scale space approach for automatically segmenting words from historical handwritten documents," I. trans. PAMI, vol. 27, pp. 1212–1225, 2005.

UDK 519.71(575.1)

KO'Z TUBI QON TOMIRI TASVIRI ASOSIDA KASALLIKLARNI TASHXISLASH

D. M. Sotvoldiev

Muhammad al-Xorazmiy nomidagi Toshkent axborot texnologiyalar universiteti huzuridagi axborot-kommunikatsiya texnologiyalari ilmiy-innovatsion markazi

Annotatsiya. Ushbu maqolada ko'z tubi qon tomir tasviridan morfologik noravshan amallar yordamida qon tomir tasviri ajratib olindi. Hosil bo'lgan grafik ob'ektlarga nisbatan matematik modellari ishlab chiqilgan. Ushbu matematik modellar asosida shaxsning kasallik tashxisini qo'yuvchi algoritmi ishlab chiqilgan. Natijalar tahlili keltirilgan.

Kalit so'zlar: ko'z tubi qon tomir tasviri, binarizatsiya, potologiya, morfologik amallar, tashxislash algoritmi.

Диагностика заболеваний на основе изображения глазного сосуда

Аннотация. В данной работе изображение сосудов отделен из изображения глазного дна с помощью морфологически нечетких операций. Разработаны математические модели для полученных графических объектов. Разработан алгоритм диагностики индивидуального заболевания на основе этих математических моделей. Представлен анализ результатов.

Ключевые слова: изображение сосудов глазного дна, бинаризация, патология, морфологические операции, диагностический алгоритм.

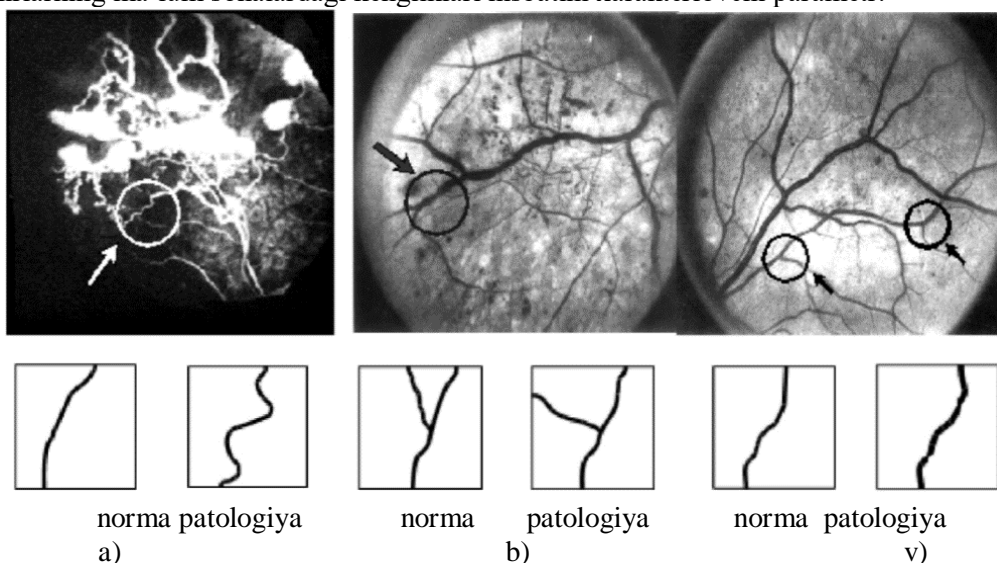
Diagnostics of diseases based on the eye vessel

Abstract. In this work, the image of the vessels is separated from the image of the fundus using morphologically fuzzy operations. Mathematical models have been developed for the resulting graphic objects. An algorithm for diagnosing an individual disease based on these mathematical models has been developed. An analysis of the results is presented.

Keywords: fundus vessels image, binarity, pathology, morphological operations, diagnostic algorithm.

Kirish

Ko'z tubi tasvirlari daraxtsimon tuzilmalar – tugunlar va tarmoqlar kabi tushunchalar bilan aniqlanuvchi qon tomirlari tizimining mavjudligi bilan xarakterlanadi. Tarmoq deb o'rta nuqtalarning geometrik o'rni, u bo'ylab diametr va burchakning taqsimlanishi bilan xarakterlanuvchi to'rsimon tuzilma elementiga aytiladi. Tuzilma tuguni – bu tarmoqlarning tarmoqlanishi yoki kesishish nuqtasi. Daraxtsimon tuzilmalar tasvirlarini tahlil qilishda tarmoqlar markazlarini ajratib olish va tarmoqning har bir nuqtasida yo'nalishlarni aniqlash masalasi asosiy hisoblanadi. Bu tibbiy-tashxislash parametrlarini baholashni o'tkazish uchun asos bo'ladigan ularning geometrik xarakteristikalarini keyingi tahlil qilish uchun tasvir fonida tuzilma tarmoqlarini ajratib olishga imkon beradi. Qalinlik va yo'nalishning geometrik xarakteristikasilari trassaning tashxisiy parametrlari bo'lib hisoblanadi, chunki ular asosda tomirlarning tashxisiy parametrlari shakllantiriladi. Ushbu parametrlar tarmoqni trassirovka qilish jarayonida yoki tomirga tegishli bo'lgan nuqtalarni ko'rsatishda bevosita daraxtsimon tuzilma tasviri bo'yicha hisoblanuvchi lokal xarakteristikalar bo'lib hisoblanadi. Ushbu parametrlar yordamida quyidagi tibbiy-tashxisiy parametrlarni baholash amalga oshiriladi: chiziqli gemodinamika parametri (tomirning lokal diametri); ajratilgan segmentdagi tomirning o'rtacha diametri; tomir kalibrining notekislik parametrlari (tomir devorining egriligi va bukilganligi); ajratilgan segmentda tomir harakatining parametrlari (borishining egriligi va bukilganligi); tomirlarning tarmoqlanish burchaklari; turli tomirlarning ma'lum sohalardagi kengliklari nisbatini xarakterlovchi parametr.



1-rasm. To'rparda patologiyasi belgilarining rasmlari: a) egri-bugrilik, b) tarmoqlanish burchagi, v) qalinlik o'zgarishi dinamikasi

Tashxisiy parametrlar to'plami quyidagi bayon qilinuvchi tashxislash belgilari to'plamini hosil qiladi: 1) tarmoqning o'rtacha diametri; 2) to'g'ri chiziqilik tarmoqning to'g'ri chiziqli yo'nalishdan chetlashishini xarakterlaydi; 3) tarmoqning aniq obrazlilik tarmoq qalinligining notekisligini xarakterlaydi; 4) tarmoq qalinligi tebranishlari amplitudasi tarmoq devorining to'g'ri chiziqdan chetlanishini xarakterlaydi; 5) qalinlik tebranishlari chastotasi uning uzunlik birligiga to'g'ri keluvchi tarmoq devori yo'nalishining o'zgarishini xarakterlaydi; 6) qalinlikning egri-bugriligi trassa bo'ylab qalinlik funksiyasining o'zgarish tezligini xarakterlaydi; 7) trassaning egri-bugriligi trassa (tarmoq trektoriyasi) funksiyasining o'zgarish tezligini xarakterlaydi; 8) trassa tebranishlari amplitudasi trassa

borishining to'g'ri chiziqli yo'nalishdan chetlanish darajasini xarakterlaydi; 9) trassa tebranishlari chastotasi tarmoq uzunlik birligiga to'g'ri keluvchi trassa yo'nalishi o'zgarishlari sonini xarakterlaydi [1].

Asosiy qism

Hozirgi vaqtda matematik morfologiya tasvirlarga raqali ishlov berishda keng qo'llanilmoqda va tasvirlar bilan ishlash bo'yicha bir qator usullarni (eng avvalo binar) to'plamlar nazariyasi apparatiga asoslangan kuchli yondashuvga birlashtiradi [2]. Ushbu yondashuv vizual sifatni yaxshilash va tasvirlarni vizualizatsiya qilish; grafik obrazlarni tanib olish va talqin qilish masalalarida qo'llanilmoqda. Morfologik ishlov berishdan bu yerda tasvirlarni noxiziqli filtrlashning maxsus turi (ob'ektlarning tasvirlaridagi skanerlash va binarizatsiya nuqsonlari natijasida yuzaga kelgan uzilishlar va kichik o'lchamdagi alohida yolg'on ob'ektlarni bartaraf qilish) uchun foydalanilishi mumkin. Bundan tashqari morfologik ishlov berishdan tasvirlarni bevosita tahlil qilishga tayyorlashda (old rejadagi karkasni qurish, tasvirdagi berilgan o'lcham va shakldagi ob'ektlarni ajratib olish, granulometrik gistogrammani qurish) foydalanish mumkin. Hozirgi vaqtda morfologik yondashuv doirasida birinchi masalani hal qilish uchun ham, ikkinchi masalani hal qilish uchun ham qo'llaniluvchi bir qator usullar mavjud, biroq ularning qo'llanish sohasi binar tasvirlarga ishlov berish bilan cheklanadi. [3,5] da bayon qilingan dilatatsiya va eroziya morfologik operatsiyalarini kulrang tasvirlarda umumlashtirish, keyinchalik ko'rsatilganidek, bir qator kamchiliklarga ega.

Binar tasvirlarga ishlov berish uchun qo'llaniluvchi va [5] da bayon qilingan standart kulrang morfologik operatsiyalarning kamchiliklaridan holi bo'lgan yangi kulrang operatsiyalarni ishlab chiqish maqsadga muvofiq.

Qo'yilgan maqsadga erishish uchun noravshan to'plamlar nazariyasiga asoslangan yondashuvdan foydalanish taklif qilindi. Asosiy morfologik operatsiyalarga dilatatsiya va eroziyani kiritishadi [3]:

$$A \oplus B \{c | (\hat{B})_c \cap A \neq \emptyset\}; \quad (1)$$

$$A \ominus B \{c | (B)_c \subseteq A\}; \quad (2)$$

bu yerda $\hat{A} = \{b | b = -a, a \in A\}$ A to'plamning markaziy akslantirilishi,

$(A)_\xi = \{b | b = a + \xi, a \in A\}$ – parallel ko'chirish A .

Ushbu ikkita operatsiya asosida uzish $A \circ B = (A \ominus B) \oplus B$, $A \bullet B = (A \oplus B) \ominus B$ birlashtirish hamda “muvaffaqiyat-muvaffaqiyatsizlik” $A \otimes B = (A \ominus B_1) \cap (\bar{A} \ominus B_2)$ operatsiyalari ham kiritiladi, bu yerda A – tasvir; B – tuzilma hosil qiluvchi element; B_1 va B_2 – mos tarzda ob'ekt nuqtalari to'plami va lokal fon uchun javob beruvchi namuna fragmentlari.

Shunday qilib asosiy morfologik operatsiyalar bo'lib dilatatsiya (1) va eroziya (2) operatsiyalari hamda kulrang tasvirlar holatida morfologik operatsiyalarni umumlashtirishda yuzaga keluvchi asosiy masala bo'lib (1) va (2) operatsiyalarni umumlashtirish hisoblanadi. [3-5] da kulrang dilatatsiya va eroziya operatsiyalari kiritilgan:

$$(f \oplus b)(s, t) = \max_{\substack{(s-x, t-y) \in D_f \\ (x, y) \in D_b}} (f(s-x, t-y) + b(x, y)); \quad (3)$$

$$(f \ominus b)(s, t) = \min_{\substack{(s+x, t+y) \in D_f \\ (x, y) \in D_b}} (f(s+x, t+y) - b(x, y)); \quad (4)$$

bu yerda $f(s, t)$ – tasvirning yorqinlik funksiyasi;

$b(x, y)$ – tuzilma hosil qiluvchi element;

D_f, D_b – f va g ning aniqlanish sohalari.

[5] yana (3) va (4) operatsiyalar bazasida kulrang tasvirlarga morfologik ishlov berishning bir qator usullari ham bayon qilingan. Biroq ushbu operatsiyalarning bir qator jiddiy kamchiliklarga egaligini ko'rsatib berish mumkin.

Aytaylik, ishlov berilayotgan kulrang tasvir $P = \{(x, y) | x \in \{1, 2, \dots, N\}, y \in \{1, 2, \dots, M\}\}$ piksellar tekisligida $f : P \rightarrow [0, 1]$ yorqinlik funksiyasi bilan berilgan bo'lsin. U holda:

1) (3) yoki (4) operatsiya qo'llanilganidan keyin tasvirning yorqinlik funksiyasining $[0, 1]$ oraliq doirasidan chiqishini ko'rish qiyin emas, bu esa dilatatsiya yoki eroziyadan tasvirlar ustidagi mustaqil operatsiyalar sifatida foydalanish imkoniyatini bermaydi.

2) Tasvir yorqinligiga (f) va tuzilma hosil qiluvchi elementga (b) javob beruvchi funksiyalar $\{0, 1\}$ to'plamdan olingan qiymatlarni qabul qiladigan hollarda (3) va (4) ifodalarni mos holda (1) va (2) ga keltirishni talab qilish mantiqli bo'lgan bo'lar edi. Boshqacha aytganda agar (3) va (4) ifodalar kulrang tasvirlar holatidagi dilatatsiya va eroziyaning umumlashtirilishi sifatida qaralsa, ulardan binar tuzilma hosil qiluvchi elementga ega bo'lgan binar tasvirlarga (kulrangning xususiy holati sifatida) ishlov berishda foylanilganda klassik dilatatsiya (1) va (2) eroziya operatsiyalari qo'llanilganida olinadigan natija bilan bir natija olishimiz kerak. Biroq agar (3) va (4) operatsiyalarni qo'llashni binar tasvirlarga (kulrangning xususiy holati sifatida) toraytirsak, ularning (1) va (2) ga ekvivalent bo'lmasliklari aniqdir, ya'ni (3) va (4) ifodalar umuman olganda (1) va (2) larning umumlashtirishlari emas.

Noravshan morfologik operatsiyalar. Kulrang morfologik operatsiyalarning aniqlangan kamchiliklarini yengib o'tish uchun biz tomonimizdan noravshan to'plamlar nazariyasidan foydalanish taklif qilindi. Klassik morfologik yondashuv nuqtai-nazaridan qaraganda binar tasvir, masalan, uning oq nuqtalari to'plami bilan ifodalanishi mumkin. Bunda qolgan nuqtalar tasvirning qora nuqtalariga tegishli bo'ladi. Shunday qilib piksellar tekisligini universal to'plam sifatida qarash mumkin, unda berilgan yorqinlik funksiyasi esa 0 yoki 1 qiymatni qabul qiladi va uni tasvirning oq nuqtalarining qism-to'plamining xarakteristik funksiyasi sifatida talqin qilinishi mumkin. Binar tasvirning oq nuqtalari to'plamining uni bir qiymatli ifodalashi aniqdir. Bu ifodani kulrang tasvirlar holatiga umumlashtirgan holda kulrang tasvirlarni oq nuqtalarning noravshan qism-to'plami sifatida ifodalash mumkin, bunda piksellar tekisligida berilgan kulrang tasvirning yorqinlik funksiyasini kulrang tasvirni bir qiymatni aniqlab beruvchi oq nuqtalarning noravan qism-to'plamiga tegishli funktsiya sifatida talqin qilish mumkin.

Shunday qilib kulrang tasvirlar va tuzilma hosil qiluvchi elementlarni quyidagi ko'rinishdagi noravshan qism-to'plamlar bilan belgilaymiz: $\underline{A} = \{p | \mu_A(p), p \in P\}$ Tasvirning tegishlilik funksiyasi uning yorqinlik funksiyasi bilan belgilanadi: $\mu_A(x) = f_A(x)$, tuzilmaviy elementning tegishlilik funksiyasi apriori beriladi.

Dilatatsiyani umumlashtirish. (1) ni noravshan holatga umumlashtirish uchun eng avvalo uni quyidagi ko'rinishda ifodalab olamiz:

$$A \oplus B = \{c | \exists x \in P : (x \in (\hat{B})_c) \wedge (x \in A)\}. \quad (5)$$

U holda taklif qilingan yondashuvga ko'ra (5) ni quyidagi kabi noravshan holat uchun umumlashtirish mumkin:

$$\underline{A} \oplus \underline{B} = \left\{c | \exists x : (x \in (\hat{B})_c) \wedge (x \in \underline{A})\right\} = \left\{c | \max_{x \in P} \left(\mu_{(\hat{B})_c}(x) \wedge \mu_A(x) \right)\right\}. \quad (6)$$

Bu yerda (6) da va keyingi o'rinlarda noravshan ob'ektlar (tasvir va tuzilmaviy element) ustidagi ko'zguhi aks ettirish va parallel ko'chirish operatsiyalarini umumlashtirish uchun Zade umumlashtirish tamoyilidan foydalanib [6] yaqinlashgan tasvirni hosil qilamiz.

$$\hat{A} = \bigcup_{a \in P} \{-a | \mu_A(a)\}, (\underline{A})_z = \bigcup_{a \in P} \{a + z | \mu_A(a)\}.$$

(6) umumlashtirishning biz tomonimizdan ilgari surilgan talablarni qanoatlantirishi yoki yo'qligini tekshiramiz. Birinchi talab bo'yicha (6) operatsiya $[0, 1]$ to'plamga nisbatan max va min operatsiyalarining yopiqligi tufayli qanoatlantiradi.

\underline{A} va \underline{B} noravshan to'plamlari oddiy to'plamlarga aylangan hollarda $\mu_{(\hat{B})_c}(x)$ va $\mu_A(x)$ tegishlilik funksiyalari $\chi_{(\hat{B})_c}(x)$ va $\chi_A(x)$ xarakteristik funksiyalarga o'zgaradi. Har qanday X

to'plam uchun $\chi_X(x) = 1 \Leftrightarrow (x \in X)$, bajarilganligi va X to'plamda berilgan har qanday $\Pi(x)$ predikat uchun $\left(\max_{x \in X} \Pi(x) = 1\right) \Leftrightarrow (\exists x \in X : \Pi(x))$, bajarilganligi uchun oddiy to'plamlar uchun (6) ifoda (1) ga ekvivalent bo'lgan (5) ga o'zgaradi. Shunday qilib (6) biz tomonimizdan ilgari surilgan ikkinchi talabni ham qanoatlantiradi.

Eroziya operatsiyasini umumlashtirish. Diletatsiya operatsiyasini quyidagicha umumlashtirishni taklif qilganmiz:

$$\underline{A} \ominus \underline{B} = \left\{ c \mid \eta\left(\left(\underline{B}\right)_c, \underline{A}\right) \right\}, \quad (7)$$

bu yerda $\eta(\underline{X}, \underline{Y})$ – X to'plamning Y ga noravshan kirishi darajasi.

Diletatsiyani umumlashtirishga o'xshash tarzda (2) ni quyidagicha qayta ifodalash mumkin:

$$\underline{A} \ominus \underline{B} = \max \left\{ \mu_{\underline{A}}(x) - \mu_{\underline{B}}(x), 0 \right\}, \quad (8)$$

yoki noravshan talqinda:

$$\underline{A} \ominus \underline{B} = \left\{ c \mid \forall x \in P : (x \in (\underline{B})_c) \Rightarrow (x \in \underline{A}) \right\} = \left\{ c \mid \min_{x \in P} (\mu_{(\underline{B})_c}(x)) \Rightarrow \mu_{\underline{A}}(x) \right\}. \quad (9)$$

[4] da bitta noravshan to'plamning boshqasiga noravshan kirishi darajasi uchun noravshan implikatsiyani tanlash masalasi ko'rib chiqilgan – (9) ga o'xshash holatlarda Gyodel implikatsiyasidan foydalanishning ziddiyatli natijalarga olib kelishi aniqlandi va quyidagi implikatsiyalardan biridan foydalanish asoslab berildi: Gogen yoki Lukashevich [7]. Ikkala implikatsiyalardan Gogen implikatsiyasiga nisbatan kamroq darajadagi hisoblash murakkabligiga egaligi tufayli Lukashevich implikatsiyasi tanlab olindi. Shunday qilib kulrang tasvirlar holatiga eroziya operatsiyasini umumlashtirish uchun quyidagi ifodadan foydalanish taklif qilinadi:

$$\underline{A} \ominus \underline{B} = \left\{ c \mid \min_{x \in P} \left(\min \{ 1, 1 - \mu_{(\underline{B})_c}(x) + \mu_{(\underline{A})_c}(x) \} \right) \right\}. \quad (10)$$

Yana, diletatsiya uchun bo'lgani kabi, (10) operatsiya birinchi talabni Lukashevich implikatsiyasi va min operatsiyalarining $[0,1]$ oraliqqa nisbatan yopiqligi tufayli qanoatlantiradi. (10) va (2) larning \underline{A} va \underline{B} lar oddiy to'plamlarga aylangan holatdagi ekvivalentligini diletatsiya bilan o'xshash tarzda isbotlaymiz. Lukashevich implikatsiyasining noravshan tasdiqlardan bul tasdiqlariga qisqarishda bul tasdiqlaridagi implikatsiyaga o'tishini hamda X da berilgan har qanday $\Pi(x)$ predikat uchun $\left(\min_{x \in X} \Pi(x) = 1\right) \Leftrightarrow (\forall x \in X : \Pi(x))$ ning bajarilishini hisobga olgan holda (10)

to'plamning tegishlilik funksiyasi mantiqiy tasdiqqa aylanadi: $\forall x \in P : (x \in (\underline{B})_c) \Rightarrow (x \in \underline{A})$, bu esa quyidagiga ekvivalentdir: $(\underline{B})_c \subseteq \underline{A}$.

Shunday qilib kulrang tasvirlar holati uchun diletatsiyani (10) umumlashtirish biz tomonimizda ilgari surilgan har ikkala talabni ham qanoatlantiradi.

Kiritilgan operatsiyalarning qo'llanishlari. Taklif qilingan noravshan morfologik operatsiyalardan mustaqil tarzda foydalanish mumkin, [5] da dilatatsiya va eroziya operatsiyalari asosida tuzilgan chegaralarni ajratishning morfologik usuli bayon qilingan. Uni noravshan holatga kengaytirish quyidagicha ko'rinishga ega bo'ladi:

$$\underline{A}' = (\underline{A} \oplus \underline{B}) \setminus (\underline{A} \ominus \underline{B}), \quad (11)$$

bu yerda $\mu_{\underline{A} \setminus \underline{B}}(x) = \max \left\{ \mu_{\underline{A}}(x) - \mu_{\underline{B}}(x), 0 \right\}$.

Binar tasvirlar ustidagi morfologik operatsiyalarga o'xshash tarzda (6) va (10) operatsiyalar bazasida $\underline{A} \circ \underline{B} = (\underline{A} \ominus \underline{B}) \oplus \underline{B}$ ajratish va $\underline{A} \bullet \underline{B} = (\underline{A} \oplus \underline{B}) \ominus \underline{B}$ biriktirish operatsiyalarini kiritish mumkin. Ular asosida (4) da \forall tuzilmaviy element bo'yicha morfologik chaplovchi filtr bayon qilingan:

$$\underline{A}_{HQ} = (\underline{A} \bullet \underline{B}) \circ \underline{B}; \quad (12)$$

Berilgan tasvirdan uning chaplangan nusxasini qisman istisno qilgan holda o'tkirlikni oshiruvchi morfologik filtni olish mumkin:

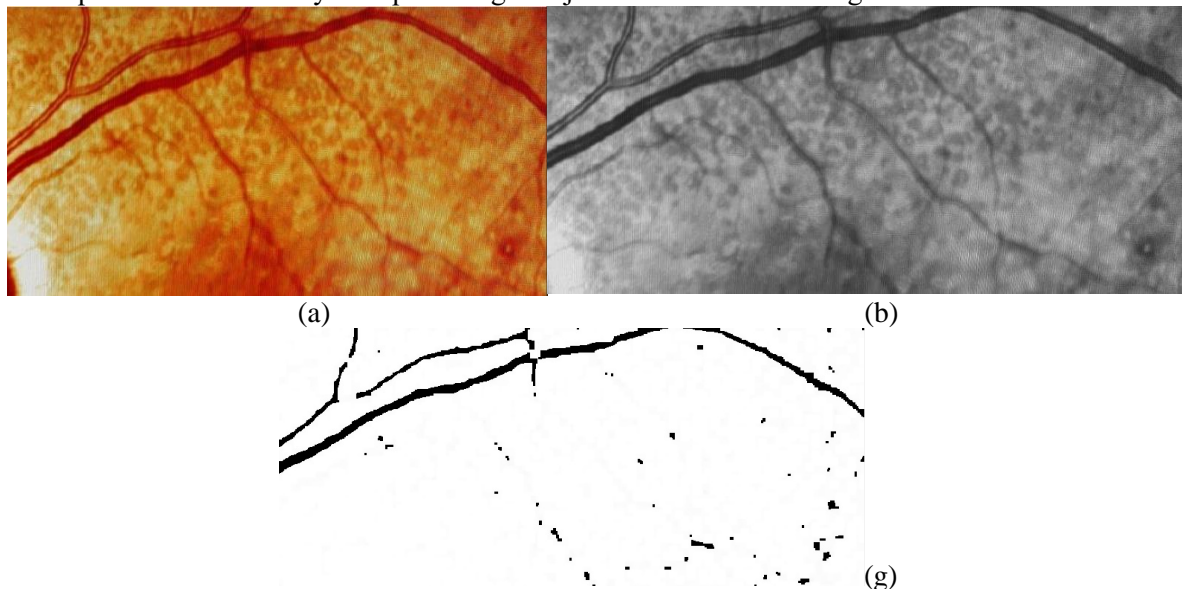
$$\underline{A}_{B^{\lambda}} = \underline{A} -_{\lambda} \underline{A}_{H^{\lambda}}, \quad (13)$$

bu yerda $\underline{A} -_{\lambda} \underline{B}$ – biz tomonimizdan λ -sumмага o'xshash tarzda kiritilgan [6] λ -farq noravshan operatsiyasi:

$$\mu_{\underline{A} -_{\lambda} \underline{B}}(x) = \max \left\{ 0, \min \left\{ 1, (1 + \lambda) \cdot \mu_{\underline{A}}(x) - \lambda \cdot \mu_{\underline{B}}(x) \right\} \right\};$$

$\lambda \in [0, 1]$ – o'tkirlikni kuchaytirish koeffitsienti.

Bayon qilingan filtrlarni o'lchami 5x5 piksel bo'lgan doiraviy aperturaga ega bo'lgan tuzilma hosil qiluvchi element bo'yicha qo'llaniligi natijalari 2-rasmda ko'rsatilgan.



2-rasm – Noravshan morfologik ishlov berish usullarini qo'llash natijalari:
 a) berilgan tasvir; b) kulranga o'tish ishlov berish natijasi;
 g) noravshvn morfologik ishlov berish usuli natijasi.

Ko'z kasalliklari parametrlari yordamida taxlillar va tajribalardan foydalanib, ko'z kasalliklarini aniqlashda tomir xususiyatlariga qarab modellashtirildi:

-tomir qalinligini xisoblash $a_p - x_{ij}$ qora nuqta olinadi va tugashigacha piksellar soni hisoblanadi (4-rasm a).

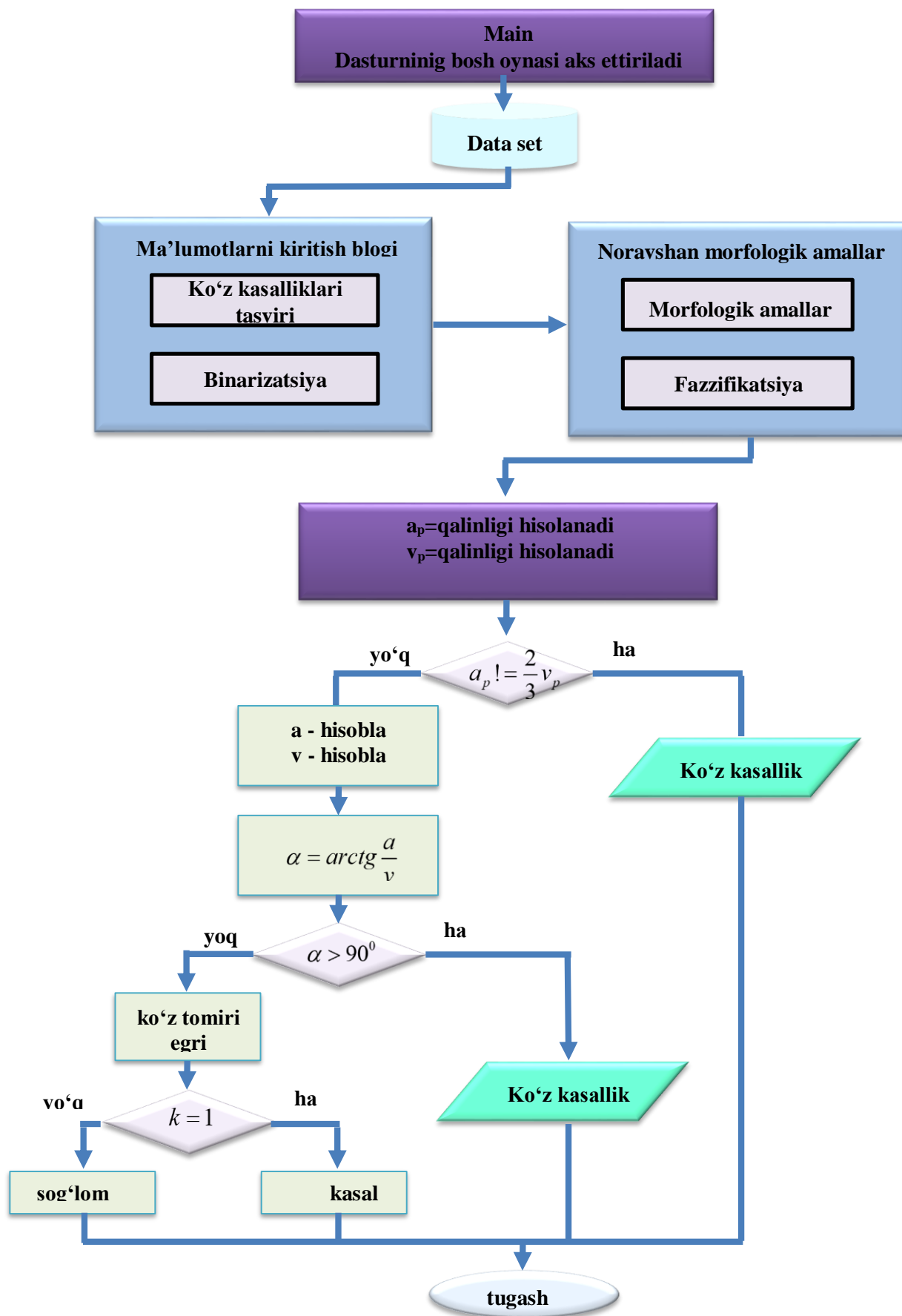
- $V_p - x_{ij}$ kiyingi qadamdagi qora nuqtadan piksellar sonini xisoblaydi va $V_p > \frac{2}{3} a_p$

bo'lganda ko'z kasalligi tashxisi qo'yiladi(4-rasm b).

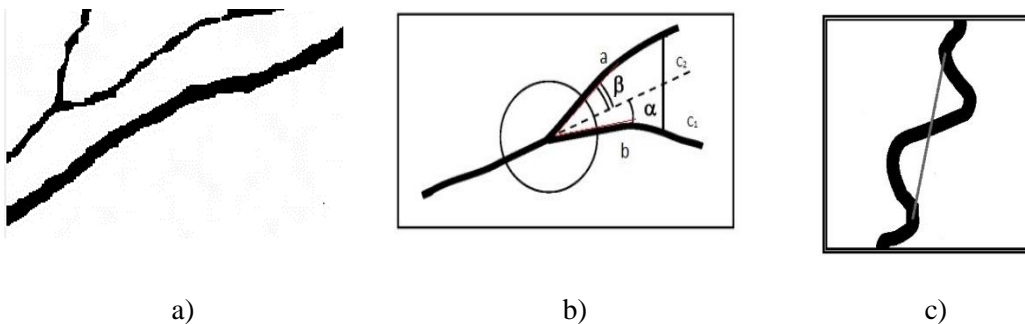
- $tg\alpha$ orqali burchak hisoblab olinadi A va V tomoni xosil qilingan

uchburchak tomonlariga teng. $\alpha = \arctg \frac{b}{a} + \arctg \frac{a}{c_2}$ piksellar orqali (10p=0.02645mm)

burchak xisoblanib, o'tmas burchak holati uchun kasallik tashxisi qo'yiladi.



3- rasm. Dasturning funksional tuzilmasi



4- rasm. Ko‘z tubi qon tomirining ko‘rinish shakillari

-agar I pikselni siljishini bittadan siljitilsa va 10-20 radius kenglikda qora nuqtalar topilsa uning uzliksiz xarakati yo‘li to‘lqinsimon deb olingan va $K=1$ (4- rasm).

Xulosa

Ushbu maqolada berilgan tasvirga dastlabki ishlov berish binarizatsiya, kulrang tasvirga o‘tkazish, morfologik noravshan amallar yordamida tasvir asosiy tomir ajratib olindi. Shu ajratib olingan tasvir asosida uning tomir qalinligi, to‘lqinsimon, burchak ko‘rinishlari uchun matematik modeli ishlab chiqildi. Shu model asosida shaxs kasallik potologiyasi aniqlanishi amalga oshirildi. Ushbu olingan natijalarni ko‘z kasalliklar shifoxonasida qo‘llanilib, ijobiy natijalar olindi. Olingan natijalar orqali ko‘z kasalliklar tashxisi va ish samaradorligiga erishildi

Adabiyotlar

1. Н.Ю. Ильясова, А.В. Куприянов, А.О. Корепанов, М.А. Ананыш. Математические модели и методы оценивания диагностических параметров древовидных структур.- Самара: СГАУ, 2007 104 б.
2. Goutsias J., Vincent L., Bloomberg Dan S. Mathematical morphology and its application to image and signal processing. // Computational imaging and vision. Vol. 18. – Boston: Kluwer AP., 2002. – 445p.
3. Serra J. Image analysis and mathematical morphology. – Orlando: AP Inc., 1982. – 621p.
4. Григорьев А.В. О нечёткой импликации и степени нечёткого вхождения одного нечёткого множества в другое // Вісник Донецького університету, Сер. А. Природничі науки, 2005, вип. 1, Донецьк: ДонНУ, 2004. – с. 416-419.
5. Гонсалес Р., Вудс Р. Цифровая обработка изображений. – М.: Техносфера, 2005. – 1072с.
6. Заде Л. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближённых решений – М.: Мир, 1976. – 166 с., ил.
7. Леоненков А.В. Нечёткое моделирование в среде MATLAB и FuzzyTECH. – Спб.: БХВ-Петербург, 2003. – 736 с.: ил.

УДК:539.16.04

О РАДИАЦИОННОМ ЭКСПРЕСС-АНАЛИЗЕ СТРОИТЕЛЬНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Сафаров А.Н.¹, Мухамедов А.К.¹, Шаронов И.А.¹, Азимов А.Н.¹, Сафаров А.А.¹, Салимов М.И.², Ражаббоев Б.И.¹¹ Самаркандский государственный университет, ² Институт ядерной физики ан Узбекистана

Аннотация. Выполнены измерения радиоактивности дозообразующих радионуклидов радия Ra-226, тория Th-232 и калия K-40 в пробах строительных материалов и изделий, сделанные с различной временной выдержкой проб. Определены эффективные удельные активности проб и возможные значения корректирующих коэффициентов к активности Ra-226 для учета радиоактивного равновесия, позволяющие делать ускоренный радиологический анализ строительных материалов.

Ключевые слова: радионуклиды, радиационная безопасность, анализ радиологический, радиоактивное равновесие, строительные материалы.

Rapid radiological analysis of building materials

Abstract. Measurements of the dose-forming radionuclide concentrations such as Ra-226, Th-232 and K-40 were carried out in samples of building materials with different ageing times. The radium equivalent activities of the samples were determined. Possible values of the correcting coefficients to the activity of Ra-226 that take into account the radioactive equilibrium were calculated. This, in turn, allows to perform rapid radiological analysis of building materials.

Keywords: radionuclides, radiation safety, radiological analysis, radioactive equilibrium, building materials.

Qurilish materiallarining tezkor radiologik tahlili

Annotasiya. Ra-226, Th-232 va K-40 kabi doza hosil qiluvchi radionuklidlarning konsentratsiyasi qurilish materiallari namunalarning turli saqlash davrlari uchun o'Ichandi. Ushbu namunalar uchun solishtirma effektiv aktivlig qiyamlari aniqlandi. Radioaktiv muvozanatni hisobga oladigan Ra-226 aktivligi tuzatish koeffitsientlarning qiyamlari hisoblab chiqildi. Bu, o'z navbatida, qurilish materiallarini tezkorradiologik tahlilini o'tkazishga imkon beradi.

Kalit so'zlar: radionuklidlar, radiatsion xavfsizlik, radiologik tahlil, radioaktiv muvozanat, qurilish materiallari

При строительстве, реконструкции и ремонте зданий и сооружений требуется огромное количество строительных материалов и изделий самого разнообразного назначения. Для их производства используется как природное, так и техногенное сырье (промышленные отходы и попутные продукты). Основными критериями при выборе и применении строительных материалов и изделий являются не только их эксплуатационные характеристики и стоимость, но и не менее важный показатель - их экологическая безопасность. Многие строительные материалы в той или иной мере обладают радиоактивностью и другими вредными свойствами, например токсичностью. Всемирной организацией здравоохранения в 1986 году даже был придуман термин *Sick building syndrome* (*синдром больных зданий*) для характеристик жилых, производственных и административных зданий, постоянное или временное пребывание людей в которых вызывает у них ухудшение состояния здоровья и даже ряд болезней. Одной из причин появления этого синдрома является использование при строительстве радио-активных строительных материалов и сырья, добываемых на их месторождениях, являющихся побочным продуктом промышленности, а также отходов промышленного производства, используемых для изготовления строительных материалов.

Текущие рекомендации и тенденции, приводимые между-народными органами, в частности, такими как Европейский Парламент и МАГАТЭ [1-4], указывают на возрастающую потребность в массовых анализах и оценки воздействия естественной радиоактивности строительных материалов. Весьма ценной является также работа по каталогизации материалов [5]. Учитывая, что большая часть населения в развивающихся странах для строительства своего жилья использует побочные продукты переработки и промышленные отходы [6], требуются недорогое оборудование и эффективные по времени методы для контроля безопасности строительных материалов.

Для обеспечения экологической безопасности материалов из природного сырья должна

проводиться их экологическая экспертиза. Обязательными документами, подтверждающими безопасность, является санитарно-эпидемиологическое заключение, в котором, в частности, указывается содержание радионуклидов в используемых строительных материалах и изделиях. Дозообразующими радионуклидами являются естественные радионуклиды (ЕРН) радия Ra-226, тория Th-232 и калия K-40. Их содержание регламентируется в Узбекистане в санитарных нормах и правилах [7] показателем эффективной удельной активности $A_{эфф}$. Эффективная удельная активность образца $A_{эфф}$ рассчитывается через измеренные тем или иным способом удельные активности радионуклидов ^{226}Ra (A_{Ra}), ^{232}Th (A_{Th}) и ^{40}K (A_K) по формуле

$$A_{эфф} = A_{Ra} + 1,30A_{Th} + 0,09A_K.$$

Абсолютная погрешность измерения эффективной удельной активности рассчитывается через абсолютные погрешности измерения удельной активности радионуклидов ^{226}Ra (ΔA_{Ra}), ^{232}Th (ΔA_{Th}) и ^{40}K (ΔA_K) по формуле

$$\Delta A_{эфф} = \sqrt{(\Delta A_{Ra})^2 + (1,30 \times \Delta A_{Th})^2 + (0,09 \times \Delta A_K)^2}.$$

Удельные активности ЕРН Ra-226 и тория Th-232 обычно определяются методом гамма-спектрометрии путем измерения активности их дочерних продуктов распада (ДПР). Существенным является фактор появления при распаде радия Ra-226 радиоактивного газа радона Rn-222 с периодом полураспада 3,825 дня. Это может приводить к неточному измерению активности счетного образца из-за нарушения радиоактивного равновесия с радием. Стандартные процедуры подготовки счетных образцов строительных материалов предусматривают их выдержку длительностью до 10 периодов полураспада радона Rn-222 для установления радиоактивного равновесия. Поэтому время испытания 1 образца может длиться до 40 дней, что затрудняет проведение массовых радиологических анализов при всё возрастающих объемах жилищного и промышленного строительства. Это делает актуальным разработку экспресс-методов радиологического анализа строительных материалов.

В настоящей работе, являющейся развитием исследований [8, 9], рассматривается влияние корректирующего множителя $K(Ra)$ для удельной активности радия-226, являющегося главной причиной появления цепочки ДПР, приводящей к нарушению радиоактивного равновесия. Эффективная удельная активность $A_{эфф}$ при использовании экспресс-метода (без временной выдержки) будет рассчитываться через удельные активности ЕРН, измеренные в день подготовки счетного образца, теперь по формуле

$$A_{эфф}(K(Ra)) = K(Ra) \times A_{Ra} + 1,30A_{Th} + 0,09A_K,$$

где величины удельных активностей ЕРН есть удельные активности, измеренные в первый день испытаний.

Поправочный (корректирующий) коэффициент $K(Ra)$ к удельной активности ^{226}Ra , вводимый в эту формулу вычисляется отношением удельной активности ^{226}Ra $A_{Ra}(D)$, измеренной после временной выдержки счетного образца (день D) к удельной активности ^{226}Ra $A_{Ra}(0)$ в первый день (день 0). Формула расчета коэффициента имеет вид

$$K(Ra) = \frac{A_{Ra}(D)}{A_{Ra}(0)}.$$

При вычислении величины поправочного коэффициента $K(Ra)$ и удельной эффективной активности $A_{эфф}(K(Ra))$ придется оперировать операциями арифметического деления и умножения экспериментальных величин, имеющих свои ошибки измерений. Для учета этих ошибок мы будем использовать классические формулы для косвенных определений абсолютных ошибок [10]

$$X = \frac{A}{B}, \quad \Delta X = \frac{A \times \Delta B + B \times \Delta A}{B^2},$$

$$X = A \times B, \quad \Delta X = A \times \Delta B + B \times \Delta A,$$

где ΔA и ΔB - абсолютные ошибки величин A и B , соответственно.

Поэтому при расчете абсолютной ошибки корректирующего коэффициента будет применяться следующая формула

$$\Delta K(Ra) = \frac{A_{Ra}(D) \times \Delta A_{Ra}(0) + A_{Ra}(0) \times \Delta A_{Ra}(D)}{A_{Ra}(0)^2}.$$

Абсолютная ошибка удельной эффективной активности, рассчитанной с использованием корректирующего коэффициента $K(Ra) \pm \Delta K(Ra)$ будет вычисляться по формуле

$$\Delta A_{эфф}(K(Ra)) = \sqrt{(\Delta A_{Ra}(K(Ra)))^2 + (1.30 \times \Delta A_{Th})^2 + (0.09 \times \Delta A_K)^2},$$

где

$$\Delta A_{Ra}(K(Ra)) = A(Ra) \times \Delta K(Ra) + K(Ra) \times \Delta A(Ra).$$

Целью наших исследований является радиационная безопасность населения при осуществлении строительства и дальнейшей многолетней эксплуатации людьми объектов строительства, когда речь идет о снижении рисков для здоровья миллионов людей. Поэтому мы считаем, что здесь надо исходить из принципа "*Better Safe Than Sorry* (лучше подстраховаться, чем сожалеть)", в связи с чем полагаем, что корректирующий коэффициент $K(Ra)$ к активности радия надо брать максимально возможный с учетом ошибок измерения, то есть вычислять коэффициент как отношение максимального значения удельной активности радия в последний день измерения (день D) к минимальному значению в первый день измерения (день 0)

$$K(Ra)_{\max} = \frac{A_{Ra}(D)_{\max}}{A_{Ra}(0)_{\min}},$$

где $A_{Ra}(i)_{\max} = A_{Ra}(i) + \Delta A_{Ra}(i)$, $A_{Ra}(i)_{\min} = A_{Ra}(i) - \Delta A_{Ra}(i)$, $i = 0$ и D .

Для оценки величины корректирующего коэффициента $K(Ra)$ были проведены гамма-спектрометрические измерения на спектрометрах со сцинтилляционными детекторами 10 проб 8 видов наиболее распространенных в Узбекистане строительных материалов и изделий из ташкентской области: камни бетонные стеновые (шлакоблоки); плиты бетонные тротуарные; кирпич керамический; щебень, песок и песчано-щебеночные смеси из дробленного бетона и железобетона; природный песок для строительных работ; цемент.

Измерения счетных образцов, тщательно загерметизированных в измерительные кюветы для избежания утечки радона, делались с различной временной выдержкой счетных образцов, 12 раз каждый образец, в общей сложности, длительностью выдержки каждого образца 42 дня ($D = 42$).

Дни измерений (0 - первый день, 42 - последний день)											
0	4	7	11	14	18	21	29	32	36	39	42

Результаты измерений исследованных образцов строительных материалов и изделий показаны в таблицах 1-11. Приведены измеренные значения удельных активностей ЕРН радия Ra-226, тория Th-232 и калия K-40 ($A(Ra)$, $A(Th)$ и $A(K)$), значения удельной эффективной активности ($A_{эфф}$) с их погрешностями измерений ($\Delta A(Ra)$, $\Delta A(Th)$, $\Delta A(K)$ и $\Delta A_{эфф}$).

Табл. 1 - Зависимость активности радионуклида Ra-226 и удельной эффективной активности пробы "Камни бетонные стеновые (шлакоблок-1)" от дня измерения (активность в Бк/кг)

Дни	$A(Ra)$	$\Delta A(Ra)$	$A(Th)$	$\Delta A(Th)$	$A(K)$	$\Delta A(K)$	$A_{эфф}$	$\Delta A_{эфф}$
0	36,5	5,2	44,1	4,2	672,9	67,0	154,4	9,7
4	37,4	4,3	43,2	4,1	680,2	69,0	154,8	9,2
7	37,1	4,5	42,4	4,1	681,9	68,0	153,6	9,3
11	38,0	5,6	42,9	4,7	688,3	69,0	155,7	10,4
14	36,2	5,7	45,9	4,6	652,6	64,0	154,6	10,1
18	35,7	5,5	45,2	4,4	693,1	69,0	156,8	10,1
21	35,8	3,9	45,1	4,5	664,9	66,0	154,3	9,2
29	34,9	4,5	46,5	4,4	693,0	69,0	157,7	9,6
32	35,7	4,7	43,8	4,5	711,4	71,0	156,7	9,9

36	37,9	4,8	41,8	4,7	693,5	67,0	154,7	9,8
39	37,1	3,6	42,9	4,3	692,3	69,0	155,2	9,1
42	37,6	4,4	42,8	4,5	709,2	67,0	157,1	9,5

Вычисленные значения корректирующего коэффициента $K(Ra)$, максимальное значение коэффициента $K(Ra)_{\max}$, значения удельной эффективной активности $A(K(Ra))$ и $A(K(Ra))_{\max}$ при этих значениях корректирующего коэффициента будут иметь следующие значения

$$K(Ra) \pm \Delta K(Ra) \quad 1,03 \pm 0,27 \quad A(K(Ra)) \quad 155,5 \pm 17,2 \text{ Бк/кг}$$

$$K(Ra)_{\max} \quad 1,34 \quad A(K(Ra))_{\max} \quad 166,9 \pm 10,7 \text{ Бк/кг}$$

Табл. 2 - Зависимость активности радионуклида Ra-226 и удельной эффективной активности пробы "Камни бетонные стеновые (шлакоблок-2)" от дня измерения (активность в Бк/кг)

Дни	A(Ra)	$\Delta A(Ra)$	A(Th)	$\Delta A(Th)$	A(K)	$\Delta A(K)$	Aэфф	$\Delta Aэфф$
0	35,9	4,1	50,2	5,2	736,4	74,0	167,4	10,3
4	36,0	4,3	50,8	5,1	735,0	78,0	168,2	10,6
7	36,8	4,4	49,1	5,1	738,2	76,0	167,1	10,5
11	39,8	5,5	46,5	4,6	737,9	72,0	166,7	10,4
14	40,1	4,9	47,6	4,5	729,3	73,0	167,6	10,1
18	37,4	4,1	48,8	4,6	748,7	75,0	168,2	9,9
21	37,5	5,7	48,3	4,8	738,5	74,0	166,8	10,8
29	37,6	5,2	48,1	4,5	747,3	75,0	167,4	10,3
32	40,4	5,8	46,7	4,6	731,9	73,0	167,0	10,6
36	40,9	7,4	45,8	4,8	732,3	73,0	166,3	11,7
39	41,9	7,1	44,4	4,5	740,3	74,0	166,2	11,4
42	42,0	5,7	45,9	4,8	736,2	74,0	167,9	10,8

Вычисленные значения корректирующего коэффициента $K(Ra)$, максимальное значение коэффициента $K(Ra)_{\max}$, значения удельной эффективной активности $A(K(Ra))$ и $A(K(Ra))_{\max}$ при этих значениях корректирующего коэффициента будут иметь следующие значения

$$K(Ra) \pm \Delta K(Ra) \quad 1,17 \pm 0,29 \quad A(K(Ra)) \quad 173,5 \pm 18,0 \text{ Бк/кг}$$

$$K(Ra)_{\max} \quad 1,50 \quad A(K(Ra))_{\max} \quad 185,4 \pm 11,3 \text{ Бк/кг}$$

Табл. 3 - Зависимость активности радионуклида Ra-226 и удельной эффективной активности пробы "Камни бетонные стеновые (шлакоблок-3)" от дня измерения (активность в Бк/кг)

Дни	A(Ra)	$\Delta A(Ra)$	A(Th)	$\Delta A(Th)$	A(K)	$\Delta A(K)$	Aэфф	$\Delta Aэфф$
0	51,4	7,3	73,8	7,1	1123,8	110,0	248,5	15,4
4	53,0	6,9	75,0	7,3	1168,8	120,0	255,7	15,9
7	57,5	9,7	74,9	7,4	1099,8	100,0	253,9	16,4
11	57,1	10,2	74,3	7,8	1160,3	110,0	258,1	17,5
14	55,3	6,4	79,6	8,0	1087,2	110,0	256,6	15,7
18	54,2	8,9	74,8	7,4	1166,1	110,0	256,4	16,4
21	60,1	9,9	75,3	8,1	1125,8	110,0	259,3	17,5
29	60,9	9,7	74,8	7,4	1120,4	100,0	259,0	16,4
32	61,2	11,0	75,4	7,4	1118,3	110,0	259,9	17,7
36	56,8	9,7	78,7	7,9	1095,6	100,0	257,7	16,8
39	60,5	9,5	79,1	7,9	1098,4	100,0	262,2	16,6
42	59,9	8,9	78,6	7,6	1114,1	110,0	262,3	16,6

Вычисленные значения корректирующего коэффициента $K(Ra)$, максимальное значение коэффициента $K(Ra)_{\max}$, значения удельной эффективной активности $A(K(Ra))$ и

$A(K(Ra))_{\max}$ при этих значениях корректирующего коэффициента будут иметь следующие значения

$$\begin{array}{llll} K(Ra) \pm \Delta K(Ra) & 1,17 \pm 0,34 & A(K(Ra)) & 257,0 \pm 29,2 \text{ Бк/кг} \\ K(Ra)_{\max} & 1,56 & A(K(Ra))_{\max} & 277,3 \pm 17,7 \text{ Бк/кг} \end{array}$$

Табл. 4 - Зависимость активности радионуклида Ra-226 и удельной эффективной активности пробы "Плиты бетонные тротуарные" от дня измерения (активность в Бк/кг)

Дни	A(Ra)	$\Delta A(Ra)$	A(Th)	$\Delta A(Th)$	A(K)	$\Delta A(K)$	Aэфф	$\Delta Aэфф$
0	55,7	8,6	74,5	7,4	916,8	86,0	235,1	15,0
4	56,8	6,1	74,4	7,4	947,2	95,0	238,8	14,2
7	57,3	7,2	73,3	7,0	924,7	92,0	235,8	14,3
11	60,1	9,1	71,1	7,1	957,3	90,0	238,7	15,3
14	56,7	6,8	75,3	7,2	915,0	92,0	236,9	14,2
18	59,2	10,0	69,8	7,0	963,7	92,0	236,7	15,9
21	62,1	9,2	72,9	7,7	913,7	90,0	239,1	15,8
29	61,3	10,0	77,4	7,8	883,5	85,0	241,4	16,2
32	61,8	8,0	74,5	7,5	887,0	89,0	238,5	14,9
36	62,0	8,7	71,8	7,8	937,3	88,0	239,7	15,5
39	62,9	7,2	73,3	6,9	943,2	94,0	243,1	14,3
42	63,0	7,1	75,6	7,6	882,3	84,0	240,7	14,3

Вычисленные значения корректирующего коэффициента $K(Ra)$, максимальное значение коэффициента $K(Ra)_{\max}$, значения удельной эффективной активности $A(K(Ra))$ и $A(K(Ra))_{\max}$ при этих значениях корректирующего коэффициента будут иметь следующие значения

$$\begin{array}{llll} K(Ra) \pm \Delta K(Ra) & 1,13 \pm 0,30 & A(K(Ra)) & 242,4 \pm 29,3 \text{ Бк/кг} \\ K(Ra)_{\max} & 1,49 & A(K(Ra))_{\max} & 262,3 \pm 17,8 \text{ Бк/кг} \end{array}$$

Табл. 5 - Зависимость активности радионуклида Ra-226 и удельной эффективной активности пробы "Кирпич керамический" от дня измерения (активность в Бк/кг)

Дни	A(Ra)	$\Delta A(Ra)$	A(Th)	$\Delta A(Th)$	A(K)	$\Delta A(K)$	Aэфф	$\Delta Aэфф$
0	47,9	5,6	41,0	4,4	645,5	63,0	159,3	9,8
4	47,8	5,1	42,0	4,0	655,7	66,0	161,4	9,4
7	49,3	8,6	42,8	4,9	631,6	63,0	161,8	12,1
11	50,7	5,9	39,2	4,0	655,4	62,0	160,6	9,6
14	49,7	7,3	38,4	3,8	669,9	67,0	159,9	10,7
18	50,3	8,0	36,6	5,8	690,7	74,0	160,0	12,9
21	51,8	5,2	39,7	3,7	657,5	66,0	162,6	9,2
29	53,8	7,3	35,9	3,8	650,0	62,0	159,0	10,4
32	55,1	8,7	36,0	4,3	650,1	64,0	160,4	11,8
36	54,9	7,9	36,4	4,1	652,7	63,0	161,0	11,1
39	55,8	8,8	39,9	5,6	633,2	63,0	164,7	12,8
42	55,2	7,1	40,8	4,3	630,2	60,0	165,0	10,5

Вычисленные значения корректирующего коэффициента $K(Ra)$, максимальное значение коэффициента $K(Ra)_{\max}$, значения удельной эффективной активности $A(K(Ra))$ и $A(K(Ra))_{\max}$ при этих значениях корректирующего коэффициента будут иметь следующие значения

$$\begin{array}{llll} K(Ra) \pm \Delta K(Ra) & 1,15 \pm 0,28 & A(K(Ra)) & 166,6 \pm 21,6 \text{ Бк/кг} \\ K(Ra)_{\max} & 1,47 & A(K(Ra))_{\max} & 181,9 \pm 11,5 \text{ Бк/кг} \end{array}$$

Табл. 6 - Зависимость активности радионуклида Ra-226 и удельной эффективной активности пробы "Щебень из дробленного бетона и железобетона" от дня измерения (активность в Бк/кг)

Дни	A(Ra)	$\Delta A(Ra)$	A(Th)	$\Delta A(Th)$	A(K)	$\Delta A(K)$	Aэфф	$\Delta Aэфф$
0	37,4	6,0	51,6	5,2	795,6	75,0	176,1	11,3
4	38,2	6,3	53,9	5,4	772,1	73,0	177,8	11,5
7	39,6	4,6	53,0	5,0	753,9	75,0	176,4	10,4
11	39,8	4,3	52,4	5,2	764,4	76,0	176,7	10,5
14	42,2	4,5	52,1	5,5	766,2	77,0	178,9	10,9
18	42,5	5,5	52,7	5,1	771,3	76,0	180,4	11,0
21	43,8	6,4	50,7	5,0	748,7	72,0	177,1	11,2
29	42,9	3,9	48,9	4,9	770,7	77,0	175,8	10,2
32	44,8	7,3	47,7	4,9	784,7	74,0	177,4	11,8
36	43,8	6,5	50,4	5,0	731,5	69,0	175,2	11,1
39	44,3	7,2	49,1	5,0	760,1	72,0	176,5	11,7
42	44,5	6,2	50,8	5,3	774,3	77,0	180,2	11,6

Вычисленные значения корректирующего коэффициента $K(Ra)$, максимальное значение коэффициента $K(Ra)_{\max}$, значения удельной эффективной активности $A(K(Ra))$ и $A(K(Ra))_{\max}$ при этих значениях корректирующего коэффициента будут иметь следующие значения

$$K(Ra) \pm \Delta K(Ra) \quad 1,19 \pm 0,36 \quad A(K(Ra)) \quad 183,2 \pm 22,6 \text{ Бк/кг}$$

$$K(Ra)_{\max} \quad 1,61 \quad A(K(Ra))_{\max} \quad 199,1 \pm 13,6 \text{ Бк/кг}$$

Табл. 7 - Зависимость активности радионуклида Ra-226 и удельной эффективной активности пробы "Песок из дробленного бетона и железобетона" от дня измерения (активность в Бк/кг)

Дни	A(Ra)	$\Delta A(Ra)$	A(Th)	$\Delta A(Th)$	A(K)	$\Delta A(K)$	Aэфф	$\Delta Aэфф$
0	23,3	4,8	36,9	3,9	703,2	66,0	134,6	9,2
4	23,8	4,9	35,8	3,7	724,6	72,0	135,6	9,4
7	23,0	4,8	38,0	4,2	712,3	67,0	136,5	9,4
11	23,8	4,0	34,3	3,6	727,8	73,0	133,9	9,0
14	23,5	5,2	34,5	3,8	730,2	69,0	134,1	9,5
18	23,7	5,7	37,2	3,8	715,7	70,0	136,5	9,8
21	22,7	3,5	38,4	3,8	704,9	70,0	136,1	8,7
29	25,5	6,0	36,0	4,1	703,2	69,0	135,6	10,1
32	25,9	5,3	36,9	3,9	696,6	70,0	136,6	9,7
36	25,5	3,8	37,8	3,7	705,3	71,0	138,1	8,9
39	27,3	5,4	35,5	4,0	725,5	69,0	138,7	9,7
42	28,1	3,7	36,5	3,6	696,6	70,0	138,2	8,7

Вычисленные значения корректирующего коэффициента $K(Ra)$, максимальное значение коэффициента $K(Ra)_{\max}$, значения удельной эффективной активности $A(K(Ra))$ и $A(K(Ra))_{\max}$ при этих значениях корректирующего коэффициента будут иметь следующие значения

$$K(Ra) \pm \Delta K(Ra) \quad 1,21 \pm 0,41 \quad A(K(Ra)) \quad 139,4 \pm 17,2 \text{ Бк/кг}$$

$$K(Ra)_{\max} \quad 1,72 \quad A(K(Ra))_{\max} \quad 151,3 \pm 11,4 \text{ Бк/кг}$$

Табл. 8 - Зависимость активности радионуклида Ra-226 и удельной эффективной активности пробы "Песчано-щебеночные смеси из дробленного бетона и железобетона" от дня измерения (активность в Бк/кг)

Дни	A(Ra)	$\Delta A(Ra)$	A(Th)	$\Delta A(Th)$	A(K)	$\Delta A(K)$	Aэфф	$\Delta Aэфф$
0	37,0	4,2	51,1	5,1	803,4	78,0	175,7	10,5
4	37,1	3,8	53,1	5,3	787,4	79,0	177,0	10,6
7	38,4	6,1	49,2	4,9	804,9	78,0	174,8	11,3
11	37,4	5,6	51,9	5,1	775,3	78,0	174,6	11,2
14	35,6	5,4	51,0	4,9	789,9	74,0	173,0	10,7

Дни	A(Ra)	$\Delta A(Ra)$	A(Th)	$\Delta A(Th)$	A(K)	$\Delta A(K)$	Aэфф	$\Delta Aэфф$
18	35,8	6,7	50,9	5,6	781,3	76,0	172,3	12,0
21	36,1	4,9	51,9	5,0	798,9	80,0	175,5	10,9
29	36,2	6,5	52,7	5,9	778,9	77,0	174,8	12,2
32	37,0	7,7	50,3	4,4	787,9	73,0	173,3	11,6
36	38,9	4,0	49,3	4,9	783,3	78,0	173,5	10,3
39	38,7	5,4	46,7	4,5	807,4	81,0	172,1	10,8
42	39,6	5,9	47,1	4,7	787,2	77,0	171,7	11,0

Вычисленные значения корректирующего коэффициента $K(Ra)$, максимальное значение коэффициента $K(Ra)_{\max}$, значения удельной эффективной активности $A(K(Ra))$ и $A(K(Ra))_{\max}$ при этих значениях корректирующего коэффициента будут иметь следующие значения

$$\begin{array}{llll}
 K(Ra) \pm \Delta K(Ra) & 1,07 \pm 0,28 & A(K(Ra)) & 178,3 \pm 17,8 \text{ Бк/кг} \\
 K(Ra)_{\max} & 1,39 & A(K(Ra))_{\max} & 190,1 \pm 11,3 \text{ Бк/кг}
 \end{array}$$

Табл. 9 - Зависимость активности радионуклида Ra-226 и удельной эффективной активности пробы "Песок для строительных работ" от дня измерения (активность в Бк/кг)

Дни	A(Ra)	$\Delta A(Ra)$	A(Th)	$\Delta A(Th)$	A(K)	$\Delta A(K)$	Aэфф	$\Delta Aэфф$
0	19,0	1,9	22,8	2,5	560,1	57,0	99,0	6,4
4	18,9	2,5	22,5	2,5	560,9	56,0	98,6	6,5
7	18,8	3,5	23,2	3,0	561,1	54,0	99,5	7,1
11	19,1	3,0	21,5	2,6	585,0	55,0	99,7	6,7
14	20,7	3,5	21,8	2,1	558,5	54,0	99,3	6,6
18	21,7	3,3	23,0	2,9	530,9	50,0	99,4	6,7
21	21,3	3,5	23,4	2,5	543,7	54,0	100,7	6,8
29	21,2	2,6	23,4	2,3	554,1	58,0	101,5	6,6
32	21,0	3,0	23,2	2,5	559,7	56,0	101,5	6,7
36	21,5	3,4	23,9	2,1	546,6	55,0	101,8	6,6
39	20,6	3,3	24,8	2,6	550,9	52,0	102,4	6,6
42	21,0	3,0	24,0	2,6	560,3	55,0	102,6	6,7

Вычисленные значения корректирующего коэффициента $K(Ra)$, максимальное значение коэффициента $K(Ra)_{\max}$, значения удельной эффективной активности $A(K(Ra))$ и $A(K(Ra))_{\max}$ при этих значениях корректирующего коэффициента будут иметь следующие значения

$$\begin{array}{llll}
 K(Ra) \pm \Delta K(Ra) & 1,11 \pm 0,27 & A(K(Ra)) & 101,0 \pm 9,4 \text{ Бк/кг} \\
 K(Ra)_{\max} & 1,40 & A(K(Ra))_{\max} & 106,7 \pm 6,6 \text{ Бк/кг}
 \end{array}$$

Табл. 10 - Зависимость активности радионуклида Ra-226 и удельной эффективной активности пробы "Цемент" от дня измерения (активность в Бк/кг)

Дни	A(Ra)	$\Delta A(Ra)$	A(Th)	$\Delta A(Th)$	A(K)	$\Delta A(K)$	Aэфф	$\Delta Aэфф$
0	35,5	4,1	7,6	1,3	221,3	22,0	65,3	4,9
4	35,2	3,6	9,3	1,1	204,0	19,0	65,7	4,2
7	35,4	3,4	9,9	0,9	207,1	21,0	66,9	4,1
11	36,8	4,5	9,1	1,5	184,0	20,0	65,2	5,2
14	36,2	5,2	10,9	2,0	176,0	25,0	66,2	6,2
18	37,4	5,5	7,2	1,7	212,9	24,0	65,9	6,3
21	37,1	5,6	9,2	1,4	198,9	25,0	67,0	6,3
29	36,7	4,4	10,2	1,0	193,3	18,0	67,4	4,9
32	37,9	5,1	9,6	1,3	183,0	19,0	66,9	5,6
36	38,7	5,9	10,7	1,4	167,7	26,0	67,7	6,6

Дни	A(Ra)	$\Delta A(Ra)$	A(Th)	$\Delta A(Th)$	A(K)	$\Delta A(K)$	Aэфф	$\Delta Aэфф$
39	38,4	6,1	9,8	2,1	186,1	24,0	67,9	7,0
42	38,8	5,9	9,5	2,5	187,6	24,0	68,0	7,1

Вычисленные значения корректирующего коэффициента $K(Ra)$, максимальное значение коэффициента $K(Ra)_{\max}$, значения удельной эффективной активности $A(K(Ra))$ и $A(K(Ra))_{\max}$ при этих значениях корректирующего коэффициента будут иметь следующие значения

$$K(Ra) \pm \Delta K(Ra) \quad 1,09 \pm 0,29 \quad A(K(Ra)) \quad 68,6 \pm 15,1 \text{ Бк/кг}$$

$$K(Ra)_{\max} \quad 1,42 \quad A(K(Ra))_{\max} \quad 80,3 \pm 6,4 \text{ Бк/кг}$$

Для примера на рисунке 1 продемонстрировано в графической форме, как изменяется удельная активность радия-226 и удельная эффективная активность в пробе "Песок из дробленного бетона и железобетона" в зависимости от дня проведения измерений.

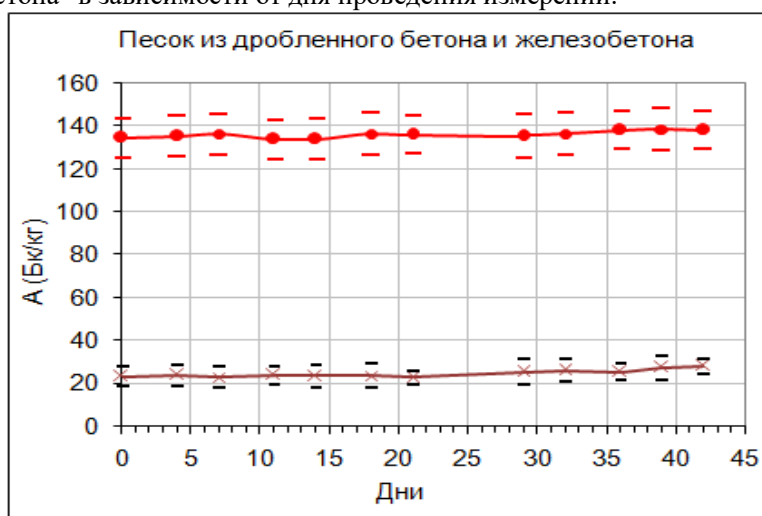


Рис. 1 – Зависимость активности радионуклида Ra-226 (нижняя линия) и удельной эффективной активности (верхняя линия) пробы "Песок из дробленного бетона и железобетона" от дня измерения (день 0 – первый день измерений)

Результаты расчета обоих вариантов значений корректирующих коэффициентов $K(Ra)$, соответствующие им расчетные значения эффективной удельной активности испытанных строительных материалов и изделий приведены в таблице 11. В этой таблице приведены для сравнения соответствующие экспериментальные значения эффективной удельной активности проб, определенные на 42-й день с начала измерений.

Табл. 11 - Сравнение результатов расчетов эффективной удельной активности, выполненных с использованием корректирующих коэффициентов $K(Ra)$ и $K(Ra)_{\max}$, с экспериментальными данными, полученными после 42-дневной выдержки образцов (активность в Бк/кг)

Проба	Aэфф (42 день)	$K(Ra)$	$A(K(Ra))$	$K(Ra)_{\max}$	$A(K(Ra))_{\max}$
Камни бетонные стеновые (шлакоблок-1)	157,1±9,5	1,03±0,27	155,5±17,2	1,34	166,9±10,7
Камни бетонные стеновые (шлакоблок-2)	167,9±10,8	1,17±0,29	173,5±18,0	1,50	185,4±11,3
Камни бетонные стеновые (шлакоблок-3)	262,3±16,6	1,17±0,34	257,0±29,2	1,56	277,3±17,7
Плиты бетонные тротуарные	240,7±14,3	1,13±0,30	242,4±29,3	1,49	262,3±17,8
Кирпич керамический	165,0±10,5	1,15±0,28	166,6±21,6	1,47	181,9±11,5

Проба	Аэфф (42 день)	K(Ra)	A(K(Ra))	K(Ra) max	A(K(Ra)) max
Щебень из дробленного бетона и железобетона	180,2±11,6	1,19±0,36	183,2±22,6	1,61	199,1±13,6
Песок из дробленного бетона и железобетона	138,2±8,7	1,21±0,41	139,4±17,2	1,72	151,3±11,4
Песчано- щебеночные смеси из дробленного бетона и железобетона	171,7±11,0	1,07±0,28	178,3±17,8	1,39	190,1±11,3
Песок для строительных работ	102,6±6,7	1,11±0,27	101,0±9,4	1,40	106,7±6,6
Цемент	68,0±7,1	1,09±0,29	68,6±15,1	1,42	80,3±6,4

Ориентируясь на максимальные значения корректирующего коэффициента $K(Ra)_{max}$ определим его среднее арифметическое значение - $\overline{K(Ra)}_{max} = 1,49$. Говоря о средних значениях набора из n данных, необходимо всегда учитывать и стандартное отклонение S , являющееся мерой того, насколько широко точки данных разбросаны относительно среднего значения

$$S = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_i (x_i - \bar{x}_i)^2}.$$

В нашем случае стандартное отклонение будет равно $S=0,03$.

Полученные результаты позволяют предположить возможные значения корректирующего коэффициента к удельной активности радия Ra-226, вводимого для учета радиоактивного равновесия с радием, порядка $K(Ra) = 1,5$.

References

1. NEA–OECD. Nuclear Energy Agency. Exposure to radiation from natural radioactivity in building materials. Report by NEA Group of Experts (Paris: OECD) Organization for Economic Cooperation and Development, Exposure to radiation from the natural radioactivity in building materials. OECD, Paris. (1979).
2. STUK, 2003. (Radiation and Nuclear Safety Authority) The radioactivity of building materials and ash. Regulatory Guides on Radiation Safety. (ST Guides) ST 12.2. Finland.
3. European Parliament, 2014. Council Directive 2013/59/Euratom of 5 December 2013 laying down basic safety standards for protection against the dangers arising from exposure to ionising radiation, and repealing Directives 89/618/Euratom, 90/641/Euratom, 96/29/Euratom, 97/43/Euratom a. Off J Eur Commun L13 1–73.
4. IAEA, 2014. Radiation Protection and Safety of Radiation Sources: International Basic Safety Standards. General Safety Requirements Part 3. 471.
5. Trevisi, R., Risica, S., D’Alessandro, M., Paradiso, D., Nuccetelli, C., 2012. Natural radioactivity in building materials in the European Union: A database and an estimate of radiological significance. J. Environ. Radioact. 105, 11–20. doi:10.1016/j.jenvrad.2011.10.001.
6. Hegedűs, M., Sas, Z., Tóth-Bodrogi, E., Szántó, T., Somlai, J., Kovács, T., 2016. Radiological characterization of clay mixed red mud in particular as regards its leaching features. J. Environ. Radioact. 162-163, 1–7. doi:10.1016/j.jenvrad.2016.05.002.
7. Sanitarnye normy, pravila i gigenicheskie normativy Respubliki Uzbekistan, SanPiN № 0193 06 "Normy radiacionnoj bezopasnosti (NRB-2006) i osnovnye sanitarnye pravila obespechenija radiacionnoj bezopasnosti (OSPORB-2006)". Respublika Uzbekistan, Tashkent. 2006.
8. Zhurakulov Sh.M., Mukhamedov A.K., Safarov A.A., Sharonov I.A. Ob uskorennoj ocenke radiacionnoj bezopasnosti stroitel'nykh materialov. Respublikanskaja nauchno-prakticheskaja konferenciya

"Aktual'nye problemy fiziki i ehkologii". 21-22 sentjabrja 2018 g. S. 58-60. Termez. 2018.

9. Safarov A.A., Muhamedov A.K., Sharonov I.A. On Possibility of Rapid Radiological Analysis of Construction Materials. The IX international conference "Modern problems of nuclear physics and nuclear technologies", 24-27 September 2019. Book of Abstracts, p. 295. Tashkent. 2019.

10. Kassandrova O.N., Lebedev V.V. Obrabotka rezul'tatov nabljudenij. M., Nauka, 1970.

UDK: 531.51

МЕЖМОЛЕКУЛЯРНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ МОЛЕКУЛ ПИРРОЛА И ЕГО РАСТВОРАХ. НЕЭМПИРИЧЕСКИЕ (AB INITIO) РАСЧЕТЫ

Г. Шарифов

Самаркандский государственный университет

ngayrat@rambler.ru

Аннотация. Образование димерных агрегатов в жидком пирроле, возможно путем взаимодействия водорода группы N-H одной молекулы с π -электронами пиррольного кольца другой молекулы. При этом в таком агрегате одна связь N-H оказывается задействованной в H-связи другая N-H связь свободна. В ИК спектрах и спектрах комбинационного рассеяния (КР) должны наблюдаться N-H колебанию две полосы. Выигрыш энергии при димеризации двух молекул пиррола 10.9 кДж/моль. В смеси пиррол-ацетонитрил также образуются димеры из разнородных молекул. Так же как при образовании димера ацетонитрила, в спектрах КР полоса $C\equiv N$ агрегатов появляется с низкочастотной стороны $C\equiv N$ колебания мономерной молекулы. Это свидетельствует о том, что в образовании H-связи участвуют π -электроны ацетонитрила, $C\equiv N$ связь ослабевает. Выигрыш энергии при образовании димера пиррол-ацетонитрил 11.8 кДж/моль.

Ключевые слова: водородная связь, неэмпирические расчеты, колебания атомов в молекула, π -электроны, выигрыш энергии при агрегации.

Intermolecular interactions of pyrrole molecules and its solutions. Ab initio calculations

Abstract. The formation of dimeric aggregates in liquid pyrrole is possible through the interaction of the hydrogen of the N-H group of one molecule with π -electrons of the pyrrole ring of another molecule. At this, in such aggregate one N-H group participates in H-bonding, and the other N-H group is free. In IR absorption spectra and in spectra of Raman scattering (RS) one should observe two bands for N-H vibration. The energy gain in the process of dimerization of two molecules of pyrrole is 10.9 kJ/mol. Dimers of dissimilar molecules can also be formed in a mixture of pyrrole-acetonitrile. Just as the formation of a dimer of acetonitrile, in the Raman spectra the $C\equiv N$ band of aggregates appears at a low-frequency side of $C\equiv N$ vibrations of the monomer molecule. This indicates that π -electrons of acetonitrile are involved in the formation of H-bond, and $C\equiv N$ bond is weakened. The energy gain in the formation of pyrrole-acetonitrile dimer is 11.8 kJ/mol.

Keywords: hydrogen bond, ab initio calculations, vibrations of atoms in a molecule, π -electrons, energy gain during aggregation.

Пиррол молекуласи ва унинг эритмаларида молекулалараро ўзаро таъсирлар. Ноэмпирик ҳисоблашлар

Аннотация. Суюқ пирролда димер агрегатлар бир молекуланинг N-H гуруҳи водородининг бошқа молекула пиррол ҳалқасининг π -электронлари билан ўзаро таъсири натижасида ҳосил бўлиши мумкин. Бундан ташқари, бундай агрегатда H-боғланишда битта N-H боғланиш иштирок этади, иккинчисида N-H боғланиш эса эркин. ИҚ ва КС спектрларида N-H тебраниши учун иккита полоса кузатилиши керак. Димер ҳосил бўлиш энергияси 10,9 кЖ/моль. Пиррол-ацетонитрил аралашмасида бир-бирига ўхшамайдиган молекулаларнинг агрегациялари ҳам ҳосил бўлади. Ацетонитрил димерининг ҳосил бўлишида бўлгани каби, КС спектрларида ҳам мономер молекуласининг $C\equiv N$ тебранишининг паст частотали қисмида агрегатларнинг $C\equiv N$ полосаси пайдо бўлади. Бу шундан далолат берадики, ацетонитрилнинг π -электронлари H-боғланишнинг ҳосил бўлишида иштирок этади, $C\equiv N$ боғланиш эса сусаяди. Пиррол-ацетонитрил димерининг ҳосил бўлиш энергияси 11,8 кЖ/моль.

Калит сўзлар: водород боғланиш, ноэмпирик ҳисоблашлар, молекулада атомлар тебраниши, π -электронлар, агрегация ҳосил бўлиш энергиялари.

Введение

Моноароматические углеводороды обычно относятся к так называемым соединениям опасность летучих ароматических соединений, которые представляют собой бензол, толуол, этилбензол и ксилолы (орто-, мета-, пара-изомеры); законы и рекомендации по охране окружающей среды учитывают их. Помимо интенсивного использования топлива, моноароматические углеводороды играют важнейшую роль в промышленности, поскольку они используются в качестве сырья и растворителей во многих областях [1–2].

Различные спектроскопические инструменты, такие как ядерный магнитный резонанс [3], электронная и колебательная спектроскопия [4–6], обычно использовались для определения характеристик структуры этих соединений.

В одной из предыдущих статей [7], касающейся агрегатов, образованных молекулами ацетонитрила, было сделано предположение, что полоса агрегатов ацетонитрила может появиться как с высокочастотной, так и низкочастотной стороны полосы $C\equiv N$ колебаний. Если в образовании агрегатов участвуют π -электроны, тогда полоса агрегатов появляется с низкочастотной стороны полосы. Если же агрегаты ацетонитрила с протонодонорными молекулами образуются другим путем, то полоса $C\equiv N$ этих агрегатов появляется с высокочастотной стороны. Связь π -электронов при этом укрепляется. Такой вывод был сделан на примере димерных агрегатов ацетонитрила, когда π -электроны одной молекулы ацетонитрила образуются с использованием π -электронов (Н-связь) с одним из атомов водорода метильной группы другой молекулы ацетонитрила. Низкочастотная асимметрия $C\equiv N$ полосы чистого жидкого ацетонитрила связана, на наш взгляд, с наличием низкочастотной полосы агрегатов димеров ацетонитрила. В настоящем сообщении будет дан еще один пример, подтверждающий высказанную выше идею. Речь идет о квантово-химических расчетах взаимодействия молекул: о взаимодействии двух молекул пиррола и о взаимодействии ацетонитрила с пирролом. Расчет проведен по программе Gaussian-98W в приближении RHF с набором гауссовских функций 6-31G++(d,p). Во взаимодействии этих молекул принимают участие π -электроны ацетонитрила и пиррола, и образуются димерные агрегаты.

В нескольких словах о литературных данных. В работе Петрова, Елсакова и Лебедева [8] методом ЯМР было установлено, что пиррол при взаимодействии с фенил-винил-ацетиленом и диацетиленом вызывает смещение химического сдвига ацетиленового протона в сторону высоких полей, так же как это имеет место, например, в случае известной системы бензол-хлороформ. Изучение этими же авторами спектров инфракрасного поглощения этих систем показало, что в растворах происходит смещение полосы валентных колебаний $\equiv C-H$ в сторону низких частот. Результат объяснен авторами «включением» ацетиленовых протонов в цикл и влиянием на них кольцевого тока.

При изучении ИК – спектров поглощения ряда производных пиррола в растворах с хлороформом [9] и рассматривая влияние характера заместителей в пиррольном ядре на прочность водородной связи, авторы обнаружили две полосы N-H колебания. Одна из них – высокочастотная, соответствовала колебаниям свободной группы N-H, а другая – низкочастотная и более широкая, отвечала колебаниям ассоциированной группы N-H. Пиррол и его растворы были изучены также в [10–12]. Пиррол и дейтеропиррол в кристаллическом состоянии были изучены в [13].

Образование водородной связи и вообще образование комплексов должно сказываться на вращательной подвижности молекул. Действительно, увеличение размеров переориентирующихся частиц должно привести к уменьшению скорости переориентации. Поскольку со скоростью переориентации частиц связана ширина линии релеевского анизотропного рассеяния света, то образование водородной связи должно сказываться на ширине линии рассеяния. В [14] было определено уширение анизотропной составляющей линии релеевского рассеяния пиррола и его растворов с хлороформом. Линия рассеяния сужалась, время релаксации увеличивалось.

Расчеты

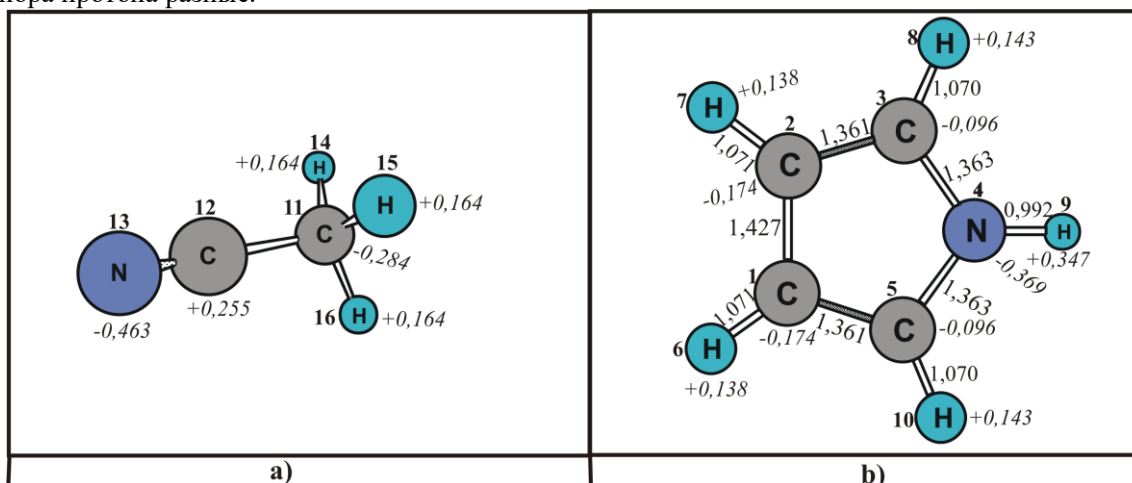
Квантово-химические расчеты были проведены в приближении RHF с набором гауссовских функций 6-31G++(d,p) [15] для изолированных мономерной молекулы пиррола, ацетонитрила, димерного агрегата пиррола и димерного агрегата пиррол-ацетонитрила.

Результаты расчетов и их обсуждение

В статье [14] было изучено по спектрам комбинационного рассеяния (КР) межмолекулярное взаимодействие в пирроле и его растворах с протонодонорными и нейтральными растворителями. Результаты были следующие: пиррол может образовывать молекулярные агрегаты и в чистой

жидкости и протодонорными растворителями. Однако механизм молекулярной агрегации и структура агрегатов оставалась неясной. В данном сообщении, используя квантово-химические расчёты, мы выяснили некоторые вопросы структуры агрегатов и механизм взаимодействия молекул. Прежде всего об агрегатах в чистом пирроле. Как показали расчеты, в чистом пирроле могут образовываться димерные агрегаты, причем агрегаты образуются не путем взаимодействия атома водорода группы N-H одной молекулы с атомом азота другой молекулы, а путем взаимодействия атома водорода группы N-H одной молекулы с π -электронами кольца соседней молекулы. На рис.1 представлена структура димерного агрегата пиррола. Как видим, атом водорода группы N-H ориентируется приблизительно в середину пиррольного кольца соседней молекулы. Расстояния от этого атома водорода до атомов кольца соседней молекулы имеют значения: $H^{19}-C^1 - 2.842 \text{ \AA}$, $H^{19}-C^2 - 2.842 \text{ \AA}$, $H^{19}-C^3 - 2.951 \text{ \AA}$, $H^{19}-N^4 - 3.009 \text{ \AA}$, $H^{19}-C^5 - 2.950 \text{ \AA}$. Атом водорода, таким образом, расположен ближе к атомам C^1 и C^2 (здесь и далее номера атомов такие же как на рисунках). Такая ориентация молекул связана с тем, что атом водорода группы N-H взаимодействует с π -электронами кольца соседней молекулы и, кроме того, имеет место действие стерического фактора. Отметим, что в таком димерном агрегате, связь N-H одной молекулы задействована во взаимодействие с π -электронами, а другая N-H связь (соседней молекулы) оказывается свободной. Отсюда для димерного агрегата пиррола в спектрах КР должны наблюдаться две полосы N-H колебаний (см. [9]). Одна полоса должна соответствовать N-H группе, являющейся донором протона, другая полоса соответствует свободному атому водорода соседней молекулы. Расчеты показали, что в первом случае N-H колебанию соответствует полоса, смещенная по сравнению с мономерной молекулой в низкочастотную область на 37 см^{-1} (в димере 3896 см^{-1} , в мономере 3933 , расчет), другая полоса свободному атому водорода 3927 см^{-1} (смещение по сравнению с частотой мономера на 6 см^{-1}).

В чистой жидкости очевидно возможны и мономерные молекулы, поэтому в этом случае мы должны иметь сложную полосу N-H колебаний, состоящую из полосы мономерной молекулы и двух полос димерного агрегата (расчетное значение полосы мономерной молекулы 3933 см^{-1}). Энергия образования димера 10.9 кДж/моль . В димерном агрегате пиррола ни в молекуле донора протона, ни в молекуле акцептора протона существенных изменений длин связей не происходит, однако распределение зарядов претерпевает существенное изменение, причем разное для молекулы акцептора протона и для молекулы донора протона. В молекуле донора протоны и электроны молекулы стягиваются в область расположения атома азота, хотя заряд самого атома азота уменьшается (в мономере -0.369 , в димере -0.275), увеличиваются сильно отрицательные заряды ближайших к атому азота атомов углерода (в мономере заряды этих атомов -0.096 , в димере -0.205), увеличивается положительный заряд активного атома водорода этой молекулы (в мономере $+0.347$, в димере $+0.422$). В акцепторе протона заряд атома азота в димере меняется значительно (в мономере -0.369 , в димере -0.360). Заряды атомов углерода, ближайших к атому азота, увеличиваются до -0.137 (в мономере -0.096), заряды оставшихся атомов углерода увеличиваются до -0.190 (в мономере -0.174), наконец, заряд атома водорода, связанного с атомом азота, увеличивается до $+0.361$ (в мономере $+0.347$). Как видим, распределения зарядов для случая акцептора протона и донора протона разные.



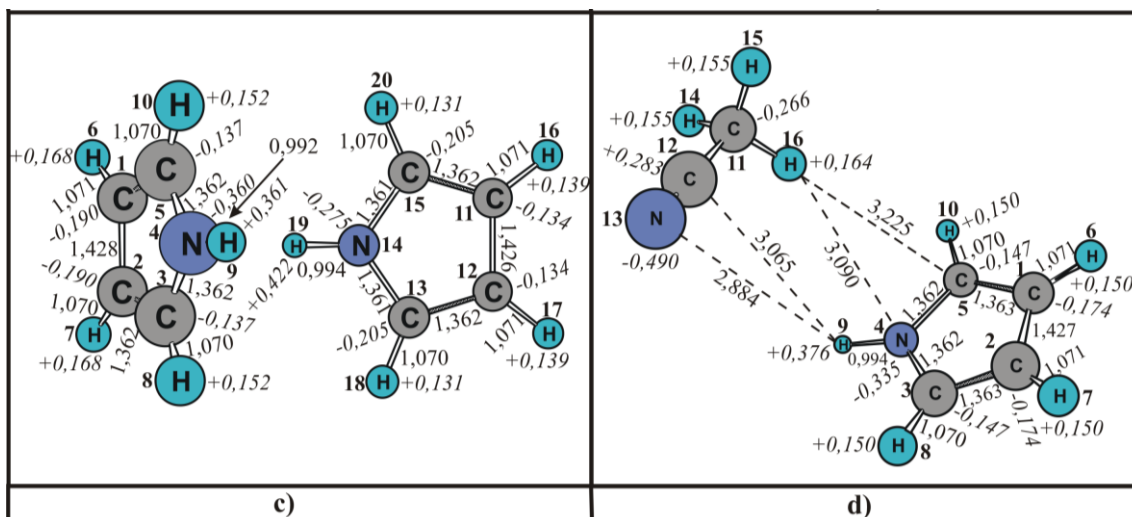


Рис.1. Расчетные структуры (RHF 6-31G++(d,p)) а) мономер ацетонитрила, б) мономер пиррола, в) димерного агрегата пиррола, г) димерного агрегата пиррол-ацетонитрила.

Как и в других случаях, связанным колебаниям характерно расщепление других полос на две полосы, различие частот которых $10-12 \text{ см}^{-1}$. Как уже говорилось N-H колебаниям в димере также соответствуют две полосы, причем акцептору протона соответствует линия 3927.1 см^{-1} , донору протона 3896.9 см^{-1} . Взаимным колебаниям молекул соответствуют полосы, расположенные в области $20-70 \text{ см}^{-1}$ (а именно $17.7, 26.8, 27.5, 53.7, 57.8$ и 67.2 см^{-1}).

Как видно из вышеизложенного, пиррол сам по себе интересный объект исследования. Не менее интересные результаты были получены путем расчетов при изучении спектров КР растворов пиррол-ацетонитрил. Энергия образования агрегата пиррол-ацетонитрил, согласно нашим расчетам (см. ниже), 11.8 кДж/моль . На рис.1 приведена расчетная структура такого агрегата, а также структура мономеров ацетонитрила и пиррола. Как видно из рисунка, атом водорода H^9 пиррола взаимодействует с π -электронами азота молекулы ацетонитрила, расстояние между этими атомами 2.884 \AA . Отметим, что участником связи $\text{C}\equiv\text{N}$ является также атом углерода C^{12} , расстояние H^9 до C^{12} 3.065 \AA . И атом азота N^{13} , и атом углерода C^{12} ацетонитрила и атом водорода связи N-H⁹ пиррола увеличивают свои заряды по сравнению с мономерной молекулой: отрицательный заряд атома азота ацетонитрила увеличивается до -0.490 (в мономере -0.463), положительный заряд H^9 увеличивается до $+0.376$ (в мономере $+0.347$), при этом длина связи N-H⁹ увеличивается до 0.994 \AA (в мономере 0.992 \AA). Увеличивается и положительный заряд атома углерода C^{12} – до $+0.283$ (в мономере $+0.255$). Кроме того, имеет место взаимодействие атома H^{16} ацетонитрила с атомом азота пиррола, расстояние между этими атомами 3.090 \AA . Заряд атома H^{16} больше по сравнению с атомами H^{14} и H^{15} – $+0.164$ (в мономере заряд атомов водорода $+0.164$), в то время как в агрегате заряды атомов H^{14} и H^{15} уменьшается до $+0.155$ (в мономере $+0.164$). Таким образом, в агрегате две водородные связи, одна из них между водородом H^9 и π -электронами азота, другая между атомом H^{16} ацетонитрила и электронами связи C-N молекулы пиррола. Димер довольно устойчивый. Дипольный момент агрегата 2.61 D , в то время как дипольный момент ацетонитрила 4.23 D , а пиррола 1.93 D (расчет). Молекулы частично компенсируют дипольные моменты, и в результате дипольный момент агрегата уменьшается по сравнению с суммой дипольных моментов взаимодействующих молекул. Изменяется картина колебательных движений молекул. Появляются ряд полос межмолекулярных и совместных колебаний от 27 см^{-1} до 78 см^{-1} (всего 6 частот). Интенсивность этих полос в спектрах КР мала и в пределах крыла линии Релея они едва ли разрешимы. В спектрах ИК некоторые из этих полос скорее всего можно зарегистрировать. Что касается внутримолекулярных колебаний то в большинстве случаев частоты их незначительно изменены либо в большую сторону, либо в меньшую сторону (но незначительно) для той и другой молекулы. Отдельно обстоит дело с колебаниями $\text{C}\equiv\text{N}$ ацетонитрила и N-H пиррола. Интересные результаты имеют место для $\text{C}\equiv\text{N}$ колебаний ацетонитрила. Эксперимент дает для этого колебания жидкого ацетонитрила 2254 см^{-1} [14], расчетные значения этого колебания для мономерной молекулы 2605.5 см^{-1} , для агрегата ацетонитрил-пиррол 2598.5 см^{-1} , т.е. имеет место низкочастотный сдвиг, очень похожий на низкочастотный сдвиг в димере ацетонитрила [7]. Учитывая взаимную ориентацию молекул можно сказать, что имеет место взаимодействие атома

водорода H^{δ} с π -электронами ацетонитрила. Т.о. высказанная в [7] идея о низкочастотном смещении частоты $C\equiv N$ в димере ацетонитрила подтверждается.

Несколько слов о $N-H^{\delta}$ колебаниях пиррола. В мономерной молекуле этому колебанию в спектре КР соответствует полоса 3933.1 см^{-1} , димерному образованию пиррола 3896.9 и 3927.1 см^{-1} , агрегату ацетонитрил-пиррол 3911.7 см^{-1} . И в случае димера пиррол-ацетонитрил имеет место низкочастотный сдвиг на 21.4 см^{-1} .

Выводы:

- В жидком пирроле могут образовываться димерные агрегаты путем образования водородной связи с участием водорода группы $N-H$ одной молекулы и π -электронами кольца пиррол другой молекулы, при этом атом водорода $N-H$ донора протона ориентируется ближе к атомам углерода наиболее удаленных от атома азота акцептора протона.

- При образовании димера из молекул пиррола оказывается, что одна из связей $N-H$ задействована в водородной связи, другая $N-H$ связь (акцептора протона) свободна. Расчеты показывают, что в спектрах КР и ИК в этом случае должны наблюдаться две полосы $N-H$ колебаний, обе смещены в сторону меньших частот по сравнению с мономерной молекулой. Наибольшее смещение должно соответствовать активной $N-H$ связи, малое смещение – свободной $N-H$ связи акцептора протона.

- В смеси пиррол-ацетонитрил также образуются димерные агрегаты, причем колебанию $C\equiv N$ ацетонитрила соответствует полоса, волновое число которой меньше частоты мономера этой молекулы. Картина здесь похожа на поведение $C\equiv N$ колебания димера ацетонитрила. Водородная связь ацетонитрила с пирролом образуется с участием π -электронов ацетонитрила. Связь $C\equiv N$ ослабляется.

Благодарности: Работа поддержана фондом фундаментальных исследований Республики Узбекистан, грант № ОТ-Ф2-40.

Литература

1. S. J. Lawrence, in Description, properties, and degradation of selected organic volatile compounds detected in ground water – A review of selected literature, U. S. Geological Survey, 2006, <http://pubs.usgs.gov/ofr/2006/1338>.
2. World Health Organization, 'Guidelines for Drinking Water Quality', 3rd edn, Geneva, 2008.
3. Günther H. NMR Spectroscopy Basic Principles, Concepts and Applications in Chemistry. New York: Wiley, 2013.
4. Scott AI. Interpretation of Ultraviolet Spectra of Natural Products. Amsterdam: Elsevier, 2013.
5. Lakowicz JR. Principles of Fluorescence Spectroscopy. New York: Springer, 2006.
6. Butler HJ, Ashton L and Bird B et al. Using Raman spectroscopy to characterize biological materials. Nat Protoc 2016; 11: 664–687.
7. F.H. Tuxvatullin, A. Jumabaev, G.Muradov, H.A. Hushvaktov, A.A. Absanov // J. Raman spectroscopy, 2005, V.36, Issue 10. P. 932-937.
8. А.А.Петров, Н.В.Елсаков, В.Б.Лебедев // Опт. и спектр., 1964, 17, С.679.
9. Л.Д.Мирошниченко, Р.П.Евстигнеева, Н.А.Преображенский // ЖОХ, 1963. 33, 9. P.2885.
10. Frutos L.M., Markmann A., Sobolewski AL, Domcke W // J. Phys Chem. B. 2007. Vol.111.PP.6110–6112.
11. [Zhenggang Lan](#), [Luis Manuel Frutos](#), [Andrzej L. Sobolewski](#), and [Wolfgang Domcke](#) // PNAS, 2008, Vol.105, 35, P.12707-12712.
12. Ishwar Das, Namita R. Agrawal, Sanjeev Kumar Gupta, Sujeet Kumar Gupta, and R. P. Rastogi // J. Phys. Chem. A 2009, 113, P. 5296–5301.
13. A.Lautie and F.Romain // J. Raman spectroscopy, 1990, V.21, P. 453-457.
14. Э.В.Сагитова, А.К.Атаходжаев, Ф.Х.Тухватуллин. Материалы 2-ой межвузовской научной конференции. Самарканд. 1966. С.56-61.
15. M.J.Frisch, G.W.Trucks, H.B.Schlegel, Gaussian 98. – Gaussian, Inc., Pittsburgh PA, 1998.

UDK: 530.12

RAMAN SCATTERING SPECTRA OF α -ALANINE MOLECULAR COMPLEXES**H. Hushvaktov***Samarkand State University
hakimxushvaqtov@gmail.com*

Abstract. The article presents the results of studying the complexity of the Raman spectra of α -alanine in the crystalline state. It has been shown by *ab initio* calculations that the change in the Raman spectra is explained by the formation of several types of hydrogen bonds. In Raman spectra, the presence of a hydrogen bond between molecules is manifested in the form of asymmetry and splitting of vibrational bands.

Keywords: Alanine, hydrogen bonding, Raman spectr, molecular complexes, aggregate structure, *ab initio* calculations

Спектры комбинационного рассеяния молекулярных комплексов α -аланина

Аннотация. В статье приводятся результаты исследования сложность спектров комбинационного рассеяния α -аланина в кристаллическом состоянии. Неэмпирическими расчетами показано, что изменение спектров комбинационного рассеяния объясняется образованием нескольких типов водородной связи. В спектрах комбинационного рассеяния наличие водородной связи между молекулами проявляются в виде асимметрии и расщепления колебательных полос.

Ключевые слова: Аланин, водородная связь, КР спектры, структура агрегатов, коэффициент деполяризации, неэмпирические расчеты.

 α -аланин молекуляр комплексларининг комбинацион сочилиш спектрлари

Аннотация. Ушбу мақолада кристалл ҳолатида бўлган α -аланин молекуласининг комбинацион сочилиш спектрлари мураккаблигини ўрганиш натижалари келтирилган. Неэмпирик ҳисоблашлар натижасида комбинацион сочилиш спектрларидаги ўзгаришлар бир неча турдаги водород боғланишлар ҳосил бўлиши билан тушунтирилган. Молекулалараро водород боғланиш комбинацион сочилиш спектрларида асимметрия кўринишида намоён бўлиши кўрсатиб ўтилган.

Калит сўзлар: Аланин, водород боғланиш, КС спектри, агрегатлар тузилиши, кутбсизланиш коэффициенти, неэмпирик ҳисоблашлар.

Introduction

Amino acids are carboxylic acids in which the hydrogen atom in the radical is replaced by an amino group - (NH₂)-(CH-R)-COOH. Alanine has two centers that can form a hydrogen bond through the hydroxyl group as a proton donor and through the NH₂ group as a proton acceptor. Studies of the vibrational spectra of amino acids using Raman spectroscopy show that the formation of molecular complexes through intermolecular hydrogen bonds leads to a change in the spectral parameters of interacting molecules [1-2]. In these spectral studies much attention is paid to the region of intramolecular interactions, in which the vibrational degrees of freedom of amino acid residues are manifested, as well as the vibrations of the C-H and N-H groups [3].

Literature data show that it is not reliably determined whether the regularities in frequency shifts, broadening, change in the integral intensity during the formation of hydrogen bonds are observed in vibrational spectra [4]. An analysis of a number of experimental data shows that the Raman spectrum of the amino acid exhibits a line with a frequency of 1650 cm⁻¹ characteristic of the carboxyl group and intense lines with a frequency of 3380 cm⁻¹, and for the amino group NH₂ vibrations with a frequency of 3340 cm⁻¹. In this work, *ab initio* calculations were carried out in order to consider in more detail the possibility of the formation of aggregated intermolecular complexes in the liquid crystalline state of α -alanine.

Experimental technique

The Raman spectra of alanine crystals were recorded on a Thermo Nicolet 6700 FTIR/FT-Raman spectrometer with a Raman attachment and OMNIC software. The spectra were taken at two excitation wavelengths $\lambda = 514$ nm and $\lambda = 488$ nm and are identical. *Ab initio* calculations of the optimized structure of the α -alanine molecule and its complex were carried out using the RHF, B3LYP, MP methods using the 6-31G ++ (d, p) Gaussian function basis for the monomer and other high molecular weight isolated clusters of alanine molecules [5].

Results and discussion

Figure 1 shows the Raman spectrum of α -alanine in the region $00\div 4000\text{ cm}^{-1}$ is. It follows from the figure that the Raman spectrum of α -alanine is a complex band. Analysis of the band complexity in the region $2800\div 3200\text{ cm}^{-1}$ allows understanding the mechanism of molecular complex formation. As can be seen from the figure, this complex band refers to symmetric and antisymmetric O-H and N-H vibrations of alanine molecules. There are various assumptions regarding the composition of this complex band [1, 6-8].

Analysis of the band shape in the $2800\div 3200\text{ cm}^{-1}$ region shows that the features of the observed O-H and N-H band of alanine vibrations can be easily explained if we assume that the observed band consists of several bands with different values of the depolarization ratio, which is in satisfactory agreement with the data [1, 2]. It is known that the process of vibration and translational motion of individual parts of alanine molecules is accompanied by the appearance of dipole moments of molecules [2].

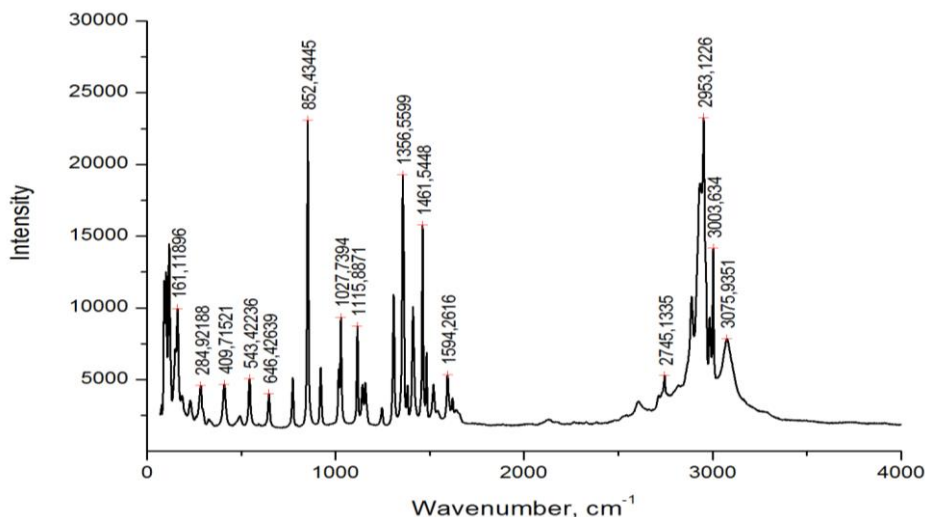


Figure 1: Raman spectra of α -alanine crystals.

For the case of alanine, the difference between the maxima of the O-H and N-H vibrations is about 50 cm^{-1} . If we isolate it from the general band, then the bands of O-H and N-H vibrations of alanine will consist of symmetric and asymmetric vibrations with different depolarization ratios (Fig. 2).

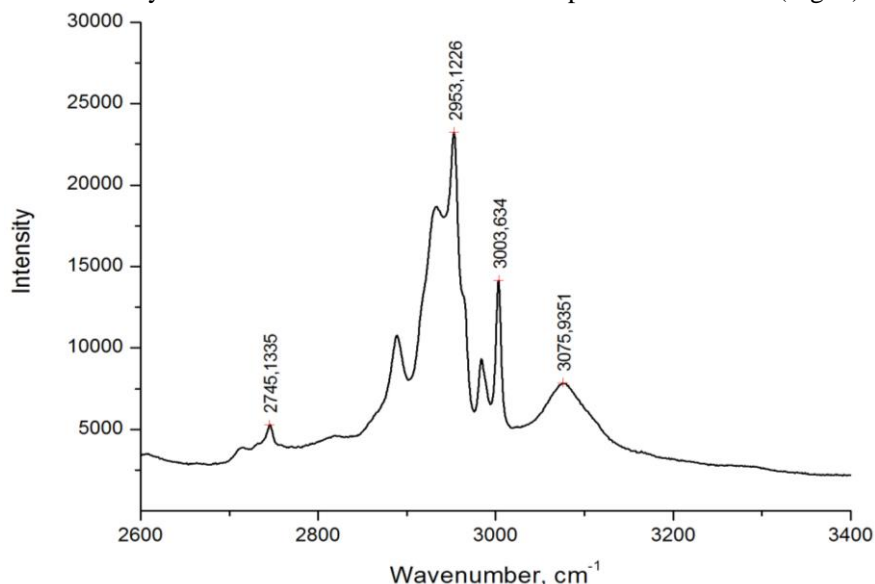


Figure 2: Raman spectrum of the band related to O-H and N-H vibrations of α -alanine crystals.

In Fig.2 it can be seen that the bands of O-H and N-H vibrations are complex, they consist of several bands in the region of $2800\div 3200\text{ cm}^{-1}$. In Raman spectra of alanine, as a rule, the scattering cross section of symmetric bands is larger than that of antisymmetric ones. The degrees of depolarization ratios of these bands in the Raman spectra are different: the high-frequency band (antisymmetric vibration) is

depolarized, the low-frequency band (symmetric vibration) is polarized. The difference in band frequencies is about 100 cm^{-1} . It should be noted that this value is significantly (almost two times) less than the difference in the frequencies of the components of the complex band.

If we assume (Fig.2) that the broad band with a frequency of 3075.9 cm^{-1} belongs, respectively, to O-H vibrations (stretching and bending vibrations, then a wide band with a frequency of 2953.1 cm^{-1}) and antisymmetric (bending) vibrations of the NH_2 group. It is known from the literature [9] that O-H vibrations correspond to a band with a frequency of 3600 cm^{-1} and N-H vibrations correspond to a band with a frequency of 3300 cm^{-1} .

In our case, with the appearance of a strong hydrogen bond, the O-H vibration band shifts by 524.1 cm^{-1} and the N-H vibration band shifts by 346.9 cm^{-1} to the low-frequency side and, accordingly, the half-width of these bands changes. As a result in the spectra of Raman scattering in this region there is a complex band consisting of four closely spaced bands.

It follows from this that alanine contains complex, long-lived molecular complexes. The presence of such a change is evidenced by spectroscopic data. The entire complex band in the range of $2800 - 3300\text{ cm}^{-1}$ in the spectrum is due to the superposition of several bands corresponding to "symmetric" (weakly depolarized component) and "antisymmetric" (depolarized component) vibrations. The concepts of "symmetric" and "antisymmetric" vibrations refer to a single molecule of alanine, with the aggregation of molecules these concepts lose their meaning, but vibrations of this type should remain, the definition of the concept in the future should be understood with this remark in mind [10-11].

In this work, we carried out *ab initio* quantum-chemical calculations, optimization of the density functional theory method for α -alanine molecules in order to further simulate complex aggregate states, provided that sufficiently accurate results are obtained in the shortest time.

The observed changes in the intensity are interpreted as due to the additional contribution of the charge transfer of the electronic excited state arising from the formation of hydrogen bonds. With a change in polarizations and temperature, the spectral bandwidth changes, respectively, the relaxation time fits with the change in the movement of molecules with hydrogen bonds [12].

In order to estimate the relative changes in the Raman spectra corresponding to "symmetric" and "antisymmetric" vibrations, to calculate the degrees of depolarization of the bands that appear as a result of the aggregation of alanine molecules into clusters, we performed *ab initio* calculations. Intramolecular transfer of a proton from oxygen to nitrogen atoms in the amino acid alanine was studied by the methods HF/6-31G*, B3LYP/6-31++G** and MP2//6-31++G**.

Alanine clusters were studied using wave function, geometric optimization and molecular dynamics to find the optimal value and the most suitable potential. In addition, the energies of intermolecular hydrogen bonds were calculated and to determine their geometric parameters, we carried out *ab initio* calculations of up to 5 molecules of alanine. After optimization of the geometry of the clusters, their geometric parameters were determined (Fig.3.).

The optimized structure of isolated dimeric alanine aggregates is observed in two forms, which can be conventionally called closed and open forms. In the first form of the dimeric aggregate, two intermolecular (OHO) and two intramolecular (NHO) hydrogen bonds are observed (Fig.3). Calculations show that the length of the intermolecular hydrogen bond is 1.68 \AA , for the intramolecular hydrogen bond this distance is 2.37 \AA , respectively, the energy of formation is 35 kcal/mol .

Alanine molecules can form a dimeric aggregate through a non-classical (weak) hydrogen bond. In this case, the intermolecular bond is formed with the help of the COH group and the N molecules of the second molecule. The length of this bond is 1.74 \AA ; the energy of formation of this cluster is 12 kcal/mol . These two types of aggregates are the main material for the crystalline structure of alanine. Three alanine molecules form a chain aggregate using the intermolecular hydrogen bond of the COH group. The length of the intermolecular hydrogen bond is 1.87 and 1.88 \AA , respectively, the energy of formation of such an aggregate is 2.51 kcal/mol .

In the Raman spectra of dimers of alanine molecules we observe a shift of the OH vibration bands, which is 617 cm^{-1} due to the strong hydrogen bond. No significant changes are observed in the NH band. This can be explained by the existence within the molecular hydrogen bond forming with the help of the NH_2 group. The band participating in the intermolecular OH bond shifts towards low frequencies by 804.6 cm^{-1} , which confirms the above assumption. For this aggregate, the band of interacting OH vibrations is shifted towards low frequencies by 191.2 cm^{-1} and 225.6 cm^{-1} (3562.3 and 3529.1), respectively. For the band corresponding to NH vibrations, no significant changes are observed.

From our calculations, it can be seen that alanine molecules form aggregates of different types, while due to the O-H hydrogen bond, the band is shifted from $\sim 3550\text{ cm}^{-1}$ to $\sim 2950\text{ cm}^{-1}$. In this case, the

half-width and intensity increase. In addition, the C = O vibration band also shifts to the low-frequency side by $40\div 50\text{ cm}^{-1}$. In the case of isolated molecules (monomer) of alanine in the Raman spectra, we observe (Fig. 3) a band of OH vibrations (3754.7 cm^{-1}), a band related to symmetric (3506.3 cm^{-1}) and antisymmetric (3590.1 cm^{-1}) vibrations of the NH_2 group.

With an increase in the number of molecules in a cluster, the energy of intermolecular interaction per hydrogen bond is saturated. Raman spectra allow us to consider the change in the vibration frequency with an increase in interconnected molecules (Fig.4).

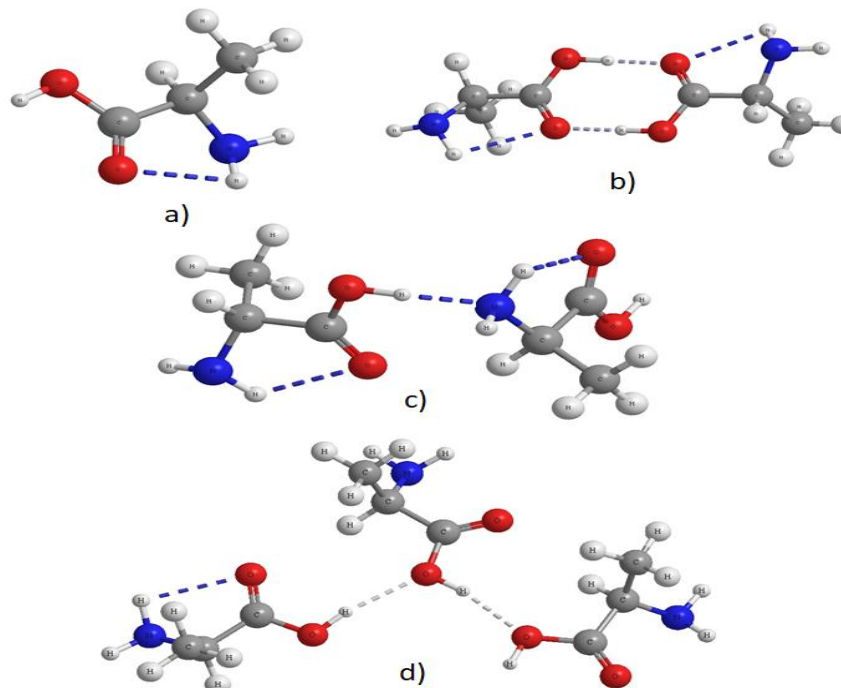


Figure 3: The structure of an isolated alanine molecules a) monomer; b) dimer; c) dimer; d) trimer.

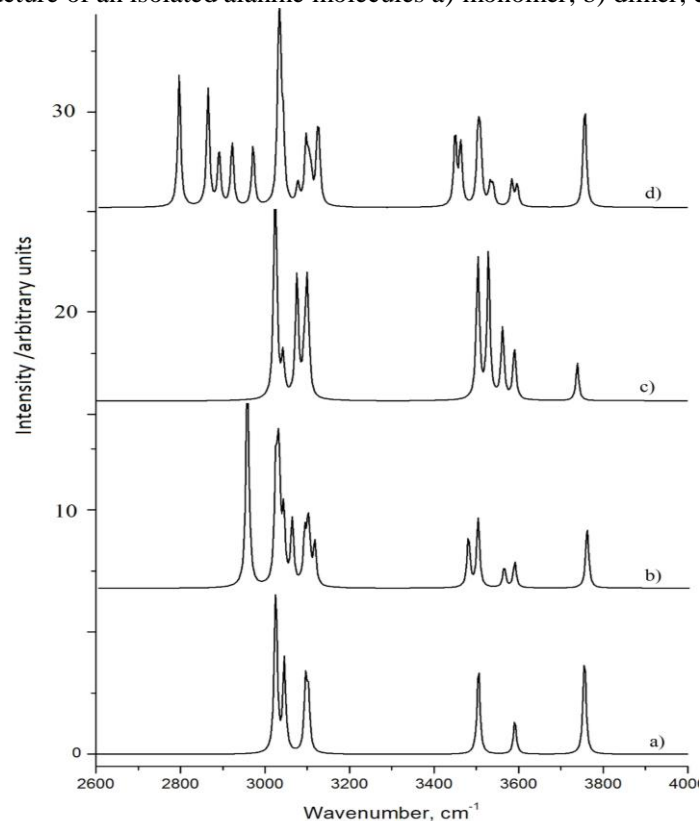


Figure 4: Calculated spectra of C-H, O-H and N-H vibrations of α -alanine Raman scattering for various aggregated formations (a) monomer, b) dimer, c) trimer, d) tetramer)

The bands of NH and OH vibrations lie in the high-frequency side, since the molecules turned out to be bound, then each vibration split into several vibrations, namely in the region of bending vibrations and in the region of stretching vibrations with depolarization coefficients, respectively. Above, we showed that with an increase in the number of molecules in clusters, the bands shift to the low-frequency side, which means that there are stable molecular clusters in alanine.

The hydrogen atom in the N-H group of the alanine molecule is actively involved in the formation of a hydrogen bond. The results of experimental studies and *ab initio* calculations show that dimeric, trimeric and other chain molecular complexes exist in alanine. The complexes formed due to the hydrogen NH₂ bond are weaker than those formed due to the OH bond.

Conclusions

In this work, the role of hydrogen bonds in the crystallization of alanine, which includes the carboxyl COOH and amino NH₂ groups, and the manifestation of these intermolecular interactions in the Raman spectra are determined. The structures and binding energies of molecular aggregates of α -alanine were studied using modern density functional methods, the processes of vibrational and translational movements of individual parts of amino acid molecules. Intramolecular hydrogen bond is formed in proteins between the NH and CO groups of adjacent helix turns, thereby ensuring the stability of the secondary structure of the protein.

The change in the Raman spectra is explained by the formation of several types of hydrogen bonds. These hydrogen bonds play a special role in the formation of the crystal structure of α -alanine. When a complex of alanine with water is formed, the O-H vibration band shifts to the low-frequency side by 320 cm⁻¹ and 415 cm⁻¹, respectively. It is shown that with an increase in the strength of the hydrogen bond, the bond energy of the OH group increases.

It was found that in the Raman spectra of O-H and N-H the bands of α -alanine in the region of 2900-3050 cm⁻¹ are complex and consist of several bands. The structure and connectivity of the bands is explained by the fact that the spectrum of the O-H bond consists of a symmetric valence band of vibrations ν_1 and overtones of bending vibrations $2\nu_2$.

References

1. M.A.Belyanchikov, V.S.Gorelik, B.P.Gorshunov, A.YU.Pyatyshev. Infrared and Raman Spectroscopy of Glycine and Tyrosine Polycrystals // Herald of the Bauman Moscow State Technical University Series Natural Sciences. 2016 №4. S.4-13. In Russian. DOI: 10.18698/1812-3368-2016-4-4-13
2. Jenkins A.L., Larsen R.A., Williams T.B. Characterization of amino acids using Raman spectroscopy // Spectrochimica Acta Part A: Molecular and Biomolecular Spectroscopy. 2005. Vol. 61. Iss. 7. P. 1585-1594. <https://doi.org/10.1016/j.saa.2004.11.055>
3. Breen M.S., Kemena C., Vlasov P.K., Notredame C., Kondrashov F.A. Epistasis as the primary factor in molecular evolution // Nature. 2012. Vol. 490. Iss. 7421. P. 535-538. doi.10.1038/nature11510
4. Jeffrey G.A. Hydrogen bonding in biological structures / G.A.Jeffrey, W.Saenger. - Berlin, Heidelberg: Springer, 1994. - X1.,569 p. doi.org/10.1007/978-3-642-85135-3
5. M. J. Frisch, G.W. Trucks, H.B. Schlegel, G.E. Scuseria, M.A. Robb, J.R. Cheeseman, G. Scalmani, V. Barone, B. Mennucci, G.A. Petersson, H. Nakatsuji, M. Caricato, X. Li, H.P. Hratchian, A.F. Izmaylov and *et al.*, Gaussian 03, Revision A.02 (Gaussian, Inc., 2003).
6. Zhu G., Zhu X., Fan Q., Wan X. Raman spectra of amino acids and their aqueous solutions // Spectrochimica Acta Part A: Molecular and Biomolecular Spectroscopy. 2011. Vol. 78. Iss. 3. P. 1187-1195. DOI: 10.1016/j.saa.2010.12.079
7. [C. H. Wang](#), [R. D. Storms](#). Raman Study of Hydrogen Bonding and Long-Wavelength Lattice Modes in an L-Alanine Single Crystal//J. Chem. Phys. 55, 5110 (1971). <https://doi.org/10.1063/1.1675629>
8. Katsunosuke Machida, Akira Kagayama, Yutaka Saito, Toyozo Uno. Polarized Raman spectra and intermolecular potential of L-alanine crystal// [Spectrochimica Acta Part A: Molecular Spectroscopy. Volume 34, Issue 9](#), 1978, Pages 909-914. [https://doi.org/10.1016/0584-8539\(78\)80011-7](https://doi.org/10.1016/0584-8539(78)80011-7)
9. K. Kohlrausch. Raman spectra. Ed. M. : "Foreign Literature". 1952.-466 In Russian
10. F.H. Tikhvatullin, V.E. Pogorelov, A. Jumabaev, H.A. Hushvaktov, A.A. Absanov, A. Shaymanov. Aggregation of molecules in liquid methyl alcohol and its solutions. Raman spectra and *ab initio* calculations. // Journal of Molecular Structure, Volume 881, Issues 1-3, 2008, P. 52-56. <https://doi.org/10.1016/j.molstruc.2007.08.036>

11. F.H. Tuxvatullin, V.Ye.Pogorelov, A. Jumabaev, H.A. Hushvaktov, A.A. Absanov, A.Usarov. Polarized components of Raman spectra of O-H vibrations in liquid water // Journal of Molecular liquids, 160, (2011), P.88-93. <https://doi.org/10.1016/j.molliq.2011.02.015>

12. H.Hushvaktov, F.H.Tuxvatullin, U.N.Tashkenbaev, A.Jumabaev, A.Absanov, B.Hudoyberdiev. Raman spectra and ab initio calculation of a structure of aqueous solutions of methanol//Journal of Molecular structure, 1131 (2017) P.25-29. <https://doi.org/10.1016/j.molstruc.2016.10.061>

UDK: 539

BULOQ SUVLARIDA RADON-222 MIQDORINI SSINTILLYATSION GAMMA-SPEKTROMETRIYA USULI YORDAMIDA ANIQLASH

U.U.Tuxtayev, L.N.Nurmurodov, E.A.Umirzakov, B.S.Tog'ayev, M.L.Fayzullayeva

Samarqand davlat universiteti

b-togayev@mail.ru

Annotatsiya. Ushbu ishda Samarqand viloyati, Nurobod tumani Uyrug'ul, Mehnatkash va Sarikul qishloqlaridan olingan buloq suvlari tarkibidagi radonning solishtirma aktivligi NaI(Tl) – kristalli ssintillyatsion gamma-spektrometrik usulda o'rganiladi. Har bir suv namunasining gamma spektri 1800 sekund davomida o'lchami 63x63 mm bo'lgan NaI(Tl) – kristalli ssintillyatsion gamma-spektrometrdan o'lchandi. Detektorning energiya bo'yicha ajrata olish qobiliyati Cs¹³⁷ radionuklidning 661 keV energiyali gamma – chizig'ida 10%.

Kalit so'zlar: nuklid, marinelli, detektor, ssintillyatsion, kvant chiqish.

Определение количества Радона-222 в родниковых водах с помощью сцинтилляционной гамма-спектрометрии

Аннотация. В данной работе исследована удельная активность радона в родниковой воде сел Уйругул, Мехнаткаш и Сарыкуль Нурабадского района Самаркандской области с помощью NaI (Тl) -кристаллическом сцинтилляционном гамма-спектрометре. Гамма-спектр каждой пробы воды измеряли в течение 1800 секунд на NaI(Tl) – кристаллическом гамма-спектрометре с размером 63 × 63 мм. Энергетическое разрешение детектора составляет 10% для радионуклида Cs¹³⁷ в гамма-линии с энергией 661 кэВ.

Ключевые слова: нуклид, Маринелли, детектор, сцинтилляция, квантовый выход.

Determination of the amount of Radon-222 in spring waters using gamma scintillation spectrometry

Abstract. In this work, the specific activity of radon in the spring water of the villages of Uyrugul, Mehnatkash and Sarykul of the Nurabad district of the Samarkand region was studied using a NaI(Tl) - crystalline scintillation gamma spectrometer. The gamma spectrum of each water sample was measured for 1800 seconds on a NaI (Tl) - crystalline gamma spectrometer with a size of 63 × 63 mm. The energy resolution of the detector is 10% for the Cs¹³⁷ radionuclide in the gamma line with an energy of 661 keV.

Keywords: nuclide, Marinelli, detector, scintillation, quantum yield.

Suvlar butun tiriklik hayoti uchun asosiy funksiyani bajaradi. Mineral moddalarni, jumladan radionuklidlarni tashiydi. Suvlar kundalik iste'mol qilinishi tufayli kishilarning nurlanishida asosiy manbalardan biri hisoblanadi. Tabiiy suvlarda tog' jinslaridan tuproqlardan yuvilib chiqayotgan erigan holdagi radionuklidlar aniqlanadi. O'tkazilgan radiokimyoviy tahlillar asosida tabiat suvlarida uran-238, toriy-232 va ularning yemirilishida hosil bo'ladigan radiy-226, radon-222, poloniy-210, radiy-228, radiy-224, uran-234 hamda kaliy – 40, rubidiy-87 kabi radioaktiv izotoplar aniqlangan. Suvlarning radioaktivligiga radon ahamiyatli darajada ta'sir ko'rsatadi. Radon – 222 miqdorini bilgan holda suv tarkibidagi uran, radiy va ularning yemirilishidan hosil bo'ladigan radioaktiv izotoplar miqdori, suvning darajasi haqida ma'lumot olish mumkin.

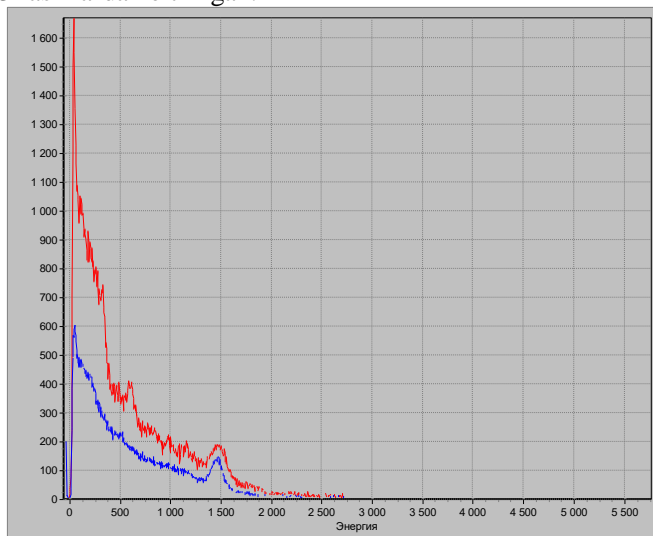
Suvlarning radioaktiv darajasini yoki unda radon miqdorini aniqlash aholining radiatsion xavfsizligini ta'minlashda radioekologik nuqtai nazardan muhim muammolardan biri hisobalanadi.

Ushbu ishda Samarqand viloyati, Nurobod tumani Uyrug'ul, Mehnatkash va Sarikul qishloqlaridan olingan buloq suvlari tarkibidagi radonning solishtirma aktivligi NaI(Tl) – kristalli ssintillyatsion gamma-spektrometrik usulda o'rganiladi.

Materiallar va o'lchash usuli.

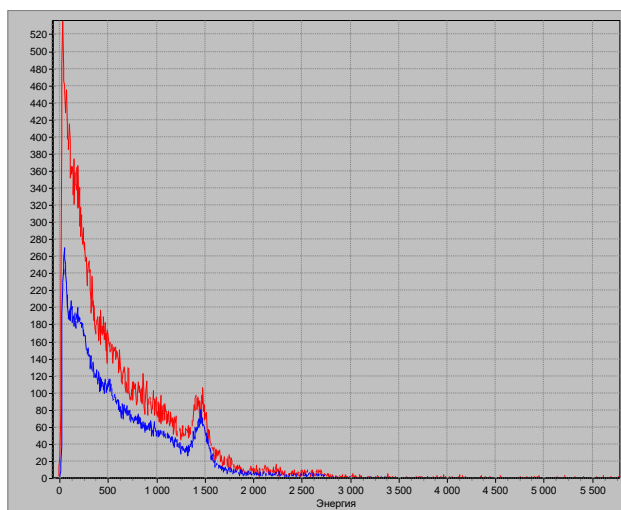
Tadqiq etiladigan suvlar namunulari Nurobod tumani Sarikul, Uyrug'ul va Mehnatkash qishloqlari buloqlaridan olindi. Olingan suvlar hajmi 1 litrdan bo'lib, suv olishda qopqoqli idishdan foydalanildi, idish og'zi mahkamlandi 2,5 soat davomida saqlandi, chunki Radon-222 guruhida radon bilan uning yemirilishidan hosil bo'ladigan qisqa yashovchi Pb^{214} , Bi^{214} , Po^{214} , Po^{218} radioaktiv izotoplari orasida radioaktiv muvozanat amalda 2,5 soatda tiklanadi. Bundan esa Radon-222 miqdorini aniqlashda uning hosilaviy izotopi Bi^{214} yoki Pb^{214} larning gamma – nurlanishlaridan foydalanish mumkin bo'ladi. Har bir suv namunasining gamma spektri 1800 sekund davomida o'lchami 63x63 mm bo'lgan NaI(Tl) –kristalli ssintillyatsion gamma-spektrometrdagi o'lchandi. Detektorning energiya bo'yicha ajrata olish qobiliyati Cs^{137} radionuklidning 661 keV energiyali gamma – chizig'ida 10%.

O'lchashlar marinelli idishi geometriyasida amalga oshirildi. O'lchangan spektrlarda kuzatilgan fotocho'qqilar energiya va yarim yemirilish davri bo'yicha identifikatsiya qilindi. Tadqiq etilgan suvlarning o'lchangan spektrlari 1-3 rasmlarda keltirilgan.



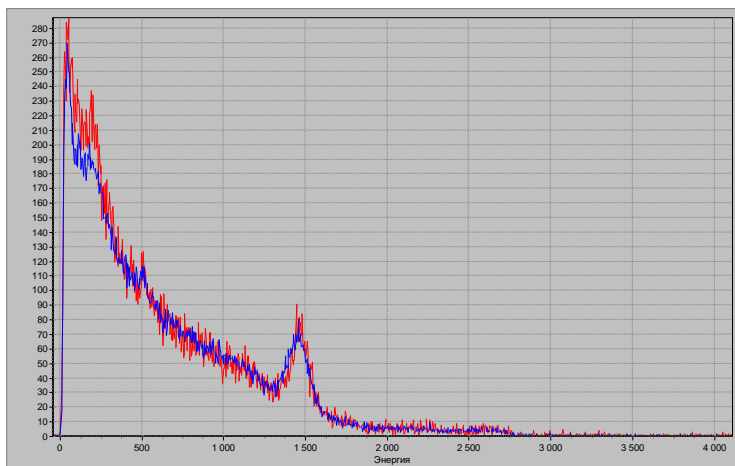
Nuklid	Aktivlik, Bk	Tasodifiy xatolik, %	Solishtirma aktivlik, Bk/kg	Absolyut xatolik, Bk/kg	Nisbiy xatolik, % (P=0.95)
Rn-222	30.948	0.03	30.948	3.1	10

1-rasm. Nurobod tumani (Mehnatkash qishlog'i) buloq suvidan olingan gamma-spektr



Nuklid	Aktivlik, Bk	Tasodifiy xatolik, %	Solishtirma aktivlik, Bk/kg	Absolyut xatolik, Bk/kg	Nisbiy xatolik, % (P=0.95)
Rn-222	7.794	0.1	7.794	1.2	15.9

2-rasm. Nurobod tumani (Sarikul qishlog'i) buloq suvidan olingan gamma-spektr



Nuklid	Aktivlik, Bk	Tasodifiy xatolik, %	Solishtirma aktivlik, Bk/kg	Absolyut xatolik, Bk/kg	Nisbiy xatolik, % (P=0.95)
Rn-222	< 3.1561	-	< 3.156	-	-

3-rasm. Nurobod tumani (Uyruq'ul qishlog'i) buloq suvidan olingan gamma-spektr

Olingan natijalarning muhokamasi

Spektrlardan Mehnatkash va Sarikul qishloqlari suvlarining spektri fon spektridan ahamiyatli darajada farq qilishini ko'rish mumkin. Spektrlarda uran-toriy oilalari yemirilish zanjiriga mansub bo'lgan radioaktiv izotoplar fotocho'qqilari hosil bo'lganligi ko'rinadi. Tadqiq etilgan suvlarda radon-222 miqdori uning yemirilishidan hosil bo'ladigan Pb^{214} ning kvant chiqishi 36% bo'lgan 352 keV energiyali gamma – chizig'ining intensivligi orqali nisbiy usulda hisoblandi. Natijalar quyidagi Bk/kg birlikda: Mehnatkash qishlog'i suvida 30,948, Uyruq'ul qishlog'i suvida 3,156, Sarikul qishlog'i suvida 7,794. O'lchashlar xatosi 0,95% ishonch ehtimoliyatida 10-15%.

Keltirilgan natijalardan ko'rish mumkin uch hududdan olingan buloq suvlari tarkibidagi radon-222 miqdori bir-biridan ahamiyatli darajada farq qiladi. Buning sababi buloq suvlari olingan har bir hududning geografik joylashishiga, jinslarning element, jumladan radionuklid tarkibiga, geologik jarayonlarga, suvlarda erigan radionuklidlar miqdoriga hamda buloq suvi yer sirtidan necha metr chuqurlikdagi qatlamdan chiqishiga bog'liq bo'lishligidan deb qarash mumkin.

Ma'lumki, tabiiy radionuklidlarning asosiy miqdori tog' jinslarida aniqlanadi. Tog' jinslari atrofida, unga yaqin bo'lgan hududlarda, foydali qazilmalar bo'lgan hududlarda yer usti va osti suvlarining radioaktivligi yuqori bo'lishi olimlar tomonidan aniqlangan.

Xuddi shunday ushbu tadqiqotlarda buloq suvlari olingan Mehnatkash va Sarikul qishloqlari tog'li hududlar hisoblanadi, bu qishloqlar buloqlari suvlarida aniqlangan radon-222 miqdori suvlarning radioaktivlik darajasi yuqori va unda uran, radiy miqdori katta ekanligidan darak beradi.

Adabiyotlar

1. Л.А.Перцов, Ионизирующие излучение биосферы, М., Атомиздат, 1973.
2. Муминов А.Т., Муминов Т.М., Холбаев И., Ахмедова Г., Маматкулов О.Б., Атроф-мухит объектларини гамма-спектрометрия усуллари билан тадқиқ қилиш. Монография. Самарқанд, 2020.
3. A.N.Azimov, Sh.Kh.Hushmuradov, I.T.Muminov, T.M.Muminov, B.S.Osmanov, A.N.Safarov, A.A.Safarov/ gamma-spectrometric determination of natural radionuclides and ^{137}Cs concentrations in environmental samples. The improved scintillation technique/ Radiation Measurements Vol.43(2008), P. 66-71.
4. Ковдерко В.Э. Радон: экологический аспект, источники, проблемы // Радиоактивность и радиоактивные элементы в среде обитания человека: материалы Междунар. конф. Томск: Изд-во «Тандем-арт», 2004.
5. Сахаров В.К. Радиоэкология: учеб. пособие. СПб.: Изд-во «Лань», 2006. 320 с. 6. Кузин А.М. Природный радиоактивный фон и его значение для биосферы Земли. М.: Наука, 1991. 116 с.
6. Сапожников Ю.А., Алиев Р.А., Калмыков С.Н. Радиоактивность окружающей среды. Теория и практика. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. 286 с.

UDK 530.12.531.51

**TARKIBIDA KOMPAKT OBYEKTLAR BO'LGAN TOR QO'SHALOQ SISTEMALARNING
ELEKTROMAGNIT NURLANISHI****M.K.Xudoyberdiyeva¹, N.B.Jo'rayeva²***¹O'zbekiston Milliy universiteti, ²Ulug'bek nomidagi Astronomiya instituti
xudoyberdiyeva94@inbox.ru, 95nozima@mail.ru*

Annotatsiya. Maqolaning asosiy maqsadi zich qo'shaloq kompakt gravitatsion obektlar atrofida elektromagnit jarayonlarni, sinov zarralar harakatini qarab chiqishdan iborat. Chunki kosmik obyektlar odatda qo'shaloq tizimlar xosil qilgan xolda mavjud bo'ladi, shu jumladan neytron yulduzlar, qora tuynuklar zich qo'shaloq sistema tashkil qilgan xol uchun energetik jarayonlarni o'rganish bugun kun nazariy astrofizikasi uchun juda muhim masalalardan hisoblanadi. Biz ushbu maqolada BRANWORLD fazosida zich qo'shaloq sistema tashkil qilgan neytron yulduzlar va qo'shaloq sistema tashkil qilgan qora tuynuklar atrofida zaryadlangan zarralar harakatini, elektromagnit maydon xususiyatlarini va energiya ajrlishi jarayonlarini o'rgandik va taxlil qilganmiz. Bundan tashqari dipol elektromagnit nurlanish xususiyatlarini ham qarab chiqqanmiz.

Kalit so'zlar: qora tuynuklar, Kerra-Tauba-NUT, Blandford-Znayek mexanizmi, tortishish maydoni, magnit maydonlar.

Электромагнитное излучение тесных двойных систем, содержащих компактные объекты

Аннотация. Основной целью статьи является исследование электромагнитных процессов, происходящих вокруг компактных гравитационных объектов, испытание движения частиц. Поскольку космические объекты, как правило, состоят из двойных систем, включая изучение нейтронных звезд, энергетические процессы образования плотных систем с двойными дырами являются одним из важнейших вопросов современной теоретической астрофизики. В данной статье мы изучили и проанализировали движение заряженных частиц, характеристики электромагнитного поля и процессы распределения энергии вокруг нейтронных звезд и черных дыр, образованных двойной системой в пространстве BRANWORLD. Также исследованы свойства дипольного электромагнитного излучения.

Ключевые слова: черные дыры, Кerra-Тауба-НУТ, механизм Бландфорда-Знайека, гравитационное поле, магнитные поля.

Electromagnetic radiation of close binary systems containing compact objects

Abstract. The main purpose of the article is to examine the electromagnetic processes around the compact gravitational objects, the test particle motion. Because cosmic objects are typically made up of double systems, including the study of neutron stars, energy processes for the formation of dense double hole systems, is one of the most important issues for today's theoretical astrophysics. In this article, we have studied and analyzed the movement of charged particles, electromagnetic field characteristics, and processes of energy allocation around neutron stars and black holes formed by a dual-dual system in the BRANWORLD space. We have also examined the properties of dipole electromagnetic radiation.

Key words: black holes, Kerra-Tauba-NUT, Blandford-Znayek mechanism, gravitational field, magnetic fields.

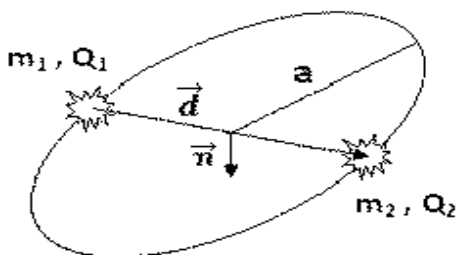
Kirish: Tashqi asimptotik bir jinsli magnit maydonda joylashgan qora o'ralar atrofida elektromagnit maydon konfiguratsiyasi va tuzilishi, shuningdek aylanuvchi qora o'ralarning soylarini tadqiqoti muammolari ustida izlanishlar jahonning yetakchi ilmiy markazlari va oliy ta'lim muassasalari, jumladan Astronomiya instituti, A. Eynshteyn markazi va Opavadagi Sileziya universiteti (Chexiya), Alberta Universiteti (Kanada), A. Eynshteyn nomidagi Maks Plank gravitatsion fizika instituti va Frankfurt universiteti (Germaniya), Universitetlararo astronomiya va astrofizika markazi, Fizika bo'yicha ilmiy laboratoriya va Tata fundamental tadqiqotlar instituti (Xindiston), Bremendagi amaliy kosmik texnologiyalar markazi va Oldenburg universiteti (Germaniya), Moskva davlat universiteti Shternberg nomidagi Davlat astronomiya instituti (Rossiya), Yadro fizikasi instituti, Astronomiya instituti va O'zbekiston milliy universiteti (O'zbekiston) tomonidan olib borilmoqda [4]. Hozirgi paytda jahonda aylanuvchi qora o'ralarning soylari, kompakt gravitatsion obyektlar atrofida zarralar xarakati va energetik jarayonlar[8] tadqiq etish muammolari bo'yicha qator, jumladan quyidagi ustivor yo'nalishlarda tadqiqotlar olib borilmoqda: umumiy nisbiylik nazariyasi va alternativ gravitatsion nazariyalar doirasida fotonlar

xarakati va aylanuvchi qora o'ralarning soyalarini tahlilini olib borish; kompakt gravitatsion ob'ektlar atrofida elektromagnit maydonlarni nazariy modellarini tuzish va ular atrofida sinov zarralarining xarakatini tahlil qilish; tashqi magnit maydon mavjudligida aylanuvchi qora o'ralar atrofida energetik jarayonlarni o'rganish [1].

Tadqiqotning obekti va predmeti. - sekin aylanuvchi neytron yulduzlar hamda qo'shaloq neytron yulduzlar atrofidagi Bran fazo-vaqtidagi dipol elektromagnit nurlanishlar, qo'shaloq kompakt gravitatsion obektlar atrofidagi elektromagnit maydonlar va elektromagnit nurlanishlar

Tadqiqotning maqsadi va vazifalari - tadqiqot ishining asosiy maqsadi zich qo'shaloq neytron yulduzlar atrofidagi elektromagnit nurlanishlarni o'rganish, - sekin aylanuvchi kompakt gravitatsion obektlar, jumladan sekin aylanuvchi Neytron yulduzlar atrofidagi elektromagnit maydonlarni o'rganish - neytron yulduzlar atrofidan energiya ajralish mexanizmlarini tahlil qilish, - Bran fazosidagi neytron yulduz yaqinidagi elektr maydonni o'rganish

Tadqiqot natijalari va ularning muhokamasi.



Ikkita qo'shaloq sistema xosil qiluvchi qora o'ralarni qarab chiqaylik. Ularning massalari mos ravishda M_1 va M_2 bo'lsin, zaryadlari ham shunga mos Q_1 va Q_2 bo'lsin. Bunday sistema sxematik ravishda quyidagi **1-rasmda** ko'rsatilgan

Klassik mexanikadan yaxshi ma'lumki bunday sistemaning harakatini keltirilgan $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

massali bitta jismning massalar markazi atrofidagi harakati

deb qarash mumkin. U xolda bunday sistema harakat tenglamasi qutb koordinatalar sistemasida quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$1 + \epsilon \cos \phi = \frac{a(1 - \epsilon^2)}{r}, \quad (1)$$

Bu yerda a va e mos ravishda katta yarim o'q va eksentrisiteti, ular mos ravishda quyidagilarga teng:

$$a = \frac{\alpha}{2|\epsilon|}, \quad (2)$$

$$\epsilon = \sqrt{1 - \frac{2|\epsilon|M^2}{\mu\alpha^2}}. \quad (3)$$

bu formulalarda M - sistemaning impuls momenti, $M = \mu r^2 \dot{\phi}$ $U = -\frac{\alpha}{r}$ - markaziy maydon potensialidagi koeffitsient.

Bundan keyingi masalalarda qora o'ralarning harakatini faqat gravitatsion kuch boshqaradi, elektr maydon esa faqat zaryadlar bilan bog'liq deb qaraymiz. Bu xolat uchun gravitatsion kuch $F_{grav} = Gm_1 m_2 / r^2$ elektr zaryadlar ta'sirlashuv Kulon kuchi $F_{el} = Q_1 Q_2 / r^2$ dan bir muncha katta, potensialdagi koeffitsient $\alpha = Gm_1 m_2$ gacha qiymat qabul qiladi. Agar qora o'ralar zaryadlarini ham $Q_1 = Q = 10Q_2$ desak, Q uchun limit qiymat $Q_{lim} = 5 \cdot 10^{19}$ C bo'lar ekan. Shuni aytish kerakki massalari deyarli bir xil, zaryadlari teng bo'lmagan binar sistemalarda nolga teng bo'lmagan dipol elektromagnit nurlanish yuzaga kelishi mumkin ekan. Boshqa tarafdin agar qora tuynuklar qo'shaloq sistema sifatida qaralsa, umumiy mexanizmlar ishlashi uchun ular bir-biriga juda yaqin bo'lishi kerak. Biz yuqorida zaryadlarning nisbati 1/10 kabi oldik, ammo yana yam kichikroq qilib olishimiz ham mumkin, ammo bu unchalik ahamiyatli emas, chunki, elektromagnit maydon nurlanish intensivligi olingan parametrlar modullariga va orbital tezligiga bog'liq.

Qo'shaloq sistema uchun burchak tezlik ifodasi yaxshi ma'lum

$$\omega = \sqrt{\frac{\alpha}{\mu\alpha^3}} = \frac{(2|\epsilon|)^{\frac{3}{2}}}{\alpha\mu^{1/2}}. \quad (4)$$

Qachonki qora tuynuk haqiqatdan zaryadlangan bo'lsa bunday sistemada dipol nurlanish aniq yuzaga keladi. Bir-biri atrofida aylanma harakat qilayotgan ikkita zaryad uchun dipol momenti quyidagiga teng:

$$d = \frac{Q_1 m_2 - Q_2 m_1}{m_1 + m_2} x' = \mu \left(\frac{Q_1}{m_1} - \frac{Q_2}{m_2} \right) x' \quad (5)$$

Sistemaning dipol momentini Fure qatoriga yoyib relyativistik xol uchun intensivlik ifodasini olishimiz mumkin:

$$I_n = \frac{4\omega_0^{8/3} n^2 \alpha^{2/3} \mu^{4/3}}{3c^3} \left(\frac{Q_1}{m_1} - \frac{Q_2}{m_2} \right)^2 \times \left[J_n'^2(n\varepsilon) + \frac{1-\varepsilon^2}{\varepsilon^2} J_n^2(n\varepsilon) \right] \quad (6)$$

Bu yerda $J_n(x)$ – n tartibli Bessel funksiyasi, J_n' esa uning argument bo'yicha xosilasi.

Astrofizik nuqtai nazardan elektromagnit nurlanish intensivligini bilan gravitatsion to'liq intensivligini solishtirish juda qiziqarli, gravitatsion to'liqlar intensivligini bilvosita ularning bir-bir atrofidagi aylanma davriy harakat davrining o'zgarish tezligini o'lchash orqali xisoblashimiz mumkin, gravitatsion to'liqlar sistema energiyasining bir qismini olib chiqib ketadi.

Qo'shaloq tizimdagi gravitatsion to'liqlar intensivligi davrni o'rtachalashtirib olinganda, quyidagi tenglamani beradi:

$$I_{GM} = \frac{32G\mu^2}{5c^5} a^4 \omega_0^6 f(\varepsilon) = \frac{32G^{7/3} \mu^2 (m_1 + m_2)^{4/3}}{5c^5} \omega_0^{10/3} f(\varepsilon) \quad (7)$$

Bu yerda $f(\varepsilon)$ funksiya quyidagicha aniqlanadi:

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{(1-\varepsilon^2)^{7/2}} \left(1 + \frac{73}{24} \varepsilon^2 + \frac{37}{96} \varepsilon^4 \right) \quad (8)$$

Ikkita yulduzni bir xil massali deb qarab ularning og'irlik markazi simmetrik shaklda o'rtada joylashgan xolni qarab chiqamiz. [3]. Agar orbita sifatida xOy tekisligini qabul qilsak, magnit moment uchun $\vec{\mu}_i = (0, 0, \mu_i)$ bu yerda $i=1,2$ hamda, dipollarning orbital chastotasi (ω) ga teng bo'lib radius-vektorlar $(r_0, \pi/2, \omega t)$ va $(r_0, \pi/2, \pi + \omega t)$ bo'lsin.

U xolda biz ω chastota bilan ossilyatsiyalandigan to'liq soxa uchun quyidagi ifodalarni olamiz:

$$B^{\hat{r}} = \frac{e^{-i\omega t} \sqrt{l(l+t)}}{r} H_l(\omega r) u_{lm} Y_{lm}, \quad (9)$$

$$B^{\hat{\theta}} = \frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{l(l+1)}} \left[DH_l(\omega r) u_{lm} \partial_{\theta} Y_{lm} - \omega H_l(\omega r) u_{lm} \frac{m Y_{lm}}{\sin\theta} \right], \quad (10)$$

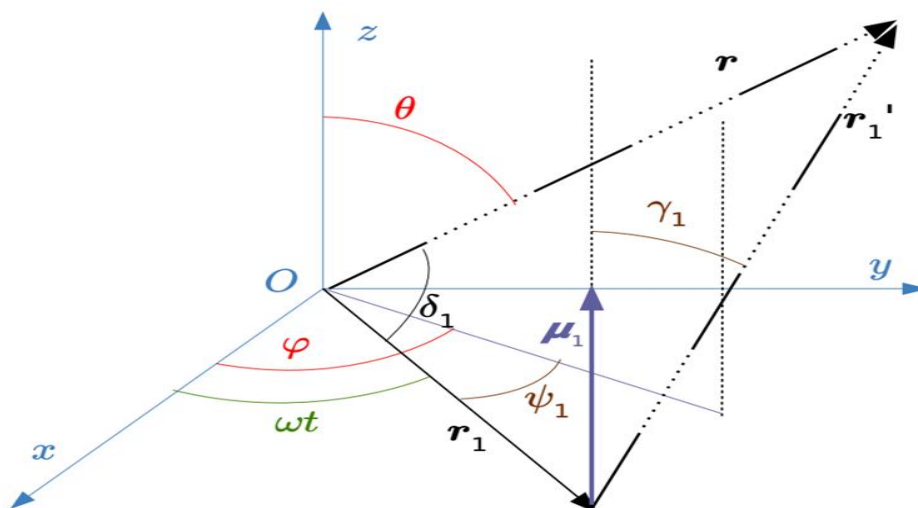
$$B^{\hat{\phi}} = i \frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{l(l+1)}} \left[DH_l(\omega r) u_{lm} \frac{m Y_{lm}}{\sin\theta} - \omega H_l(\omega r) u_{lm} \partial_{\theta} Y_{lm} \right] \quad (11)$$

$$E^{\hat{r}} = \frac{e^{-i\omega t} \sqrt{l(l+t)}}{r} H_l(\omega r) u_{lm} Y_{lm}, \quad (12)$$

$$E^{\hat{\theta}} = \frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{l(l+1)}} \left[DH_l(\omega r) u_{lm} \partial_{\theta} Y_{lm} + \omega H_l(\omega r) u_{lm} \frac{m Y_{lm}}{\sin\theta} \right], \quad (13)$$

$$E^{\hat{\phi}} = i \frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{l(l+1)}} \left[DH_l(\omega r) u_{lm} \frac{m Y_{lm}}{\sin\theta} + \omega H_l(\omega r) u_{lm} \partial_{\theta} Y_{lm} \right] \quad (14)$$

Bu yerda H_l – Gankel sferik funksiyasi, DH_l – sferik garmonika $r^{-1} \partial_r (r H_l)$ qisqartirilgan ko'rinishi, m – azimutal modani, l – qutbiy modani bildiradi. [6].



2-rasm.

Endi faqat yulduz sirti $r=R$ uchun integrallanuvchi u_{lm} va v_{lm} koeffitsientlarni topishimiz kerak. To'liqin soxada superpozitsiya o'rinli deb qarab ularning har birini alohida hisoblab, ularning yig'indisini hisoblaymiz, buning uchun yulduzni koordinata markaziga ko'chiramiz, u xolda quyidagi tengliklarni yozishimiz mumkin bo'ladi:

$$\vec{r} = r(\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta) \quad (15)$$

$$\vec{r}_{1,2} = \pm r_0(\cos\omega t, \sin\omega t, 0) \quad (16)$$

$$\vec{r}'_{1,2} = \vec{r} - \vec{r}_i = (r\sin\theta\cos\phi \mp r_0\cos\omega t, r\sin\theta\sin\phi \mp r_0\sin\omega t, r\cos\theta), \quad (17)$$

Shunday qilib, yulduz va kuzatuvchiga yo'nalgan adius-vektorlar orasidagi burchakni quyidagicha aniqlab olsak:

$$\cos\delta_{1,2} = \pm\sin\theta\cos\phi\cos\omega t \pm \sin\theta\sin\phi\sin\omega t = \pm\sin\theta\cos\lambda \quad (18)$$

$$\vec{r}'_{1,2} \sqrt{r^2 + r_0^2 \mp 2rr_0\sin\theta\cos\lambda}, \quad (19)$$

Bu yerda $\lambda = \phi - \omega t$ va OZ o'qi orasidagi burchak: [9].

$$\cos\gamma_{1,2} = \frac{r\cos\theta}{\sqrt{r^2 + r_0^2 \mp 2rr_0\sin\theta\cos\lambda}} \quad (20)$$

agar bu ifodani qatorga yoysak quyidagi ifodaga ega bo'lamiz:

$$\cos\gamma_{1,2} = \cos\theta \left(1 \mp \frac{r_0}{r} \sin\theta\cos\lambda \right). \quad (21)$$

Agar $\theta \rightarrow \gamma_i, \phi \rightarrow \lambda$ bilan almashtirsak, ifodalar uchun quyidagi ifodalarni olishimiz mumkin:

$$v_{lm} = \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}} \frac{e^{i\omega t}}{DH_l(\omega R)N_R} \int d\Omega \left\{ \partial_\theta Y_{lm}^* \delta v_R^{[\hat{r} B_R^{\hat{\phi}}]} + i \frac{mY_{lm}^*}{\sin\theta} \delta v_R^{[\hat{\theta} B_R^{\hat{r}}]} \right\}, \quad (22)$$

$$v_{lm} = \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}} \frac{e^{i\omega t}}{H_l(\omega R)N_R\omega} \int d\Omega \left\{ i\partial_\theta Y_{lm}^* \delta v_R^{[\hat{r} B_R^{\hat{\theta}}]} + i \frac{mY_{lm}^*}{\sin\theta} \delta v_R^{[\hat{\phi} B_R^{\hat{r}}]} \right\}, \quad (23)$$

Bu yerda $N_R^2 = 1 - 2M/R$, B_r – yulduz sirtidagi magnit maydon komponentasi, $\delta v_R^{\hat{r} B_R^{\hat{\phi}}}$ – ikkilangan antisimmetrik tenzor, $\delta v_R^{[\hat{r} B_R^{\hat{\phi}}]} = \delta v_R^{\hat{r} B_R^{\hat{\phi}}} - \delta v_R^{\hat{\phi} B_R^{\hat{r}}}$ orbital harakat tezligi.

$$\delta \vec{v}_{1,2} = \pm(\omega r_0 \sin\theta \sin\lambda, \omega r_0 \cos\theta \sin\lambda, \omega r_0 \cos\lambda), \quad (24)$$

Nolinchi koeffitsientlar uchun quyidagi ifodani olishimiz mumkin:

$$u_{21} = i \sqrt{\frac{2\pi \omega^3 R^6}{15 \cdot 24M^3}} \left[\left(\frac{2M}{R}\right)^2 N_R + \frac{M}{R} (3N_R^2 + 4N_R + 3) + (3N_R^2 + 2N_R) \ln N_R^2 \right] N_R r_0 B_0^{(I,II)} \quad (25)$$

Bu yerda R - yulduz radiusi, $B_0^{(I,II)} = 2\mu_{1,2} / R^3$ - yassi fazo-vaqtdagi magnit maydon uchun kichik hadlarni hisobga olmasdan maydon uchun quyidagi tengliklarni olamiz:

$$B^{\hat{r}} = 0. \quad (26)$$

$$B^{\hat{\theta}} = i \frac{r_0 \omega^3 R^6}{6\sqrt{6}r \cdot 8M^3} \left[\left(\frac{2M}{R}\right)^2 N_R + \frac{M}{R} (3N_R^2 + 4N_R + 3) + (3N_R^2 + 2N_R) \ln N_R^2 \right] N_R r_0 B_0^{(I)} - B_0^{(II)} \cos 2\theta \cdot e^{i[\omega(r-t)+\varphi]}. \quad (27)$$

$$B^{\hat{\varphi}} = \frac{-r_0 \omega^3 R^6}{6\sqrt{6}r \cdot 8M^3} \left[\left(\frac{2M}{R}\right)^2 N_R + \frac{M}{R} (3N_R^2 + 4N_R + 3) + (3N_R^2 + 2N_R) \ln N_R^2 \right] N_R r_0 B_0^{(I)} - B_0^{(II)} \cos \theta \cdot e^{i[\omega(r-t)+\varphi]}. \quad (28)$$

$$E^{\hat{r}} = 0. \quad (29)$$

$$E^{\hat{\theta}} = \frac{-r_0 \omega^3 R^6}{6\sqrt{6}r \cdot 8M^3} \left[\left(\frac{2M}{R}\right)^2 N_R + \frac{M}{R} (3N_R^2 + 4N_R + 3) + (3N_R^2 + 2N_R) \ln N_R^2 \right] N_R r_0 B_0^{(I)} - B_0^{(II)} \cos 2\theta \cdot e^{i[\omega(r-t)+\varphi]} = B^{\hat{\varphi}}. \quad (30)$$

$$E^{\hat{\varphi}} = -i \frac{r_0 \omega^3 R^6}{6\sqrt{6}r \cdot 8M^3} \left[\left(\frac{2M}{R}\right)^2 N_R + \frac{M}{R} (3N_R^2 + 4N_R + 3) + (3N_R^2 + 2N_R) \ln N_R^2 \right] N_R r_0 B_0^{(I)} - B_0^{(II)} \cos \theta \cdot e^{i[\omega(r-t)+\varphi]} = -B^{\hat{\theta}}. \quad (31)$$

Yuqoridagilardan foydalanib to'la yorqinlikni ham hisoblashimiz mumkin:

$$L = \frac{1}{2\pi\omega^2} \sum_{l,m} (|u_{lm}|^2 + |v_{lm}|^2) = \frac{|u_{21}|^2}{8\pi} = f_q \frac{\omega^6 R^6 r_0^2}{15} (B_0^{(I)} - B_0^{(II)})^2, \quad (32)$$

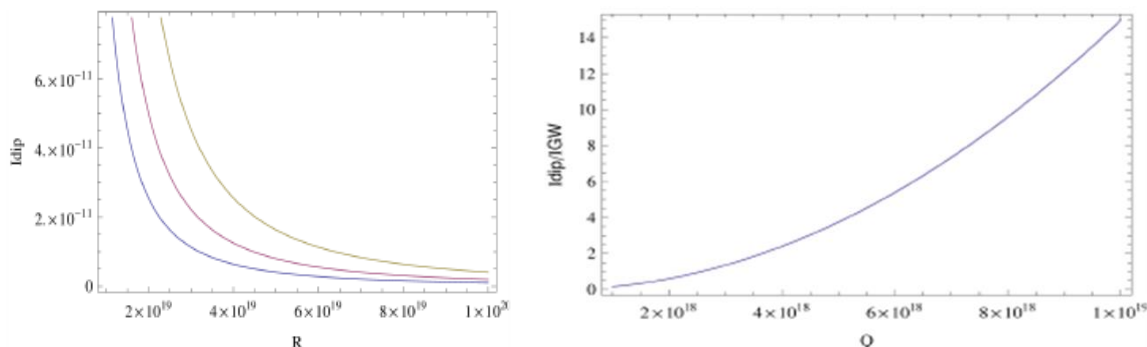
Qo'shaloq sistema uchun Enshteyn tenglamasining aniq yechimi yo'q, ammo postNyuton yaqinlashish bilan aniq yechimga yaqinlashish mumkin. Yulduzlar massalarini bir xil deb qarab, $\{\gamma\}$ ning ikkinchi tartibi bo'yicha quyidagi ifodani olishimiz mumkin:

$$\omega^2 = \frac{M}{4r_0^3} \left\{ 1 + \gamma(\nu - 3) + \gamma^2 \left(6 + \frac{41}{4}\nu + \nu^2 \right) \right\} \quad (33)$$

Bu yerda $\nu = \mu/m = 1/4$ (μ - keltirilgan massa, m - to'la massa). Agar $\gamma = \frac{\omega r_0}{c}$ va (32) ni yechib quyidagi ifodaga ega bo'lamiz:

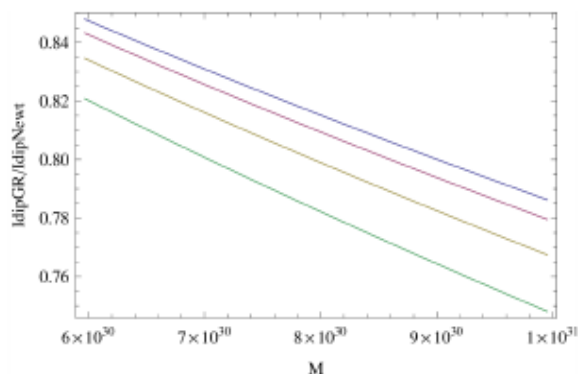
$$\omega = \frac{2M}{r_0 \left(\sqrt{-M \left\{ [\nu(3\nu + 47) + 15] M - 16r_0 \right\}} - (\nu - 3)M \right)} \quad (34)$$

Misol tariqasida neytron yulduz uchun tipik xisoblashlar qilsak, neytron yulduz uchun $R = 10^6$ sm, $B = 10^{12}$ Gauss, u xolda uning to'la yorqinligi taxminan $1.84 \cdot 10^{41}$ erg/s ga teng bo'lishi kelib chiqadi.



3.Rasm. Elektromagnit nurlanish intensivligi va gravitatsion to'liqlar intensivligi nisbatlari

Quyidagi rasmda elektromagnit nurlanish intensivligi va gravitatsion to'liqlar intensivligi nisbatlari keltirilgan. Biz dipol nurlanish intensivligi sifatida garmonikada $n=1, 2, 3$, hadlar yig'indisini oldik. Quyida keltirilgan grafikda $\omega_0 = 10^{-4} \text{ rad/s}$ deb olganmiz. Ko'rishimiz mumkinki dipol nurlanish va gravitatsion to'liqlar intensivliklari nisbati Q zaryadning katta qiymatlari uchun ma'noga ega bo'ladi. Gravitatsion nurlanish intensivligining elektromagnit nurlanish intensivligiga nisbati sistemaning umumiy massasi ortishi bilan keskin osha boshlaydi. Astrofizikaning bugungi kundagi muhim muammolarida biri qo'shaloq sistemalardagi birgalikda chiqadigan elektromagnit nurlanishlar va gravitatsion to'liqlardir, ayniqsa sistemadagi obyektlarning birlashishi paytidir.



4-rasm Turli orbita eksintrisiteti uchun dipol nurlanish va gravitatsion nurlanish intensivligi nisbati keltirilgan

Bu analizning borishida Neytron yulduzlar uchun tipik parametrlar qo'llaniladi: yulduz radiusi $R = 10^6 \text{ sm}$, $M = 2 \times 10^5 \text{ sm}$, $\Omega = 2\pi/(0,1c)$, $\omega = 4MR^2\Omega/(5r^3)$, yulduz sirtidagi magnit maydon -10^{12} Hr munosabatning o'ng qismida birinchi va ikkinchi a'zolar turli ishorali bo'lgani uchun, normalovchi qiymat birdan kichik bo'ladi.

Xulosa

Neyton yulduzli qo'shaloq yulduzlar atrofida elektromagnit hodisalarni o'rganish juda muhim, chunki bunday tizimlardan gravitatsion to'liqlarini aniqlashda va uning xususiyatlarini o'rganishda qo'shimcha yordam berishi mumkin. Maqolada umumiy markaz atrofida aylanayotgan qo'shaloq neytron yulduzning uzoq masofalardagi elektromagnit nurlanishni tavsiflovchi model ishlab chiqilgan. Nurlanish quvvati vakuumdagi ikki dipol modeli yordamida hisoblab chiqildi va umumiy nurlanish quvvati tor qo'shaloq sistemada 10^{41} erg/s tartibida bo'lishi ko'rsatildi. Olingan qiymatlar kuzatuv natijalari bilan mos tushdi. Pulsarlarning yuzida yoki magnitosferasida kichik yo'nalishli diagrammaga ega bo'lgan (ya'ni kichik konusli) elektromagnit nurlanish sohalari mavjud bo'lib, neytron yulduz aylanganligi sababli bu konus uzoqdagi kuzatuvchini kesganda nurlanish qayd etiladi. Shu sababli neytron yulduzlar magnitosferasini o'rganish ham katta ahamiyatga ega.

Adabiyotlar

1. D. Sigg and the LIGO Scientific Collaboration, Classical Quantum Gravity 25, N. 11, 114041 (2008).
2. F. Acernese *et al.*, Classical Quantum Gravity 25, N. 11, 114045 (2008).

3. S. Hild, S. Chelkowski, and A. Freise, arXiv:0810.0604.53
4. W. M. Folkner, P. L. Bender and R. T. Stebbins, Bulletin of the American Astronomical Society 30, 843 (1998).
5. N. Andersson, V. Ferrari, D. I. Jones, K. D. Kokkotas, B. Krishnan, J. S. Read, L. Rezzolla and B. Zink, Gen. Relativ. Gravit., published online, DOI 10.1007/s10714-010-1059-4 (2010).
6. D. Sigg and the LIGO Scientific Collaboration, Classical Quantum Gravity 25, N. 11, 114041 (2008).
7. C. Palenzuela, T. Garrett, L. Lehner, and S. L. Liebling, arXiv:1007.1198.
8. L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Mechanics* (Oxford: Pergamon Press, 1969, 2nd ed.).
9. L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *The classical theory of fields* (Oxford: Pergamon Press, 1975, 4th rev.engl.ed.).
- 10.M. Maggiore, *Gravitational waves. Volume 1: Theory and Experiment* (Oxford Univ. Press, 2008).

УДК 544.6.018.47–036.5

РЕОЛОГИЧЕСКИЙ ЭФФЕКТ ПРИ НАБУХАНИИ ПОЛИМЕРНЫХ МЕМБРАН В ВОДНЫХ РАСТВОРАХ С РАЗЛИЧНЫМ ДИТИРЕЧЕСКИМ СОДЕРЖАНИЕМ

Н.Ф. Бункин^{1,2}, Л.М. Сабиров³, В.А. Козлов^{1,2}, Й.Т. Жураев³

¹МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, РФ

²Институт общей физики имени А. М. Прохорова РАН, Москва, РФ

³Самаркандский государственный университет

nbunkin@kapella.gpi.ru, leonard.sabirov@mail.ru, vkozlov@bmsu.ru, jorayev-1989@inbox.ru

Аннотация. В данной работе в экспериментах по Фурье ИК-спектроскопии изучен режим набухания полимерной мембраны Нафтона в воде в кювете, характерный размер которого - порядка толщины самой мембраны. Набухание первоначально гидрофобной пластины Нафтон в обычной воде (содержание дейтерия 157 ppm) и в обеднённой дейтерием воде (содержание дейтерия 1 ppm) в кювете ограниченного объема происходит по-разному. Оказалось, что небольшие изменения содержания дейтерия в воде приводят к значительным различиям в динамике набухания полимерной мембраны. Для пластинки Нафтона толщиной 175 микрон этот эффект наиболее выражен, когда расстояние между окнами составляет $L = 200$ микрон.

Ключевые слова: Фурье-ИК спектроскопия, полимерные мембраны, реологические эффекты, изотопический эффект, набухание полимеров

Rheological effect during swelling of polymer membranes in aqueous solutions with different dithyremic content

Abstract. It was shown that the swelling of the initially hydrophobic Nafion plate in ordinary water (157 ppm deuterium content) and in deuterium-depleted water (1 ppm deuterium content) in a limited volume cell occurs differently. It turned out that small changes in the deuterium content in water lead to significant differences in the dynamics of swelling of the polymer membrane. For a 175-micron thick Nafion plate, this effect is most pronounced when the distance between the windows is $L = 200$ microns.

Keywords: Fourier-IR spectroscopy, polymer membranes, rheological effects, isotopic effect, polymer swelling

Tarkibida har xil miqdorda deyteriy bo'lgan suvli eritmalarda polimer membranalarni shishishi paytida reologik effekti

Annontatsiya. Ushbu ishda biz suvli kyuvetda Nafion polimer membranasing shishish rejimini Fure IQ-spektrometriyasida o'tkazilgan tajribalarda o'rgandik, uning xarakterli kattaligi membrananing o'zi qalinligi tartibida. Dastlab Nafion gidrofobik plastinkasining shishishini oddiy suvda (156 ppm deyteriy miqdori) va deyteriy susaytirilgan suvda (1 ppm deyteriy miqdori) cheklangan hajmli kyuvetada boshqacha tarzda o'zgarishi ko'rsatilgan. Ma'lum bo'lishicha, suvdagi deyteriy tarkibidagi kichik o'zgarishlar polimer membranasing shishishi dinamikasida sezilarli farqlarga olib keladi. 175 mikron qalinlikdagi Nafion plastinkasi uchun kyuveta oynalar orasidagi masofa $L = 200$ mikron bo'lganida bu ta'sir eng yuqori aniqlikda bo'ladi.

Kalit so'zlar: Fure-IQ spektroskopiyasi, polimer membranalari, reologik effektlar, izotop effekti, polimer shishishi

Введение. Интерес к исследованию полимерных мембран Нафион (Nafion™) растёт. Интерес к этим исследованиям связан с применением Нафиона в низкотемпературных водородных элементах, см. [1, 2]. Экспериментально получено, что при погружении мембраны Нафиона в водную суспензию коллоидных микросфер происходит их эффективное выталкивание из области размером порядка нескольких сотен микрон вблизи мембраны, так называемой «исключенной зоны» [3]. В то же время известно [4], что твердотельная подложка может изменять свойства приповерхностной воды только на масштабах несколько нм. Измерение коэффициента поглощения на длине волны $\lambda = 270$ нм при просвечивании исключенной зоны параллельно поверхности Нафиона [5] показало увеличение коэффициента поглощения с приближением зондирующего луча к поверхности мембраны. Как известно из [6], вода не поглощает на длине волны 270 нм, тогда как Нафион имеет полосу поглощения [7]. Из этого следует, что в объеме воды вблизи поверхности Нафиона должны присутствовать частицы Нафиона. Это подтверждено в наших экспериментах по фотолюминесцентной спектроскопии в ближнем УФ-диапазоне [8, 9].

В [8, 9] показано, что при погружении Нафиона в воду происходит «размачивание» («прорастание») волокон Нафиона в объем жидкости, причем этом волокна заякорены на поверхности Нафиона, т.е. их отрыва не происходит, и градиент плотности частиц Нафиона в объеме воды носит стационарный характер. Данный эффект был изучен в воде с различным изотопным составом: для этого были изучены смеси тяжелой воды (содержание дейтерия 106 ppm), в обеднённой дейтерием воде (содержание дейтерия 1 – 3 ppm), и обычной природной воды (содержание дейтерия 157 ± 1 ppm). Для обычной воды оказалось, что размер области, занятой проросшими волокнами Нафиона, составляет порядка 300 мкм, что совпадает с размером исключенной зоны, измеренным в работах [2, 5]. Таким образом, мы связываем эффект выталкивания коллоидных микросфер не с особой формой воды, а с эффектом прорастания волокон Нафиона.

Материалы и методы. В данной работе измерялся коэффициент пропускания в спектральном минимуме методом Фурье ИК-спектроскопии:

$$K_{\min} = I/I_0, \quad (1)$$

где I и I_0 – соответствующие спектральному минимуму пропускания интенсивности прошедшего и падающего излучения, которые связаны соотношением

$$I(t) = I_0 \exp\left(-\kappa \int_0^L C_w(t, x) dx\right), \quad (2)$$

где $C_w(t, x)$ – концентрация молекул воды в кювете, включая молекулы воды внутри мембраны Нафиона толщиной 175 мкм, κ – коэффициент экстинкции (размерность $[\text{см}^{-1}]$), L – толщина кюветы. Отметим, что в наших экспериментах по фотолюминесцентной спектроскопии прорастание волокон Нафиона происходило, по сути дела, в неограниченный объем, т.е. нагружения, и связанных с этим микрореологических эффектов не возникало (об изучении микрореологических свойств мягкой материи см. монографию [10]). В представленной ниже работе изложены результаты по наблюдению микрореологических эффектов, обусловленных прорастанием полимерных волокон в объем жидкости, с помощью методики Фурье ИК-спектрометрии.

Эксперименты проводились на аналитическом Фурье-спектрометре ФСМ 2201 (ООО «Инфраспек», Россия, Санкт-Петербург). Спектрометр имел следующие характеристики:

- Спектральный диапазон: от 370 до 7800 см^{-1} ;
- Спектральное разрешение во всем диапазоне: 1.0 см^{-1} ;
- Абсолютная погрешность во всем диапазоне: $\pm 0.05 \text{ см}^{-1}$.

Как и в описанных ранее экспериментах [11, 12], коэффициент пропускания был исследован в диапазоне 1.8 – 2.2 мкм; по поводу выбора этого диапазона см. детальный комментарий в работе [12]. Были исследованы пластинки Нафиона N117 (Sigma Aldrich, USA) толщиной 175 μm и площадью $1 \times 1 \text{ см}^2$ (см. Рис. 1); как будет ясно из дальнейшего, для очень важно, чтобы размер пластинок Нафиона был строго фиксирован.

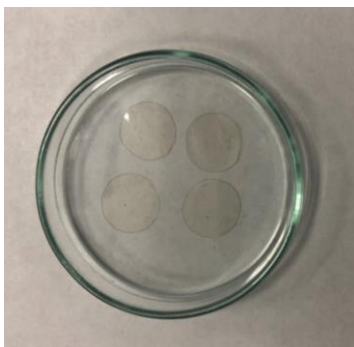


Рис. 1. Фотографии пластинок Нафiona, используемых в эксперименте по Фурье ИК-спектроскопии; пластинки имеют одинаковую толщину и примерно одинаковую форму..

Пластинка Нафiona помещалась в герметичную кювету, снабженную окнами из CaF_2 ; этот материал прозрачен для ИК-излучения во всем исследуемом спектральном диапазоне (длинноволновая граница прозрачности соответствует $\lambda = 3 \mu\text{m}$). Для наших экспериментов очень важно качество полировки окон: в нашем случае характерный размер шероховатости окон составлял $2.5 - 5 \mu\text{m}$. Перед каждым экспериментом эти окна промывались водой класса Milli-Q, и затем высушивались с одновременным удалением пыли потоком химически чистого азота под высоким давлением. Расстояние L между окнами (толщина кюветы) варьировалось с шагом $10 \mu\text{m}$ в диапазоне $180 - 1000 \mu\text{m}$. В экспериментах измерялся коэффициент пропускания кюветы с водой, содержащей пластинку Нафiona. Каждое измерение включало 15 последовательных записей коэффициента пропускания с последующим усреднением и занимало 40 секунд (с учетом вычитания фонового поглощения, обусловленного влажностью воздуха). Временной интервал между отдельными измерениями составлял 5 минут, т.е. в течение этого интервала можно было провести измерения для пяти аналогичных образцов в кюветах одинаковой толщины. Таким образом, представленные ниже экспериментальные зависимости являются результатом усреднения по пяти последовательным измерениям.

Экспериментальные результаты. На Рис. 2 приведен типичный пример спектра пропускания K (см. формулу (1)) для воды, залитой в кювету с расстоянием между окнами $L = 180 \mu\text{m}$ в диапазоне $1.8 < \lambda < 2.2 \mu\text{m}$; спектральный минимум K_{\min} реализуется при $\lambda = 1.93 \mu\text{m}$. Следует отметить, что значения $K(\lambda = 1.8 \mu\text{m}) \approx 0.7$ примерно одинаковы для большинства полученных графиков. Поэтому при расчетах величины $|\ln K_{\min}|$ была использована формула

$$K_{\min} = 0.7 - K(\lambda = 1.8 \mu\text{m}) + K(\lambda = 1.93 \mu\text{m}) \approx K(\lambda = 1.93 \mu\text{m}), \quad (3)$$

т.е. величина K_{\min} отсчитывалась от одного общего уровня. Это было сделано для того, чтобы избежать ошибки при расчете величины $|\ln K_{\min}|$. Действительно, при $K_{\min} < 1$ логарифм является быстро убывающей функцией, и неточности в определении K_{\min} могут приводить к существенным ошибкам $|\ln K_{\min}|$.

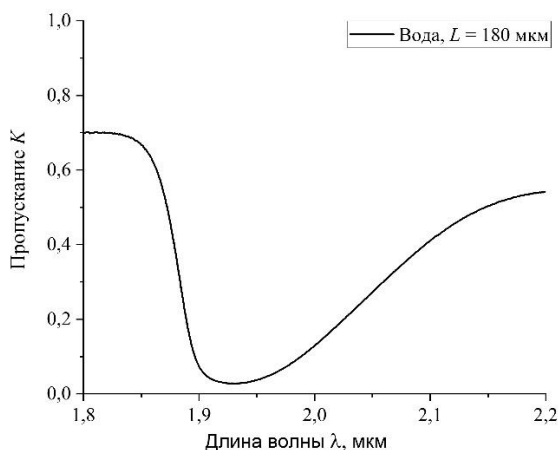


Рис. 2. Спектр коэффициента пропускания воды в кювете с размером $L = 180 \mu\text{m}$.

На Рис. 2 приведены результаты измерений величины $|\ln K_{\min}|$ для воды в кювете в зависимости от расстояния между флюоритовыми окнами: $L = 180, 190, 200, 210$ и 220 микрон (прямая линия (1)). Очевидно, что в отсутствии Нафiona в кювете формула (2) представима в виде $I = I_0 \exp(-\kappa C_w L)$; в данном случае концентрация молекул воды $C_w = 1$, т.е. $|\ln K_{\min}| = \kappa L$. Выбор минимального значения $L = 180$ микрон обусловлен тем, что толщина пластинки Нафiona N117 равна 175 микрон; выбор максимального значения $L = 220$ микрон обусловлен тем, что интенсивность I фактически выходила на нулевой уровень, т.е. результаты измерений не могли считаться корректными. Зависимость (1) аппроксимируется функцией $Y = 0.027 + 0.01897 \cdot X$. С учетом $C_w = 1$, получаем для коэффициента экстинкции в воде на длине волны $\lambda = 1.93$ микрон $\kappa = 0.01897 \mu\text{m}^{-1} = 189.7 \approx 190 \text{ см}^{-1}$. Также на Рис. 2 приведены результаты измерений $|\ln K_{\min}|$ для сухого (безводного) Нафiona (прямая линия (2)); пластинка сухого Нафiona помещалась в кювету соответствующей толщины L , но вода в кювету не заливалась. В этом случае поглощение на длине волны $\lambda = 1.93$ мкм обусловлено водой, инкапсулированной внутри нанометровых замкнутых полостей сухого Нафiona, см. [14], т.е. $|\ln K_{\min}| = 0.65 = \kappa(C_w)_0 L_0$, где $L_0 = 175$ мкм, $(C_w)_0$ – концентрация воды внутри сухого Нафiona.

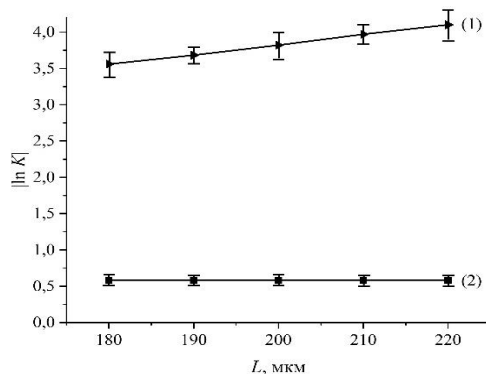


Рис. 3. Зависимость $|\ln K_{\min}|$ от толщины L кюветы для воды (1) и для сухого Нафiona (2); в последнем случае вода в кювету не заливалась.

На Рис. 4 (а) – (в) приведены примеры спектров коэффициента пропускания K для пластинки Нафiona толщиной 175 микрон, погруженной в кювету разной толщины L ; параметром этих зависимостей является время вымачивания Нафiona. Панель (а) соответствует вымачиванию в течение 5 минут, панель (б) – 30 минут, панель (в) – 180 минут. Из приведенных графиков следует, что функция $K_{\min}(L)$ является немонотонной: $K_{\min}(L = 190 \text{ микрон}) < K_{\min}(L = 200 \text{ микрон}) > K_{\min}(L = 210 \text{ микрон})$.

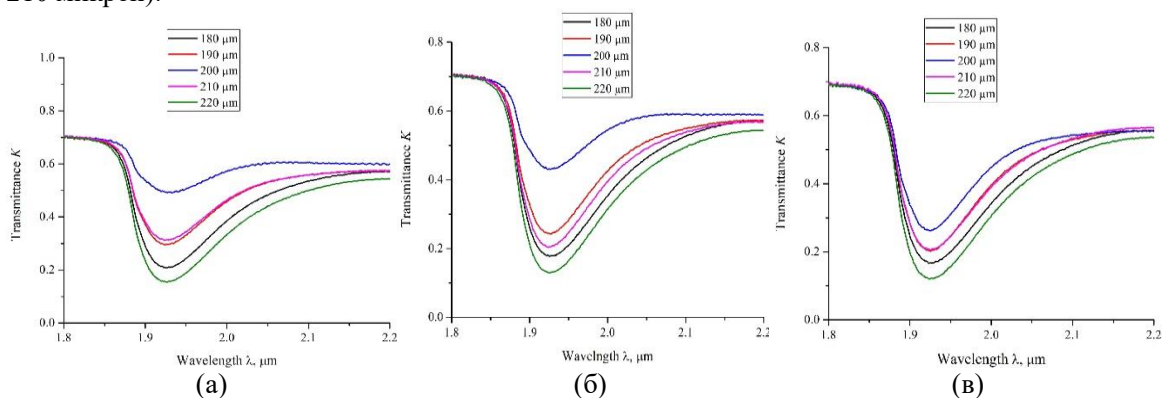


Рис. 4. Спектры коэффициента пропускания K для пластинки Нафiona толщиной 175 микрон, вымачиваемой в воде в кювете с разным расстоянием L между окнами; (а) – вымачивание в течение 5 мин; (б) – вымачивание в течение 30 мин; (в) – вымачивание в течение 180 мин.

Все полученные выше результаты соответствуют вымачиванию в обычной природной воде с содержанием дейтерия 157 ± 1 ppm. Оказалось, что спектр коэффициента пропускания зависит от содержания дейтерия. Так, на Рис. 4 приведены спектры пропускания K для Нафiona, который в течение $t = 40$ минут вымачивался в обычной воде и в обеднённой дейтерием воде (содержание

дейтерия 1 ppm) в кювете с расстоянием между окнами $L = 200 \mu\text{m}$. Видно, что величина K_{\min} для обычной воды примерно в 4 раза меньше соответствующей величины для обеднённой дейтерием воды.

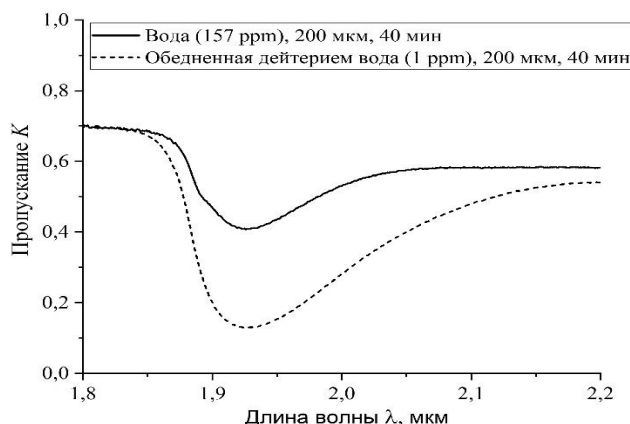


Рис 5. Спектры коэффициента пропускания K для пластинки Нафiona толщиной 175 микрон, вымачиваемой в обычной воде (содержание дейтерия 157 ppm) и обеднённой дейтерием воде (содержание дейтерия 1 ppm) в течение 40 минут в кювете с расстоянием L между окнами 200 микрон.

На основании полученных спектров можно оценить усредненную по длине кюветы L концентрацию воды $\langle C_w \rangle$ определяется из соотношения (2) в виде:

$$I(t) = I_0 \exp\left(-\kappa \int_0^L C_w(t, x) dx\right) \approx I_0 \exp(-\kappa \langle C_w(t) \rangle L); \quad (4)$$

в этой формуле учтена зависимость $\langle C_w \rangle$ от времени вымачивания t (см. ниже). С учетом (1) получаем,

$$\langle C_w \rangle = \frac{|\ln K_{\min}|}{\kappa L}. \quad (5)$$

На основании $\kappa = 0.019 \mu\text{m}^{-1}$ были получены зависимости $\langle C_w \rangle(L)$ для времени вымачивания $30 \text{ сек} < t < 180 \text{ мин}$ (Рис. 6 (а)). Пунктирной линией выделена концентрация C_{w0} для сухого Нафiona, которая определяется, как $C_{w0} = |\ln K_{\min}| / (\kappa L_0)$, где $|\ln K_{\min}| = 0.65$ (см. Рис. 3), $L_0 = 175 \mu\text{m}$, т.е. $C_{w0} = 0.186$. Эти зависимости имеют минимум при $L = 200 \mu\text{m}$ для всех времен вымачивания за исключением $t = 30 \text{ сек}$, т.е. значение $L = 200 \mu\text{m}$ является выделенным. На Рис. 6 (б) представлена зависимость $\langle C_w \rangle$ от времени вымачивания t при $L = 200 \mu\text{m}$ для обычной воды и обеднённой по дейтерию воды; первая точка на этом графике соответствует $t = 30 \text{ сек}$.

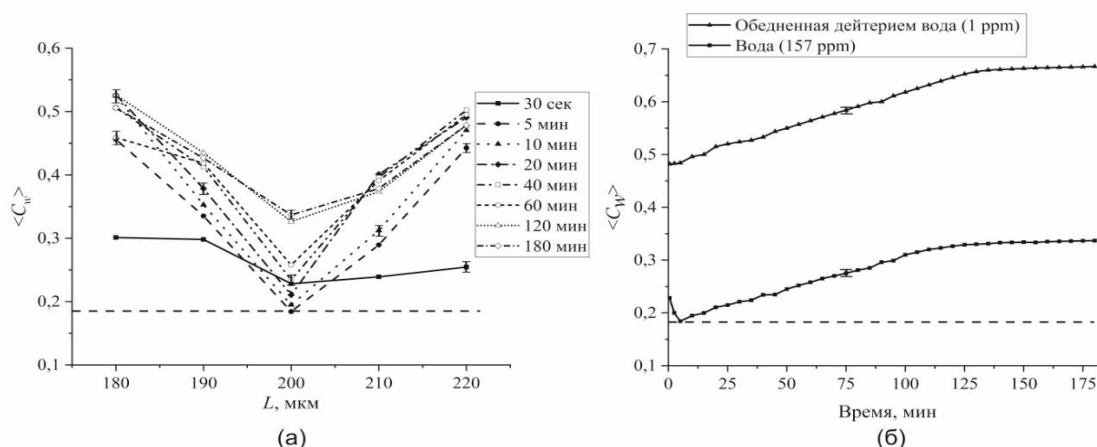


Рис. 6. Зависимости средней концентрации $\langle C_w \rangle$ от расстояния между окнами L для времени вымачивания $30 \text{ сек} < t < 180 \text{ мин}$ в обычной воде (а) и времени вымачивания t при $L = 200 \mu\text{m}$ для обычной воды и обеднённой по дейтерию воды (б). Штриховая линия соответствует концентрации воды $C_{w0} = 0.186$ для сухого Нафiona в пустой кювете.

Выводы. В работе было показано, что набухание изначально гидрофобной пластинки Нафiona в обычной воде (содержание дейтерия 157 ppm) и в обеднённой по дейтерию воде (содержание дейтерия 1 ppm) в кювете ограниченного объема происходит по-разному. Именно, в первом случае проявляются реологические эффекты, которые проявляются в вытеснении воды из области между мембраной и окнами кюветы. Для пластинки Нафiona толщиной 175 микрон этот эффект проявляется наиболее четко при расстоянии между окнами $L = 200$ микрон. Этот эффект обусловлен проращением полимерных волокон в объеме воды; как было показано в работе [10], этот эффект изотопно зависим. Таким образом, по изменению свойства Нафiona можно судить о наличии сверхмалых добавок в водных растворах; они могут оказывать существенное влияние на свойства более сложных структур. Дальнейшие эксперименты будут направлены на изучение временной динамики вымачивания Нафiona в водных растворах различных солей в кювете с расстоянием между окнами $L = 200$ микрон.

Литература

1. K.A. Mauritz, R.B. Moore, State of understanding of Nafion, Chem. Rev., (2004) **104**, 4535-4585.
2. Lunyang Liu, Wenduo Chen, Yunqi Li, An overview of the proton conductivity of nafion membranes through a statistical analysis, Journal of Membrane Science, (2016) **504**, 1-9.
3. Pollack G.H. The Fourth Phase of Water. Seattle: Ebner and Sons Publishers, 2013. 357 p.
4. Ninham B.W., Lo Nostro P. Molecular Forces and Self Assembly in Colloid, Nano Sciences and Biology. Cambridge University Press, Cambridge, New York, 2010.
5. Chai B.H., Zheng J.M., Zhao Q., Pollack G.H. Spectroscopic studies of solutes in aqueous solution // J. Phys. Chem. A. 2008. Vol. 112. P. 2242-2247.
6. http://www1.lsbu.ac.uk/water/water_vibrational_spectrum.html
7. De Almeida S.H., Kawano Y. Ultraviolet-visible spectra of nafion membrane // Eur. Polym. J. 1997. Vol. 33. P. 1307.
8. Bunkin N.F., Lyakhov G.A., Kozlov V.A., Shkirin A.V., et al. Time Dependence of the Luminescence from a Polymer Membrane Swollen in Water: Concentration and Isotopic Effects // Phys. Wave Phen. 2017. Vol. 25. P. 259.
9. Bunkin N.F., Shkirin A.V., Kozlov V.A., Ninham B.W., Uspenskaya E.V., Gudkov S.V. Near-surface structure of Nafion in deuterated water // J. Chem. Phys. 2018. Vol. 149. P. 164901.
10. Furst E.M., Squires T.M. Microrheology. Oxford University Press, 2017.
11. Bunkin N.F., Balashov A.A., Shkirin A.V., Gorelik V.S., et al, Investigation of Deuterium Substitution Effects in a Polymer Membrane Using IR Fourier Spectrometry, Opt. and Spectr., (2018) **125**, 337-342.
12. Bunkin N.F., Kozlov V.A., Shkirin A.V., Ninham B.W., Balashov A.A., Gudkov S.V., Dynamics of Nafion membrane swelling in H₂O/D₂O mixtures as studied using FTIR technique, J. Chem. Phys., (2018) 148, 124901.

UDK: 523.84

SBS1520+530 va SDSS2124+1632 GRAVITATSION LINZALANGAN SISTEMALARNING FOTOMETRIK TAHLILI

Sh. Egamberdiyev¹, T. Axunov¹, B. Jurayev², R. Turniyazov²

¹O'zbekiston milliy universiteti, ²Samarqand davlat universiteti

Annotatsiya: Ushbu maqolada 2017-2018 yillarda Maydanak observatoriyasida kuzatilgan SBS1520+530 va SDSS2124+1632 gravitatsion linzalangan va zarlarning fizik parametrlari o'rganilgan, yorqinlik egri chiziqlari chizilgan hamda natijalar keltirilgan.

Kalit so'zlar: gravitatsion linza, kvazar, yorqinlik, egri chiziq.

Фотометрический анализ систем гравитационных линз SBS1520+530 и SDSS2124+1632

Аннотация. В данной статье рассматриваются физические параметры SBS1520+530 и SDSS2124+1632 гравитационных линзовых квазаров, наблюдавшихся в обсерватории Майданак в 2017-2018 гг. Рисуются кривые яркости и представлены результаты.

Ключевые слова: гравитационная линза, квазар, яркость, изогнутая линия

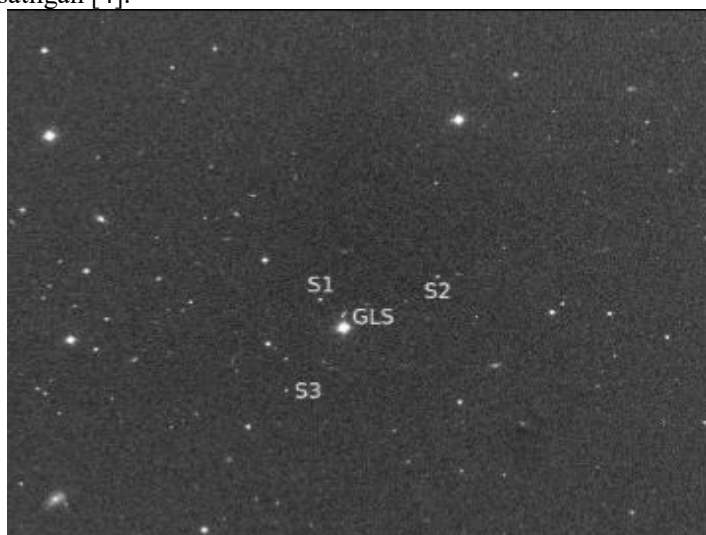
SBS1520+530 and SDSS2124+1632 are photometric analysis of gravitational lens systems

Abstract. This paper examines the physical parameters of SBS1520+530 and SDSS2124+1632 gravitational lensed quasars observed at the Maidanak Observatory in 2017-2018, draws brightness curves, and presents the results.

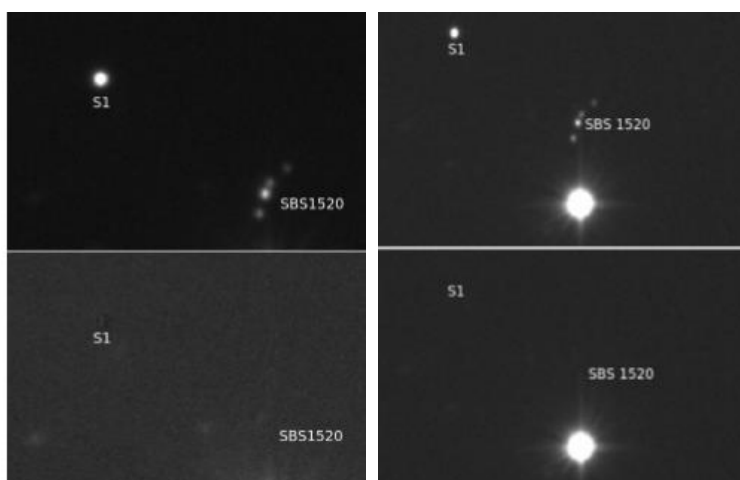
Keywords: gravitational lens, quasar, brightness curved line.

Yorug'lik nurining massiv jism tortishish maydoni ta'sirida sinishi va to'g'ri chiziq bo'ylab tarqalish yo'nalishini o'zgartirishi gravitatsion linzalanish deb aytiladi [1]. SBS1520+530 nomli gravitatsion linzalangan sistema 1997 yilda Chavushyan tomonidan ochilgan. Unda bu ob'yekt kvazarligi va u ikkita tashkil etuvchilardan iborat ekanligi aniqlandi. Kvazarning qizilga siljishi $z_q = 1.855$ komponentalar orasidagi burchak masofa $1.6''$ ga teng. Komponentalar orasidagi kechikish vaqti 130 ± 3 kunga teng [2]. Bu sistema ko'p yillar davomida kuzatilib kelinadi va 2017 yilda Maydanak observatoriyasida 5-martdan to 12-sentabrgacha I, R va V filtrlarda kuzatilgan.

Tasvirlarning birlamchi tahlili standart bosqichlardan iborat bo'lib, biz birinchi navbatda shovqin (*bias*)ni, ikkinchi bosqichda qora oqimning ta'siri (*dark*) ni ayirib tashladik. Uchinchi bosqichda esa maydon notekisligi (*flat*)ni normallashtirib, ravshanlik taqsimotini "tekisladik" [3]. IRAF / DAOPHOT dasturida nuqtasimon komponentalarning ravshanligini o'lchash uchun ikki o'lchamli Moffat yoki Gauss funksiyalari qo'llaniladi. Biz ularning ikkalasini qo'lladik. Komponentalarning fotometriya natijasi quyidagi rasmda ko'rsatilgan [4].

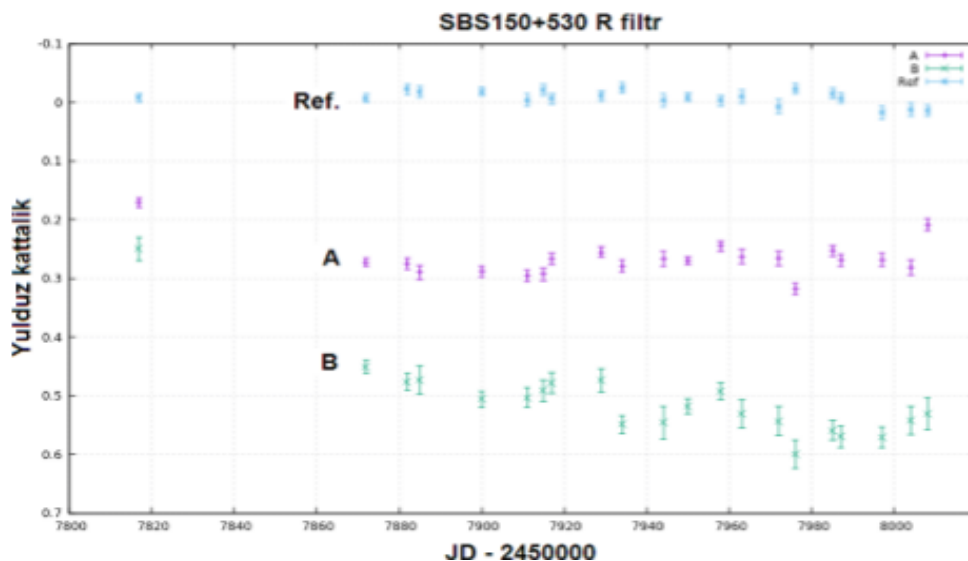


1-rasm. SBS1520+530 Maydanak observatoriyasida olingan tasviri. Sistemaning umumiy ko'rinishi. Shu bilan birga tayanch yulduzlar ham ko'rsatilgan.



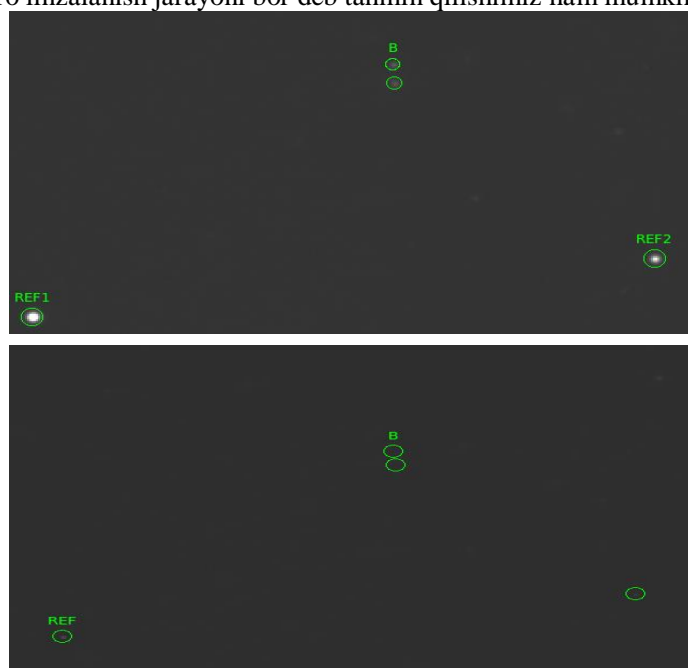
2-rasm. SBS1520+530 GLSning Maydanak observatoriyasida olingan tasvirining fotometriyasi misollari. A va B bilan linzalangan komponentalar, S1 tayanch yulduz. Tepa tomonda haqiqiy tasvir, pastda modelda nayrilgani.

Biz SBS1520+530 GLS komponentalari uchun quyidagi ravshanlik egri chiziqlariga ega bo'ldik. SBS1520+530 komponentalari ravshanligi doimo o'zgarib turishini R filtdagi egri chiziqlarda yaqqol ko'rishimiz mumkin.



3-rasm. SBS1520+530 GLS komponentalarining R filtdagi ravshanlik egri chizig'i.

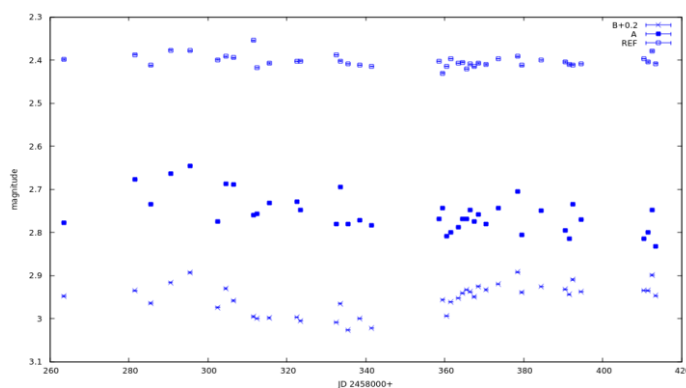
Ushbu grafikdan o'rganilayotgan ob'ektning komponentlari hamda sistemaning umumiy ravshanligi o'rganilayotgan davrda juda katta masshtabda – tahminan 0.35^m amplitudasi bilan o'zgarib borishini ko'rishimiz mumkin. Shunda kuzatuv davri mobaynida komponentalarning ravshanliklari asta-sekin kamayib bormoqda. Lekin A komponentada o'zgarish tezligi kamroq, B komponentada esa bu o'zgarish yaqqol ko'rinib turibdi. Komponentalarning ravshanliklari orasidagi farqi ham vaqt davomida o'zgarimoqda. Bunday ravshanlik o'zgarishlarini manbada kechayotgan jarayonlar bilan bir tomondan va ikkinchi tomondan mikro linzalanish jarayoni bilan tushuntirish mumkin. Ko'rinib turibdiki, komponentalarning biz topgan yulduz kattaliklari ilgari ma'lum bo'lgan kechikish vaqti bilan mos keladi. Kvazarning ravshanligi $\sim 0.35^m$ amplitude bilan juda qisqa vaqt davomida o'zgarimoqda. O'zgarish davomiyligi uni kuzatish davri bilan ustma-ust keladi va tahminan 9 oyni tashkil qiladi. Shu bilan birga kichik masshtabli mikro linzalanish jarayoni bor deb tahmin qilishimiz ham mumkin.



4-rasm. SDSS2124+1632 GLSning Maydanak observatoriyasida olingan tasvirining fotometriyasi misollari. A va B bilan linzalanagan komponentalar, REF1 va REF2 lar tayanch yulduzlar. Tepada haqiqiy tasvir, pastda modeldan ayrilgani.

SDSS2124+1632 nomli gravitatsion linzalangan sistema 2018 yilda Cameron A. Lemon va boshqalar tomonidan o'rganilgan. Unda bu obyekt kvazarligi va u ikkita tashkil etuvchilardan iborat ekanligi aniqlandi. Kvazarning qizilga siljishi $z_q = 1.28$ komponentalar orasidagi burchak masofa $3.02''$ ga teng. [5]. Bu sistema 2018 yilda Maydanak observatoriyasida AZT-22 teleskopida 25-maydan to 22-oktabrgacha R filtrda kuzatilgan. Bu ob'jekt ham yuqoridagi kabi qayta ishlash bosqichlaridan o'tib, komponentalarning fotometriya natijasi quyidagi rasmda ko'rsatilgan.

Biz SDSS2124+1632 GLS komponentalari uchun quyidagi ravshanlik egri chiziqlariga ega bo'ldik. SDSS2124+1632 komponentalari ravshanligi doimo o'zgarib turishini R filtrdagi egri chiziqlarda ko'rishimiz mumkin.



5-rasm. SDSS2124+1632 GLS komponentalarining R filtrdagi ravshanlik egri chizig'i.

Ushbu grafikdan o'rganilayotgan ob'ektning komponentlari hamda sistemaning umumiy ravshanligi o'rganilayotgan davrda katta masshtabda – taxminan $\sim 0.2^m$ amplitudasi bilan o'zgarib borishini ko'rishimiz mumkin.

Shunda kuzatuv davri mobaynida komponentalarning ravshanliklari asta-sekin kamayib bormoqda. Lekin A komponentada B komponentaga qaraganda yorqinligi kamayib bormoqda. Komponentalarning ravshanliklari orasidagi farqi ham vaqt davomida o'zgarib bormoqda. Bunday ravshanlik o'zgarishlarini manbada kechayotgan jarayonlar bilan bir tomondan va ikkinchi tomondan mikrolinlanish jarayoni bilan tushuntirish mumkin.

Fotometrik tahlil etish natijasida SBS1520+530 ning A va B komponentalarning ravshanlik egri chiziqlari qo'lga kiritilib, sistemaning umumiy ravshanligi 2017 yil davomida $\sim 0.35^m$ ga teng amplitude bilan o'zgarishi va obyekt faol o'zgaruvchanligi aniqlandi. 2017 yil davomida komponentalarning ravshanliklari kamayib bormoqda. Lekin A komponentada o'zgarish deyarli yo'q, ammo B komponentada esa bu o'zgarish $\sim 0.30^m$ ni tashkil qilishi aniqlandi. SDSS2124+1632 ning A va B komponentalarning ravshanlik egri chiziqlari qo'lga kiritilib, sistemaning umumiy ravshanligi 2018 yil davomida $\sim 0.2^m$ ga teng amplitude bilan o'zgarishi va obyekt faol o'zgaruvchanligi aniqlandi. A komponentada B komponentaga qaraganda yorqinligi kamayib bormoqda, bu o'zgarish $\sim 0.1^m$ ni tashkil qilishi aniqlandi. Bularning hammasi SBS1520+530 va SDSS2124+1632 sistemalarida murakkab ichki va mikrolinlanish jarayonlari sodir bo'layotganini ko'rsatadi.

Adabiyotlar

1. Wambsganss J. Gravitational Lensing in Astronomy // Max-Planck Institute: Living rev. in Reality 1, 1998. – 74 p.
2. E.R.Gaynullina, R.W.Schmidt, T.Axunov, O.Burxonov va hokazo. Microlensing in the double quasar SBS1520+530. Astronomy & Astrophysics. 53-58 betlar. 2005.
3. Golay M. "Introduction to astronomical photometry" D.Raidel Publishing, 1974
4. Jannette Barnes "A beginner's guide to using IRAF" GALFIT program home page (<http://www-int.stsci.edu/~cyp/work/galfit/galfit.html>)
5. Cameron A.Lemon, Matthew W.Auger, Richard G.McMahon, Fernanda Ostrovski//Gravitationally Lensed Quasars in Gaia: II. Discovery of 24 Lensed Quasars//astro-ph.GA//23 Jun 2018.

MUALLIFLAR DIQQATIGA!

Hurmatli mualliflar, maqola muallif tomonidan qog'ozda chop etilgan va elektron shaklida taqdim qilinishi shart. **Maqolada quyidagi bandlar:** UDK, ishning nomi (o'zbek, rus va ingliz tillarida), maqola hammualliflarining ro'yxati (to'liq familiyasi, ismi, otasining ismi – o'zbek, rus va ingliz tillarida), muallif haqida ma'lumotlar: ish joyi, lavozimi, pochta va elektron pochta manzili; maqola annotatsiyasi (300 belgigacha, o'zbek, rus va ingliz tillarida), kalit so'zlar (5-7, o'zbek, rus va ingliz tillarida) bo'lishi lozim.

MAQOLALARGA QO'YILADIGAN TALABLAR!

Maqolalarning nashr etilishi uchun shartlar nashr etilishi mo'ljallangan maqolalar dolzarb mavzuga bag'ishlangan, ilmiy yangilikka ega, muammoning qo'yilishi, muallif tomonidan olingan asosiy ilmiy natijalar, xulosalar kabi bandlardan iborat bo'lishi lozim; ilmiy maqolaning mavzusi informativ bo'lib, mumkin qadar qisqa so'zlar bilan ifodalangan bo'lishi kerak va unda umumiy qabul qilingan qisqartirishlardan foydalanish mumkin; "Ilmiy axborotnoma" jurnali mustaqil (ichki) taqrizlashni amalga oshiradi.

**MAQOLALARNI YOZISH VA RASMIYLASHTIRISHDA
QUYIDAGI QOIDALARGA RIOYA QILISH LOZIM:**

Maqolalarning tarkibiy qismlariga: kirish (qisqacha), tadqiqot maqsadi, tadqiqotning usuli va obyekti, tadqiqot natijalari va ularning muhokamasi, xulosalar yoki xotima, bibliografik ro'yxat. Maqola kompyuterda Microsoft Office Word dasturida yagona fayl ko'rinishida terilgan bo'lishi zarur. Maqolaning hajmi jadvallar, sxemalar, rasmlar va adabiyotlar ro'yxati bilan birgalikda doktorantlar uchun 0,25 b.t. dan kam bo'lmasligi kerak. Sahifaning yuqori va pastki tomonidan, chap va o'ng tomonlaridan - 2,5 sm; orientatsiyasi - kitob shaklida. Shrift - Times New Roman, o'lchami - 12 kegl, qatorlar orasi intervali - 1,0; bo'g'in ko'chirish - avtomatik. Grafiklar va diagrammalar qurishda Microsoft Office Excel dasturidan foydalanish lozim. Matndagi bibliografik havolalar (ssilka) kvadrat qavsda ro'yxatda keltirilgan tartibda qayd qilish lozim. Maqolada foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati keltirilishi lozim. Bibliografik ro'yxat alfavit tartibida - GOST R 7.0.5 2008 talablariga mos tuziladi.

- Ikki oyda bir marta chiqadi.
- "Samarqand davlat universiteti ilmiy axborotnomasi"dan ko'chirib bosish faqat tahririyatning yozma roziligi bilan amalga oshiriladi.
- Mualliflar maqolalardagi fakt va raqamlarning haqqoniyligiga shaxsan mas'ul.

MAQOLAGA QUYIDAGILAR ILOVA QILINADI:

- Yo'llanma xati;
- Ekspert xulosasi.

E- mail: axborotnoma@samdu.uz

SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI ILMIY AXBOROTNOMASI

НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК

SCIENTIFIC REPORTS

Mas'ul kotib
Texnik muharrir

X.Sh.Tashpulatov
A. I. Inatov

I.Sulaymonov
E. U. Arziqulov
O. Yusupova
A.R.Safarov

Muharrirlar:

- fil.f.n., dotsent
- f.-m.f.n., dotsent
- fil.f.n., dotsent
- PhD., dotsent

Mas'ul muharrirlar:

D. M. Aronbayev - k.f.n., dotsent
A. Sh. Yarmuxamedov - f.-m.f.n.
X. S. Haydarov - f.-m.f.n., dotsent

Muassis: Samarqand davlat universiteti
Manzil: 140104, Samarqand shahri, Universitet hiyoboni, 15.
Telefon: (0 366) 239-14-07, Faks: (0 366) 239-13-87
e-mail: axborotnoma@samdu.uz

SamDU «Ilmiy axborotnoma» jurnali tahririyati kompyuterida terildi.
Bosishga 31.10.2020 yilda ruxsat etildi. Qog'oz o'lchami A-4. Nashriyot hisob tabog'i 10,00.
Buyurtma raqami 349. Adadi 30 nusxa.

Manzil: 140104, Samarqand shahri, Universitet xiyoboni, 15.
SamDU bosmaxonasida chop etildi.