



ILMIY AXBOROTNOMA

НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК

SCIENTIFIC JOURNAL

2017-yil, 3-son (103/1) ANIQ VA TABIIY FANLAR SERIYASI

Matematika. Mexanika. Informatika.

Fizika. Kimyo. Biologiya. Geografiya. Ekologiya. O'qitish metodikasi

Samarqand viloyat matbuot boshqarmasida ro'yxatdan o'tish tartibi 09-25.
Jurnal 1999-yildan chop qilina boshlagan va OAK ro'yxatiga kiritilgan.

BOSH MUHARRIR
BOSH MUHARRIR O'RINBOSARLARI:

R. I. XALMURADOV, t.f.d. professor
A. J. XOLIQOV, k.f.d.
A. M. NASIMOV, t.f.d., professor

TAHRIRIYAT KENGASHI:

M. X. ASHUROV	- O'zFA akademigi	J. D. ELTAZAROV	- fil.f.d., professor
T. M. MO'MINOV	- O'zFA akademigi	D. I. SALOHIY	- fil.f.d., professor
SH.A.ALIMOV	- O'zFA akademigi	S. A. KARIMOV	- fil.f.d., professor
T.RASHIDOV	- O'zFA akademigi	T. SH. SHIRINOV	- tar.f.d., professor
S. S. G'ULOMOV	- O'zFA akademigi	M.D.DJURAKULOV	- tar.f.d., professor
N. N. NIZAMOV	- f.-m.f.d., professor	I. M. SAIDOV	- tar.f.d., professor
A. S. SOLEEV	- f.-m.f.d., professor	B. O. TO'RAYEV	- fals.f.d., professor
I. A. IKROMOV	- f.-m.f.d., professor	A. S. BEGMATOV	- fals.f.d., professor
B. X. XO'JAYAROV	- f.-m.f.d., professor	J.YA.YAXSHILIKOV	- fals.f.d., professor
I. I. JUMANOV	- f.-m.f.d., professor	M. Q. QURONOV	- ped.f.d., professor
E. A. ABDURAXMONOV	- k.f.d., professor	N. SH. SHODIYEV	- ped.f.d., professor
N. K. MUXAMADIYEV	- k.f.d., professor	E. G'. G'OZIYEV	- psixol.f.d., professor
J. X. XO'JAYEV	- b.f.d., professor	SH. R. BARATOV	- psixol.f.d., professor
Z. I. IZZATULLAYEV	- b.f.d., professor	B. Q. QODIROV	- psixol.f.d., professor
Z. F. ISMAILOV	- b.f.d., professor	R. A. SEYTMURATOV	- i.f.d., professor
S. B. ABBOSOV	- geogr.f.d., professor	B. X. TO'RAYEV	- i.f.d., professor
L. A. ALIBEKOV	- geogr.f.d., professor	X. X. XUDAYNAZAROV	- t.f.d., professor
A. A. ABULQOSIMOV	- geogr.f.d., professor		

MUNDARIJA / СОДЕРЖАНИЕ / CONTENTS

МАТЕМАТИКА / МАТЕМАТИКА / MATHEMATICS		
И. Э. Ниёзов, Ф. Ф. Хомидов	Критерий разрешимости задачи Коши для систем моментной теории упругости	5
Е. Urunbaev, В.Bozorov	Mantiqiy tenglamalar sistemasini yechishni to'plamlar ustida amallar bajarishga keltirish usuli	9
Э. С.Сетгарова, Х.О.Хайдаров	Нахождение элементов многогранника Ньютона	12
S.N. Lakaev, S.X. Abduxakimov.	Panjaradagi ikki fermionli sistemaga mos diskret Shredinger operatori xos qiymatlari mavjudligi	17
Н..Qurbonov, О'.Bozorova	$M G 1 N$ xizmat ko'rsatish tarmog'i nostatsionar navbat uzunligining taqsimoti haqida	23
Z. Malikov, X. Xudoyberdiyev	Chegaralanmagan sohada Gelmgols tenglamasi uchun integral formula	26
S.N. Lakaev, M.Azizova	The existence of bound states of the two-particle discrete Schrödinger operators on lattices	28
Ya.Xusainov, M.Murtazayev	Ikkita bosh to'plam dispersiyalarining tengligi haqidagi gipotezani rang kriteriy bo'yicha tekshirish	35
U.X.Narzullayev, M.M. Usanov, F.N.Aripov	S-juftliklar to'g'risidagi buxberger algoritmi va idealga tegishlilik masalasi	36
А. Солеев, М. Буляева	Индекс следа параметризации рациональной кривой.	40
А.М.Халхужаев, Т.М.Исакулов	Существенный спектр трехчастичного дискретного оператора, соответствующего системе трех фермионов на решетке	44
У.У. Усмонов	Нахождение нормальной формы для данной системы Гамильтона	52
И. Э. Ниёзов, Э.Салимов	О задаче Коши для системы уравнений термоупругости	55
П.Д.Ходизода, И.Э.Кулмуродов	Исследование уравнения, правая часть которого содержит линейные члены	59
Х.Ф.Шарипов, Ш.Т.Хусенов	Свойства степенных преобразований.	63
А. Хатамов, А. Хасанов	О точных оценках наилучших приближений функций с выпуклыми производными удовлетворяющих условию Липшица на конечном отрезке алгебраическими многочленами.	67
Т.Ishankulov, А.Raximova	Bianalitik tenglamalar uchun fok-kuni teoremasining analogi	71
Н.Qurbonov, Z.Madatova	$M G 1 N$ va $GJ M 1 N-1$ xizmat ko'rsatish tarmoqlari bandlik davri taqsimotlari uchun ikkilanma munosabat	75
J.I.Abdullayev, O'.N.Quljonov	Ikki bozonli sistema hamiltonianining statsionar holatlari	78
МЕХАНИКА / МУХАНИКА / MECHANICS		
Р.И.Халмуродов	Уравнения колебания вязкоупругой пластинки	86
Б.Х.Хужаёров, Т.О.Джиянов, И.Э.Шодманов	Задача аномального переноса вещества в пористой среде	91
Б.Х.Хужаёров, У.Ж.Сайдуллаев	Решение уравнения фильтрации суспензий с образованием упруго-пластического кейк-слоя	96
Б.Х. Хужаёров, Ж.М. Махмудов, Ш.Х. Зикийев	Моделирование процессов взаимодействия воды с породой при заводнении нефтяных пластов	102
Ф.Х.Саттаров, Э.А.Исмоилов	Построение ациклических и моноциклических областей для некоторых автономных систем.	106

B.F.Yalgʻashev	Uch qatlamli kompozit silindrik qobiq buralma tebranishlarining matematik modeli	110
X.M.Buranov, A.A.Parmonov	Dinamik soʻndirgich oʻrnatilgan balka koʻndalang tebranishlarining ustivorligi	114
INFORMATIKA/ ИНФОРМАТИКА / INFORMATICS		
A.P.Axatov, H.O.Iсроилов, D.A.Maxkamova	Обеспечение достоверности электронных документов с учетом свойств и особенностей переходных процессов передачи и обработки данных	117
O.I. Джуманов	Идентификация динамических объектов на основе использования свойств нейронных сетей и специфических характеристик изображений	123
T.T.Shoymardonov	Qayta tayyorlash va malaka oshirish jarayonlarida masofaviy test tizimini joriy etish	130
FIZIKA / ФИЗИКА / PHYSICS		
X.O.Шакаров	Полуэмпирическое исследование косвенного обменного взаимодействия в системе редкоземельный металл – немагнитный металл	136
X.O.Уринов. И.Субханкулов	Особенности вращающего момента многослойных пленок	140
O. Pardayev, M. Shoimov	Yarim oʻtkazgichlarda ultratovushning yutilishidagi noxizizqli effektlar haqida	144
E. U. Arziqulov, S. N. Srajev, O. S. Neʻmatov	Kremniyda termodononrlarning modellari	148
Sh.X.Xushmurodov, U.U.Tuxtaev, T.Soliyev, M.Shakirov, B.Niyozov, S.Qarshiev, D.Toshmamatov	Germaniy kristali tuzilishini rentgen nurlarining difraksiyasi orqali oʻrganishda debay-sherrer usuli	154
Sh .X. Xushmurodov, U. U. Tuxtayev, E. A. Umirzaqov, T. Soliyev, B. Aslonov, Sh Jo`raqulov, E. Umarov, Sh. Mamatqulov	Turli materiallarning zichligini gamma nurlarning yutilishi yordamida aniqlash	157
S.Q.Axrorov, E.U.Arziqulov, T.U.Toshboev, I.Egamberdiev	Yupqa pardali quyosh elementlar	159
E. U. Arziqulov, J.T. Ruzimurodov, Y. D. Eshonqulov	Quyosh batareyalarini komponovka qilishda komputerda sonli nazorat texnologiyalardan foydalanish	165
Sh.X.Xushmurodov, E.Bozorov, G.Ahmedova, Sh.Shodiyev, S.Salimov, G.Hosilova, X.Ismoilov	Zarafshon togʻ yon bagʻirlarida mox, oʻt oʻsimliklar va tuprogʻida ra dionuklidlar	167

A. Азимов, О.Б.Маматкулов, И. Т. Муминов, С. Салимов, К. Умаров, Ш.Х.Хушмуродов, А. Т. Худайбердиев	Радионуклиды в почвах юго-западных отрогов Зарафшанского хребта	170
E. U. Arziqulov, S. X. Zoirov	G'ovak metallar olish: erishilgan yutuqlar va istiqbollar	173
I. Subhonqulov, B. Amonov, G'. Bakaev, Sh. Xomitov	Yuqori temperaturalarda amorf qotishmalarning magnitlanishi va uni o'lchash usuli	178
O. Q. Quvondiqov, U. E. Nurimov, X. A. Qayumov, Sh. B. Mamatqulov	FeCl ₃ magnit suyuqligi yopishqoqlik koeffitsiyentining temperaturaga bog'liqligi	182
E. U. Arziqulov, S. N. Srajev, O. S. Ne'matov, J. Yo'ldashev	Kremniyda kislorodli komplekslarning hosil bo'lishi	184
Sh.Eshquvvatov, U.Xodjaeva	Yuqori energiyali reaksiyalarda fundamental massaning roli	188
O'QITISH METODIKASI/ TEACHING METHODOLOGY		
E.M.Mardonov, Q.Ostonov, U.Mo'minov	Geometrik almashtirishlar usullaridan foydalanib yasashga doir masalalarni yechish	194
Mualliflarga		

УДК: 517.946

КРИТЕРИЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИСТЕМ МОМЕНТНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

И. Э. Ниёзов, Ф. Ф. Хомидов

Аннотация. Рассматривается задача аналитического продолжения решения систем уравнений моментной теории упругости в пространственной области по её значениям и значениям её напряжений на части границы этой области, т.е. задача Коши. Приводится критерий разрешимости поставленной задачи.

Ключевые слова: системы моментной теории упругости, функция Карлемана, матрица Карлемана, задача Коши.

Criterion for the solvability of the Cauchy problem for the system of moment theory elasticity

Abstract. In this paper, we considered the problem of analytical continuation of the solution of the system equations of the system of moment theory elasticity in bounded domain from its values and values of its strains on part of the boundary of this domain, i.e., the Cauchy's problem and we give a criterion for the solvability of the Cauchy problem.

Keywords: The Cauchy problem, system theory of elasticity, elliptic system, ill-posed problem, Carleman matrix, regularization.

Momentli elastiklik nazariyasi sistemasi uchun Koshi masalasi yechimi mavjudligi kriteriyasi

Аннотация: Bu ishda momentli elastiklik nazariyasi tenglamalari sistemasi yechimini fazoda yechim va uning kuchlanishi soha chegarasining musbat o'Ichovli qismida berilganda sohaning ichida topish masalasi qaraladi. Bunday masalaga Koshi masalasi deyiladi. Qaralayotgan masalaning yechimi mavjudligi kriteriyasi keltiriladi.

Калит so'zlar: Momentli elastiklik nazariyasi, Karleman funksiyasi, Karleman matritsasi, Koshi masalasi.

Введение

В работе предлагается явная формула восстановления решения систем теории упругости в пространственной области по её значениям и значениям её напряжений на части границы этой области, т.е. даётся явная формула продолжения решения задачи Коши для рассматриваемой системы.

В данной работе на основе метода функции Карлемана [1,2] строится регуляризованное решение задачи Коши для системы уравнений моментной теории упругости.

Пусть $x = (x_1, x_2, x_3)$ и $y = (y_1, y_2, y_3)$ точки трехмерного вещественного евклидова пространства R^3 , D – ограниченная односвязная область в R^3 с кусочно-гладкой границей ∂D , состоящей из гладкой поверхности S , лежащей в полупространстве $y_3 > 0$ и плоской части $\partial D \setminus S : y_3 = 0$.

Пусть шести компонентный вектор-функция

$$U(x) = (u_1(x), u_2(x), u_3(x), w_1(x), w_2(x), w_3(x)) = (u(x), w(x))$$

удовлетворяет в области D системе уравнений моментной теории упругости [3]:

$$\begin{cases} (\mu + \alpha)\Delta u + (\lambda + \mu - \alpha)gr\text{div}u + 2\alpha rot w + \rho\theta^2 u = 0, \\ (v + \beta)\Delta w + (\varepsilon + v - \beta)gr\text{div}w + 2\alpha rot u - 4\alpha w + j\theta^2 w = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где коэффициенты $\lambda, \mu, \nu, \beta, \varepsilon, \alpha$ характеризующие среды, удовлетворяют условиям $\mu > 0, 3\lambda + 2\mu > 0, \alpha > 0, \varepsilon > 0, 3\varepsilon + 2\nu > 0, \beta > 0, j > 0, \rho > 0, \theta \in R^1$.

Для краткости изложения в дальнейшем систему (1) удобно записать в матричной форме. С этой целью введем матричный дифференциальный оператор

$$M(\partial_x) = \begin{pmatrix} M^{(1)} & M^{(2)} \\ M^{(3)} & M^{(4)} \end{pmatrix},$$

где

$$M^{(i)} = \|M_{kj}^{(i)}\|_{3 \times 3}, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

причем

$$M_{kj}^{(1)} = \delta_{kj}(\mu + \alpha)(\Delta + \theta_1^2) + (\lambda + \mu - \alpha) \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j},$$

$$M_{kj}^{(2)} = M_{kj}^{(3)} = -2\alpha \sum_{p=1}^3 \varepsilon_{kjp} \frac{\partial}{\partial x_p},$$

$$M_{kj}^{(4)} = \delta_{kj}(\nu + \beta)(\Delta + \theta_2^2) + (\varepsilon + \nu - \beta) \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j},$$

здесь

$$\theta_1^2 = \frac{\rho\theta^2}{\mu + \alpha}, \quad \theta_2^2 = \frac{j\theta^2 - 4\alpha}{\nu + \beta}, \quad \delta_{kj} = \begin{cases} 1, & \text{если } k = j \\ 0, & \text{если } k \neq j \end{cases}$$

ε_{kjp} — так называемый ε — тензор или символ Леви - Чивита, определяемый равенствами

$$\varepsilon_{kjp} = \begin{cases} 0, & \text{если по крайней мере два из трех индексов} \\ & k, j, p \text{ равны} \\ 1, & \text{если } (k, j, p) \text{ содержит четное число} \\ & \text{перестановок чисел } (1, 2, 3), \\ -1, & \text{если } (k, j, p) \text{ содержит нечетное число} \\ & \text{перестановок чисел } (1, 2, 3),. \end{cases}$$

Тогда систему (1) можно записать в матричной форме следующим образом

$$M(\partial_x)U(x) = 0 \tag{2}$$

Решение U системы (1) в области D назовем регулярным, если $U \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D)$.

Постановка задачи. Требуется определить регулярное решение U системы (1) в области D исходя из её данных Коши, заданных на поверхности S :

$$U(y) = f(y), \quad T(\partial_y, n(y))U(y) = g(y), \quad y \in S, \tag{3}$$

где $T(\partial_y, n(y))$ оператор напряжения, $n(y) = (n_1(y), n_2(y), n_3(y))$ — единичный вектор нормали к поверхности ∂D в точке y , направленный во внешность по отношению к ∂D , $f = (f_1, \dots, f_6)$, $g = (g_1, \dots, g_6)$ заданные непрерывные вектор-функции на S .

Определение. Матрицей Карлемана задачи (1), (3) называется (6×6) — матрица $\Pi(y, x, \sigma)$, зависящая от двух точек y, x и положительного числового параметра σ , удовлетворяющая следующим двум условиям:

$$1) \Pi(y, x, \sigma) = H(y, x) + G(y, x, \sigma),$$

где матрица $G(y, x, \sigma)$ удовлетворяет по переменным y системе (1) всюду в области D , $H(y, x)$ — матрица фундаментальных решений системы (1) [3];

$$2) \int_{\partial D \setminus S} (|\Pi(y, x, \sigma)| + |T(\partial_y, n)\Pi(y, x, \sigma)|) ds_y \leq \varepsilon(\sigma),$$

где $\varepsilon(\sigma) \rightarrow 0$, при $\sigma \rightarrow \infty$; $|\Pi|$ – евклидова норма матрицы $\Pi = \|\Pi_{ij}\|_{6 \times 6}$, т.е.,

$$|\Pi| = \left(\sum_{i,j=1}^6 \Pi_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \text{ В частности } |U| = \left(\sum_{m=1}^3 (u_m^2 + w_m^2) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Теорема 1. *Всякое регулярное решение $U(x)$ системы (1) в области D определяется формулой*

$$U(x) = \int_{\partial D} (\Pi(y, x, \sigma)\{T(\partial_y, n)U(y)\} - \{T(\partial_y, n)\Pi(y, x, \sigma)\}^* U(y)) ds_y, \quad x \in D,$$

где $\Pi(y, x, \sigma)$ – матрица Карлемана, «*» у матрицы означает операцию транспонирования.

С целью построения приближенного решения задачи (1), (3) построим матрицу Карлемана следующим образом:

$$\begin{aligned} \Pi(y, x, \sigma) &= \left\| \begin{matrix} \Pi^{(1)}(y, x, \sigma) & \Pi^{(2)}(y, x, \sigma) \\ \Pi^{(3)}(y, x, \sigma) & \Pi^{(4)}(y, x, \sigma) \end{matrix} \right\|, \\ \Pi^{(i)}(y, x, \sigma) &= P \Pi_{kj}^{(i)}(y, x, \sigma) P_{3 \times 3}^{-1}, \quad i = 1, 2, 3, 4, \\ \Pi_{kj}^{(1)}(y, x, \sigma) &= \sum_{m=1}^4 \left(\delta_{kj} \alpha_m + \beta_m \frac{\partial^2}{\partial y_k \partial y_j} \right) \cdot \Phi_\sigma(y, x, i\lambda_m), \\ \Pi_{kj}^{(2)}(y, x, \sigma) = \Pi_{kj}^{(3)}(y, x, \sigma) &= \frac{2\alpha}{\mu + \alpha} \sum_{m=1}^4 \sum_{s=1}^3 \varepsilon_m \varepsilon_{kjs} \frac{\partial}{\partial x_s} \cdot \Phi_\sigma(y, x, i\lambda_m), \quad (4) \\ \Pi_{kj}^{(4)}(y, x, \sigma) &= \sum_{m=1}^4 \left(\delta_{kj} \gamma_m + \delta_m \frac{\partial^2}{\partial y_k \partial y_j} \right) \cdot \Phi_\sigma(y, x, i\lambda_m) \end{aligned}$$

где

$$\Phi_\sigma(y, x, \lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \operatorname{Im} \frac{\exp[\sigma(w - x_3)] \cos \lambda u du}{w - x_3 \sqrt{u^2 + \alpha_0^2}}, \quad (5)$$

$$w = i\sqrt{u^2 + \alpha_0^2} + y_3, \quad \alpha_0^2 = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2, \quad \alpha_0 > 0.$$

Функцию $\Phi_\sigma(y, x, \lambda)$ назовем функцией Карлемана для уравнения Гельмгольца.

Положим

$$U_\sigma(x) = \int_S [\Pi(y, x, \sigma)\{T(\partial_y, n)U(y)\} - \{T(\partial_y, n)\Pi(y, x, \sigma)\}^* U(y)] ds_y. \quad (6)$$

Верна теорема [4]

Теорема 2. *Пусть $U(x)$ – регулярная решения системы (1) в области D , удовлетворяющее условию*

$$|U(y)| + |T(\partial_y, n)U(y)| \leq M, \quad y \in \partial D \setminus S.$$

Тогда при $\sigma \geq 1$ справедлива оценка

$$|U(y) - U_\sigma(y)| \leq MC_2(x) \sigma^3 \exp(-\sigma x_3).$$

Следствие. *При условии теоремы справедливы следующие эквивалентные формулы продолжения*

$$U(x) = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \int_S [\Pi(y, x, \sigma)\{T(\partial_y, n)U(y)\} - \{T(\partial_y, n)\Pi(y, x, \sigma)\}^* U(y)] ds_y, \quad (7)$$

$$U(x) = \int_S [\Pi(y, x) \{T(\partial_y, n)U(y)\} - \{T(\partial_y, n)\Pi(y, x)\}^* U(y)] ds_y + \int_0^\infty \mathcal{R}(\sigma, x) d\sigma, \tag{8}$$

где

$$\mathcal{R}(\sigma, x) = \int_S [\Omega(y, x, \sigma) \{T(\partial_y, n)U(y)\} - \{T(\partial_y, n)\Omega(y, x, \sigma)\}^* U(y)] ds_y, \tag{9}$$

$$\Omega(y, x, \sigma) = \frac{\partial}{\partial \sigma} \Pi(y, x, \sigma) = \left\| \frac{\partial}{\partial \sigma} \Pi_{kj}^{(i)}(y, x, \sigma) \right\|, i = 1, 2, 3, 4; \Pi(y, x) - \text{матрица}$$

построенная по формуле (4) и (5) при $\Phi(y, x, i\lambda) = \frac{\exp(i\lambda r)}{4\pi r}, r = |x - y|$.

Эквивалентность формул продолжения (7) и (8) вытекает из формулы

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} U_\sigma(x) = \int_0^\infty \frac{dU_\sigma(x)}{d\sigma} d\sigma + U_0(x).$$

Теорема 3. Пусть $S \in C^2, f \in C^1(S), g \in C(S)$. Для того чтобы существовало регулярное решение $U(x)$ системы (1) в области D с условием (3) на S_0 , необходимо и достаточно выполнение условия

$$\left| \int_0^\infty \partial_x^p \mathcal{R}(\sigma, x) d\sigma \right| < \infty, |p| \leq 2, \tag{10}$$

где p – мультииндекс, равномерно на каждом компакте $K \subset D, x \in K$. Если эти условия выполнены, то решения определяются двумя эквивалентными формулами (7), (8).

Доказательство. Необходимость. Пусть существует регулярное решение $U(x)$ системы (1) удовлетворяющий условиям $U(y) = f(y), T(\partial_y, n(y))U(y) = g(y), y \in S_0$, где $f \in C^1(S), g \in C(S)$. Пусть $\varepsilon > 0$. Обозначим $S_\varepsilon = S \setminus \{y \in R^3: y_3 < \varepsilon\}, D_\varepsilon = D \setminus \{y \in R^3: y_3 \leq \varepsilon\}$. Граница D_ε состоит из гладкой поверхности S_ε и плоского куска P_ε параллельного плоскости $(0y_1y_2)$. В области D_ε функция

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \Phi_\sigma(y, x, \lambda) = \frac{1}{-2\pi^2 \exp(\sigma x_3)} \int_0^\infty \text{Im} \frac{(w + x_3) \exp(\sigma w)}{\sqrt{u^2 + \alpha^2}} \cos(\lambda u) du,$$

где $w = i\sqrt{u^2 + \alpha^2} + y_3, \alpha^2 = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2, \alpha > 0$, регулярна по u во всем пространстве, следовательно все элементы матрицы $\frac{\partial}{\partial \sigma} \Pi(y, x, \sigma)$ являются регулярными. Продифференцировав равенство (9) по x и оценивая полученные равенства, получим

$$|\partial_x^p \mathcal{R}_\varepsilon(\sigma, x)| \leq \int_{S_\varepsilon} \left[|\Omega(y, x, \sigma)| + \left| \{T(\partial_y, n)\Omega(y, x, \sigma)\}^* \right| \right] [|f(y)| + |g(y)|] ds_y \leq \leq C(x)\sigma^5 \exp(-\sigma x_3), |p| \leq 2, x_3 > 0,$$

где $C(x) = C(\lambda, \mu) \int_0^\infty \frac{\sin \sqrt{u^2 + \alpha^2}}{\sqrt{u^2 + \alpha^2}} du$.

Таким образом из последнего неравенства в виду того, что правая часть не зависит от ε , переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим

$$|\partial_x^p \mathcal{R}(\sigma, x)| \leq C(x)\sigma^5 \exp(-\sigma x_3^2), |p| \leq 2, x_3 > 0, \tag{11}$$

Теперь из (11) получим (10). Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $S \in C^2, f \in C^1(S), g \in C(S)$ и верно неравенство (10). Покажем что существует регулярное решение $U(x)$ системы (1) такое, что

$$U(y) = f(y), T(\partial_y, n(y))U(y) = g(y), y \in S_0.$$

Рассмотрим функцию $U(x)$ заданную двумя эквивалентными формулами вида (7) и (8). Первое слагаемое в правой части формулы (8) задает две функции, которые являются регулярными решениями эллиптической системы (1) соответственно в областях D и $R_+^3 \setminus \bar{D}$, такими, что разности их предельных значений по нормальям и их напряжений ($x^{(1)}, x^{(2)}$ две точки на нормали, симметричные относительно точки $y \in S_0$, при стремлении к y) на S_0 равняется вектор-функциям $f(y)$ и $g(y)$ соответственно, причем если одна из этих функций непрерывна в соответствующей области вплоть до S_0 , то другая тоже обладает данным свойством. Второе слагаемое в правой части (8) в силу (10) является регулярным решением системы (1) в R_+^3 . Итак, правая часть формулы (8) задает два регулярных решения $U_1(x)$ и $U_2(x)$ в областях D и $R_+^3 \setminus \bar{D}$, соответственно таких, что для всякой точки $y \in S_0$ верно (в указанном смысле) равенство

$$\begin{cases} U_1^+(y) - U_2^-(y) = f(y) \\ T(\partial_y, n)U_1^+(y) - T(\partial_y, n)U_2^-(y) = g(y), \end{cases} \quad (12)$$

причем если одна из этих функций непрерывна в соответствующей области вплоть до S_0 , то другая тоже обладает данным свойством [5].

Далее заметим, что из формулы (7) и по определению матрицы Карлемана получим, что $U_2(x) = 0$ при $x_3 > \sup\{y_3: y \in \bar{D}\}$. Тогда, согласно теореме о единственности (так как решение эллиптических систем является аналитическим [6]) $U_2(x) \equiv 0$, $x \in R_+^3 \setminus \bar{D}$. Теперь из (12) получается утверждение теоремы. Теорема доказана.

Аналогичные формулы продолжения и критерии разрешимости задачи Коши имеют место в многомерном случае и для системы термоупругости.

Литература

1. Лаврентьев М.М. О задачах Коши для уравнения Лапласа // Изв. АН СССР. Сер. математика. -1956. - Т 20.- с.819-842.
2. Ярмухамедов Ш.Я. О задаче Коши для уравнения Лапласа // ДАН СССР. 1977. Т.235. № 2. С.281-283.
3. Купрадзе В.Д. и др. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости / В.Д. Купрадзе, Т.Г.Гегелия, М.О.Башелейтвили, Т.В. Бурчуладзе. - М.: Наука, 1976.-663 с.
4. O. I. Makhmudov, I. E. Niyozov, N.Tarkhanov. The Cauchy Problem of Couple-Stress Elasticity. Contemporary Mathematics.AMS, V455, 2008.
5. Шлапунов А.А. О задаче Коши для уравнения Лапласа. Сиб.мат.журн.1992. Т.33. №3.С.205-215.
6. И.Г.Петровский. Лекции об уравнениях с частными производными. Москва,(1961).

UDK: 517.11

MANTIQUIY TENGLAMALAR SISTEMASINI YECHISHNI TO‘PLAMLAR USTIDA AMALLAR BAJARISHGA KELTIRISH USULI

E. Urunbaev, B.Bozorov
Samarqand davlat universiteti
E-mail: urin54@rambler.ru

Annotatsiya. Mazkur ishda mantiqiy tenglamalar sistemasini yechishda to‘plamlar ustida bajariladigan amallardan samarali foydalanib o‘zgaruvchilar soni k keskin oshganda, ularning turli xil qiymatlari kombinatsiyasi uchun yechimni aniqlash usuli taklif etilgan.

Kalit so‘zlar: mantiqiy tenglama, sistema, Bul funksiyasi, funksiya, chinlik to‘plami.

Теоретико-множественный метод для решения системы логических уравнений

Аннотация. В работе рассматривается проблема разработки тестовой системы на основе технологии параметризаций и моделирование и интерпретация полученных результатов в виде информационной функции.

Ключевые слова: логическое уравнение, система, Бульева функция, функция, множества истинности.

Set-theoretical method for the solution of system of the logical equation.

Abstract. In work the problem of development of test system on the basis of technology of parametrization, modeling and interpretation of the received results in the form of information function is considered.

Keywords: Logical equations, system, Boolean function, function, Truth sets

Mantiqiy tenglamalar ko'pgina ilmiy va texnika masalalarini formallashtirish uchun qulay matematik model hisoblanadi. Bunday masalalar sirasiga mulohazali masalalar yechimini formal keltirib chiqarish qoidasi, diskret qurilmalarni mantiqiy sintez va analiz qilish hamda ularni nosozligini tahlil qilish kabi masalalarni keltirish mumkin. Ushbu masalalarni matematik modeli sifatida hosil bo'ladigan mantiqiy tenglamalar juda ham murakkab bo'lib, o'zgaruvchilar soni k keskin oshganda, x_i ($i = 1, 2, \dots, k$) o'zgaruvchilarning turli xil qiymatlari kombinatsiyasi uchun yechimni aniqlash eng zamonaviy kompyuterlarda ham murakkab masalaga aylanadi.

Shuning uchun hisoblash mashinalarida qulay dasturiy vosita yaratish maqsadida mantiqiy tenglamalar sistemasini yechishni samarali usulini yaratish dolzarb masala hisoblanadi.

Mazkur ishda mantiqiy tenglamalar sistemasini yechishni samarali usulidan birini taklif etmoqdamiz. Mantiqiy tenglama deganda

$$f = 1, \quad (*)$$

ko'rinishidagi ifoda tushuniladi. Bunda, f - qandaydir Bul funksiyasini ifodalovchi formuladir.

(*) tenglamaning yechimi f formula orqali beriladigan mantiqiy funksiyaning chinlik to'plami bo'ladi. Xuddi shuningdek $\bar{f} = 0$ tenglamaning yechimini f formula ko'rinishida berilgan mantiqiy funksiyaning yolg'on qiymatlar to'plami bo'ladi.

Mantiqiy tenglamalarni yechimni aniqlash masalasida uchraydigan turli xil talablardan quyidagilarini asosiy variant sifatida qabul qilish mumkin:

1. (*) ko'rinishidagi tenglamaning hech bo'lmaganda bitta yechimini aniqlash.
2. (*) ko'rinishidagi tenglamaning barcha yechimlarini aniqlash.

Birinchi variantdagi talab bo'yicha mantiqiy tenglamaning yechimini aniqlash formulani aynan chinlikka tekshirish masalasiga keladi.

Haqiqatan ham, f formulaning aynan chin formula bo'lishi uchun $\bar{f} = 1$ tenglamaning yechimga ega bo'lmasligi zarur va yetarlidir, ya'ni, agar f - aynan chin bo'lsa, unga mos M_f chinlik to'plami to'liq bo'ladi va uning to'ldiruvchisi- \bar{f} funksiyaning chinlik to'plami bo'sh bo'ladi.

Faraz qilaylik $M \neq \wedge -$ qandaydir to'plam bo'lsin va U_i ($i = 1, 2, \dots, k$) uning ixtiyoriy qism to'plami bo'lsin.

M to'plamning quyidagi ko'rinishdagi xarakteristik funksiyalar sistemasini tuzamiz:

$$Y_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{agar} \\ 0, & \text{agar} \end{cases} (x \in M; i = 1, 2, \dots, k). \quad (1)$$

$$0 \text{ va } 1 \text{ dan iborat ixtiyoriy } \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_i, \dots, \sigma_k \quad (2)$$

ketma-ketlikni tuzamiz. (1)ga asosan $Y_i = \sigma_i$ ($i = 1, 2, \dots, k$).ni hosil qilsamiz. U holda, xarakteristik funksiyalar sistemasi quyidagi ko'rinishdagi xarakteristik tenglamalar sistemasiga aylanadi:

$$\sigma_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{agar } x \in U_i \\ 0, & \text{agar } x \notin U_i \end{cases} (x \in M; i = 1, 2, \dots, k). \quad (3)$$

(3) ko'rinishdagi tenglamalar sistemasining echimi bo'sh bo'lmagan qandaydir $G \subset M$ to'plam bo'lib, undagi har bir $x \in G$ uchun (3) sistema ayniyatga aylanadi. Masalaning qo'yilishidan G to'plam

$$G = A_q \setminus A_q \cap B_p \quad (4) \text{ ko'rinishda bo'lib, bunda,}$$

$$A_q (\sigma = 1) = \bigcap_{\alpha=1}^q U_{i_\alpha}; B_q (\sigma = 0) = \bigcup_{\beta=1}^p U_{i_{q+\beta}}; \quad (5)$$

ko'rinishga ega. $A_q - U_{i_1}, U_{i_2}, \dots, U_{i_q}$, to'plamlarning kesishmasi bo'lib ularning nomerlari uchun

$\sigma_{i_\alpha} = 1 (\alpha = 1, 2, \dots, q)$, $B_p - U_{i_{q+1}}, U_{i_{q+2}}, \dots, U_{i_{q+p}}$, to'plamlarning birlashmasi bo'lib ularning nomerlari uchun $\sigma_{i_{q+\beta}} = 0 (\beta = 1, 2, \dots, p)$,

Tengdiklar o'rinli bo'ladi. p parametr (2) ketma-ketlikdagi nullar sonini; q parametr esa (2) ketma-ketlikdagi birlar sonini ifodalaydi ($p + q = k$); $U_{i_\alpha}, U_{i_{q+\beta}}$ -lar α va β larning fiksirlangan qiymati uchun $\{U_i\}$ to'plamlar ustida \cup, \cap, \setminus - birlashma, kesishma va ayirma amallarini qo'llash natijasida hosil bo'ladi.

$G \neq \wedge$ bo'lishi (3) sistemaning echimini mavjud bo'lishi uchun zaruriy va etarli shart hisoblanadi.

$U_i (i = 1, 2, \dots, k)$ to'plamning va (2) ketma-ketlikning tarkibiga qarab, G to'plam bo'sh, chekli va cheksiz bo'lishi mumkin. Shuning uchun (3) sistema echimga ega bo'lmasligi, chekli echimga ega bo'lishi (xususan, yagona echimga), sanoqli sondagi yoki kontinuum echimga ega bo'lishi mumkin.

Mulohazalar algebrasidan ma'lumki [1], mantiqiy tenglamalar sistemasini yagona tarzda mukammal diz'yunktiv shaklga keltirish mumkin, ya'ni

$$Y_i = \bigvee_{j=0}^l F_{ij} N_j \quad (i = 1, 2, \dots, k; l = 2^m - 1), \quad (6)$$

bunda k (6) sistemadagi tenglamalar soni (6); m -mantiqiy o'zgaruvchilar soni, N_j -o'nlik nomeri j bo'lgan m ta o'zgaruvchiga bog'liq (6) yoyilmadagi elementar kon'yunksiya: $F_{ij} = F_{ij}(N_j) - Y_i$ funksiyaning x_1, x_2, \dots, x_m , o'zgaruvchilarning j o'nlik sonni ikkilik yoyilmasidagi mos razryadlaridagi qiymati, ya'ni

$$j = \sum_{r=1}^m x_r 2^{m-r}; \quad (7)$$

M to'plam $\{0, 1, 2, \dots, 2^m - 1\}$. ni ifodalaydi. (6) sistemadagi har bir Y_i funksiya uchun uning yoyilmasidagi elementar kon'yunksiyaga mos keladigan o'nlik sonlardan tashkil topgan $U_i \subset M$ qism to'plamni bir qiymatli mos qo'yamiz.

Aynan chin mantiqiy funksiya M to'plamga bir qiymatli mos qo'yiladi.

Aynan yolg'on mantiqiy funksiya \wedge to'plamga bir qiymatli mos qo'yiladi.

U holda (6) sistemadagi har funksiya quyidagi ko'rinishda aniqlanishi mumkin:

$$Y_i(j) = \begin{cases} 1, & \text{agar } j \in U_i \\ 0, & \text{agar } j \notin U_i \end{cases} \quad (8)$$

To'plamlar ustida bajariladigan amallar va mantiqiy amallar o'rtasidagi moslikni hisobga olsak u holda, (6) sistemadagi mantiqiy funksiyalarni mukammal diz'yunktiv shaklga keltirish shart emas.[2] Amalda, $G = A_q \setminus A_q \cap B_p (q \neq 0)$ yoki $(G = M \setminus B_p, q = 0)$ o'rniga quyidagi mantiqiy funksiyani tuzish mumkin:

$$g = a_q \& (a_q \& b_p) \quad (9)$$

yoki $g = \bar{b}_p$,

bunda,
$$a_q = \& Y_{i_\alpha}, b_q = \vee Y_{i_{q+\beta}}, \quad (10)$$

& —kon'yunksiya amali.

Hosil qilingan g funksiya berilgan mantiqiy tenglamalar sistemasining barcha yechimlarini aks ettiradi. Aniqlangan g funktsiyani mukammal diz'yunktiv shaklga keltirsak uning yoyilmasidagi elementar kon'yunksiyalarning bir qiymat qabul qiladigan qiymatlar to'plami berilgan sistema yechimini tashkil qiladi.

Ushbu usulni bajarilish bosqichlarini ko'rib chiqamiz.

Birinchi bosqichda

$$A_q = \bigcap_{\alpha=1}^q U_{i_\alpha} = (\dots((U_{i_1} \cap U_{i_2}) \cap U_{i_3}) \cap U_{i_4} \dots) \cap U_{i_q}.$$

ketma-ketlikdan A_q to'plam aniqlanadi.

Agar A_q to'plam bo'sh bo'lsa, ushbu hol berilgan sistemaning yechimga ega emasligini yetarli sharti bo'ladi.

Ikkinchi bosqichda quyidagi tartibda $A_q \cap B_p$ to'plam aniqlanadi:

$$\begin{aligned} A_q \cap B_p &= A_q \cap \left(\bigcup_{\beta=1}^p U_{i_{q+\beta}} \right) = \bigcup_{\beta=1}^p A_q \cap U_{i_{q+\beta}} = \\ &= [\dots[(A_q \cap U_{i_{q+1}}) \cup (A_q \cap U_{i_{q+2}})] \cup (A_q \cap U_{i_{q+3}})] \cup \dots \cup (A_q \cap U_{i_{q+p}})]. \end{aligned}$$

Uchinchi bosqichda (4) ga asosan G to'plam aniqlanadi va uning elementlari (3) mantiqiy tenglamalar sistemasining yechimlariga mos keladi.[3]

Agar mantiqiy tenglamalar sistemasi (6) ko'rinishda berilmagan bo'lsa uni shu ko'rinishga keltirish kerak yoki (9) formula asosida mantiqiy funksiya hosil qilish kerak.

Adabiyotlar

1. Закревский А.Д. Логические уравнения. Изд. 2-е, стереотипное. — М.: Едиториал УРСС, 2003. — 96 с.
2. Закревский А.Д. Решение больших систем логических уравнений. — Минск: ОИПИ НАН Беларуси, 2009. — 96 с.
3. Катериночкина Н.Н., Королёва З.Е., Мадатян Х.А., Платоненко И.М. Методы решения булевых уравнений. - М.: ВС РАН, 1988. - 22 с.
4. Левченков В.С. Булевы уравнения: Учебное пособие для студентов. - М.: Издателский отдел ф-та ВМиК МГУ, 1999. - 56 с.
5. Левченков В.С. Булевы уравнения в алгебре логики и теории множеств // Вестник Московского ун-та., № 15, Вычислительная математика и кибернетика, 1999, № 3. - С. 17-20.

УДК 517.9

НАХОЖДЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ МНОГОГРАННИКА НЬЮТОНА

Э. С.Сегтарова, Х.О.Хайдаров

Самаркандский государственный университет

E-mail: h_haydar@samdu.uz

Аннотация. Многие задачи алгебры и дифференциальных уравнений, такие как задачи робототехники, гидродинамики, небесной механики, сводятся к нелинейным уравнениям и их системам. Для их решения используется метод «многогранника Ньютона», т.е. строится выпуклая оболочка по степеням мономов многочлена. В данной работе описан и доработан алгоритм, который вычисляет элементы многогранников Ньютона.

Ключевые слова: нелинейные уравнения, системы однородных неравенств, выпуклая оболочка множества точек, «многогранник Ньютона», нормальный конус.

Nyuton ko‘pyoqlarining elementlarini topish

Annotatsiya. Algebra va differensial tenglamalarining ko‘pgina masalalari jumladan robototexnika, gidrodinamika, osmon mexanikasining masalalari chiziqli bo‘lmagan tenglamalar va ularning sistemalariga keltiriladi. Bunday masalalarni yechishda «Nyuton ko‘pyoqlilari» usulidan foyidalanish mumkin. Bunda ko‘phadning monomlari darajalarining qovariq qobig‘i tuziladi va shunga qarab masala yechiladi. Mazkur ishda Nyuton ko‘pyoqlari elementlarini hisoblovchi algoritm keltirilgan.

Kalit so‘zlar: chiziqli bo‘lmagan tenglamalar, birjinsli tengsizliklar sistemalari, to‘plam qovoriq qobig‘i, Nyuton ko‘pyoqligi, normal konus.

Newton's elements convergence

Abstract. Many problems of algebra and differential equations, such as the problems of robotics, hydrodynamics, celestial mechanics, brings to nonlinear equations and their systems. To solve them, the Newton polyhedron method is used and etc... the convex hull is constructed in powers of the monomials of the polynomial. The algorithm is described and refined which calculates the elements of Newton polyhedral on the following article.

Keywords: nonlinear equations, systems of homogeneous inequalities, convex hull of the set of points, "Newton polyhedron", normal cone.

Рассмотрим многочлен:

$$F(X) = \sum F_Q X^Q, \quad Q \in S, \quad (1)$$

где $X = (x_1, \dots, x_n)$, $Q = (q_1, \dots, q_n)$ и $X^Q = x_1^{q_1}, \dots, x_n^{q_n}$, ставится в соответствие множество $S \subset R^n$ векторных показателей Q , для которых коэффициенты $F_Q \neq 0$. Вместе с множеством S (носителем многочлена (1)) рассматриваются его выпуклая оболочка Γ (многогранник Ньютона многочлена (1)) и его грани Γ_i^d в пространстве R^n , а также их нормальные конусы N_i^d в сопряженном пространстве R_*^n , которое является пространством логарифмов координат x_j ; (см. [4]), где d – размерность и i – номер.

Для получения нормального конуса относительно точки Q' (см.[3]), из формул $(P, Q_z - Q') \leq 0$ ($Q_z \in S/Q'$), получаем замыкание конуса - систему однородных линейных неравенств:

$$l_k(X) = a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n \leq 0, \quad 1 \leq k \leq m, \quad (2)$$

Для решения таких систем предложен алгоритм Моцкина-Бургера (см. [1]). Его кратко можно записать в следующем виде:

Вход: n – размерность пространства, $(x) = (x_1, \dots, x_n)$,

$L := \{l_1(x), \dots, l_m(x)\}$ – множество левых частей неравенств системы (2).

Выход: $U = \{u_1, \dots, u_t\}$ – базис линейного подпространства конуса решений системы (2), $V = \{v_1, \dots, v_s\}$ – образующие заострённого конуса решений системы неравенств (2).

1. $U_{current} := \{(1, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 1)\}$; $V_{current} := \{\emptyset\}$; $L_{current} = \{\emptyset\}$; $i = 1$;

2. $l := l_i(x)$;

3. **if** $\exists u \in U_{current}: l(u) \neq 0$, **then**

$$U_{current} := \{u_i l(u) - u l(u_i), u_i \in U_{current}, u \neq u_i\};$$

$$b = \begin{cases} u, & \text{if } l(u) < 0, \\ -u, & \text{if } l(u) > 0; \end{cases}$$

$V_{current} := \{b, -v_i l(b) + b l(v_i), v_i \in V_{current}\}$;

4. **else** $V_{current}^- := \{v \in V_{current} | l(u) < 0\}$;

$$V_{current}^0 := \{v \in V_{current} | l(u) = 0\};$$

$$V_{current}^+ := \{v \in V_{current} | l(u) > 0\};$$

$V_{current}^* := \{\emptyset\}$;

if $n \leq 2$ **or** $\text{Size}(V_{current}) \leq 2$ **then**

for $\forall (v_k, v_s) \in V_{current}^-: v_k \in V_{current}^-, v_s \in V_{current}^+$ **do**

$V_{current}^* := \{-v_s l(v_k) + v_s l(v_k)\}$; **end if**;
elsedo $L^* := \{l_j(x) \in L_{current} \mid l_j(v_k) = l_j(v_s) = 0\}$;
if $L^* \neq \emptyset$ **then for** $\forall v \in V_{current} \setminus \{v_k, v_s\}$
for $\forall l_j(x) \in L^*$ **do**
if $l_j(v) \neq 0$ **then** $V_{current}^* := V_{current}^* \cup \{-v_s l(v_k) + v_s l(v_k)\}$; **end do**;
end if;
5. $V_{current} := V_{current}^0 \cup V_{current}^- \cup V_{current}^*$;
6. $L_{current} := L_{current} \cup \{l_i(x)\}$; $L := L \setminus \{l_i(x)\}$; $i := i + 1$;
7. **if** $L \neq \emptyset$ **then goto** 2; **end if**.
8. $U := U_{current}$; $V := V_{current}$.

По данному псевдокоду была написана компьютерная программа на языке Java. Решение выводится в виде таблицы соответствия (см.[3]). Для двумерного и трёхмерного случая имеется наглядное представление.

Рассмотрим алгоритм Мошкина-Бургера на примере носителя

$$S: \{Q_1 = (1; 1; 1), Q_2 = (3; 0; 0), \quad Q_3 = (0; 3; 0), \\ Q_4 = (2; 1; 0), \quad Q_5 = (0; 6; 6), \quad Q_6 = (1; 2; 2)\},$$

для нахождения нормального конуса к точке Q_1 (см. рис.1)

Для получения нормального конуса относительно точки Q_1 (см.[3]), из формул $(P, Q_j - Q_1) \leq 0$ ($j=2,3,4,5,6$), получаем замыкание конуса, которое представляет собой систему однородных линейных неравенств:

$$\begin{cases} l_1(P) = 2p_1 - p_2 - p_3 \leq 0, \\ l_2(P) = -p_1 + 2p_2 - p_3 \leq 0, \\ l_3(P) = p_1 - p_3 \leq 0, \\ l_4(P) = -p_1 + 5p_2 + 5p_3 \leq 0, \\ l_5(P) = p_2 + p_3 \leq 0. \end{cases}$$

Решение

На первом шаге, имеем:

$$U_1^0 = (1; 0; 0), \quad U_2^0 = (0; 1; 0), \quad U_3^0 = (0; 0; 1).$$

Отсюда $l_1(U_1^0) = 2 \neq 0$.

Новый базис составят векторы:

$$U_1^1 = U_2^0 l_1(U_1^0) - U_1^0 l_1(U_2^0) = 2U_2^0 + U_1^0 = 2(0; 1; 0) + (1; 0; 0) = (1; 2; 0), \\ U_2^1 = U_3^0 l_1(U_1^0) - U_1^0 l_1(U_3^0) = 2U_3^0 + U_1^0 = 2(0; 0; 1) + (1; 0; 0) = (1; 0; 2).$$

Фундаментальное решение: $V_1^1 = -U_1^0 = (-1; 0; 0)$.

На втором шаге:

$$l_2(U_1^1) = 3 \neq 0.$$

Новый базис:

$$U_1^2 = U_2^1 l_2(U_1^1) - U_1^1 l_2(U_2^1) = 3U_2^1 + 3U_1^1 = (6; 6; 6) \sim (1; 1; 1).$$

Фундаментальная система решений:

$$V_1^2 = -U_1^1 = (-1; -2; 0), \quad V_2^2 = -V_1^1 l_2(V_1^2) + V_1^1 l_2(V_2^1) = 3V_1^1 + V_2^1 = 3(-1; 0; 0) + (-1; -2; 0) \\ = (-4; -2; 0) \sim (-2; -1; 0).$$

На третьем шаге, имеем:

$$l_3(U_1^2) = 0, \quad l_3(V_1^2) = -1 < 0 \quad \text{и} \quad l_3(V_2^2) = -1 < 0.$$

Таким образом, на третьем шаге ни базис, ни фундаментальная система решений не меняются и переходят на четвёртый шаг.

На четвёртом шаге, имеем:

$$l_4(U_1^2) = 9 \neq 0.$$

Начиная с этого шага, базис отсутствует.

Фундаментальная система решений:

$$V_1^4 = -U_1^2 = (-1; -1; -1), \\ V_2^4 = -V_1^2 l_4(V_1^4) + V_1^2 l_4(V_2^2) = 9V_1^2 - 9V_2^2 = 9(-1; -2; 0) - 9(-1; -1; -1) \\ = (0; -9; 9) \sim (0; -1; 1), \\ V_3^4 = -V_2^2 l_4(V_1^4) + V_2^2 l_4(V_2^2) = 9V_2^2 - 3V_1^4 = 9(-2; -1; 0) - 3(-1; -1; -1) \\ = (-15; -6; 3) \sim (-5; -2; 1).$$

На пятом шаге, имеем:

$$l_5(V_1^4) = -2 < 0, l_5(V_2^4) = 0 \text{ и } l_5(V_3^4) = -1 < 0.$$

Таким образом, на пятом шаге ни базис, ни фундаментальная система решений не меняются.

Получаем фундаментальное решение:

$$V_1^4 = (-1; -1; -1), V_2^4 = (0; -1; 1), V_3^4 = (-5; -2; 1).$$

Или, $V = C_1V_1^4 + C_2V_2^4 + C_3V_3^4$ – нормальный конус для точки Q_1 , где $C_i > 0$ ($i=1,2,3$).

Созданная компьютерная программа даёт решение в виде таблице соответствия (см. рис. 2); где по горизонтали отмечены точки носителя, а по вертикали нормальные вектора. Знак «+» означает соответствие вектора в нормальном конусе данной вершине, знак «-» - не соответствие.

		Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	Q_6
1)	$(-5; -2; 1)$	+	-	+	-	+	-
2)	$(-1; -1; -1)$	+	+	+	+	-	-
3)	$(0; -1; 1)$	+	+	-	-	+	+
4)	$(2; 2; -1)$	-	+	+	+	+	-

Также возможно получить пошаговое решение с векторами находящимися как в базисе решения, так и в фундаментальном решении для заданной системы линейных неравенств.

Из таблицы видно, что вершины составляют точки Q_1, Q_2, Q_3, Q_5 , а точка Q_4 лежит на ребре, образованном вершинами Q_2 и Q_3 , точка Q_6 лежит на грани, которая образована вершинами Q_1, Q_2 и Q_5 .

Теперь по имеющимся данным найдём все грани различной размерности вместе точками, входящими в каждую грань. Иными словами, решим следующую задачу:

Дано: таблица соответствия T_{ab} , для заданного множества точек $Q_1 \dots Q_z$, размерности n с нормальными векторами $N_1 \dots N_y$ к граням выпуклой оболочки, где каждая ячейка таблицы содержит булево значение (истина или ложь), показывающее, соответствует ли вектор N_a точке Q_b ($1 \leq a \leq y$ и $1 \leq b \leq z$).

Требуется определить: множество всех граней размерности d ($1 \leq d \leq n - 1$), а также множество точек, составляющих каждую грань.

Решение

Пусть:

H^d - множество всех граней размерности d данной выпуклой оболочки,

Γ^d - грань размерности d , составленная из точек $Q_{\Gamma_1^d} \dots Q_{\Gamma_f^d}$ (где $f > d$).

Условимся также, что результат логической функции можно рассматривать не только как истину или ложь (+ или -), но и как 1 или 0 соответственно.

Для удобства написания определим вспомогательную функцию $t(a, b) = T_{a\Gamma_b^d}$, т.е. ячейка таблицы соответствия для вектора N_a и точки $Q_{\Gamma_b^d}$.

Тогда:

$$\Gamma^d \in H^d$$

$$\rightarrow \begin{cases} d > 0: \sum_{1 \leq i \leq y} (t(i, 1) \wedge t(i, 2) \wedge \dots \wedge t(i, f)) \geq n - d \wedge \nexists w^d (w^d \supset \Gamma^d \wedge w^d \in H^d) \\ d = 0: f = 1 \wedge \sum_{1 \leq i \leq y} t(i, 1) \leq n - 1 \wedge \exists w_1^1 \exists w_2^1 \dots \exists w_{n-1}^1 (w_i^1 \in H^1: 1 \leq i \leq n - 1) \end{cases}$$

или:

$d + 1$ или более точек составляют грань размерности d тогда и только тогда, когда в таблице T им всем одновременно соответствуют не менее $n - d$ векторов и при этом нет грани той же размерности, которая охватывала бы её целиком.

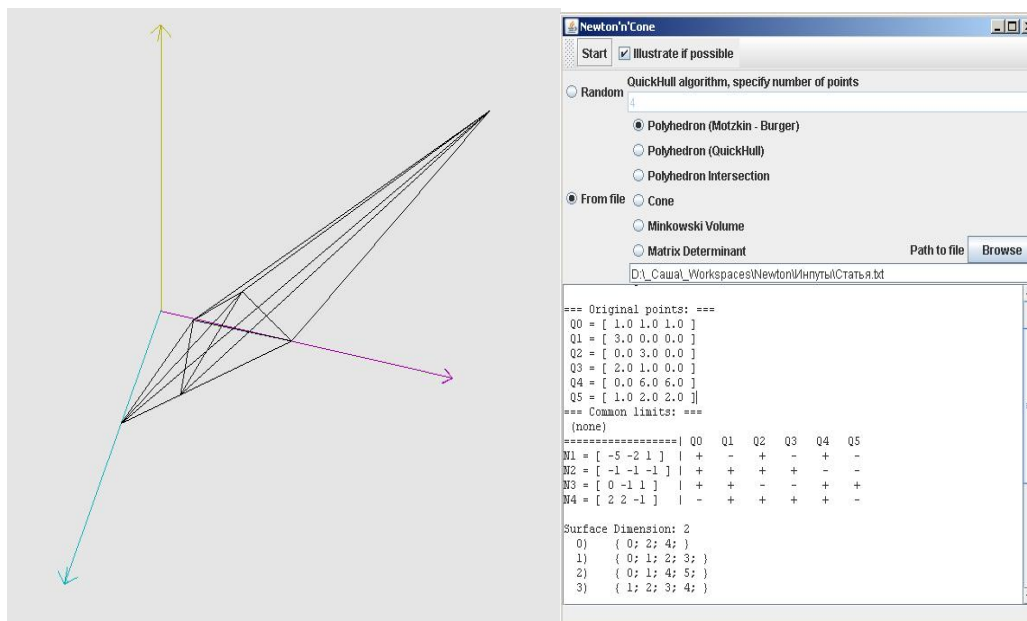


Рис 1. Трёхмерное изображение

Рис. 2 Окно программы

Особый случай – грани нулевой размерности (вершины). Здесь налагаются дополнительные условия – вершина может состоять только из одной точки и она является вершиной, только если встречается не менее чем в $n - 1$ гранях первой размерности (ребрах).

На основе данного алгоритма создана компьютерная программа находящая грани различной размерности выпуклой оболочки.

Рассмотрим грани выпуклой оболочки на примере уже встречавшегося ранее носителя (таблицу соответствия см. выше)

$$S: \{ Q_1 = (1; 1; 1), \quad Q_2 = (3; 0; 0), \quad Q_3 = (0; 3; 0), \\ Q_4 = (2; 1; 0), \quad Q_5 = (0; 6; 6), \quad Q_6 = (1; 2; 2) \},$$

Построим таблицу, содержащую описание граней выпуклой оболочки:

d	i	j	k	m
3	1	Q_1, Q_3, Q_5	1	1
3	2	Q_1, Q_2, Q_3, Q_4	2	1
3	3	Q_1, Q_2, Q_5, Q_6	3	1
3	4	Q_2, Q_3, Q_4, Q_5	4	1
2	1	Q_1, Q_3	1,2	1,2
2	2	Q_1, Q_5	1,3	1,3
2	3	Q_3, Q_5	1,4	1,4
2	4	Q_1, Q_2	2,3	2,3
2	5	Q_2, Q_3, Q_4	2,4	2,4
2	6	Q_2, Q_5	3,4	3,4
1	1	Q_1	1,2,3	1,2,4
1	2	Q_3	1,2,4	1,3,5
1	3	Q_5	1,3,4	2,3,5
1	4	Q_2	2,3,4	4,5,6

где:

i — уникальный для этой размерности индекс грани (от 1 и выше);
 j – список точек, составляющих грань;
 k – индексы нормальных векторов к грани;
 m – индексы граней размерности $d + 1$, в состав которых входит данная грань. Если $d + 1 \geq n$, то m считается равным единице.

Работа выполнена при поддержке гранта фонда Республики Узбекистан №ОТ-Ф4-69

Литература

1. Черников С. Н. Линейные неравенства. - М.: Наука 1968. 360 с.
2. Солеев А. С., Сеттарова Э. С., Алгоритм Моцкина-Бургера нахождения решений системы однородных неравенств. //Труды научной конференции «Проблемы современной математики», Карши. 2011 год.с. 231-234.
3. Солеев А.С., Арансон А. Вычисление многогранника и нормальных конусов его граней. Препринт Ин-та прикладной математики им. М.В.Келдышева РАН, Москва, 1994. 20 с.
4. Брюно А.Д. Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. М.: Наука. Физматлит, 1998. 382 с.
5. Сеттарова Э. С., Хайдаров Х.О., Реализация алгоритма деления в кольце полиномов от многих переменных. //”Фан, таълим ва ишлаб чиқариш интеграциясида ахборот-коммуникация технологияларини қўллашнинг ҳозирги замон масалалари” Республика илмий-техник анжумани, Қорақалпоқ давлат университети 2015 йил, 79-82 бет.

UDK: 517.984

PANJARADAGI IKKI FERMIONLI SISTEMAGA MOS DISKRET SHREDINGER OPERATORI XOS QIYMATLARI MAVJUDLIGI

S.N. Lakaev, S.X. Abdusakimov.

Samarqand davlat universiteti

E-mail: Slakaev@mail.ru

Annotatsiya. Biz oʻlchami d ga teng boʻlgan giperkubik Z^d panjaradagi ikki fermionli sistema orqali qurilgan etarlicha keng ikki zarrachali Shredinger operatorlari $H_\mu(k) = H_0(k) - \mu V, k \in T^d$ ni qaraymiz, bunda T^d orqali oʻlchami d ga teng boʻlgan tor belgilangan. Ushbu $H_\mu(k), k \in T^d$ operatorlarning muhim spektrdan chapda diskret spektri (xos qiymatlari) mavjudligini sistema quasi-impulsi va ta'sir energiyasi $\mu V, \mu > 0$ ga bogʻliq ravishda oʻrganamiz.

Kalit soʻzlar: diskret Shredinger operator, hamiltonian, dispersion munosabat, quasi-impuls, muhim spektr, xos qiymat.

The existence of eigenvalues of discrete schrödinger operators associated to a system of two fermions on lattice

Abstract. We consider wide class of the two-particle Schrödinger operators $H_\mu(k) = H_0(k) - \mu V, k \in T^d$, where T^d is the $d \geq 1$ - dimensional torus, associated to a system of two identical fermions moving on the hypercubic lattice Z^d and interacting through attractive short-range potentials $\mu V, \mu > 0$. We prove the existence of discrete spectrum (eigenvalues) of $H_\mu(k), k \in T^d$ depending on the quasi-momentum of the two particles and interaction energy $\mu V, \mu > 0$.

Keywords: discret Schrödinger operators, quantum mechanical two-partikle system, hamiltonians, conditionally negative definite functions, dispersion relations.

Существование собственных значений дискретного оператора шредингера, соответствующего двух фермионов на решётке

Аннотация. Рассматривается достаточный широкий, двух частичный оператор Шредингера $H_\mu(k) = H_0(k) - \mu V, k \in \mathbb{T}^d$, определенный с помощью двух фермионов в d -мерной решетке \mathbb{Z}^d . Здесь \mathbb{T}^d, d -мерный тор. Изучается дискретный спектр лежащий существенного спектра оператора $H_\mu(k), k \in \mathbb{T}^d$ в зависимости от квази-импульса системы и энергий действия $\mu V, \mu > 0$.

Ключевые слова: спектральные свойства, двухчастичный дискретный оператор Шредингера, принцип Бирмана-Швингера, собственное значение.

1. Kirish

Biz d -o'lchamli \mathbb{Z}^d giper kubik panjarada qisqa masofaga o'zaro ta'sirlashuvchi ikki fermionli sistemani qaraymiz.

Bu maqolaning asosiy maqsadi ikki sistema mos ikki zarrachali diskret Shredinger operatorlari $H_\mu(k), k \in \mathbb{T}^d$ ning bog'langan holatlari mavjudligini ko'rsatishdir.

Ikki zarrachali diskret Shredinger operatorlarining spektral xossalari keyingi paytlarda faol o'rganilyapti (masalan [1]--[5] va [6]--[11] larni qarang).

Uzluksiz Shredinger operatorlari muhim spektrning chapida yotuvchi diskret spektri (xos qiymatlari) mavjudligi faqat ta'sir energiyasi $\mu V, \mu > 0$ ga bog'liq bo'ladi ([6],[7],[8],[13]).

Ammo, ikki zarrachali diskret Shredinger operatorlari uchun xos qiymatlarning mavjudligi va soni faqatgina ta'sir potentsiali μV ga bog'liq bo'lmasdan balki sistema quasi-impulsi $k \in \mathbb{T}^d$ ga ham bog'liqdir.

Hozirgi ishda biz ikki zarrachali diskret Shredinger operator $H_\mu(k), k \in \mathbb{T}^d$ larning xos qiymatlarining mavjudligi μV potentsial va quasi-impuls $k \in \mathbb{T}^d$ barcha $d \geq 1$ o'lchamlar uchun isbotlandi

O'lchami $d \geq 3$ bo'lgan panjarada ikki ixtiyoriy zarrachali sistemaga mos ikki zarrachali diskret Shredinger operatorlari $H_\mu(k), k \in \mathbb{T}^d$ ning diskret spektri mavjudligi sistema quasi-impulsi $k \in \mathbb{T}^d$ ning barcha qiymatlari uchun [1] da o'rganilgan.

Uch o'lchamli panjaradagi Shredinger operatorlari uchun xos qiymatlarning mavjudligi va diskret spektr (xos qiymatlar)ning o'rining kontakt va qo'shni tugunlarda juft-jufti bilan o'zaro ta'sirlashuvchi potentsialga bog'liqligi [10] da keltirilgan.

Ikki ixtiyoriy zarrachali sistema mos Shredinger operator $H(0)$ ining xos qiymatlari soni uchun chegaralar bog'liq qilindi [3] va [4] larda keltiraman. Xususan, $H(0)$ operatorning muhim spektridan chapda xos qiymatlarning mavjudligi ko'rsatilgan.

2 . Diskret Schredinger operatorlari

Faraz qilaylik, \mathbb{Z}^d kabi d -o'lchamli panjara va $\mathbb{T}^d = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^d = [-\pi, \pi)^d$ bilan d -o'lchamli tor belgilangan bo'lsin. Aytaylik, $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ va $L^2(\mathbb{T}^d)$ lar orqali kvadrati bilan jamlanuvchi va integrallanuvchi funktsiyalarning Hilbert fazolari bo'lsin.

Faraz qilaylik,

$$F^* : \ell^2(\mathbb{Z}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{T}^d), \quad [F^*(f)](p) := \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} e^{i(p,x)} f(x) \quad (1)$$

odatdagi Fourier almashtirishi va

$$F : L^2(\mathbb{T}^d) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}^d), \quad [F(\psi)](x) := \int_{\mathbb{T}^d} e^{-i(p,x)} \psi(p) \eta(dq), \quad (2)$$

unga teskari Fourier almashtirishi, η esa toridagi (normallangan) Haar o'lchovi:

$$\eta(dq) = \frac{d^d p}{(2\pi)^d}.$$

2.1 . Kordinata tasviri. Kordinata tasvirda(ko‘rinishda) panjarada qisqa masofada o‘zaro ta’sirlashuvchi ikki fermionli sistemaga mos ikki zarrachali diskret Shredinger operatorlari oilasi $H_\mu(k), k \in \mathbb{T}^d$ quyidagi

$$H_\mu(k) = H_0(k) - \mu V, \quad k \in \mathbb{T}^d, \mu > 0 \quad (3)$$

formula bilan aniqlanadi.

Har bir $k \in \mathbb{T}^d$ uchun qo‘zg‘almagan operator $H_0(k)$ quyidagicha aniqlanadi:

$$[H_0(k)\varphi](x) = \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} \varepsilon_k(x-y)\varphi(y), \varphi \in \ell^2(\mathbb{Z}^d). \quad (4)$$

Bunda

$$\varepsilon_k(x) = [1 + e^{i(k,x)}]\varepsilon(x) \quad (5)$$

va

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} 1, & \text{agar } x = 0, \\ -1/2, & \text{agar } |x| = 1 \\ 0, & \text{agar } |x| > 1. \end{cases}$$

Potensial (ta’sir) operatori

$$[V\varphi](x) = v(x)\varphi(x) \varphi \in \ell^2(\mathbb{Z}^d). \quad (6)$$

kabi aniqlanadi. Bu yerda \mathbb{Z}^d panjarada aniqlangan $v(\cdot)$ funksiya juft va nomanfiy bo‘lib, cheksizlikda nolga intiladi.

2.2. Impuls tasviri. Impuls tasvirda qaralayotgan operatorlar oilasi $\hat{H}_\mu(k), k \in \mathbb{T}^d$ quyidagi ko‘rinishga ega:

$$\hat{H}_\mu(k) = \hat{H}_0(k) - \mu \hat{V}, \quad k \in \mathbb{T}^d. \quad (7)$$

Bunda $\hat{H}_0(k) = \mathbf{F}^* H_0(k) \mathbf{F}$, $k \in \mathbb{T}^d$ bo‘lib, u chegaralangan $\hat{\varepsilon}_k$ funksiyaga ko‘paytirish operatori, ya’ni

$$[\hat{H}_0(k)\hat{\varphi}](q) = \hat{\varepsilon}_k(q)\hat{\varphi}(q), \quad \hat{\varphi} \in L^2(\mathbb{T}^d), \quad (8)$$

bunda

$$\hat{\varepsilon}_k(q) = \hat{\varepsilon}(k-q) + \hat{\varepsilon}(q) \quad (9)$$

va

$$\hat{\varepsilon}(p) = \sum_{j=1}^d [1 - \cos p_j] = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} e^{i(p,x)} \varepsilon(x), \quad p = (p_1, \dots, p_d) \in \mathbb{T}^d. \quad (10)$$

qo‘zg‘alish, ya’ni ta’sir operatori \hat{V} quyidagi formula

$$[\hat{V}\hat{\varphi}](q) = [\mathbf{F}^* \mathbf{V} \mathbf{F} \varphi](q) = \int_{\mathbb{T}^d} \hat{v}(p-q)\hat{\varphi}(q)\eta(dq), \quad \hat{\varphi} \in L^2(\mathbb{T}^d),$$

orqali aniqlanadi va

$$\hat{v}(p) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} e^{i(p,x)} v(x), \quad p = (p_1, \dots, p_d) \in \mathbb{T}^d. \quad (11)$$

Bu holda \mathbb{Z}^d panjarada aniqlangan $v(\cdot)$ funksiya juft va nomanfiy bo‘lib cheksizlikda nolga intilganligi uchun qo‘zg‘alish operatori V kompakt bo‘ladi va shuning sababi Veyl teoremasiga ko‘ra $H_\mu(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$ operatorning $\sigma_{\text{ess}}(H_\mu(k))$ muhim spektri $H_0(k)$ operatorning $\sigma(H_0(k))$, $k \in \mathbb{T}^d$ spektri bilan ustma-ust tushadi [14]. Ravshanki,

$$\sigma_{\text{ess}}(H_{\mu}(k)) = \sigma_{\text{ess}}(\hat{H}_{\mu}(k)) = [\hat{\varepsilon}_{\min}(k), \hat{\varepsilon}_{\max}(k)],$$

bunda,

$$\hat{\varepsilon}_{\min}(k) := \min_{q \in \mathbb{T}^d} \hat{\varepsilon}_k = \hat{\varepsilon}_k(0), \quad \hat{\varepsilon}_{\max}(k) := \max_{q \in \mathbb{T}^d} \hat{\varepsilon}_k(q) = \hat{\varepsilon}_k(\pi).$$

Min-max prinsipi va V operatorning musbatligidan $H_{\mu}(k)$ operator faqat muhim spektr $\sigma_{\text{ess}}(H_{\mu}(k))$ ning chap chegarasi $\varepsilon_{\min}(k)$ dan chapda chekli karrali xos qiymatlariga ega bo'ladi.

Biz shuningdek potensialning ishorasini o'zgartirganda \mathbb{R}^d dagi Shredinger operatorlardan farqli o'laroq, diskret Shredinger operatorlarining muhim spektrdan o'ngda yotuvchi xos qiymatlari mavjud bo'lishini ta'kidlaymiz.

Eslatib o'tamizki, itarishuvchi zarrachalar sistemasi bo'lgan holda natijalar biz qarayotgan holdagi kabi o'rganiladi.

2.3. Birman-Shvinger prinsipi. Hilbert fazosi \mathbf{H} , da o'z-o'ziga qo'shma A operator berilgan bo'lsin. Ixtiyoriy $\gamma \in \mathbb{R}$ uchun,

$$n_+(\gamma, A) := \max\{\dim L : L \subset \mathbf{H}; \langle A\varphi, \varphi \rangle > \gamma, \varphi \in L, \|\varphi\| = 1\} \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$$

va

$$n_-(\gamma, A) = \max\{\dim L : L \subset \mathbf{H}; \langle A\varphi, \varphi \rangle < \gamma, \varphi \in L, \|\varphi\| = 1\} \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}.$$

orqali mos ravishda $n_+(\gamma, A)$ va $n_-(\gamma, A)$ ni belgilaymiz.

Agar γ son A operator muhim spektrining ichki nuqtasi bo'lsa, u holda $n_+(\gamma, A)$ va $n_-(\gamma, A)$ cheksizga teng bo'ladi. Agar $n_+(\gamma, A)$ yoki $n_-(\gamma, A)$ chekli bolsa u A operatorning mos ravishda γ dan katta yoki kichik (chekli karrali)xos qiymatlari soniga teng bo'ladi (Glazman lemmasini ko'ring [14]).

Faraz qilaylik, $d \geq 1$ va $\varepsilon_k(\cdot)$ – umumiy kvaziimpulsi $k \in \mathbb{T}^d$ bo'lgan dispersiya funktsiyasi va $v \in \ell^\infty(\mathbb{Z}^d; \mathbb{R}_0^+)$ bo'lsin. Istalgan $k \in \mathbb{T}^d$ va $z < \varepsilon_{\min}(k)$ uchun, $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ fazoda musbat

$$B_{\mu}(k, z) := V^{1/2} R_0(k, z) V^{1/2}. \quad (12)$$

$B_{\mu}(p, z)$ Birman-Shvinger operatorini aniqlaymiz. Bu yerda, $R_0(k, z) = F \hat{R}_0(k, z) F^*$ ya'ni $H_0(k)$ operatorning z dagi rezolventasi, $\hat{R}_0(k, z)$ esa $\hat{H}_0(k)$ operatorning $z \in \mathbb{C} \setminus [\hat{\varepsilon}_{\min}(k), \hat{\varepsilon}_{\max}(k)]$ nuqtadagi rezolventasi.

Ushbu $V^{\frac{1}{2}}$ operator bilan V nomanfiy operatorning (yagona) nomanfiy kvadrat ildizi, ya'ni

$$[V^{\frac{1}{2}}\varphi](x) = v^{\frac{1}{2}}(x)\varphi(x), \quad \varphi \in \ell^2(\mathbb{Z}^d). \quad (13)$$

Birman-Shvinger operatorining yadrosi $B_{\mu}(k, z; \cdot, \cdot), k \in \mathbb{T}^d, z < \varepsilon_{\min}(k)$ quyidagi formula bilan aniqlanadi

$$B_{\mu}(k, z; x, y) = \mu v^{\frac{1}{2}}(x) R_0(k, z; x - y) v^{\frac{1}{2}}(y), \quad x, y \in \mathbb{Z}^d. \quad (14)$$

Bunda

$$R_0(k, z; x - y) := \int_{\mathbb{T}^d} \frac{e^{(q, x-y)}}{\varepsilon_k(q) - z} \eta(dq), \quad x \in \mathbb{Z}^d. \quad (15)$$

Shunday qilib $B_{\mu}(k, z)$ operator quyidagicha aniqlanadi

$$[B_{\mu}(k, z)\psi](x) = \mu v^{\frac{1}{2}}(x) \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} \int_{\mathbb{T}^d} \frac{e^{(p, x-y)}}{\varepsilon_k(p) - z} \eta(dp) v^{\frac{1}{2}}(y) \psi(y), \quad x \in \mathbb{Z}^d, \psi \in \ell^2(\mathbb{Z}^d). \quad (16)$$

Faraz qilaylik, $d \geq 1$ bo'lsin. U holda Birman-Shvinger operatori $B_\mu(k, z) \in B_\mu(\ell^2(\mathbb{Z}^d))$ o'zining ushbu

$$B_\mu(k, z; x, y) := \mu v^{\frac{1}{2}}(x) R_0(k, z; x - y) v^{\frac{1}{2}}(y), x, y \in \mathbb{Z}^d \quad (17)$$

yadrosi orqali aniqlanadi. Bu yerda, barcha $x, y \in \mathbb{Z}^d$ lar uchun

$$R_0(k, z; x, y) := \int_{\mathbb{T}^d} \frac{e^{(q, x-y)}}{\varepsilon_k(q) - z} \eta(dq). \quad (18)$$

Bu $B_\mu(k, z)$ operatori Hilbert-Shmidt sinfiga qarashli, xususan u kompakt bo'ladi.

Giperkubik \mathbb{Z}^d panjaradagi ikki zarrachali Shredinger operatorlari uchun quyidagi teorema Birman-Shvinger prinsipini ifodalaydi.

Teorema 2.1. (Birman-Shvinger prinsipi) Faraz qilaylik \mathbb{Z}^d panjarada aniqlangan $v(\cdot)$ funktsiya juft nomanfiy va $v(\cdot) \in \ell^1(\mathbb{Z}^d)$ bo'lsin. U holda barcha $z < \varepsilon_{\min}(k), k \in \mathbb{T}^d$ lar uchun (i)-(iv) tasdiqlar o'rinli.

1. Agar $H_\mu(k)\phi = z\phi$ tenglamaning yechimi $\phi \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$ bo'lsa, u holda $\psi = B_\mu(k, z)\psi$ tenglamaning yechimi $\psi := V^{1/2}\phi \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$ bo'ladi.

2. Agar $\psi = B_\mu(k, z)\psi$ tenglamaning yechimi $\psi \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$ bo'lsa, u holda $H_\mu(k)\phi = z\phi$ tenglamaning yechimi $\phi := R_0(k, z)V^{1/2}\psi \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$ bo'ladi.

3. Berilgan $z < \varepsilon_{\min}(k)$ son $H_\mu(k)$ operatorning m karrali xos qiymati bo'lishi uchun 1 son $B_\mu(k, z)$ operatorning m karrali xos qiymati bo'lishi zarur va yetarli.

4. Karraliliklari bilan qo'shib hisoblaganda $H_\mu(k)$ ning z dan kichik xos qiymatlari soni $N_-(z, H_\mu(k))$ $B_\mu(k, z)$ ning 1, dan katta xos qiymatlari soniga $N_+(1, B_\mu(k, z))$ ga teng, ya'ni

$$N_-(z, H_\mu(k)) = N_+(1, B_\mu(k, z)). \quad (19)$$

Teorema 2.1ning isboti. Barcha $z < \varepsilon_{\min}(k)$ lar uchun bu teorema standard Birman-Shvinger prinsipini ifodalaydi va panjaradagi Shredinger operatorlari uchun uning isboti [3] da keltirilgan.

Teorema 2.2 Faraz qilaylik, $v \in \ell^1(\mathbb{Z}^d; \mathbb{R}_+^+)$ nolmas nomanfiy juft funktsiya bo'lsin va $k \in \mathbb{T}^d, s \in \mathbb{Z}^d$ lar uchun

$$v(s) \int_{\mathbb{T}^d} \frac{\sin^2(p, s) \eta(dp)}{\varepsilon_{\min}(k) - \varepsilon_k(p)} > 1. \quad (20)$$

tengsizlik bajarilsin. U holda $H_\mu(k)$ operator $z < \varepsilon_{\min}(k)$ xos qiymatga ega bo'ladi.

Natija 2.3 Ixtiyoriy $v \neq 0$ va $k \in \mathbb{T}^d$ lar uchun shunday $\mu_0 > 0$ mavjudki barcha $\mu > \mu_0$ lar da $H_\mu(k) = H_0(k) - \mu V, k \in \mathbb{T}^d$ operator $\varepsilon_\mu(k) < \varepsilon_{\min}(k)$ xos qiymatga ega.

Teorema 2.2 ning isboti. Faraz qilaylik, 2.2 teoremaning shartlari bajarilsin va $v(\cdot) \geq 0$ juft funktsiya bo'lsin u holda $s, -s \in \mathbb{Z}^d$ nuqtalar mavjud bo'lib $v(s) = v(-s) > 0$ bo'ladi. Izlanayotgan ψ funktsiyani quyidagicha aniqlaymiz

$$\psi_s(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{agar } x = s, \\ -\frac{1}{2} & \text{agar } x = -s, \\ 0 & \text{qolgan hollarda.} \end{cases} \quad (21)$$

Ayonki, $\psi_s \in \ell^{2,o}(\mathbb{Z}^d)$. Bu yerda, $\ell^{2,o}(\mathbb{Z}^d)$ Hilbert fazosining \mathbb{Z}^d da kvadrati bilan jamlanuvchi toq funksiyalar fazosi. Shu sababli Birman-Shvinger operatorining aniqlanishiga ko'ra istalgan $z < \varepsilon_{\min}(k), k \in \mathbb{T}^d$ uchun

$$\begin{aligned} & (\mathbf{B}_\mu(k, z)\psi_s, \psi_s) \\ &= \mu(v^{\frac{1}{2}}r_0(k, z)v^{\frac{1}{2}}\psi_s, \psi_s) = \mu(r_0(k, z)v^{\frac{1}{2}}\psi_s, v^{\frac{1}{2}}\psi_s) = \mu \int_{\mathbb{T}^d} \frac{|\mathbf{F}^* \circ v^{1/2}\psi_s|^2 \eta(dp)}{\varepsilon_k(p) - z} \\ &= \mu \int_{\mathbb{T}^d} \frac{|\mathbf{F}^* \circ v^{1/2}\psi_s|^2 \eta(dp)}{\varepsilon_k(p) - z} = \mu \int_{\mathbb{T}^d} \frac{|\sum_{x \in \mathbb{Z}^d} e^{i(p,x)} v^{\frac{1}{2}}(x)\psi_s(x)|^2 \eta(dp)}{\varepsilon_k(p) - z} \\ &= \mu v(s) \int_{\mathbb{T}^d} \left[\frac{e^{i(p,s)} - e^{-i(p,s)}}{2} \right]^2 \frac{\eta(dp)}{\varepsilon_k(p) - z} = \mu v(s) \int_{\mathbb{T}^d} \frac{\sin^2(p,s)\eta(dp)}{\varepsilon_k(p) - z} \end{aligned}$$

tengliklar o'rinli. Ushbu

$$F(z) = \mu \int_{\mathbb{T}^d} \frac{\sin^2(p,s)\eta(dp)}{\varepsilon_k(p) - z}$$

funksiya $(-\infty, \varepsilon_{\min}(k)]$ yarim intervalda uzluksiz va monoton o'suvchi hamda

$$\lim_{z \rightarrow \varepsilon_{\min}(k)} F(z) = \mu v(s) \int_{\mathbb{T}^d} \frac{\sin^2(p,s)\eta(dp)}{\varepsilon_k(p) - \varepsilon_{\min}(k)} > 1. \quad (22)$$

munosabatlar o'rinli. Shunga ko'ra bironta $z < \varepsilon_{\min}(k)$ va yuqorida (21) formula bilan aniqlangan ψ_s funksiya uchun $(\mathbf{B}_\mu(k, z)\psi_s, \psi_s) > 1$ tengsizlik o'rinli bo'ladi, ya'ni o'z-o'ziga qo'shma chegaralangan $\mathbf{B}_\mu(k, z)$ operator $(1, +\infty)$ intervalda xos qiymatga ega. Birman-Shvinger prinsipiga ko'ra $H_\mu(k)$ operator $(-\infty, \varepsilon_{\min}(k))$ intervalda xos qiymatga ega. \square

Adabiyotlar

1. S. Albeverio, S. N. Lakaev, K. A. Makarov, Z. I. Muminov: The Threshold Effects for the Two-particle Hamiltonians on Lattices, Comm.Math.Phys. **262**(2006), 91--115
2. Albeverio, S.N. Lakaev and A.M. Khalkhujaev: Number of Eigenvalues of the Three-Particle Schrodinger Operators on Lattices, **18** (2012), **18pp.** 387-420
3. V. Bach, W. de Siqueira Pedra, S. Lakaev: Bounds on the Discrete Spectrum of Lattice Schrödinger Operators Preprint mp-arc 10-143.
4. V. Bach, W. de Siqueira Pedra, S. Lakaev: Bounds on the Pure Point Spectrum of Lattice Schrödinger Operators, Preprint mp-arc/c/11/11-161.
5. Faria da Veiga P. A., Ioriatti L., and O'Carroll M.: Energy-momentum spectrum of some two-particle Hamiltonians, Phys. Rev. E (3) **66**, 016130, 9 pp. (2002). Poincaré Phys. Theor. **67**, 91--107 (1997).
6. Klaus M. and Simon B.: Coupling constants thresholds in non-relativistic quantum mechanics. I. Short range two body case. Ann. Phys. **130**, 251--281 (1980).
7. M.Klaus: On the bound state of Schrödinger operators in one dimension, Annals of Physics, Volume 108, Issue 2, 1977, pp. 288B--300

8. M.Klaus and B. Simon: Coupling constant thresholds in nonrelativistic quantum mechanics. I. Short-range Two-body case. *Annals of Physics*, **108**,251-281(1977).
9. Lakaev S. N.: The Efimov effect in a system of three identical quantum particles. *Funct. Anal. Appl.* **27**, 166--175 (1993).
10. S.N.Lakaev, Sh.M. Tilavova: Merging of eigenvalues and resonances of a two-particle Schrödinger operator. *Theoret.and Math. Phys.*, **101**,1320 -1331,(1994)
11. S. N. Lakaev, I.N. Bozorov: The number of bound states of a one-particle Hamiltonian on a three-dimensional lattice, *Theoretical and Mathematical Physics*, **158**, 2009, pp. 360-376.
12. Pankov A. A.: *Lecture notice operators on Hilbert space*. New York: Nova Science Publishers, 2007.
13. B.Simon:The bound state of weakly coupled Schrödinger operators in one and two dimensions, *Ann. Phys.* 97 (1976), 279-288
14. Reed M. and Simon B.: *Methods of modern mathematical physics. IV: Analysis of Operators*, Academic Press, New York, 1979.

UDK 519.6

**M | G | 1 | N XIZMAT KO'RSATISH TARMOG'I NOSTATSIONAR NAVBAT
UZUNLIGINING TAQSIMOTI HAQIDA
H.Qurbonov, O'.Bozorova**

Annotatsiya. Ishda kutish joylari chegaralangan xizmat ko'rsatish tarmog'i nostatsionar navbat uzunligi taqsimotining Laplas almashtirishi topilgan. Ushbu ifodadan statsionar navbat uzunligi taqsimotini aniqlovchi formula keltirib chiqarilgan.

Kalit so'zlar: Xizmat ko'rsatish tarmog'i, nostatsionar navbat uzunligi, statsionar navbat uzunligi, bandlik davri.

О распределении нестационарной длина очереди система обслуживания M | G | 1 | N

Аннотация. В работе найдено преобразование Лапласа для распределения нестационарной длины очереди система с ограниченный очередью. Из этого выражения выводится формула, определяющая распределения стационарной длина очереди.

Ключевые слова: Система обслуживания, нестационарная длина очереди, стационарная длина очереди, период занятости.

On the distribution of non-stationary queue length of the queue system M | G | 1 | N

Abstract. Laplace's transformation for distribution of non-stationary length of turn system with limited turn is found in work. The formula defining distributions stationary turn length is brought out of this expression.

Keywords: queue systems, non-stationary queue size (length), stationary queue length (size), busy period.

Bitta xizmat ko'rsatish qurilmasidan iborat tarmoqqa λ parametrli Puasson oqimini tashkil etuvchi talablar kelib tushayotgan bo'lsin. Talablarga ularning kelish tartibida xizmat ko'rsatiladi va xizmat ko'rsatish vaqti uzunliklari o'zaro bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar bo'lib, bir xil $B(x)[B(+0) = 0]$ taqsimot funksiyasiga ega. Kutish joylar soni N ga ($N \geq 1$), ya'ni tarmoqda bir vaqtning o'zida qurilmadagi bilan birga $N + 1$ ta talab bo'lishi mumkin. Qaralayotgan ushbu tarmoq $M | G | 1 | N$ orqali belgilanadi.

Xizmat jarayoni $t = 0$ momentda tarmoqda j ta ($j > 0$) talab mavjud bo'lgan holda, ulardan birining xizmat ko'rsatish qurilmasiga tushishi bilan boshlansin. Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$\xi_N^{(j)}(t)$ – t momentda tarmoqda mavjud bo'lgan talablar soni,

$\xi_N^{(j)}$ – boshlang'ich bandlik davri, ya'ni $t = 0$ momentdan tarmoq birinchi marta talablardan bo'shagan momentgacha bo'lgan vaqt uzunligi. Bu yerda va bundan keyin qavsqa olingan yuqori indeks $t = 0$ momentda sistemada mavjud bo'lgan talablar sonini bildiradi.

$$P^{(j)}(k, t) = P\left(\xi_N^{(j)}(t) = k, \zeta_N^{(j)} \geq t\right), \quad k = \overline{1, N + 1},$$

$$\begin{aligned} \bar{P}^{(j)}(k, s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} P^{(j)}(k, t) dt, \quad k = \overline{1, N+1}, \quad \text{Res} > 0, \\ \widehat{\bar{P}}^{(j)}(v, s) &= \sum_{k=1}^{N+1} v^k \bar{P}^{(j)}(k, s), \quad |v| \leq 1, \\ g_N^{(j)}(t) &= \frac{d}{dt} P(\zeta_N^{(j)} < t), \\ \bar{g}_N^{(j)}(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} g_N^{(j)}(t) dt, \quad \text{Res} > 0 \\ \bar{b}(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} dB(t), \\ \Pi^{(j)}(k, t) &= P(\xi_N^{(j)}(t) = k), \\ \bar{\Pi}^{(j)}(k, s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} \Pi^{(j)}(k, t) dt, \quad \text{Res} > 0, \\ \widehat{\bar{\Pi}}^{(j)}(v, s) &= \sum_{k=0}^{N+1} v^k \bar{\Pi}^{(j)}(k, s), \quad |v| \leq 1. \end{aligned}$$

[1] ishda $\widehat{\bar{\Pi}}^{(0)}(v, s)$ funksiyani aniqlovchi formulalar keltirib chiqarilgan. Shuningdek, ushbu ishda $\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \widehat{\bar{\Pi}}^{(0)}(v, s)$ mavjudligi ham isbotlangan.

Qaralayotgan ishda $\Pi^{(j)}(v, s)$ funksiya $j > 0$ bo'lgan hol uchun aniqlanadi va [1] ishda olingan natija boshqa usulda keltirib chiqariladi. Shuni qayd etib o'tamizki, [2] ishda $\widehat{\bar{P}}^{(j)}(v, s)$ funksiya aniq ko'rinishda topilgan.

1-Teorema. $|v| \leq 1$ va $\text{Res} \geq 0$ da barcha $j = \overline{1, N+1}$ lar uchun quyidagi formula o'rinni:

$$\widehat{\bar{\Pi}}^{(j)}(v, s) = \frac{\bar{g}_N^{(j)}(s)}{s + \lambda - \lambda \bar{g}_N^{(j)}(s)} \cdot \left\{ 1 + \lambda \widehat{\bar{P}}^{(1)}(v, s) + \widehat{\bar{P}}^{(j)}(v, s) \right\},$$

bu yerda $\bar{g}_N^{(j)}(s)$ [2] ishda aniqlangan, ya'ni

$$\begin{aligned} \bar{g}_N^{(j)}(s) &= \frac{\Delta_{N-j}(s)}{\Delta_N(s)}, \\ \sum_{k=0}^{\infty} v^k \Delta_k &= \frac{v \bar{b}(s) - \bar{b}(s + \lambda - \lambda v)}{(1-v)(v - \bar{b}(s + \lambda - \lambda v))}. \end{aligned}$$

Isbot. $\Pi^{(j)}(k, t)$ va $P^{(j)}(k, t)$ ehtimollarni bir-biriga quyidagicha bog'lash mumkin. Avval $k \geq 1$ deb hisoblaylik. U holda

$$\begin{aligned} \Pi^{(j)}(k, t) &= P(\xi_N^{(j)}(t) = k) = P(\xi_N^{(j)}(t) = k, \zeta_N^{(j)} \geq t) + \\ &+ P(\xi_N^{(j)}(t) = k, \zeta_N^{(j)} < t). \end{aligned} \tag{1}$$

$k \geq 1$ da

$$P(\xi_N^{(j)}(t) = k, \zeta_N^{(j)} < t) = P(\xi_N^{(j)}(t) = k, \zeta_N^{(j)} + \varepsilon_1 < t),$$

bu yerda ε_1 – tarmoqning birinchi bo'sh holatdagi davri. U holda (1) ushbu ko'rinishga keladi:

$$\Pi^{(j)}(k, t) = P^{(j)}(k, t) + P(\xi_N^{(j)}(t) = k, \zeta_{1N}^{(j)} + \varepsilon_1 < t). \tag{2}$$

$\zeta_{1N}^{(j)}, \zeta_2^{(1)}, \zeta_3^{(1)}, \dots$ tarmoqning bandlik davrlari va $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ tarmoqning bo'sh holatdagi davrlari ketma-ketligi bo'lsin.

Quyidagi belgilashni kiritamiz:

$$\varepsilon_1 = \zeta_{1N}^{(j)} + \varepsilon_1,$$

$$\mathcal{E}_n = \zeta_n^{(1)} + \alpha_n, \quad n \geq 2.$$

Ravshanki, $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots$ ketma-ketlik qayta tiklanish jarayonini tashkil qiladi. Keluvchi talablar Puasson oqimini tashkil etganligi sababli $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots$ lar o'zaro bir-biriga bog'liq bo'lmaydi va $j > 1$ da

$$P(\mathcal{E}_2 < x) = P(\mathcal{E}_3 < x) = \dots, \quad x \geq 0$$

vaj = 1 da

$$P(\mathcal{E}_1 < x) = P(\mathcal{E}_2 < x) = \dots, \quad x \geq 0$$

Agar \mathcal{E}_1 qayta tiklanish momenti ekanligi e'tiborga olinsa, u holda

$$\begin{aligned} P\left(\xi_N^{(j)}(t) = k, \zeta_N^{(j)} + \alpha_1 < t\right) &= P\left(\xi_N^{(j)}(t) = k, \mathcal{E}_1 < t\right) = \\ &= \int_0^t P\left(\xi_N^{(j)}(t) = k, u \leq \mathcal{E}_1 < u + du\right) = \\ &= \int_0^t P\left(\xi_N^{(1)}(t-u) = k\right) \cdot P(u \leq \mathcal{E}_1 < u + du) = \\ &= \int_0^t \Pi^{(1)}(k, t-u) dP(\mathcal{E}_1 < u). \end{aligned}$$

Shunday qilib, quyidagi tenglikni hosil qilamiz:

$$\Pi^{(j)}(k, t) = P^{(j)}(k, t) + \int_0^t \Pi^{(1)}(k, t-u) dP(\mathcal{E}_1 < u).$$

Bu yerdan $(P(\alpha_1 \geq x) = e^{-\lambda x}, x > 0)$, ekanligini e'tiborga olib Laplas almashtirishlariga o'tamiz va ushbu munosabatni hosil qilamiz:

$$\bar{\Pi}^{(j)}(k, s) = \bar{P}^{(j)}(k, s) + \frac{\lambda}{\lambda + s} \bar{g}_N^{(j)}(s) \bar{\Pi}^{(1)}(k, s). \quad (3)$$

Endi $k = 0$ bo'lsin. U holda

$$\begin{aligned} P\left(\xi_N^{(j)}(t) = 0\right) &= P\left(\xi_N^{(j)}(t) = 0, \mathcal{E}_1 \geq t\right) + P\left(\xi_N^{(j)}(t) = 0, \mathcal{E}_1 < t\right) = \\ &= P(\zeta_N^{(j)} + \alpha_1 \geq t) + \int_0^t \Pi^{(1)}(0, t-u) dP(\mathcal{E}_1 < u) = \\ &= \int_0^t P(\alpha_1 > t-u) dP(\zeta_N^{(j)}(t) < u) + \int_0^t \Pi^{(1)}(0, t-u) dP(\mathcal{E}_1 < u). \end{aligned}$$

Bu yerdan Laplas almashtirishlariga o'tib, quyidagi tenglikni hosil qilamiz:

$$\bar{\Pi}^{(j)}(0, s) = \bar{g}_N^{(j)}(s) \frac{1}{\lambda + s} + \bar{g}_N^{(j)}(s) \cdot \frac{\lambda \bar{\Pi}^{(1)}(0, s)}{\lambda + s}. \quad (4)$$

(3) va (4) tengliklardan hosil qiluvchi funksiyaga o'tib, ushbu munosabatga ega bo'lamiz:

$$\hat{\hat{\Pi}}^{(j)}(v, s) = \hat{\hat{P}}^{(j)}(v, s) + \bar{g}_N^{(j)}(s) \frac{1}{\lambda + s} + \bar{g}_N^{(j)}(s) \frac{\lambda}{\lambda + s} \hat{\hat{\Pi}}^{(1)}(v, s). \quad (5)$$

Bu tenglikdan $j = 1$ da $\hat{\hat{\Pi}}^{(1)}(v, s)$ ni topamiz:

$$\hat{\hat{\Pi}}^{(1)}(v, s) = \frac{\bar{g}_N^{(1)}(s)}{s + \lambda - \lambda \bar{g}_N^{(1)}(s)} + \frac{(s + \lambda) \hat{\hat{P}}^{(1)}(v, s)}{s + \lambda - \lambda \bar{g}_N^{(1)}(s)}. \quad (6)$$

Bunga ko'ra, (5) dan teoremaning tasdig'i kelib chiqadi.

2-Teorema. $|v| \leq 1$ va $Res \geq 0$ da ushbu tenglik o'rinli:

$$\hat{\hat{\Pi}}^{(0)}(v, s) = (s + \lambda)^{-1} + \lambda (s + \lambda)^{-1} \hat{\hat{\Pi}}^{(1)}(v, s).$$

Isbot. $\Pi^{(0)}(k, t)$ va $\Pi^{(1)}(k, t)$ ($k = \overline{0, N+1}$) lar o'rtasida quyidagi munosabatni o'rnatish mumkin:

$$\Pi^{(0)}(k, t) = \int_0^t \Pi^{(1)}(k, t-u) dP(\alpha_0 < u), \quad k = \overline{1, N+1}$$

$$\Pi^{(0)}(0, t) = P(\alpha_0 \geq t) + \int_0^t \Pi^{(1)}(0, t-u) dP(\alpha_0 < u). \quad (7)$$

Bu yerda α_0 – tarmoqning boshlang'ich bo'sh holatdagi davri. Ushbu tengliklarni 1-teorema isbotidagi usulda oson hosil qilish mumkin.

(7) dan hosilqiluvchi va Laplas almashtirishiga o'tib,

$$\widehat{\Pi}^{(0)}(v, s) = (s + \lambda)^{-1} + \lambda(s + \lambda)^{-1} \widehat{\Pi}^{(1)}(v, s)$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu yerda $\widehat{\Pi}^{(1)}(v, s)$ (6) tenglikda aniqlangan funksiya.

Adabiyotlar

1. Азларов Т.А., Тахиров А. Случайные процессы и статистические выводы. Ташкент, “Фан”, 1974, 14, стр 47-56.
2. Курбаков Х. Переходные явления для распределения остатка периода занятости СМО $M|G|1|N$, Сб. трудов ИМ АН УзССР, 1981, стр 108-122.
3. Harris T.J. The remaining busy period of finite queue. Oper. Res., v.19, 1971, pag.219-223.

UDK 517576

CHEGARALANMAGAN SOHADA GEL'MGOLS TENGLAMASI UCHUN INTEGRAL FORMULA

Z. Malikov, X. Xudoyberdiyev

Samarqand davlat universiteti,

Аннотация. Bu ishda chegaralanmagan sohada o'suvchi Gel'mgols tenglamasining yechimi uchun integral formulaning o'rinaliligi ko'rsatilgan va bu integral formulani maxsus funksiya orqali ifodalanishini keltirib chiqarilgan.

Калитso'zlar: chegaralanmagan soha, Gel'mgols tenglamasi, integral formula, maxsus funksiya.

Интегральная формула для уравнения Гельмгольца в неограниченной области

Аннотация. В работе доказывается справедливость интегральной формулы для возрастающих решений уравнения Гельмгольца в неограниченной области.

Ключевые слова: неограниченные области, уравнения Гельмгольца, Интегральная формула, специальные функции.

In unbounded area integral formula for Helmholtz equation

Abstract. In this work the appropriateness of integral formula for the solution of Helmholtz equation, which increases in unbounded area is shown and the expression of the integral formula by special function is obtained.

Keywords: unbounded space, Helmholtz equation, integral formula, special function.

Bu ishda chegaralanmagan sohada Gel'mgols tenglamasi yechimi uchun integral formulani o'rinaliligi ko'rsatilgan.

Faraz qilaylik $G \subset R^3$ uch o'lchovli yevklid fazosidan olingan chegaralangan soha bo'sin. Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3, y = (y_1, y_2, y_3) \in R^3, x' = (x_1, x_2) \in R^2$$

$$y' = (y_1, y_2) \in R^2, \alpha^2 = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2$$

$$r^2 = (|y - x|)^2 = \alpha^2 + (y_3 - x_3)^2, w = i\sqrt{u^2 + d^2} + y_3$$

G sohada quyidagi tenglamani qaraymiz.

$$\Delta U(y) + \lambda^2 U(y) = 0 \quad (1)$$

Bu yerda

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_3^2}$$

Laplas operatori, λ -haqiqiy son. Bu tenglamaga Gel'mgols tenglamasi deyiladi.

Agar $U(y)$ (1) tenglamani G da qanoatlantirib $G \cup \partial G$ da uzluksiz va uzluksiz xususiy hosilaga ega bo'lsa u holda quydagi integral formula o'rinli bo'ladi.

$$U(x) = \int_{\partial G} \left[U(y) \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi_{\sigma}(x, y) \frac{\partial U(y)}{\partial n} \right] ds_y = 0 \quad x \in G \quad (2)$$

Bu yerda

$$\Phi(y, x) = \frac{e^{iy}}{s(x, y)}$$

Gel'mgols tenglamasining fundamental yechimida iborat faraz qilamiz G soha chegaralanmagan soha bo'lsin $|x| < R$ radiusli $R > 0$ chekli son bo'lgan shardan iborat bo'lsin.

$G_R = G \cap \{|x| < R\}$ sohani belgilaymiz. U holda G_R soha chegaralanmagan soha bo'ladi,

G_R^{∞} –deb $G_R^{\infty} = G \setminus G_R$ ni belgilaymiz. G_R^{∞} –soha ko'p bog'lamli soha ham bo'lishi mumkin.

Teorema. Agar $U(x)$ funksiya G sohada (1) tenglamani qanoatlantirib $G \cup \partial G$ da uzluksiz hosilaga ega bo'lsa va

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\partial G_R^{\infty}} \left[U(y) \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi(y, x) \frac{\partial U}{\partial n} \right] ds_y = 0 \quad (3)$$

Shart bajarilsa u holda (1) formula ham G chegaralanmagan sohada o'rinli bo'ladi.

Isboti. G soha G_R va G_R^{∞} iborat bo'lganligi sababli va integralning additivligi xossasida quydagilarni yozish mumkin.

$$\begin{aligned} U(x) &= \int_{\partial G} \left[U \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi(y, x) \frac{\partial U}{\partial n} \right] ds_y \\ &= \int_{\partial G_R} \left[U \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi(y, x) \frac{\partial U}{\partial n} \right] ds_y + \int_{\partial G_R^{\infty}} \left[U \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi(y, x) \frac{\partial U}{\partial n} \right] ds_y \quad x \in G \quad (4) \end{aligned}$$

(4) tenglikning chap tomoni R ga bog'liq emas shuning uchun $R \rightarrow \infty$ intilgandan va limitga o'tsak va (3) ni hisobga olsak quydagi tenglik o'rinli bo'ladi

$$\begin{aligned} U(x) &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\partial G_R} \left[U \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi(y, x) \frac{\partial U}{\partial n} \right] ds_y \\ &+ \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\partial G_R^{\infty}} \left[U \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi(y, x) \frac{\partial U}{\partial n} \right] ds_y = \int_{\partial G} \left[U(y) \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi(y, x) \frac{\partial U}{\partial n} \right] ds_y \quad x \in G \end{aligned}$$

$\Phi_{\sigma}(y, x)$ funksiyani quydagicha aniqlaymiz.

$K(w)$ funksiya butun funksiya bo'lib w haqiqiy bo'lganda haqiqiy qiymatlar qabul qilib quydagi shartlarni qanoatlantiradi.

$$\begin{aligned} K(u) &\neq 0, \quad \sup_{v \geq 1} |v^p k^p(W)| = M(p, u) < \infty \\ \Phi_{\sigma}(y, x) &= -\frac{1}{2\pi K(x_3)} \int_0^{\infty} \operatorname{Im} \frac{K(w)}{W - x_3} \frac{\cos \lambda u}{\sqrt{u^2 + \alpha^2}} du \quad (5) \end{aligned}$$

(5) ko'rinishda aniqlangan funksiya quydagicha ifodalanadi.

$$\Phi_{\sigma}(y, x) = \frac{e^{ix}}{4\pi r} + \varphi_{\sigma}(y, x) \quad (6)$$

Bu yerda (6) da $\varphi_{\sigma}(y, x)$ barcha y lar uchun Gel'mgols tenglamasini regulyar yechimidan iborat.

Agar G soha qalinligi h ga teng bo'lgan μ o'lchamdan iborat bo'lsa ya'ni

$$G = \{(y_1, y_2, y_3): 0 < y_3 < h, (y_1, y_2) \in R^2\}, \quad h = \frac{\pi}{p} \quad \rho > 1$$

Ma'lumki G soha chegaralanmagan $p > 1$ sohadan iborat bo'lsin.

$P(G)$ deb shunday $U(y)$ funksiyalar sinfini belgilaymiz, ya'ni unda $U(y)$ (1) tenglamani qanoatlantirib $\bar{G} = G \cup \partial G$ da uzluksiz bo'lsin va quydagi shartlarni qanoatlantirsin.

$$P_y = \left\{ U(y); U(y) \in P(G), |U(y)| + \left| \frac{\partial U(y)}{\partial n} \right| \leq \exp[(\text{oeexp}P|y'|)] \right\},$$

$$y \rightarrow \infty, y \in G$$

Agar $U(y) \in P_\rho(G)$ bo'lsa u holda (4) integral formula o'rinli bo'ladi.

U holda $k(w)$ ni quydagicha tanlab olsak (3) shart bajariladi.

$$k(w) = \exp(chp, (w - 3h)), \quad p_1 > p$$

Adabiyotlar

1. А. Н. Тихонов А.А. Самарский “уравнения математической физики”. М. 1972 г
2. Салоҳиддинов М.С. математик физика тенгламалари Т. “Ўзбекистон” 2002 й. 448 б
3. Н.Н. Тархонов. Об интегральном представленном решений систем линейных дифференциальной уравнений первого порядка в частных производных и некоторые приложениях некоторые вопросы многомерного комплексного анализа. Красноярск-1980, стр 147-160.
4. М.М. Лаврентьев. О некоторых некорректных задачах математической физики. Изд. С О АН СССР Новосибирск, 1962 г.
5. Ш. Ярмухаммедов, А Абдукаримов, З. Маликов. О Задачи Коши для системы эллиптического типа первого порядка. Доке. Росс. Акад. Наук. Том 323 (1992).

UDK: 517.984

THE EXISTENCE OF BOUND STATES OF THE TWO-PARTICLE DISCRETE SCHRÖDINGER OPERATORS ON LATTICES

S.N. Lakaev, M.Azizova

E-mail: slakaev@mail.ru

Annotation. We consider a system of two identical bosons moving on the hypercubic lattice $Z^d, d \geq 1$ and interacting through attractive short range potentials μV ($\mu > 0$) and the two-particle Schrödinger operators $H_\mu(k) = H_0(k) - \mu V, k \in T^d$ associated to the system, where T^d is the d -dimensional torus. We study the existence of eigenvalues of $H_\mu(k), k \in T^d$ depending on the potential μV and quasi-momentum of the two particles. In particular, we prove the existence of eigenvalues of $H_\mu(k), k \in T^d$ lying below the threshold of the essential spectrum for attractive ($\mu > 0$) interaction.

Keywords: discrete Schrödinger operators, quantum mechanical two-particle system, hamiltonians, conditionally negative definite functions, dispersion relations, virtual level, eigenvalues.

Panjarada ikki bozonli Hamiltonianining bog'langan holatlari mavjudligi haqida

Annotatsiya. $Z^d, d \geq 1$ panjarada qisqa masofada tortishuvchi μV ($\mu > 0$) potensial yordamida ta'sirlashuvchi ikkita bir xil bozon zarrachali sistemaga mos $H_\mu(k) = H_0(k) - \mu V, k \in T^d$ ikki zarrachali Shredinger operatorini qaraymiz, bunda T^d d-o'lchamli tor. Biz $H_\mu(k), k \in T^d$ operatorning xos qiymati mavjudligini μV potensial va ikki zarrachali kvaziimpulsga bog'liq holda o'rganamiz. Xususan, ($\mu > 0$) tortishuvchi ta'sir energiyasi uchun $H_\mu(k), k \in T^d$ operatorning muhim spektrdan quyida xos qiymati mavjudligi isbotlangan.

Kalit so'zlar: diskret Shredinger operatorlari, hamiltonianilar, manfiyligiga bog'liq holda aniqlangan funksiyalar, dispersion munosabatlar, virtual sath, xos qiymatlar.

О существование связанных состояний гомилтониана двух бозонов на решетке

Аннотация. Рассматривается двух одинаковых бозонов действующих в гиперкубической решетке $\mathbb{Z}^d, d \geq 1$ которого взаимодействует с короткодействующий притягивающей потенциалов μV ($\mu > 0$) и двухчастичный оператор Шредингера $H_\mu(k) = H_0(k) - \mu V, k \in \mathbb{T}^d$ ассоциированный системы, здесь \mathbb{T}^d , d -мерный тор. Изучается существование собственных значений оператора $H_\mu(k), k \in \mathbb{T}^d$ в зависимости от потенциала μV и от двухчастичная квази-импульс. В частности, докажем существование собственных значений оператора $H_\mu(k), k \in \mathbb{T}^d$ лежащее ниже существенного спектра для притягивающего взаимодействия.

Ключевые слова: дискрет Шредингер оператори гамильтониани, определение функции взаимосвязанные отщепление, отношение дисперсии виртуальных площадей, собственных значение.

1. Introduction

We consider a system of two bosons moving on the d -dimensional hypercubic lattice \mathbb{Z}^d interacting via short-range pair potentials.

The main goal of this paper is to prove the existence of eigenvalues for the two-particle discrete Schrödinger operators $H_\mu(k), k \in \mathbb{T}^d$ associated to the system of two identical bosons, which is not occur in the continuous case.

The spectral properties for the two-particle lattice hamiltonians on the d -dimensional lattice $\mathbb{Z}^d, d \geq 1$ studied intensively (see, e.g., [1],[2], [3], [4],[5],[6], [7], [8], [9] [10], [16]).

The difference between lattice and continuous hamiltonians and also the *excess mass* phenomenon for lattice systems: the *effective mass* of the bound state of an N -particle system is greater than (but, in general, not equal) to the sum of the effective masses of the constituent quasi-particles, have been discussed (see, e.g., [1], [12], [13]).

In the continuous case the existence of eigenvalues below the essential spectrum of the two-particle Schrödinger operators depend only on the interaction (perturbation) operator μV .

However, the lattice two-particle Schrödinger operators depends not only on interaction μV of the particles, but also on the quasi-momentum $k \in \mathbb{T}^d$ of the two particles.

In the present paper we study the existence of the discrete spectrum (eigenvalues) below the bottom of the essential spectrum of the two-particle discrete Schrödinger operators $H_\mu(k), k \in \mathbb{T}^d$ depending on interaction μV and quasi-momentum $k \in \mathbb{T}^d$ for all dimensions $d \geq 1$.

We have proved the existence of bound states in the following two cases:

(i) In the case $d = 1, 2$ for any nonzero potential μV and all $k \in \mathbb{T}^d$ (Theorem 3.1).

(ii) In the case $d \geq 3$ for *large* potentials $\mu V(\cdot)$ and any $k \in \mathbb{T}^d$ (Theorem 3.2 and Corollary 3.3).

The existence of the discrete spectrum below the threshold of $H_\mu(k)$ have been proved in [1] for all non-zero values of the quasi-momentum $0 \neq k \in \mathbb{T}^d, d \geq 3$, provided that the operator $H_\mu(0)$ has either a threshold resonance or a threshold eigenvalue.

The existence and location of the discrete spectrum (eigenvalues) of the one particle lattice Schrödinger operators depending on the zero range and pair attractive interactions on the neighbor sites has been studied precisely in the three-dimensional case [11].

Bounds for the number of eigenvalues of the lattice Schrödinger operator $H_\mu(0)$ associated to a system of two arbitrary particles have been studied in [4] and [5]. In particular, the existence of eigenvalues below the essential spectrum of $H_\mu(0)$ have been shown.

2. The two-particle discrete Schrödinger operators on lattices

Let \mathbf{Z}^d and $\mathbf{T}^d = (\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z})^d = [-\pi, \pi)^d$ be the d -dimensional hypercubic lattice and d -dimensional torus. Denote by $\ell^2(\mathbf{Z}^d)$ and $L^2(\mathbf{T}^d)$ the Hilbert space of square-summable and square-integrable functions defined on \mathbf{Z}^d and \mathbf{T}^d .

Let

$$\mathbf{F}^* : \ell^2(\mathbf{Z}^d) \rightarrow L^2(\mathbf{T}^d), \quad [\mathbf{F}^*(f)](p) := \sum_{x \in \mathbf{Z}^d} e^{-i(p,x)} f(x) \quad (1)$$

be the standard Fourier transformation with the inverse

$$\mathbf{F} : L^2(\mathbf{T}^d) \rightarrow \ell^2(\mathbf{Z}^d), \quad [\mathbf{F}(\psi)](x) := \int_{\mathbf{T}^d} e^{i(p,x)} \psi(p) \eta(dq), \quad (2)$$

where, η is the (normalized) Haar measure on the torus, $d\eta(p) = \frac{d^d p}{(2\pi)^d}$.

2.1 Coordinate representation of the two-particle discrete Schrödinger operators

In coordinate representation the two-particle discrete Schrödinger operator associated two a system of two-bosons has form $H_\mu(k), k \in \mathbf{T}^d$

$$H_\mu(k) = H_0(k) - \mu V, k \in \mathbf{T}^d, \mu > 0. \quad (3)$$

For any $k \in \mathbf{T}^d$ the non-perturbed operator $H_0(k)$ is defined as

$$[H_0(k)\varphi](x) = \sum_{y \in \mathbf{Z}^d} \varepsilon_k(x-y)\varphi(y), \quad \varphi \in \ell^2(\mathbf{Z}^d), \quad (4)$$

where

$$\varepsilon_k(x) = [1 + e^{i(k,x)}] \varepsilon(x) \quad (5)$$

and

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } x=0, \\ 0, & \text{if } |x|=1 \\ 0, & \text{if } |x|>1. \end{cases}$$

For a given even non-negative function (potential) $v \in \ell_0(\mathbf{Z}^d; \mathbf{R}_0^+)$ vanishing at infinity, we define the operator V as a multiplication operator by the function $v(x)$:

$$(Vf)(x) = v(x)f(x) \quad (6)$$

2.2 Momentum representation of the two-particle discrete Schrödinger operators

In the momentum representation the two-particle discrete Schrödinger operators $\hat{H}_\mu(k), k \in \mathbf{T}^d$ associated to a system of two bosons acts on $L^2(\mathbf{T}^d)$ as

$$\hat{H}_\mu(k) = \hat{H}_0(k) + \hat{V}, k \in \mathbf{T}^d, \quad (7)$$

where the self-adjoint bounded operator $\hat{H}_0(k)$ (hopping matrix) is defined as multiplication operator by the function $\varepsilon_k(q)$ (two-particle dispersion relation) on $L^2(\mathbf{T}^d)$

$$\hat{H}_0(k)\hat{f}(p) = \hat{\varepsilon}_k(p)\hat{f}(p), \quad \hat{f} \in L^2(\mathbf{T}^d), \quad (8)$$

where

$$\hat{\varepsilon}_k(q) = \hat{\varepsilon}(q) + \hat{\varepsilon}(k-q).$$

Perturbation operator \hat{V} is a convolution operator

$$(\hat{V}f)(p) = \int_{\mathbf{T}^d} \hat{v}(p-q)\hat{f}(q)d\eta(q), \quad f \in L^2(\mathbf{T}^d), \quad (9)$$

where $\hat{v}(\cdot)$ is the Fourier transform of v , i.e.,

$$\hat{v}(p) = [\mathbf{F}^*(v)](p) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} e^{-i(p,x)} v(x), \quad (10)$$

In this case, V is a compact operator.

Since the perturbation operator V is compact according to Weyl's theorem the essential spectrum $\sigma_{\text{ess}}(H_\mu(k))$ of the operator $H_\mu(k), k \in \mathbb{T}^d$ coincides with the spectrum $\sigma(H_0(k))$ of the non-perturbed operator $H_0(k)$ [15].

More specifically,

$$\sigma_{\text{ess}}(H_\mu(k)) = \sigma_{\text{ess}}(\hat{H}_\mu(k)) = [\varepsilon_{\min}(k), \varepsilon_{\max}(k)],$$

where

$$\varepsilon_{\min}(k) \equiv \min_{p \in \mathbb{T}^d} \varepsilon_k(p) = \varepsilon_k(\vec{0}), \quad \varepsilon_{\max}(k) \equiv \max_{p \in \mathbb{T}^d} \varepsilon_k(p) = \varepsilon_k(\vec{\pi}),$$

The representation

$$\hat{\varepsilon}(p) := \sum_{i=1}^d (1 - \cos p_i), \quad \vec{p} = (p_1, \dots, p_d) \in \mathbb{T}^d$$

gives

$$\varepsilon_k(p) = 2 \sum_{j=1}^d \left[1 - \cos \frac{k_j}{2} \cos p_j \right],$$

$$\varepsilon_{\min}(k) = 2 \sum_{j=1}^d \left[1 - \cos \frac{k_j}{2} \right],$$

$$\varepsilon_{\max}(k) = 2 \sum_{j=1}^d \left[1 + \cos \frac{k_j}{2} \right].$$

From the positivity of V and the min-max principle we further obtain that all isolated eigenvalues of finite multiplicity lie below the bottom $\varepsilon_{\min}(k)$ of the essential spectrum $\sigma_{\text{ess}}(H_\mu(k))$.

We remark that -- different to Schrödinger operators on \mathbb{R}^d , discrete Schrödinger operators possibly have eigenvalues above the upper bound of the essential spectrum, when changing the sign of the potential. This case, however, can be investigated analogously to the one treated here.

2.3 Birman-Schwinger principle for two-particle Schrödinger operator $H_\mu(k), k \in \mathbb{T}^d$

For a bounded self-adjoint operator A in a Hilbert space \mathbf{H} , we define $n_+(\mu, A)$ resp. $n_-(\mu, A)$ as

$$n_+(\gamma, A) = \max\{\dim L : L \subset \mathbf{H}; (Af, f) > \gamma, f \in L, \|f\| = 1\}$$

resp.

$$n_-(\gamma, A) = \max\{\dim L : L \subset \mathbf{H}; (Af, f) < \gamma, f \in L, \|f\| = 1\}$$

The value $n_+(\gamma, A)$ (resp. $n_-(\gamma, A)$) is equal to the infinity, if γ is in the essential spectrum and if $n_+(\gamma, A)$ (resp. $n_-(\gamma, A)$) is finite, it is equal to the number of the eigenvalues of A greater (resp. smaller) than γ (see Glazman lemma [14]).

Let $d \geq 1$ and $\varepsilon_k(\cdot), k \in \mathbb{T}^d$ be the two-particle dispersion relation and $v \in \ell_0(\mathbb{Z}^d; \mathbb{R}_0^+)$, where $\ell_0(\mathbb{Z}^d; \mathbb{R}_0^+)$ is space of non-negative functions defined on \mathbb{Z}^d and vanishing at infinity.

For any $z < \varepsilon_{\min}(k)$ we define a non-negative compact *Birman-Schwinger operator* acting in $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ as

$$\mathbf{B}_\mu(k, z) := V^{1/2} R_0(k, z) V^{1/2}, \quad (11)$$

where $R_0(k, z)$, $z \in \mathbb{C} \setminus [\varepsilon_{\min}(k), \varepsilon_{\max}(k)]$ is the resolvent of the operator $H_0(k)$ and $V^{\frac{1}{2}}$ is the non-negative square root of the non-negative operator V :

$$(V^{\frac{1}{2}}\psi)(x) = v^{\frac{1}{2}}(x)\psi(x), \quad \psi \in \ell^2(\mathbb{Z}^d). \quad (12)$$

The kernel function $\mathbf{B}_\mu(k, z; \cdot, \cdot)$, $k \in \mathbb{T}^d$, $z < \varepsilon_{\min}(k)$ of the Birman-Schwinger operator $\mathbf{B}_\mu(k, z)$ is of the form

$$\mathbf{B}_\mu(k, z; x, y) = v^{\frac{1}{2}}(x) R_0(k, z; x - y) v^{\frac{1}{2}}(y), \quad x, y \in \mathbb{Z}^d, \quad (13)$$

where

$$R_0(k, z; x) = \int_{\mathbb{T}^d} \frac{e^{i(p,x)}}{\varepsilon_k(p) - z} d\eta(p), \quad x \in \mathbb{Z}^d. \quad (14)$$

In the following Lemma we formulate some important properties of the kernel function of the Birman-Schwinger operator.

Lemma 2.1 *Let $d \geq 3$. For any $k \in \mathbb{T}^d$ and $x, y \in \mathbb{Z}^d$ the function $\mathbf{B}(k, \cdot; x, y)$ is real-analytic in*

$$z \in \mathbb{C} \setminus [\varepsilon_{\min}(k), \varepsilon_{\max}(k)].$$

Proof. For any $k \in \mathbb{G}$ and $x \in \mathbb{Z}^d$ the regularity of the function

$$R_0(k, z; x) = \int_{\mathbb{T}^d} \frac{e^{i(p,x)}}{\varepsilon_k(p) - z} d\eta(p) \quad (15)$$

in $z \in \mathbb{C} \setminus [\varepsilon_{\min}(k), \varepsilon_{\max}(k)]$ implies the regularity of the kernel $\mathbf{B}(k, \cdot; x, y)$ in $z \in \mathbb{C} \setminus [\varepsilon_{\min}(k), \varepsilon_{\max}(k)]$.

The following theorem is the *Birman-Schwinger principle* for the two-particle Schrödinger operators on lattice \mathbb{Z}^d .

Lemma 2.2 (Birman-Schwinger principle) *For any $z < \varepsilon_{\min}(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$ the following assertions (i)–(iv) hold true.*

1. If $\phi \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$ solves $H_\mu(k)\phi = z\phi$, then $\psi := V^{1/2}\phi \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$ solves $\psi = \mathbf{B}(k, z)\psi$.
2. If $\psi \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$ solves $\psi = \mathbf{B}(k, z)\psi$, then $\phi := R_0(k, z)V^{1/2}\psi \in \ell_0(\mathbb{Z}^d)$ solves $H_\mu(k)\phi = z\phi$.
3. z is an eigenvalue of $H_\mu(k)$ of multiplicity m if and only if 1 is an eigenvalue of $\mathbf{B}(k, z)$ of multiplicity m .
4. Counting multiplicities, the number $N_-(z, H_\mu(k))$ of eigenvalues of $H_\mu(k)$ less than z equals the number $N_+(1, \mathbf{B}(k, z))$ of eigenvalues of $\mathbf{B}(k, z)$ greater than 1, i.e., the equality

$$N_-(z, H_\mu(k)) = N_+(1, \mathbf{B}(k, z)) \quad (16)$$

holds.

Proof. Theorem 2.2 is the standard Birman-Schwinger principle for $z < \varepsilon_{\max}(k)$ and the proof for the lattice Schrödinger operator case can be found in [4].

3. Statement of the main results

Operators of the form (7) are known to have eigenvalues below their essential spectra.

The following theorems precisely described the emission of bound states from the essential spectrum $\sigma_{ess}(H_\mu(k)), k \in \mathbb{T}^d$ for the lattice Schrödinger operator $H_\mu(k), k \in \mathbb{T}^d$ (sf, [8], [7], [16]).

Theorem 3.1 *Let $d = 1$ or 2 . Assume that $v \neq 0$. Then for any $k \in \mathbb{T}^d$ the operator $H_\mu(k)$ has an eigenvalue $E_\mu(k_0)$ below the threshold $\varepsilon_{\min}(k)$ of the essential spectrum $\sigma_{ess}(H_\mu(k))$.*

Theorem 3.2 *Let $d \geq 3$ and $v \in \ell^1(\mathbb{Z}^d; \mathbb{R}_0^+)$. Assume for some $k_0 \in \mathbb{T}^d$ and $s \in \mathbb{Z}^d$ the inequality*

$$v(s) \int_{\mathbb{T}^d} \frac{\cos^2(p, s) \eta(dp)}{\varepsilon_{k_0}(p) - \varepsilon_{\min}(k_0)} > 1 \tag{17}$$

holds. Then the operator $H_\mu(k_0)$ has an eigenvalue $E_\mu(k_0)$ below the threshold $\varepsilon_{\min}(k_0)$.

Corollary 3.3 *Let $d \geq 3$. For any $v \neq 0$ and $k_0 \in \mathbb{T}^d$ there exists $\mu_0 > 0$ such that for all $\mu > \mu_0$ the operator $H_\mu(k_0) = H_0(k_0) - \mu V$, $k_0 \in \mathbb{T}^d$ has an eigenvalue $\varepsilon_\mu(k_0)$ below the threshold $\varepsilon_{\min}(k_0)$.*

Corollary 3.4 *The integral at the left-hand side of the equality is continuous function in $k \in \mathbb{T}^d$ and hence there exists a neighborhood $G(k_0)$ of the point $k_0 \in \mathbb{G}$, such that for all $k \in G(k_0)$ the inequality*

$$\max_{x \in \mathbb{Z}^d} v(x) \int_{\mathbb{T}^d} \frac{d\eta(q)}{\varepsilon_k(q) - \varepsilon_{\min}(k)} > 1$$

holds. Hence, the operator $H_\mu(k), k \in G(k_0)$ has an eigenvalue for all $k \in G(k_0)$.

4. Proof of the main results

We postpone the proof of the main results after several lemmas and remarks.

Lemma 4.1 *For any $s \in \mathbb{Z}^d$ the number $\lambda = v(s)$ is an eigenvalue of the operator V with the multiplicity N_λ , where $N_\lambda = |\{x \in \mathbb{Z}^d : v(x) = \lambda\}|$ is number of points of the set $\{x \in \mathbb{Z}^d : v(x) = \lambda\}$.*

Proof. Note that for any $s \in \mathbb{Z}^d$ the number $\lambda = v(s)$ is an eigenvalue of V and the function

$$\psi_s(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{for } x = s, \\ \frac{1}{2} & \text{for } x = -s, \\ 0 & \text{for others.} \end{cases} \tag{18}$$

is associated eigenfunction. Clearly, $\psi_s \in \ell^{2,e}(\mathbb{Z}^d)$, where $\ell^{2,e}(\mathbb{Z}^d)$ is the Hilbert space of square-summable even functions on \mathbb{Z}^d .

Proof of Theorem 3.1 Let $d = 1$ or 2 . Let $v(s) \neq 0$ for some $s \in \mathbb{Z}^d$. Let $\psi_s(x), x \in \mathbb{Z}^d$ be characteristic function defined in (18). Then for any $z < \varepsilon_{\min}(k), k \in \mathbb{T}^d$ Lemma 4.1 yields

$$\begin{aligned} (\mathbf{B}_\mu(k, z)\psi_s, \psi_s) &= \mu(v^2 r_0(k, z)v^2 \psi_s, \psi_s) = \mu(r_0(k, z)V^2 \psi_s, V^2 \psi_s) \\ &= \mu \int_{\mathbb{T}^d} \frac{|\mathbf{F}^* \circ V^{1/2} \psi_s|^2 d\eta(p)}{\varepsilon_k(p) - z} = \mu \int_{\mathbb{T}^d} \frac{|\sum_{x \in \mathbb{Z}^d} e^{i(p,x)} v^{\frac{1}{2}}(x) \psi_s(x)|^2 d\eta(p)}{\varepsilon_k(p) - z} \end{aligned}$$

$$= \mu\nu(s) \int_{\mathbb{T}^d} \left[\frac{e^{i(p,s)} + e^{-i(p,s)}}{2} \right]^2 \frac{\eta(dp)}{\varepsilon_k(p) - z} = \mu\nu(s) \int_{\mathbb{T}^d} \frac{\cos^2(p,s)\eta(dp)}{\varepsilon_k(p) - z}$$

The function

$$F(z) = \mu \int_{\mathbb{T}^d} \frac{\cos^2(p,s)d\eta(p)}{\varepsilon_k(p) - z},$$

is monotone and continuous in $z \in (-\infty, \varepsilon_{\min}(k))$ and

$$\lim_{z \rightarrow \varepsilon_{\min}(k)} F(z) = \mu \int_{\mathbb{T}^d} \frac{\cos^2(p,s)d\eta(p)}{\varepsilon_k(p) - \varepsilon_{\min}(k)} = +\infty.$$

Therefore for some $z < \varepsilon_{\min}(k)$ the inequality $(\mathbf{B}_\mu(k, z)\psi_s, \psi_s) > 1$ holds, i.e., the self-adjoint bounded operator $\mathbf{B}_\mu(k, z)$ has an eigenvalue in $(1, +\infty)$. The Birman-Schwinger principle yields that the operator $H_\mu(k)$ has an eigenvalue in $(-\infty, \varepsilon_{\min}(k))$. W

Theorem 3.2 can be proven by the same way as Theorem 3.1.

References

1. S.Albeverio, S. N. Lakaev, K. A. Makarov, Z. I. Muminov: The Threshold Effects for the Two-particle Hamiltonians on Lattices, *Comm.Math.Phys.* **262**(2006), 91--115
2. Albeverio S., Lakaev S. N., and Muminov Z. I.: Schrödinger operators on lattices. The Efimov effect and discrete spectrum asymptotics, *Ann. Henri Poincaré.* **5**, 743--772 (2004).
3. Albeverio, S.N. Lakaev and A.M. Khalkhujayev: Number of Eigenvalues of the Three-Particle Schrodinger Operators on Lattices, **18** (2012), **18pp.** 387-420
4. V. Bach, W. de Siqueira Pedra, S. Lakaev: Bounds on the Discrete Spectrum of Lattice Schrödinger Operators Preprint mp-arc 10-143.
5. V. Bach, W. de Siqueira Pedra, S. Lakaev: Bounds on the Pure Point Spectrum of Lattice Schrödinger Operators, Preprint mp-arc/c/11/11-161.
6. Faria da Veiga P. A., Ioriatti L., and O'Carroll M.: Energy-momentum spectrum of some two-particle Hamiltonians, *Phys. Rev. E* (3) **66**, 016130, 9 pp. (2002).
7. Klaus M. and Simon B.: Coupling constants thresholds in non-relativistic quantum mechanics. I. Short range two body case. *Ann. Phys.* **130**, 251--281 (1980).
8. M.Klaus: On the bound state of Schrödinger operators in one dimension, *Annals of Physics*, Volume 108, Issue 2, 1977, pp. 288B--300
9. Lakaev S. N.: The Efimov effect in a system of three identical quantum particles. *Funct. Anal. Appl.* **27**, 166--175 (1993).
10. S.N.Lakaev, Sh.M. Tilavova: Merging of eigenvalues and resonances of a two-particle Schrödinger operator. *Theoret.and Math. Phys.*, **101**, 1320 -1331, (1994)
11. S. N. Lakaev, I.N. Bozorov: The number of bound states of a one-particle Hamiltonian on a three-dimensional lattice, *Theoretical and Mathematical Physics*, **158** 2009, pp. 360-376.
12. Mattis D. C.: The few-body problem on a lattice. *Rev. Modern Phys.* **58**, 361--379 (1986).
13. Mogilner A.: Hamiltonians in solid state physics as multi-particle discrete Schrödinger operators: Problems and results. *Advances in Soviet Mathematics* **5**, 139--194 (1991).
14. Pankov A. A.: *Lecture notice operators on Hilbert space.* New York: Nova Science Publishers, 2007.
15. Reed M. and Simon B.: *Methods of modern mathematical physics. IV: Analysis of Operators*, Academic Press, New York, 1979.
16. B.Simon: The bound state of weakly coupled Schrödinger operators in one and two dimensions, *Ann. Phys.* **97** (1976), 279-288

UDK: 519.21

IKKITA BOSH TO'PLAM DISPERSIYALARINING TENGLIGI HAQIDAGI GIPOTEZANI RANG KRITERIY BO'YICHA TEKSHIRISH .

Ya.Xusainov, M.Murtazayev

Annotatsiya. Ishda bosh to'plamlardan olingan n_1 va n_2 hajmli tanlanmalar bo'yicha bosh dispersiyalar tengligi haqidagi gipoteza tekshirildi. Bosh to'plamlar dispersiyalarining tengligidan iborat H_0 nolinch gipoteza tekshirildi va kriteriyning kuzatiladigan qiymati kritik nuqtadan kichik bo'lgani uchun dispersiyalar tengligi haqidagi nolinch gipotezani rad qilishga asos yo'qligi ko'rsatildi.

Kalit so'zlar. Tanlanma qiymat, tanlanma hajmi, kriteriy, bosh dispersiya, gipoteza, rang.

Проверка гипотезы равенств дисперсии двух генеральных совокупностей

Аннотация. В работе проверяется гипотезу из генеральных совокупности о равенстве генеральных дисперсии по выборкой объёма n_1 и n_2 .

Ключевые слова. Выборочное значение, объём выборки, генеральная дисперсия, гипотеза, критерии, ранг.

Verification of the hypothesis of the equality of variances of two general populations

Abstract. In the paper the hypothesis of the general population on the equality of general variances from the sample of volume n_1 and n_2 is tested.

Keywords: selective value, sample size, general variance, hypothesis.

Qaralayotgan bosh to'plamlarning xarakteristikalar holati, ya'ni o'rtacha qiymatlari yoki medianalari teng yoki yaqin bo'lgan hollari shartida tanlanma dispersiyalar nisbatiga asoslangan kriteriy [1] o'rniga bu kriteriyini ishlatish mumkin.

Faraz qilaylik, X va Y bosh to'plamlardan turli n_1 va n_2 hajmli tanlanmalar olingan bo'lsin. Bosh to'plamlar dispersiyalarining tengligidan iborat H_0 nolinch gipotezani tekshirish talab qilinsin. Kriteriy quyidagi tarzda qo'llanadi. Tanlanmalar birlashtiriladi, birlashtirilgan $n_1 + n_2$ hajmli tanlanma o'sib borish tartibida joylashtiriladi va har bir element u yoki bu (bironta) tanlanmaga tegishliligi belgilanadi. Ularga quyidagi qoida bo'yicha ranglar beriladi: eng kichik qiymatga 1 –rang beriladi, eng katta ikkita qiymat 2 va 3 ranglarni oladi, 4 va 5 ranglarni navbatdagi eng kichik qiymatlar oladi va h.k. Ranglarning joylanish sxemasi quyidagicha ko'rinishda bo'ladi:

$$1, 4, 5, 8, 9, \dots, 7, 6, 3, 2$$

qiymatlari bir xil bo'lgan elementlarning har biriga o'rtacha arifmetik qiymatga teng rang beriladi (Vilkinson kriterisidek). $n_1 \geq 10, n_2 \geq 10$ da H_0 gipotezani tekshirish kriteriyi

$$Z = \frac{\left(R_2 - \frac{n_1(n_1 + n_2 + 1)}{2} \right) - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{n_1(n_1 + n_2 + 1)}{12}}}$$

formula bo'yicha aniqlanadi, bu yerda R_2 – eng kichik $n_2 (n_2 \leq n_1)$ hajmli tanlanma uchun ranglar yig'indisi H_0 gipoteza o'rinli bo'lganda, ya'ni bosh to'plamlarning taqqoslanayotgan dispersiyalari teng bo'lganda Z statistika taqriban $N(0,1)$ normal taqsimotga ega bo'ladi ($n_1, n_2 \rightarrow \infty$) [1].

Berilgan α qiymatdorlik darajasida Laplas funksiyasining qiymatlari jadvalidan kritik nuqta U_α topiladi, keyin Z kriteriyning Z_{kuzat} kuzatilgan qiymati, ya'ni tanlanma ma'lumotlari bo'yicha hisoblangan qiymati topiladi.

Agar Z statistikaning Z_{kuzat} qiymati konkurent gipoteza chap tomonlama (o'ng tomonlama) bo'lganda

$$Z_{kuzat} < U_\alpha \quad (Z_{kuzat} > U_{1-\alpha})$$

tengsizlikni qanoatlantirsa va konkurent gipoteza ikki tomonlama, ya'ni $H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ bo'lganda

$$|Z_{kuzat}| > U_{1-\alpha/2}$$

tengsizlikni qanoatlantirsa H_0 gipoteza rad qilinadi.

Aks holda berilgan α qiymatdorlik darajasida H_0 gipoteza kuzatish ma'lumotlariga zid kelmaydi, ya'ni H_0 gipotezani rad qilishga asos yo'q.

Agar tanlanmalardan birining hajmi o'ndan kichik yoki teng bo'lsa, u holda yuqorida keltirilgan kriteriydan faqat taqribiy hisoblar uchun foydalanish mumkin.

Kriteriyning qo'llanilishini misol bilan tushuntiramiz. Ikkita diodlar partiyasidan tavakkaliga mos ravishda $n_1 = 12$ va $n_2 = 10$ hajmli tanlanmalar olingan. Ularning tishilish kuchlanishlari o'lchanganda natijalari quyidagicha bo'lib chiqqan:

1-partiya	50	41	48	60	46	60	51	42	62	54	42	46
2-partiya	38	40	47	51	63	50	63	57	59	51	-	-

$\alpha = 0,1$ qiymatdordlikdarajasidapartiyalarningdispersiyalaritengligihaqidagi $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ nolinchigipotezanikonkurentgipoteza $H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ bo'lgandatekshiramiz. Tanlanmalarni birlashtirib, birinchi partiya tegishli bo'lgan elementlar ustiga chiziqcha belgi qo'yib, variatsion qator tuzamiz va har bir elementning rangini qo'yamiz.

Natijada

Element	38	40	41	42	42	46	46	47	48	50	50
Rang	1	4	5	8,5	8,5	12,5	12,5	16	17	20,5	20,5

Element	51	51	51	54	57	59	60	60	62	63	63
Rang	19,7	19,7	19,7	15	14	11	8,5	8,5	6	2,5	2,5

ga ega bo'lamiz.

Ikkinchi partiya ($n_2 = 10$) uchun ranglar yig'indisini hisoblaymiz:

$$R_2 = 5 + 8,5 + 12,5 + 12,5 + 17 + 20,5 + 19,7 + 15 + 8,5 + 8,5 + 6 = 110,9.$$

(1) formulaga kirgan kattaliklarning son qiymatlarini qo'yib, kriteriy statistikasining kuzatilgan qiymatini topamiz:

$$Z = \frac{\left(110,9 - \frac{10(10 + 12 + 1)}{2}\right) - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{10(10 + 12 + 1)}{12}}} \approx 0,237.$$

Ikki tomonlama kritik soha uchun Laplas funksiyasining qiymatlari jadvalidan $[2]U_{1-\alpha/2} = U_{0,95} = 1,645$ kritik nuqtani topamiz.

$|Z_{kuzat}| < U_{kr}$ bo'lgani uchun dispersiyalar tengligi haqidagi nolinchigipotezani rad qilishga asos yo'q. Boshqacha so'z bilan aytganda o'lchash natijalari H_0 gipoteza bilan muvofiq keladi.

Adabiyotlar

1. Ивченко Г.И., Медведев Ю.И. Математическая статистика. М., "Высшая школа", 1984 192-201 бетлар.
2. Гмурман В.Е. Эхтимоллар назарияси ва математик статистика. Т., "Укитувчи", 1977. 284-292 бетлар.

UDK: 512.7

S-JUFTLIKLAR TO'G'IRISIDAGI BUXBERGER ALGORITMI VA IDEALGA TEGISHLILIK MASALASI.

U.X.Narzullayev, M.M. Usanov, F.N.Aripov

¹TATU Samarqand filiali

²Samarqand davlat universiteti

Annotatsiya. Bruno Buxberger o'zining ustozisi Wolfgang Gryobnerning ilmiy ishlarining ta'sirida 1965 yil ko'p nomalimli ko'phadlar halqadasida maxsus ko'rinishdagi ideallarni fanga Gryobner bazislari deb kiritgan. Ushbu maqolada Gryobner bazislari ba'zi bir xossalari va hisoblash algoritmi o'rganilgan bo'lib ularga doir misollar keltirilgan.

Kalit so'zlar. ko'phad, ko'phadlar xalqasi, ideal, Gryobner bazisi, Buxberger algoritmi

Buchberger algorithm about s-pares and the problem belonging to the ideal

Abstracts. In the given article bases of ideals of a ring of polynomials of several variable the special kind entered by B. Buchberger in 1965 and named as Gröbner bases in honor of his supervisor

Wolfgang Gröbner are considered. Various properties and algorithm of calculating of such bases which are illustrated by several interesting examples are studied.

Keywords: polynomial, ring of polynomials, ideal, Gröbner bases, Buchberger algorithm.

Алгоритм бюхбергера о s-парах и задача принадлежности идеалу

Аннотация. В данной статье рассматриваются базисы идеалов кольца многочленов от нескольких переменных специального вида, введенные Б.Бюхбергером в 1965 году и названные им *базисами Грёбнера* в честь его научного руководителя Вольфганга Грёбнера. Изучены различные свойства и алгоритм вычисления таких базисов, которые проиллюстрированы несколькими интересными примерами.

Ключевые слова: полином, кольцо полиномов, идеал, базисы Грёбнера, алгоритм Бюхбергера.

Ideallarning Gryobner bazislarining haqiqiy ahamiyati shundan iboratki, ularni hisoblash mumkin. Bruno Buxberger o'zining ustozini Wolfgang Gryobnerning ilmiy ishlarining ta'sirida 1965 yil fanga *Gryobner bazislari* tushunchasini kiritdi. Shunday bazislarni hisoblashning Buxbereger algoritmi polinomial xalqalar nazariyasiga qo'shilgan muhim hissa bo'ldi. Biz bu ishda ushbu algoritmni to'liq bermaymiz. Ushbu ishda idealning bazisi qanday shartlarda Gryobner bazisi tashkil qilishi haqidagi tasdiqlar va misol keltiriladi. Algoritmni to'liq o'rganish uchun Koks, Litl va O'Shilarning monografiyasiga [2] murojaat qilish mumkin.

1-ta'rif. Ushbu x_1, x_2, \dots, x_n , o'zgaruvchilarning monomi deb, ulardan tuzilgan

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n},$$

Shakildagi ko'paytmaga aytiladi, bu yerda $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ lar manfiy emas, butun sonlar bo'lib, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ - ga monomning to'liq darajasi deyiladi.

1-misol. $5x^8y^1zt^4$ - bu monomning to'liq darajasi 14 ga teng.

$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$ - monom bo'lsin, ko'p hollarda qulaylik uchun $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$ ni

x^α kabi belgilaymiz, bu yerda $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, agar $\alpha = 0$ bo'lsa $x^\alpha = 1$ bo'ladi.

2-ta'rif. Koeffitsientlari k maydondan olingan x_1, x_2, \dots, x_n o'zgaruvchilarning polinomi deb monomlarning chekli chiziqli kombinatsiyasiga aytiladi va

$$f = \sum a_\alpha x^\alpha, a_\alpha \in k,$$

kabi yoziladi.

Koifitsientlari k maydondan olingan x_1, x_2, \dots, x_n , o'zgaruvchilarning barcha polinomlar to'plamini $k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ orqali belgilaymiz.

3-ta'rif. $f, g \in K[x_1, \dots, x_n]$ nol bo'lmagan polinomlar bo'lsin.

1) $\text{multideg}(f) = \alpha, \text{multideg}(g) = \beta$ va $\gamma_i = \max\{\alpha_i, \beta_i\}, i = 1, 2, \dots, n$ bo'lsin.

$\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ bo'lsin. U holda x^γ monom $LM(f)$ va $LM(g)$ larning eng kichik umumiy karralisi deyiladi va

$$L = x^\gamma = LCM(LM(f), LM(g))$$

shaklda yoziladi.

$$2) \quad S(f, g) = \frac{x^\gamma}{LT(f)} \cdot f - \frac{x^\gamma}{LT(g)} \cdot g$$

polinom f va g polinomlarning S -polinomi deb ataladi.

2-misol. $y > x$ bo'lsin. U holda $R[x, y]$ da *grlex*-tartiblash bilan

$$f_1 = y^2 - yx^2 \text{ va } f_2 = y^3x - y^2 + y$$

$$\text{multideg}(f_1) = (2, 0), \quad \text{multideg}(f_2) = (3, 1)$$

bo'ladi. Shunday qilib, $L = y^3x$ va

$$S(f_1, f_2) = \frac{y^3x}{y^2} \cdot f_1 - \frac{y^3x}{y^3x} \cdot f_2 = yx \cdot f_1 - 1 \cdot f_2 = y^3x - y^2x^3 - y^3x + y^2 - y = -y^2x^3y^2 - y.$$

S -polinom $S(f, g)$ ni kiritishdan maqsad polinomlarning bosh hadini nolga aylantirishdan iborat. Quyidagi lemma ana shunday jarayonning barchasida S -polinomning borligini ko'rsatadi.

1-Lemma. $\sum_{i=1}^t c_i x^{\alpha(i)} g_i$ yig'indini qaraymiz, c_1, \dots, c_t ($c_i \neq 0$) larkonstantalar va $\alpha(i) + \text{multideg}(g_i) = \delta \in W^n$.

Agar $\text{multideg}(\sum_{i=1}^t c_i x^{\alpha(i)} g_i) < \delta$ bo'lsa, u holda shunday c_{jk} konstantalar mavjudki,

$$\sum_{i=1}^t c_i x^{\alpha(i)} g_i = \sum_{j,k} c_{jk} x^{\delta - \gamma_{jk}} S(g_j, g_k), \tag{1}$$

bo'ladi, bu yerda $x^{\gamma_{jk}} = \text{LCM}(\text{LM}(g_j), \text{LM}(g_k))$. Bundan tashqari har bir $x^{\delta - \gamma_{jk}} S(g_j, g_k)$ ning umumiy darajasi $\text{multidegree} < \delta$ bo'ladi.

(1) tenglikning chap tomonidagi yig'indining har bir qo'shiluvchisi $c_i x^{\alpha(i)} g_i$ ning umumiy darajasi $\text{multidegree} < \delta$ bo'ladi. Shuning uchun bu qo'shiluvchilar ixchamlashtirilgandan so'ng bosh hadlar yo'qoladi. (1) ning o'ng tomonidagi yig'indining har bir qo'shiluvchisi $c_{jk} x^{\delta - \gamma_{jk}} S(g_j, g_k)$ ning umumiy darajasi esa $\text{multidegree} < \delta$ bo'ladi. Demak, bu yig'indida ixchamlashtirishlar amalga oshirilgan bo'ladi. Bu yerdan ko'rinib turibdiki, S -polinomlar ixchamlashtirishlarni amalga oshirishda yordam berar ekan.

1-Teorema. I to'plam $\mathbf{K}[x_1, \dots, x_n]$ xalqaning nol bo'lmagan ideali bo'lsin. U holda I idealning biror $G = \{g_1, \dots, g_t\}$ bazisi $S(g_i, g_j)G$ ga (biror tartiblash bo'yicha) bo'linganda hosil bo'lgan qoldiq $S(g_i, g_j)^G$ barcha $i, j (i \neq j)$ lar uchun nol bo'lganda va faqat shu holdagina I idealning Gryobner bazisidan iborat bo'ladi.

4-tarif. I to'plam $\mathbf{K}[x_1, \dots, x_n]$ xalqaning ideali, G esa shu idealning Gryobner bazisi bo'lsin. Agar quyidagi

1) barcha $g \in G$ lar uchun $\text{LC}(g) = 1$ bo'lsa

2) barcha $g \in G$ lar uchun $\text{LT}(g) \notin \langle \text{LT}(G/\{g\}) \rangle$

shartlar bajarilsa G ga I idealning minimal Gryobner bazisi deyiladi.

5-tarif. I to'plam $\mathbf{K}[x_1, \dots, x_n]$ xalqaning ideali, G esa shu idealning Gryobner bazisi bo'lsin. Agar

1) barcha $g \in G$ lar uchun $\text{LC}(g) = 1$ bo'lsa

2) barcha $g \in G$ lar uchun g ning birorta ham monomiali $\langle \text{LT}(G/\{g\}) \rangle$ ga tegishli bo'lmasa G ga I idealning keltirilgan Gryobner bazisi deyiladi

2-teorema. I to'plam $\mathbf{K}[x_1, \dots, x_n]$ xalqaning ideali bo'lsin. U holda yagona monomial tartiblash bo'yicha I ideal yagona keltirilgan Gryobner bazisiga ega bo'ladi.

3-misol. Quidagi polynomial tenglamalar sistemasini qaraymiz

$$\begin{cases} x^2y - 1 = 0 \\ xy^2 - x = 0 \end{cases}$$

$R[x, y]$ da $I = \langle x^2y - 1, xy^2 - x \rangle$ idealning Gryobner bazisini toping.

Yechish. Dastlab biz $\{f_1, f_2\}$ sistema Gryobner bazisi bo'lish yoki bo'lmasligini tekshiramiz.

Buning uchun $S(f_1, f_2)$ ni topamiz:

$$\text{multdeg}(f_1) = (2, 1), \text{LT}(f_1) = x^2y, \text{LM}(f_1) = x^2y, \text{LC}(f_1) = 1$$

$$\text{multdeg}(f_2) = (1, 2), \text{LT}(f_2) = xy^2, \text{LM}(f_2) = xy^2, \text{LC}(f_2) = 1$$

$$S(f_1, f_2) = \frac{x^2y^2}{x^2y} (x^2y - 1) - \frac{x^2y^2}{xy^2} (xy^2 - x) = x^2 - y \text{ bo'ladi.}$$

Endi $S(f_1, f_2) = x^2 - y$ ni f_1, f_2 larga qoldiqli bo'lamiz

$$\begin{array}{r|l} & a_1 = 0 \\ & a_2 = 0 \\ x^2y - 1 & x^2 - y \\ xy^2 - x & 0 \\ \hline & x^2 - y \end{array}$$

Ko'rinib turibdiki, qoldiq $x^2 - y \neq 0$. Shuning uchun bu qoldiqni idealni tashkil etuvchi polinomlar to'plamiga kiritamiz. $G = (f_1, f_2, f_3)$ bo'lsin, bu yerda $f_3 = x^2 - y$. U holda $S(f_1, f_2) = x^2 - y$ bo'ladi natijada $S(f_1, f_2)^G = 0$ bo'ladi. Endi f_1 va f_3 ni qaraymiz. Bu holda

$$\text{multdeg}(f_3) = (2, 0), \text{LT}(f_3) = x^2, \text{LM}(f_3) = x^2, \text{LC}(f_3) = 1$$

$$S(f_1, f_3) = \frac{x^2y}{x^2y} (x^2y - 1) - \frac{x^2y}{x^2} (x^2 - y) = y^2 - 1 \text{ bo'ladi.}$$

Endi $S(f_1, f_3) = y^2 - 1$ ni f_1, f_2, f_3 larga qoldiqli bo'lamiz

$$\begin{array}{r|l} & a_1 = 0 \\ & a_2 = 0 \\ & a_3 = 0 \\ x^2y - 1 & y^2 - 1 \\ xy^2 - x & 0 \\ \hline & y^2 - 1 \end{array}$$

$$\frac{x^2 - y}{y^2 - 1}$$

Ko'rinib turibdiki, qoldiq $y^2 - 1 \neq 0$. Shuning uchun bu qoldiqni ham idealni tashkil etuvchi polinomlar to'plamiga kiritamiz. $G = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ bo'lsin. U holda $S(f_1, f_3)^G = 0$ bo'ladi.

Endi f_2 va f_3 larni ko'rib chiqamiz. Bu holda

$$S(f_2, f_3) = \frac{x^2 y^2}{xy^2} (xy^2 - x) - \frac{x^2 y^2}{x^2} (x^2 - y) = -x^2 + y^3 \text{ bo'ladi.}$$

Endi $S(f_2, f_3) = -x^2 + y^3$ ni f_1, f_2, f_3, f_4 larga qoldikli bo'lamiz

$$\begin{array}{l|l} & a_1 = 0 \\ & a_2 = 0 \\ & a_3 = -1 \\ & a_4 = y \\ x^2 y - 1 & -x^2 + y^3 \\ xy^2 - x & -x^2 + y \\ x^2 - y & y^3 - y \\ y^2 - 1 & y^3 - y \\ \hline & 0 \end{array}$$

Ko'rinib turibdiki, qoldiq $r = 0$. Shuning uchun $G = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ bo'lsin. U holda $S(f_2, f_3)^G = 0$ bo'ladi. Endi f_1 va f_4 larni ko'rib chiqamiz. Bu holda

$\text{multdeg}(f_4) = (0, 2)$, $LT(f_1) = y^2$, $LM(f_1) = y^2$, $LC(f_1) = 1$

$$S(f_1, f_4) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y} (x^2 y - 1) - \frac{x^2 y^2}{y^2} (y^2 - 1) = x^2 - y$$

Endi $S(f_1, f_4) = x^2 - y$ ni f_1, f_2, f_3, f_4 larga qoldikli bo'lamiz

$$\begin{array}{l|l} & a_1 = 0 \\ & a_2 = 0 \\ & a_3 = 1 \\ & a_4 = 0 \\ x^2 y - 1 & x^2 - y \\ xy^2 - x & x^2 - y \\ x^2 - y & \\ y^2 - 1 & \\ \hline & 0 \end{array}$$

Ko'rinib turibdiki, qoldiq $r = 0$. Shuning uchun $G = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ bo'lganda. U holda $S(f_1, f_4)^G = 0$ bo'ladi

Endi f_2 va f_4 larni ko'rib chiqamiz.

$$S(f_2, f_4) = \frac{xy^2}{xy^2} (xy^2 - x) - \frac{xy^2}{y^2} (y^2 - 1) = 0$$

U holda $S(f_2, f_4)^G = 0$ bo'ladi. Endi f_3 va f_4 larni ko'rib chiqamiz.

$$S(f_3, f_4) = \frac{x^2 y^2}{x^2} (x^2 - y) - \frac{x^2 y^2}{y^2} (y^2 - 1) = x^2 - y^3$$

Endi $S(f_3, f_4) = x^2 - y^3$ ni f_1, f_2, f_3, f_4 larga qoldikli bo'lamiz

$$\begin{array}{l|l} & a_1 = 0 \\ & a_2 = 0 \\ & a_3 = 1 \\ & a_4 = -y \\ x^2 y - 1 & x^2 - y^3 \\ xy^2 - x & x^2 - y \\ x^2 - y & -y^3 + y \\ y^2 - 1 & -y^3 + y \\ \hline & 0 \end{array}$$

U holda $S(f_3, f_4)^G = 0$ bo'ladi. Shunday qilib, $G = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ sistemani hosil qildik va barcha $1 \leq i < j \leq 4$ lar uchun $S(f_i, f_j)^G = 0$ ekanligini ko'rsatdik. Demak, $I = \langle x^2y - 1, xy^2 - x \rangle$ idealning Gryobner bazisi $G = \{x^2y - 1, xy^2 - x, x^2 - y, y^2 - 1\}$ dan iborat ekan.

Keltirilgan Gryobner bazisini topamiz. Buning uchun

$$\begin{cases} x^2y - 1 = 0 \\ xy^2 - x = 0 \\ x^2 - y = 0 \\ y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Tashkil etuvchilarining bosh koeffitsientlarini 1 ga keltiramiz, bizda tashkil etuvchilarning bosh koeffitsientlari hammasi 1 ga teng. Endi $LT(f_1) = x^2y = yLT(f_3)$ bo'lganligi uchun f_1 polinomni bazis palinomlari safidan chiqarishimiz mumkin. $LT(f_2) = xy^2 = xLT(f_4)$ bo'lganligi uchun f_2 polinomni ham bazis palinomlari safidan chiqarib tashlaymiz. Qolgan yasovchilardan birortasining ham bosh koeffitsiyenti bir-birining bosh koeffitsientiga bo'linmaydi. Demak, $x^2 - y, y^2 - 1$ polinomlar I idealning minimal Gryobner bazisini tashkil qiladi, shu bilan bir qatorda $x^2 - y, y^2 - 1$ polinomlar I idealning keltirilgan Gryobner bazisini tashkil qiladi, chunki $x^2 \notin \langle y^2 \rangle, y^2 \notin \langle x^2 \rangle$, shartlar o'rinli.

Endi $f = x^3y + x^2y - xy^2 - 1$ polinomni I idealga tegishli yoki tegishli emasligini tekshiramiz. Buning uchun f ni f_1, f_2, f_3, f_4 larga qoldiqli bo'lamiz.

$$\begin{array}{r|l} & a_1 = x + 1 \\ & a_2 = -1 \\ & a_3 = 0 \\ & a_4 = 0 \\ x^2y - 1 & x^3y + x^2y - xy^2 - 1 \\ xy^2 - x & x^3y - x \\ \hline x^2 - y & x^2y - xy^2 + x - 1 \\ y^2 - 1 & x^2y - 1 \\ \hline & -xy^2 + x \\ & -xy^2 + x \\ \hline & 0 = r \end{array}$$

Demak, $f = (x + 1) \cdot f_1 + (-1) \cdot f_2 + 0 \cdot f_3 + 0 \cdot f_4$.
U holda $f \in I$ ekanligi kelib chiqadi.

Adabiyotlar

1. D.S. Malik, John N. Morderson, M.K.Sen. Fundamentals of abstract algebra. WCB. McGraw-Hill. Boston, 1997.(89-125c).
2. Кокс Д., Литтл Дж., О'Ши Д. Идеалы, многообразия и алгоритмы. Введение в вычислительные аспекты алгебраической геометрии и коммутативной алгебры: Пер. с англ. — М.: Мир, 2000. (75-168с).
3. И.В.Аржанцев. Базисы Грёбнера и системы алгебраических уравнений. МЦНМО, 2003.(26-37с).
4. Сэттарова Э.С., Каримова М.А. Задача о принадлежности идеалу. – Ташкент: «Амалий математика ва ахборотхавфсизлиги» илмий-техник конференция материаллари, 2014 й. (конференция материаллари 23-25 бетлар).

UDK: 517.9

ИНДЕКС СЛЕДА ПАРАМЕТРИЗАЦИИ РАЦИОНАЛЬНОЙ КРИВОЙ.

А. Солеев, М. Буляева

Самаркандский государственный университет

Аннотация. Кривая допускает бесчисленное множество различных способов параметрического задания. Рациональная параметризация алгебраической кривой устанавливает соотношение этой кривой с её проекцией. Это соответствие является биективной, если параметризация полная. Введя понятие индекса следа параметризации,

покажем его вычисление, связь степени рациональной параметризации и степени этой кривой, а также рассмотрим применение этих результатов в случае действительных кривых.

Ключевые слова: индекс следа, алгебраическая кривая, параметризация, полная параметризация, алгебраическое многообразие.

Ratsional egri chiziqni parametrlash izi indeksi

Annotatsiya. Egri chiziqni parametr ko‘rinishida cheksiz ko‘p usullar yordamida ifodalash mumkin. Algebraik egri chiziqni ratsional parametrlash bu chiziq bilan uning proektsiyasi orasida munosabat o‘rnatadi. Agar parametrlash to‘la bo‘lsa, bu munosabat biyektiv bo‘ladi. Parametrlash izi indeksi tushunchasini kiritib, ratsional parametrlash darajasi va egri chiziq darajasining bog‘liqligi orqali uni hisoblashni ko‘rsatamiz. Haqiqiy egri chiziq uchun ham olingan natijalarning tadbirlarini ko‘rib chiqamiz.

Kalit so‘zlar: iz indeksi, algebraik egri chiziq, parametrlash, to‘la parametrlash, algebraik ko‘pxillik.

Tracing index of rational curve parametrizations

Abstract. The curve can be expressed by infinitely many methods of parametrizations. A rational parametrization of an algebraic curve establishes a rational correspondence of this curve with the projective line. And if this parametrization is proper, therefore the correspondence is a birational equivalence. We illustrate how to compute the index of a parametrization with its relation between the degree of rational reparametrization and the degree of the curve. Also we analyse these results in the case of real curves.

Keywords: tracing index, algebraic curve, parametrization, proper parametrization, algebraic diversification.

1. Основные понятия. *Алгебраическая кривая или плоская алгебраическая кривая* — это геометрическое место (множество) точек на плоскости $(O; x, y)$, которое определяется как множество нулей многочлена от двух переменных. Степенью (или порядком) n этой кривой называется степень этого многочлена. Алгебраические кривые степеней $n = 1, 2, 3, \dots, 8$ кратко называются прямыми, кониками, кубиками, кватриками, пентиками, секстиками, септиками, октиками соответственно. Например, единичная окружность — это алгебраическая кривая степени 2 (коника), так как она задаётся уравнением $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

В алгебраической геометрии, плоская аффинная алгебраическая кривая над полем k определяется как множество точек K^2 , являющихся корнями многочлена от двух переменных с коэффициентами в k , где K — алгебраическое замыкание поля k . Точки этой кривой, все координаты которых лежат в k , называются k -точками. Например, если такая точка принадлежит рассмотренной выше единичной окружности, однако не принадлежит её действительной части, то уравнение $x^2 + y^2 - 1 = 0$ задаёт алгебраическую кривую, действительная часть которой пуста.

Алгебраическая кривая — это алгебраическое многообразие размерности 1. Это определение можно переформулировать так: алгебраическая кривая — это алгебраическое многообразие, все алгебраические подмногообразия которого состоят из одной точки.

Рациональная кривая, также известная как уникурсальная кривая, — это кривая, бирационально эквивалентная аффинной прямой (или проективной прямой), другими словами, кривая, допускающая рациональную параметризацию.

Можно рассматривать алгебраические кривые, содержащиеся не в плоскости, а в пространстве с большим числом измерений или в проективном пространстве. Оказывается, что многие свойства алгебраической кривой не зависят от выбора конкретного вложения в некоторое пространство, и это приводит к общему определению алгебраической кривой (см.[2]).

2. Параметризация кривых. Задания кривой с помощью радиус-вектора (векторно-параметрически) означает, что каждому числовому заданию параметра t мы ставим в соответствие вектор $r=r(t)$. Если собрать все точки этих векторов в одну точку, то концы этих векторов опишут кривую, годограф вектор-функции. Таким образом между типовыми

значениями параметра t и точками на кривой установлено взаимно-однозначное соответствие. Такое соответствие и называется *параметризацией кривой*.

Лемма 1: Пусть $P(t)$ полная параметризация кривой C на плоскости и пусть $Q(t)$ -любая другая параметризация этой кривой. Тогда Существуют подвижные рациональные функции $R(t) \in K(t)$ такие, что $Q(t) = P(R(t))$;

$Q(t)$ является полной тогда и только тогда, если существуют линейные рациональные функции $L(t) \in K(t)$ такие, что $Q(L(t)) = P(R(t))$.

Другими словами параметризовать кривую можно не единственным образом, если параметр $t = f(u)$, где $f = f(u)$ – непрерывная монотонная (иногда возрастающая) функция, то мы получим новую параметризацию кривой с помощью вектор – функции $r = r(t) = r(f(u))$.

Рациональные кривые, в сравнении с обычными (нерациональными — "non-rational") В-сплайнами, обладают двумя дополнительными и очень важными свойствами:

1. Они обеспечивают корректный результат при проекционных трансформациях (например, масштабировании), а нерациональные В-сплайны — только при аффинных трансформациях (например, перемещениях);

2. Их можно использовать для моделирования кривых любого вида, включая конические сечения (окружности, эллипсы, параболы и гиперболы).

3. Индекс следа. Введем понятие индекса следа параметризации алгебраической кривой на плоскости. Для этого сначала сформулируем следующую техническую лемму:

Лемма 2: Пусть $\mathcal{P}(t)$ рациональная параметризация в сокращенной форме с непостоянными коэффициентами, тогда для всех, но конечных значений α от s , имеем

$$\text{deg}_t(G(s, t)) = \text{deg}_t(\text{нод}(G_1(\alpha, t)G_2(\alpha, t))).$$

Теорема 1: Пусть $\mathcal{P}(t)$ параметризация в сокращенной форме кривой C на плоскости. Тогда все, но конечное число точек в C вырождены (порождаемы) через $\mathcal{P}(t)$, в точности параметрическими значениями t , где $m = \text{deg}_t(G(s, t))$.

Доказательство см[3]. С этими данными теперь мы можем ввести понятие индекса следа параметризации.

Определение: Пусть C - рациональная аффинная кривая на плоскости, и пусть $\mathcal{P}(t)$ – рациональная параметризация C . Тогда, *индексом следа* $\mathcal{P}(t)$ называется число $k \in \mathbb{N}$, и обозначается через $\text{index}(\mathcal{P}(t))$, если все, но конечное число вырожденных точек на кривой C , через $\mathcal{P}(t)$, с помощью k - значения параметра, т.е. $\text{index}(\mathcal{P}(t))$ представляет собой количество раз, сколько $\mathcal{P}(t)$ прослеживает кривую C .

Примечание. Если рассмотрим отображение $\mathcal{P}: \mathbb{K} \rightarrow C$, полученное параметризацией $\mathcal{P}(t)$, тогда индекс следа $\mathcal{P}(t)$ и есть степень рационального отображения \mathcal{P} . Следовательно, $\text{index}(\mathcal{P}(t))$ – степень конечного поля расширения $\varphi_{\mathcal{P}}(\mathbb{K}(C)) \subset \mathbb{K}(t)$, где $\varphi_{\mathcal{P}}$ -мономорфизм, полученный от \mathcal{P} в поле рациональных функций (см. [3], [5]); т.е. $\text{index}(\mathcal{P}(t)) = [\mathbb{K}(t): \varphi_{\mathcal{P}}(\mathbb{K}(C))]$. Для изучения соотношения индекса следа и степени рационального отображения (см. [6])

Полнота параметризации \mathcal{P} требует бирациональности $\mathcal{P}(t)$ и характеризуется индексом следа равным 1.

Теорема 2. Рациональная параметризация является полной тогда и только тогда, когда индекс следа равен 1, т.е. если $\text{deg}_t(G(s, t)) = 1$.

4. Вычисление индекса следа. Вычисление индекса параметризации кривой необходимо для определения или уточнения полноты параметризации. Собственно говоря, мы знаем, что параметризация устанавливает соотношение кривой и ее проекцией (или афиной), и это соответствие является биективной эквивалентией, если параметризация полная. Сама же параметризация определяет линейную проекцию кривой, где параметр принимает значения в ограниченном алгебраическом замкнутом поле.

Введем следующие обозначения: пусть \mathbb{K} - алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики. Если C является алгебраической кривой над полем \mathbb{K} , обозначим поле рациональных функций на C через $\mathbb{K}(C)$. Для параметризации $\mathcal{P}(t)$ кривой C на поле \mathbb{K} запишем его компоненты в следующем виде:

$$\mathcal{P}(t) = \left(\frac{\chi_{1,1}(t)}{\chi_{1,2}(t)}, \frac{\chi_{2,1}(t)}{\chi_{2,2}(t)} \right).$$

Здесь допустим, что рациональные параметризации даны в сокращенной форме так, что $\text{НОД}(\chi_{1,1}, \chi_{1,2}) = \text{НОД}(\chi_{2,1}, \chi_{2,2}) = 1$. Также для данной параметризации $\mathcal{P}(t)$ рассмотрим многочлены

$$G_1(s, t) = \chi_{1,1}(s)\chi_{1,2}(t) - \chi_{1,2}(s)\chi_{1,1}(t),$$

$$G_2(s, t) = \chi_{2,1}(s)\chi_{2,2}(t) - \chi_{2,2}(s)\chi_{2,1}(t) \text{ и } G(s, t) = \text{НОД}(G_1, G_2)$$

Например:

Пусть задана рациональная параметризация $\mathcal{P}(t)$:

$$\mathcal{P}(t) = \left(\frac{t^2 - 1}{t^2 - 2t}, \frac{(t^2 - 1)t}{t - 3} \right)$$

$$\begin{aligned} G_1(s, t) &= (s^2 - 1)(t^2 - 2t) - (s^2 - 2s)(t^2 - 1) \\ &= t^2s^2 - t^2 - 2ts^2 + 2t - s^2t^2 + 2st^2 + s^2 - 2s \\ &= s^2 - t^2 + 2t - 2s - 2ts^2 + 2st^2 = (s - t)(s + t) - 2(s - t) - 2st(s - t) \\ &= (s - t)(s + t - 2st - 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_2(s, t) &= s^3t - st - 3s^3 + 3s - t^3s + st + 3t^3 - 3t = s^3t - t^3s - 3s^3 + 3t^3 + 3s - 3t \\ &= st(s^2 - t^2) - 3(s^3 - t^3) + 3(s - t) \\ &= (s - t)(st(s + t) + 3(1 - st) - 3(s^2 + t^2)) \end{aligned}$$

Из разложения на множители многочленов $G_1(s, t)$ и $G_2(s, t)$ заданной параметризации $\mathcal{P}(t)$ видно, что $G(s, t) = \text{gcd}(G_1(s, t), G_2(s, t)) = s - t$. Так как $m = \text{deg}_t(G(s, t)) = 1$, следовательно по Теореме 3 вытекает, что параметризация полная и индекс следа кривой равен 1.

$$G(s, t) = s - t$$

Рассмотрим геометрический смысл индекса следа параметризации этой кривой. Пусть α принимает такие значения, что $\chi_{1,2}(\alpha)\chi_{2,2}(\alpha) \neq 0$. Тогда фибр выражается через

$$\mathcal{P}^{-1}(\mathcal{P}(\alpha)) = \{\beta \in \mathbb{K} \mid G_1(\alpha, \beta) = 0, G_2(\alpha, \beta) = 0\}.$$

Так что $\mathcal{P}^{-1}(\mathcal{P}(\alpha))$ можно рассматривать как общее аффинное пересечение точек кривой, определенной полиномами $G_1(s, t)$, $G_2(s, t)$ и прямой $s = \alpha$. Следовательно, для всех, но конечного множества исключений, $\mathcal{P}^{-1}(\mathcal{P}(\alpha))$ можем также рассмотреть как общее аффинное пересечение точек кривой полинома $G(s, t)$ и прямой $s = \alpha$, то есть для всех, но конечного числа исключений $\text{index}(\mathcal{P}(t))$ - это количество аффинных пересечений, подсчитанных без перемножений, кривой $G(s, t)$ и прямой $s = \alpha$. И заметим, что прямая $s = t$ является компонентом $G(s, t)$.

Пусть $\mathcal{P}(t)$ - параметризация и пусть

$$R_1(S) = \text{Res}_t \left(G_1, \frac{\partial G_1}{\partial t} \right), \quad R_2(S) = \text{Res}_t \left(G_2, \frac{\partial G_2}{\partial t} \right).$$

В случае, если $\text{deg}_t(\text{НОД}(G_1(\alpha, t), G_2(\alpha, t))) > 1$, в Теореме 1 утверждается, что точка $(x_\alpha, y_\alpha) = \mathcal{P}(t) \in C$, где α удовлетворяющее гипотезе теоремы, порождается больше чем один раз.

Отметим, что в малой окрестности особой точки параметрические ветви заданной кривой можно найти посредством многогранников Ньютона (см.[4]).

Литература

1. W. Fulton. Algebraic Curves: an introduction to algebraic geometry. Springer-Verlag, 2010.
2. C.G. Gibson. Elementary Geometry of Algebraic Curves: An Undergraduate Introduction. — Cambridge University Press, 1998.
3. Harris J., 1995. Algebraic Geometry. A First Course. Springer-Verlag.
4. Soleev A. Algorithm of Local Resolution of Singularities of a Space Curve. В книге LNCS 3718, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2005. P.405-415.
5. Shafarevich, I.R., 1994. Basic Algebraic Geometry 1; Varieties in Projective Space. Springer-Verlag, Berlin New York.

6. J. Rafael Sendra, Franz Winkler, 2001. Tracing index of rational curve parametrizations. Computer Aided Geometric Design 18, 771-795 (2001).

УДК: 517.946

СУЩЕСТВЕННЫЙ СПЕКТР ТРЕХЧАСТИЧНОГО ДИСКРЕТНОГО ОПЕРАТОРА, СООТВЕТСТВУЮЩЕГО СИСТЕМЕ ТРЕХ ФЕРМИОНОВ НА РЕШЕТКЕ

А.М.Халхужаев, Т.М.Исакулов

Аннотация. Рассматривается семейство трехчастичных дискретных операторов Шредингера $H_\mu(K)$, $K \in T \equiv (-\pi, \pi]$, $\mu > 0$, ассоциированных с гамильтонианом системы трех частиц (фермионов) с парными двухчастичными взаимодействиями на ближайших соседних узлах одномерной решетки Z . Описана структура существенного спектра оператора $H_\mu(K)$ при всех значениях трехчастичного квазиимпульса $K \in T$ и энергии взаимодействия $\mu > 0$.

Ключевые слова: спектральные свойства, трехчастичный дискретный оператор Шредингера, гамильтониан системы трех фермионов, существенный спектр, собственное значение.

Panjarada uchta fermonlar sistemasiga mos keluvchi uch zarrachali diskret operatorning muhim spektri

Annotatsiya. Bir o'ldamli Z panjarada juft-jufti bilan qo'shni tugunlarda ta'sirlashuvchi uch zarrachali (fermionli) sistema gamiltonianiga mos $H_\mu(K)$, $K \in T \equiv (-\pi, \pi]$, $\mu > 0$, uch zarrachali diskret Shredinger operatorlari oilasi qaraladi. O'zaro ta'sir energiyasi $\mu > 0$ va sistema kvazi impulsi $K \in T$ ning barcha qiymatlarida $H_\mu(K)$ operatori muhim spektri tavsiflangan.

Kalit so'zlar: spectral xossa, uch zarrachali diskret Shredinger operatori, uch fermionli gamilton sistemalari, mavjud spektr, xususiy qiymat.

The essential spectrum of the three particle Schrodinger operator associated to a system of three fermions on lattice

Abstract. We consider a family of three particles discrete Schrödinger operators $H_\mu(K)$, $K \in T \equiv (-\pi, \pi]$, $\mu > 0$, associated to a system of Hamiltonian of three identical particles (fermions) interactions with pairwise two particles on neighboring junctions on one dimensional lattice Z . The structure of the essential spectrum of the operator $H_\mu(K)$ is described for all three particles quasi-momentum $K \in T$ and interaction energy $\mu > 0$.

Keywords: spectral properties, three particle Schrödinger operators, Hamiltonion of systems of three fermions, essential spectrum, eigenvalue.

В моделях физики твердого тела [1,2], статистической физике [3] и решетчатой теории поля [4] возникают дискретные операторы Шредингера, являющиеся решетчатым аналогом обычного оператора Шредингера в непрерывном пространстве R^d .

Хорошо известная теорема Хунцикера-ван Винтера-Жислина (теорема ХВЖ)(см.[5], теорема XIII.17) описывает существенный спектр N – частично непрерывного оператора Шредингера H через спектры гамильтонианов кластеров для широкого класса парных короткодействующих взаимодействий.

Для трехчастичных операторов Шредингера $H_\mu(K)$, $K \in T^3$, соответствующих гамильтонианам систем трех произвольных частиц, движущихся на трехмерной решетке Z^3 , взаимодействующих с помощью парных короткодействующих потенциалов в [6] установлен, что его существенный спектр состоит из конечного числа непересекающихся отрезков.

В настоящей работе рассматривается трехчастичный дискретный оператор Шредингера $H_\mu(K)$, соответствующий системе трех одинаковых частиц (фермионов), движущихся на

целочисленной решетке Z с двухчастичными взаимодействиями $\mu > 0$ на соседних узлах решетки.

Доказывается, что существенный спектр оператора состоит из одного или двух отрезков в зависимости от трехчастичного квазиимпульса $K \in T$ и энергии взаимодействия $\mu > 0$. В случае одинаковых частиц в отличие от произвольных частиц на решетке, рассматриваемый оператор действует в подпространстве заданной симметрии. Отметим, что в непрерывном случае при описании местоположения существенного спектра достаточно указать его нижнюю границу, а в случае решетки следует указать границу каждого отрезка существенного спектра.

Пусть T – одномерный тор, т.е. отрезок $(-\pi, \pi]$ – с соответствующим отождествлением противоположных краев. Он рассматривается как абелева группа, в которой операции сложения и умножения на вещественное число введены как операции сложения и умножения на вещественное число в R по модулю $2\pi Z$ а $L_2(T^m)$ – гильбертово пространство квадратично-интегрируемых функций, определенных на T^m .

После преобразований Фурье, выделения полных квазиимпульсов систем трех и двух частиц и разложений в прямые операторные интегралы (см. например [6]-[7]), изучение спектров операторов энергий систем двух и трех одинаковых частиц (фермионов) на решетке сводятся к изучению спектров семейств операторов $H_\mu(K), K \in T$, и $h_\mu(k), k \in T$.

В координатах $(k_\alpha, k_\beta) \in T^2$ оператор $H_\mu(K), K \in T$, в гильбертовом пространстве

$$L_2^o(T^2) = \{f \in L_2(T^2) : f(k_\alpha, k_\beta) = -f(k_\beta, k_\alpha) = -f(k_\alpha, K - k_\alpha - k_\beta)\}$$

определяется по формуле

$$H_\mu(K) = H_0(K) - \mu V, \quad V = V_1 + V_2 + V_3,$$

где

$$(H_0(K)f)(k_\alpha, k_\beta) = E(K; k_\alpha, k_\beta) f(k_\alpha, k_\beta), \quad f \in L_2^o(T^2),$$

$$E(K; k_\alpha, k_\beta) = \varepsilon(k_\alpha) + \varepsilon(k_\beta) + \varepsilon(K - k_\alpha - k_\beta),$$

$$\varepsilon(p) = 1 - \cos p, \quad p \in T,$$

и

$$(V_\alpha f)(k_\alpha, k_\beta) = \frac{1}{2\pi} \int_T \cos(k_\beta - q) f(k_\alpha, q) dq, \quad f \in L_2^o(T^2).$$

Здесь $\mu > 0$ – энергия взаимодействия двух частиц на соседних узлах решетки. Индексы α, β и γ принимают значения 1, 2, 3 и $\alpha < \beta < \gamma$.

Замечание 1. В одной координате $(k_1, k_2) \in T^2$ оператор $V = V_1 + V_2 + V_3$, действует в гильбертовом пространстве $L_2^o(T^2)$ и операторы V_1, V_2 и V_3 определяются по формулам

$$(V_1 f)(k_1, k_2) = \frac{1}{2\pi} \int_T \cos(k_2 - q) f(k_1, q) dq;$$

$$(V_2 f)(k_1, k_2) = \frac{1}{2\pi} \int_T \cos(k_1 - q) f(k_2, q) dq;$$

$$(V_3 f)(k_1, k_2) = \frac{1}{2\pi} \int_T \cos(k_1 - q) f(q, k_1 + k_2 - q) dq.$$

Обозначим через $L_2^o(T^2) \subset L_2(T)$ – подпространство “ k – нечетных” функций, т.е.

$$L_2^o(T) = \{f \in L_2(T) : f(k_\beta) = -f(k - k_\beta)\};$$

Оператор $h_\mu(k), k \in T$, в гильбертовом пространстве $L_2^o(T)$ определяется по формуле

$$h_\mu(k) = h_0(k) - \mu v, \quad (1)$$

где

$$h_0(k)f(k_\beta) = E_k(k_\beta)f(k_\beta), \quad f \in L_2^o(T).$$

$$E_k(k_\beta) = \varepsilon(k_\beta) + \varepsilon(k - k_\beta), (uf)(k_\beta) = \frac{1}{2\pi} \int_T \cos(k_\beta - q)f(q) dq, \quad f \in L_2^o(T).$$

Приводим некоторые важные спектральные свойства оператора $h_\mu(k), k \in T$, определенного по формуле (1) (см. работу [8]).

Возмущение ν оператора $h_0(k)$ является одномерным оператором, и следовательно, из теоремы Вейля о сохранении существенного спектра при компактном возмущении (см. [7]) существенный спектр $\sigma_{ess}(h_\mu(k))$ оператора $h_\mu(k)$ совпадает со спектром оператора $h_0(k)$.

Так как $h_0(k)$ есть оператор умножения на функцию $E_k(q)$, то

$$\sigma_{ess}(h_\mu(k)) = [\varepsilon_{\min}(k), \varepsilon_{\max}(k)],$$

где

$$\varepsilon_{\min}(k) = \min_{q \in T} E_k(q) = 2 \left(1 - \cos \frac{k}{2} \right) \geq 0,$$

$$\varepsilon_{\max}(k) = \max_{q \in T} E_k(q) = 2 \left(1 + \cos \frac{k}{2} \right) \leq 4.$$

Теорема 1. Пусть $\mu > 2 \cos \frac{k}{2}$. Тогда для любого $k \in T$ оператор $h_\mu(k)$ имеет

единственное собственное значение $z_\mu(k)$ левее существенного спектра, которое имеет вид

$$z = 2 - \frac{\mu^2 + \cos^2 \frac{k}{2}}{2\mu}.$$

Замечание 2. Так как возмущенный оператор ν положителен, оператор $h_\mu(k)$ не имеет собственных значений правее $\varepsilon_{\max}(k)$.

Пусть C – комплексная плоскость. Для каждого $k \in T$ и $\mu > 0$ определим в $C \setminus [\varepsilon_{\min}(k), \varepsilon_{\max}(k)]$ функции

$$\nu(k, z) = \int_T \frac{\sin^2(k/2 - q)}{E_k(q) - z} dq, \quad (2)$$

и

$$\Delta_\mu(k, z) = 1 - \frac{\mu}{2\pi} \nu(k, z).$$

Лемма 1. Точка $z \in C \setminus [\varepsilon_{\min}(k), \varepsilon_{\max}(k)]$ является собственным оператором $h_\mu(k)$ тогда и только тогда, когда $\Delta_\mu(k, z) = 0$.

Доказательство. Доказательство этой леммы приведено в работе [8].

Доказательство теоремы 1. Вычислим интеграл, стоящий в правой части равенства (2). Для этого представим этот интеграл в виде

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 t dt}{2 - 2 \cos \frac{k}{2} \cos t - z} = -\frac{1}{2 \cos \frac{k}{2}} (I(1 - A^2) + 2\pi A);$$

где

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{\cos t + A}, \quad A = \frac{z-2}{2 \cos \frac{k}{2}}. \quad (3)$$

Учитывая равенство $\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$ и делая замену переменного $e^{it} = x$, получим

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{\cos t + A} = \frac{2}{i} \oint_{|x|=1} \frac{dx}{(x+A+\sqrt{A^2-1})(x+A-\sqrt{A^2-1})} = \frac{2\pi}{\sqrt{A^2-1}}.$$

Таким образом,
$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 t dt}{-2 - 2 \cos \frac{k}{2} \cos t - z} = \frac{\pi}{\cos \frac{k}{2}} (\sqrt{A^2-1} - A).$$

По лемме 1 имеет место $\Delta_{\mu}(k, z) = 0$, т.е.

$$1 - \frac{\mu}{2\pi} \frac{\pi}{\cos \frac{k}{2}} (\sqrt{A^2-1} - A) = 0. \quad (4)$$

Учитывая равенство (3) и решая уравнение (4) относительно $z < m(k)$ имеем

$$\frac{z-2}{2 \cos \frac{k}{2}} = \frac{4 \cos^2 \frac{k}{2} + \mu^2}{4\mu \cos \frac{k}{2}},$$

$$z = 2 - \frac{\mu^2 + 4 \cos^2 \frac{k}{2}}{2\mu}.$$

Отсюда

Теперь вводим "операторы канала", через спектр которых описывается существенный спектр оператора Шредингера $H_{\mu}(K), T$.

Пусть $L_2^{ch}(T^2) = \{f \in L_2(T^2) : f(p, q) = -f(p, K - p - q)\}$.

Так как мы рассматриваем систему трех одинаковых частиц (фермионов), (т.е. операторы V_1, V_2 и V_3 унитарно эквивалентные), то имеется только один оператор канала $H_{\mu}^{ch}(K), K \in T$, и он в импульсном представлении определяется как самосопряженный оператор, действующий в гильбертовом пространстве $L_2^{ch}(T^2)$ по формуле

$$H_{\mu}^{ch}(K) = H_0(K) - \mu V_1.$$

Построим следующие изометрические операторы $U_2, U_3 : L_2^{ch}(T^2) \rightarrow L_2(T^2)$:

$$(U_2 f)(p, q) = -f(p, q), \quad (U_3 f)(p, q) = -f(K - p - q, q), \quad f \in L_2^{ch}(T^2).$$

Тогда выполняются равенства $U_2 V_2 U_2^* = V_1$ и $U_3 V_3 U_3^* = V_1$.

Оператор $H_{\mu}^{ch}(K)$ коммутирует с группой $\{A_s, s \in Z\}$ унитарных операторов

$$(A_s f)(k_{\alpha}, k_{\beta}) = \exp\{-isk\} f(k_{\alpha}, k_{\beta}), \quad f \in L_2^{ch}(T^2).$$

Гильбертовопространство $L_2^{ch}(T^2)$ разлагается в прямой интеграл

$$L_2^{ch}(T^2) = \int_{k \in T} \oplus L_2^o(T) dk.$$

Поэтому ([5], теорема XIII.84) оператор $H_{\mu}^{ch}(K)$ разлагается в прямой операторный интеграл

$$H_{\mu}^{ch}(K) = \int_{k \in T} \oplus H_{\mu}^{ch}(K, k) dk. \tag{5}$$

Из единственности разложения (5) следует ([5], теорема XIII.85), что слойный оператор $H_{\mu}^{ch}(K, k)$ имеет вид

$$H_{\mu}^{ch}(K, k) = h_{\mu}(K - k) + \varepsilon(k)I,$$

где I - единичный оператор и $h_{\mu}(k)$ - оператор, определенный по формуле (1).

Из представления оператора $H_{\mu}^{ch}(K, k)$ вытекает равенство

$$\sigma(H_{\mu}^{ch}(K, k)) = \sigma_{disc}(h_{\mu}(K - k) + \varepsilon(k)I) \cup [\varepsilon_{\min}(K - k), \varepsilon_{\max}(K - k)]. \tag{6}$$

По теореме (см например [5]) о спектре разложимых операторов и структуры спектра (6) оператора $H_{\mu}^{ch}(K, k)$ имеем

$$\sigma(H_{\mu}^{ch}(K, k)) = \bigcup_{k \in T} \{ \sigma_{disc}(h_{\mu}(K - k) + \varepsilon(k)I) \} \cup [E_{\min}(K - k), E_{\max}(K - k)], \tag{7}$$

где

$$E_{\min}(K, k) = \varepsilon_{\min}(K - k) + \varepsilon(k); E_{\max}(K, k) = \varepsilon_{\max}(K - k) + \varepsilon(k),$$

$$\begin{aligned} \text{Пусть } \tau_{\min}(\mu, K) &= \min_{p \in T} \left[3 - \frac{\mu^2 + 4 \cos^2 \frac{K - p}{2} + 2\mu \cos p}{2\mu} \right], \\ \tau_{\max}(\mu, K) &= \max_{p \in T} \left[3 - \frac{\mu^2 + 4 \cos^2 \frac{K - p}{2} + 2\mu \cos p}{2\mu} \right]. \end{aligned} \tag{8}$$

Лемма 2. Для спектра $\sigma(H_{\mu}^{ch}(K))$ оператора канала $H_{\mu}^{ch}(K)$ имеет место равенство $\sigma(H_{\mu}^{ch}(K, k)) = [\tau_{\min}(\mu, K), \tau_{\max}(\mu, K)] \cup [E_{\min}(K), E_{\max}(K)]$ (9)

Доказательство. Пусть для некоторого $K - k \in G_{\mu} \subset T$ число $z_{\mu}(K - k)$ - собственное значение оператора $h_{\mu}(K - k)$ (см. теорему 1). Тогда только число

$$Z_{\mu}(K, k) = z_{\mu}(K - k) + \varepsilon(k) \tag{10}$$

является собственным значением оператора $H_{\mu}^{ch}(K, k)$.

Поэтому из определений $z_{\mu}(k)$ и $\varepsilon(k)$ получим, что

$$\text{Im } Z_{\mu K} = [\tau_{\min}(\mu, K), \tau_{\max}(\mu, K)].$$

Отсюда учитывая равенство (7), получим искомое равенство (9).

Теорема 2. Существенный спектр $\sigma_{ess}(H_{\mu}(K))$ оператора $H_{\mu}^{ch}(K)$ совпадает со спектром оператора канала, т.е. $\sigma(H_{\mu}^{ch}(K)) = \sigma_{ess}(H_{\mu}(K))$.

Доказательство. Покажем включение $\sigma(H_{\mu}^{ch}(K)) \subset \sigma_{ess}(H_{\mu}(K))$. Пусть $Z_0 = \sigma_{two}(H_{\mu}^{ch}(K))$, тогда по определению множества $\sigma_{two}(H_{\mu}^{ch}(K))$ существует $k_0 \in T$ такое, что число Z_0 является собственным значением операторов $H_{\mu}^{ch}(K, k_0) = h_{\mu}(K - k_0) + \varepsilon(k_0)I$. Обозначим через $f_0 \in D(h_{\mu}(K - k_0))$ собственную функцию, соответствующую Z_0 и пусть $\|f_0\| = 1$.

Тогда функция $g(p, q) = f_0(-k_0/2 + p/2 + q)$, принадлежат пространству $L_2^{ch}(T^2)$.

Пусть $\chi_{U_n}(q)$ – характеристическая функция множества

$$U_n = \left\{ p \in T : \frac{1}{n+1} < |p - k_0| \leq \frac{1}{n} \right\}.$$

При построении пробной функции воспользуемся следующей леммой:

Лемма 3. Существует ортогональная нормированная система $\{c_n\} \subset L_2(T)$, удовлетворяющая условиям: $0 \neq c_n(p) \in L_2(T), \text{supp } c_n \subset U_n$ такая, что для функции $\varphi_n(p, q) = c_n(p)g(p, q) \in L_2^{ch}(T^2)$ выполняются

- 1) $\|\varphi_n\| = 1, \quad n \in N,$
- 2) $(\varphi_n, \varphi_m) = 0, \quad n, m \in N. \quad n \neq m,$
- 3) $(U_2\varphi_n, U_3\varphi_m) = (U_3\varphi_n, U_2\varphi_m) = (\varphi_n, U_2\varphi_m) = (\varphi_n, U_3\varphi_m) = 0, \quad n, m \in N, \quad n \neq m,$
- 4) $(\varphi_n, U_2\varphi_n) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$

Доказательство. 1) Можно проверить, что равенство $\|\varphi_n\| = 1, \quad n \in N,$ равносильно к $\|c_n\| = 1.$

2) Так как $U_n \cap U_m = \emptyset$ при $n \neq m$ и $\text{supp } c_n \subset U_n$ то $(\varphi_n, \varphi_m) = \delta_{nm}.$

3) Легло показать, $(U_2\varphi_n, U_3\varphi_m) = (U_3\varphi_n, U_2\varphi_m) = (\varphi_n, U_2\varphi_m) = (\varphi_n, U_3\varphi_m) = (Ac_n, c_m),$ что где A – самосопряженный оператор Гильберта-Шмидта в $L_2^{ch}(T)$ порожденный ядром $A(p, q) = g(p, q)\overline{g(p, q)}.$

Пусть $c_1(p) \in L_2(T), \text{supp } c_1 \subset U$ и $\|c_1\| = 1,$ а $\tilde{c}_2 \in L_2(U_2)$ – элемент, ортогональный к $(Ac_1)(p)\chi_{U_2}(p),$ и $\|\tilde{c}_2\| = 1.$ Обозначим через c_2 – продолжение функции $\tilde{c}_2,$ на весь тор $T,$ равное нулю вне множества $U_2.$

Существует элемент $\tilde{c}_3 \in L_2(U_3), \|\tilde{c}_3\| = 1,$ ортогональный к элементам $(Ac_j)(p)\chi_{U_3}(p), \quad j = 1, 2.$

Через c_3 обозначим функцию $c_3(p) = \begin{cases} \tilde{c}_3(p), & p \in U_3 \\ 0, & p \in T \setminus U_3. \end{cases}$

Допустим $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ построены. Найдется элемент $\tilde{c}_{n+1} \in L_2(U_{n+1}), \|\tilde{c}_{n+1}\| = 1,$ ортогональный к элементам $(Ac_j)(p)\chi_{U_{n+1}}(p), \quad j = \overline{1, n}.$ Пусть c_{n+1} – продолжение функции \tilde{c}_{n+1} на весь тор $T,$ равное нулю вне $U_{n+1}.$ Полученная последовательность $\{c_n\} \subset L_2(T)$ удовлетворяет условию 3) леммы.

4) Из слабой сходимости ОС $\{c_n\}$ к нулю следует, что

$$\|(Ac_n, c_n)\| \leq \|Ac_n\| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Отсюда и из равенства (8) получим, что $(\varphi_n, U_2\varphi_n) \rightarrow 0,$ при $n \rightarrow \infty.$ Продолжим доказательство теоремы 2.

Сначала докажем, что $\{\varphi_n\}$ является пробной функцией для оператора $H_\mu^{ch}(K).$

Действительно,

$$\|(H_\mu^{ch}(K) - Z_0I)\varphi_n\|^2 \leq 3 \left(\int_{U_n} \int_T |(h_\mu(K - p) + \varepsilon(p)I - Z_0I)(g(p, q) - f_0(q))|^2 dq |c_n(p)|^2 dp \right) +$$

$$3\left(\int_{U_n} \int_T |(h_0(K-p) + \varepsilon(p)I - (h_0(K-k_0) + \varepsilon(k_0)I))(f_0(q))|^2 dq |c_n(p)|^2 dp\right) +$$

$$3\left(\int_{U_n} \int_T |(h_\mu(K-k_0) + \varepsilon(p)I - Z_0I)(f_0(q))|^2 dq |c_n(p)|^2 dp\right) \leq C\left(\sup_{p \in U_n} \|g(p, \cdot) - f_0(\cdot)\|^2\right) +$$

$$C\left(\sup_{p \in U_n} \sup_{q \in T} |E(K; k_0, q) - E(K; p, q)|^2\right).$$

Правая часть последнего неравенства стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Таким образом, имеем $\|(H_\mu^{ch}(K) - Z_0I)\varphi_0\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Отметим, что для любого $f \in L_2^{ch}(T^2)$ функция $\varphi(p, q) = f(p, q) - f(q, p) - f(K - p - q, q)$ т.е. $\varphi = f + U_2f + U_3f$ принадлежит в $L_2^o(T^2)$. Положим

$$\tilde{f}_n = \frac{1}{\sqrt{3}}(\varphi_n + U_2\varphi_n + U_3\varphi_n) \in L_2^o(T^2) \text{ и } f_n = \frac{\tilde{f}_n}{\|\tilde{f}_n\|}. \quad (11)$$

В силу утверждений леммы 4 получим, что система $\{f_n\}$ образует ОНС и $\|\tilde{f}_n\| \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$.

Можно показать, что выполняются равенства

$$\|V_2\varphi_n\| = \|V_3\varphi_n\| = \|V_2U_2\varphi_n\| = \|V_3U_2\varphi_n\| = \|V_3U_3\varphi_n\| = \|V_2U_3\varphi_n\|, \quad (12)$$

$$\|(H_\mu^{ch}(K) - Z_0I)U_2\varphi_n\| = \|(H_\mu^{ch}(K) - Z_0I)U_3\varphi_n\| = \|(H_\mu^{ch}(K) - Z_0I)\varphi_n\|. \quad (13)$$

Из равенств (11), (12) и (13) получим, что

$$\|(H_\mu(K) - Z_0I)f_n\| \leq \frac{3}{\|\tilde{f}_n\|} (\|(H_\mu(K) - Z_0I)\varphi_n\| + 2\|V_2\varphi_n\|)$$

Из неравенства Шварца и абсолютной непрерывности интеграла Лебега имеем:

$$\|V_2\varphi_n\|^2 = \int_{T^2} |(V_2\varphi_n)(p, q)|^2 dpdq \leq \frac{1}{2\pi} \int_T \int_{U_n} |\cos(p-t)|^2 dpdt \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (14)$$

Следовательно, если воспользоваться соотношениями (14) и (12), тогда при $n \rightarrow \infty$ имеем:

$$\|(H_\mu(K) - Z_0I)f_n\| \rightarrow 0.$$

Теперь покажем, что $[E_{\min}(K), E_{\max}(K)] \subset \sigma_{ess}(H_\mu(K))$.

Пусть $z_0 \in [E_{\min}(K), E_{\max}(K)]$. Тогда существует $(p_0, q_0) \in T^2$ такой, что $z_0 = E(K; p_0, q_0)$.

Для каждого $n \in N$ и $p, q \in T$ введем обозначения:

$$U_n(p) = \left\{x \in T : \frac{1}{n+1} < |x - p| \leq \frac{1}{n}\right\} \text{ и}$$

$$W_n(p, q) = W_n^{(1)}(p, q) = W_n^{(2)}(p, q) = W_n^{(3)}(p, q) = W_n^{(4)}(p, q) = W_n^{(5)}(p, q) = W_n^{(6)}(p, q),$$

где

$$W_n^{(1)}(p, q) = U_n(p) \times U_n(q), \quad W_n^{(2)}(p, q) = U_n(q) \times U_n(p), \quad W_n^{(3)}(p, q) = U_n(K - p - q) \times U_n(p),$$

$$W_n^{(4)}(p, q) = U_n(p) \times U_n(K - p - q), \quad W_n^{(5)}(p, q) = U_n(q) \times U_n(K - p - q),$$

$$W_n^{(6)}(p, q) = U_n(K - p - q) \times U_n(q).$$

Пусть $\tilde{f} \in L_2^o(T^2)$ – ненулевая функция и

$$\tilde{f}_n(p, q) = \begin{cases} \tilde{f}(p, q), & \text{если } (p, q) \in W_n(p_0, q_0) \\ 0, & \text{если } (p, q) \notin W_n(p_0, q_0). \end{cases}$$

Заметим, что для любого $g \in L_2^o(T^2)$ функцию \tilde{f} можно построить следующим образом

$$\tilde{f}(p, q) = [g(p, q) - g(p, K - p - q)] + [g(K - p - q, p) - g(K - p - q, q)] + [g(q, K - p - q) - g(q, p)] \in L_2^o(T^2).$$

Не уменьшая общности, рассмотрим случай $p_0 \neq q_0 \neq K - p_0 - q_0$. Тогда можно показать, что

$$(\tilde{f}_n, \tilde{f}_m) = 0, \text{ при достаточно больших } n \neq m, \text{ т.е. } \{f_n\} = \left\{ \frac{1}{\|\tilde{f}_n\|} \tilde{f}_n \right\} \text{ является ОНС в } L_2^o(T^2).$$

Имеем

$$\|(H_\mu(K) - z_0 I) f_n\|^2 \leq C \left(\|(H_0(K) - z_0 I) f_n\|^2 + \mu \sum_{\alpha=1}^3 \|V_\alpha f_n\|^2 \right). \tag{15}$$

Так как $f_n \in L_2^o(T^2)$, получим, что

$$\int_{W_n^{(i)}(p_0, q_0)} |f_n(p, q)|^2 dpdq = \int_{W_n^{(j)}(p_0, q_0)} |f_n(p, q)|^2 dpdq, \quad i, j = 1, 2, 3, \dots, 6. \tag{16}$$

Так как $E(K : p, q)$ непрерывная и

$$\sup_{p, q \in W^{(i)}(p_0, q_0)} |E(K; p, q) - z_0| = \sup_{p, q \in W^{(j)}(p_0, q_0)} |E(K; p, q) - z_0| \quad i, j = 1, 2, 3, \dots, 6,$$

отсюда и из (16) получим, что

$$\|(H_0(K) - z_0 I) f_n\|^2 \leq 6 \sup_{p, q \in W_n(p_0, q_0)} |E(K; p, q) - z_0|^2 \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Пусть $(p, q) \in W^{(1)}(p_0, q_0)$. Из неравенства Шварца и из абсолютной непрерывности интеграла Лебега мы имеем

$$\int_{T^2} |(V_1 f_n)(p, q)|^2 dpdq \leq (2\pi)^{-1} \int_T \int_{U_n(q_0)} |\cos(q - t)|^2 dqdt \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Аналогично рассуждая и в остальных случаях убедимся, что при всех $\alpha = 1, 2, 3$ выполняются соотношения

$$\|V_\alpha f_n\|^2 = \int_{T^2} |(V_\alpha f_n)(p, q)|^2 dpdq \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Так как $z_0 \in [E_{\min}(K), E_{\max}(K)]$, получим, что $[E_{\min}(K), E_{\max}(K)] \subset \sigma_{\text{ess}}(H_\mu(K))$.

Доказательство $\sigma_{\text{ess}}(H_\mu(K)) \subset \sigma(H_\mu^{ch}(K))$ аналогично доказательству теоремы 5.2 работы [6].

Литература

1. Graf G.M., Schenker D. *2 – magnon scattering in the Heisenberg model*, Ann. Inst. H. Poincare Phys. Theor. 67 (1).91-107 (1997).
2. [2]. Mattis D.C. *The few – body problem on lattice*, Rev, Modern Phys. 58(2), 361-379 (1986).
3. A.I.Mogilner: *The problem of few quasy – patricles in solid state physics in Application of self – adjoint exntensions in quantum physics*. P.Exner and P.Seba eds. Lect. Notes Phys.324, Springer-Berlin,(1998).
4. Малышев В.А., Минлос Р.А. *Кластерные операторы*. Труды семинара им. И.Г.Петровского. Вып.9. 0.63-80.(1983)
5. Рид М, Саймон Б. *Методы современной математической физики*. Т.1. Анализ операторов. М: Мир. 1982.

6. S. Albeverio, S. N. Lakaev and Z. I. Muminov: On the structure of the essential spectrum for the three particle Schrodinger operators on lattices. *Math.Nachr.* **280**. No7, 1-18.(2007).
7. С.Н. Лакаев, А.М.Халхужаев. О спектре двухчастичного оператора Шредингера на решетке. *ТМФ*, 155 (2): 287-300.(2008).
8. С.Н. Лакаев, А.М.Халхужаев. О числе собственных значений двухчастичного дискретного оператора Шредингера. *ТМФ*, 158:2, 263-276. (2009)

УДК 517.9

НАХОЖДЕНИЕ НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЫ ДЛЯ ДАННОЙ СИСТЕМЫ ГАМИЛЬТОНА

У.У. Усмонов

Самаркандский государственный университет

E-mail: usmonovuktam93@gmail.ru

Аннотация. Цель работы состоит в том, чтобы с помощью канонического преобразования в виде степенных рядов установить для данной системы Гамильтона нормальную форму. Доказано, что каждый интеграл системы можно записать в виде формального степенного ряда.

Ключевые слова: каноническая форма, степенное преобразование, нормальная форма, системы Гамильтона, дифференциальные уравнения, интеграл системы, степенной ряд.

Gamilton sistemasi uchun normal shaklni topilishi

Annotatsiya. Ishning maqsadi, berilgan Gamilton sistemasi uchun darajali qatorlar ko‘rinishidagi kanonik almashtirishlar yordamida normal ko‘rinishga keltirish masalasi qaralgan. Sistemaning yechimi bo‘lgan har bir integralini formal ravishda darajali qator ko‘rinishida yozish mumkinligi isbotlangan.

Kalit so‘zlar: kanonik shakl, darajali almashtirishlar, normal shakl, Gamilton sistemasi, differensial tenglamalar, sistemaning integrali, darajali qatorlar.

Finding of the normal form for hamilton systems

Abstract. In this paper, we study the setting of normal form for present Hamilton systems using canonical conversion by the form of power series. It is proven that each system integral can be writer in by power series.

Keywords: canonical form, the degree of conversion, normal form, systems of Hamilton, differential equations, integral of the system, power series.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{u}_k = H_{v_k}, \quad \dot{v}_k = -H_{u_k} \quad (k = 1, \dots, n) \quad (1)$$

Приведем эту систему при помощи канонического преобразования в виде степенных рядов в нормальную форму [1]. Для этого переведем сначала, в нормальную форму линейные члены правых частей уравнений (1), следовательно, квадратичные члены H . Новые переменные обозначим через x_k, y_k и положим $z_k = x_k, z_{k+n} = y_k$ ($k = 1, \dots, n$); пусть z – вектор–столбец с составляющими z_l ($l = 1, \dots, 2n$). Подходящей линейной канонической подстановкой $\omega = \mathbb{C}z$ системе (1) придадим форму

$$\dot{x}_k = H_{y_k}, \quad \dot{y}_k = -H_{x_k} \quad (k = 1, \dots, n), \quad (2)$$

причем

$$H = H_2 + H_3 + \dots, \quad H_2 = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k y_k;$$

здесь H_l ($l = 2, 3, \dots$) – однородный многочлен степени l относительно z_1, \dots, z_{2n} .

Подвергнем далее систему (2) каноническому преобразованию вида

$$\left. \begin{aligned} x_k &= \varphi_k(\xi, \eta) = \xi_k + \sum_{l=2}^{\infty} \varphi_{kl}, \\ y_k &= \psi_k(\xi, \eta) = \eta_k + \sum_{l=2}^{\infty} \psi_{kl}, \quad (k = 1, \dots, n), \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где φ_{kl}, ψ_{kl} – однородные многочлены степени l относительно $2n$ новых переменных ξ, η . При этом система (2) переходит в новую систему Гамильтона

$$\dot{\xi}_k = H_{\eta_k}, \quad \dot{\eta}_k = -H_{\xi_k} \quad (k = 1, \dots, n), \quad (4)$$

где

$$H = \sum_{l=2}^{\infty} H_l[\varphi(\xi, \eta), \psi(\xi, \eta)] = H_2(\xi, \eta) + \dots, \quad (5)$$

Наложим еще одно ограничение: будем считать, что линейная зависимость

$$g_1 \lambda_1 + g_2 \lambda_2 + \dots + g_n \lambda_n = 0$$

с целыми g_1, g_2, \dots, g_n существует только в тривиальном случае $g_1 = g_2 = \dots = g_n = 0$. Теперь нужно показать, что при подходящем выборе $2n$ формальных степенных рядов φ_k, ψ_k правая часть равенства (5) будет формальным степенным рядом только относительно произведений $\omega_k = \xi_k \eta_k$.

Представим искомое каноническое преобразование (3) с помощью производящей функции $v(x, \eta)$, которая вводится как формальный степенной ряд вида

$$v(x, \eta) = v_2 + v_3 + \dots, \quad v_2 = h.$$

Если теперь

$$H = \sum_{l=2}^{\infty} K_l(\xi, \eta)$$

будет разложением H по однородным многочленам относительно ξ_k, η_k то $K_2 = H_2(\xi, \eta)$ и

$$K_l = \sum_{k=1}^n \lambda_k \left[\xi_k v_{l_{x_k}}(\xi, \eta) - \eta_k v_{l_{\eta_k}}(\xi, \eta) \right] + \dots \quad (l = 3, 4, \dots),$$

Доказано, что точно для одного степенного ряда формальное каноническое преобразование, заданное соотношениями

$$\left. \begin{aligned} \xi_k &= v_{\eta_k} = x_k + \sum_{l=3}^{\infty} v_{l_{\eta_k}}, \\ y_k &= v_{x_k} = \eta_k + \sum_{l=3}^{\infty} v_{l_{x_k}}, \quad (k = 1, \dots, n) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

переводит функцию Гамильтона H в степенной ряд относительно $\omega_1, \dots, \omega_n$ и в то же самое время переводит

$$\Phi = \sum_{k=1}^n (\xi_k y_k - \eta_k x_k),$$

в ряд, который не содержит произведений степеней только ω_k . Коэффициенты многочлена однозначно определяются через коэффициенты многочленов H_3, \dots, H_l и, следовательно, тоже самое справедливо и для коэффициентов многочленов

$$\varphi_{k,l-1}, \psi_{k,l-1} \quad (k = 1, \dots, n, \quad l = 3, 4, \dots).$$

С помощью канонического преобразования $\omega = g(\zeta)$ заданная функция Гамильтона H превращается в степенной ряд $H = F + G$ по $\zeta_1, \dots, \zeta_{2n}$, причем G начинается с членов степени $l + 1$, а F является многочленом степени l , который зависит, только от произведений $\xi_k \eta_k = \omega_k$ ($k = 1, \dots, n$). Пусть все собственные значения λ_k чисто мнимые. Тогда для действительных решений $i^{-1} \xi_k \eta_k = \xi_k \bar{\xi}_k \geq 0$ ($k = 1, \dots, n$). Полагая

$$\left(\sum_{k=1}^n |\xi_k|^2 \right)^{1/2} = q \geq 0,$$

в силу соотношений

$$\left. \begin{aligned} \dot{\xi}_k &= H_{\eta_k} = F_{\omega_k} \xi_k + G_{\eta_k}, \\ \dot{\eta}_k &= -H_{\xi_k} = -F_{\omega_k} \eta_k - G_{\xi_k}, \quad (k = 1, \dots, n) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

получим дифференциальное уравнение

$$2iq\dot{q} = \sum_{k=1}^n (\eta_k G_{\eta_k} - \xi_k G_{\xi_k}).$$

Если преобразование системы Гамильтона (2) в нормальную форму (1) производится сходящимся степенным рядом, то

$$\omega_k = \xi_k \eta_k = x_k y_k + \dots \quad (k = 1, \dots, n) \quad (8)$$

будут n независимыми интегралами системы (2), сходящимся в некоторой окрестности начала координат. Обобщая это определение, мы будем называть формальный степенной ряд $g(x, y)$, который формально удовлетворяет справедливому для интегралов уравнению

$$\sum_{k=1}^n (g_{x_k} H_{y_k} - g_{y_k} H_{x_k}) = 0, \quad (9)$$

также интегралом системы (2). Таким образом, в этом смысле система Гамильтона (2) всегда обладает при сделанных выше предположениях о линейной независимости $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ теми же n интегралами ω_k ($k = 1, \dots, n$).

Утверждение. Каждый интеграл $g(x, y)$ можно записать в виде формального ряда по $\omega_1, \dots, \omega_n$.

Действительно, так как разложение разности $\omega_k - x_k y_k$ по степеням x_1, \dots, y_n начинается с кубических членов, то рекуррентным процессом можно построить такой степенной ряд $P(\omega)$ по ω_k , что степенной ряд $h(x, y) = g(x, y) - P(\omega)$ относительно переменных x_1, \dots, y_n не содержит членов вида

$$c(x_1 y_1)^{\alpha_1} \dots (x_n y_n)^{\alpha_n}.$$

Так как $h(x, y)$ также является интегралом, то удовлетворяется формальное уравнение

$$\sum_{k=1}^n (h_{x_k} H_{y_k} - h_{y_k} H_{x_k}) = 0. \quad (10)$$

Если бы степенной ряд $h(x, y)$ не обращался тождественно в нуль то, он содержал бы член наименьшей степени вида $c x_1^{\alpha_1} y_1^{\beta_1} \dots x_n^{\alpha_n} y_n^{\beta_n}$, где $c \neq 0$. Из уравнения (10) путем сравнения коэффициентов получим

$$c \sum_{k=1}^n (\alpha_k - \beta_k) \lambda_k = 0,$$

следовательно, $\alpha_k = \beta_k$ ($k = 1, \dots, n$). Но это не возможно, так как $h(x, y)$ не содержит по построению членов этого вида. Таким образом, $h(x, y) = 0$, $g(x, y) = P(\omega)$ и утверждение доказано.

Рассмотрим пример, такого сходящегося степенного ряда для H , у которого интеграл имеет вид: $\omega_1 = x_1 y_1 + \dots$. Тогда получится, что система Гамильтона, образованная этой функцией H , нельзя перевести сходящимся каноническим преобразованием в нормальную форму. Для этого положим $n = 2, \lambda_1 = i, \lambda_2 = ip$ с действительным иррациональным числом p , так что условие линейной независимости λ_1, λ_2 выполнено. Положим затем

$$H = i(x_1 y_1 + p x_2 y_2) + \sum_{p,q} a_{pq} (x_1^p y_2^q + x_2^q y_1^p) \quad (11)$$

где a_{pq} могут принимать только значения $0, \pm 1$. В частности, пусть $a_{pq} = 0$, если не оба p и q делятся на 4. Тогда в силу вещественности $y_k = i\bar{x}_k, (k = 1, 2)$ и H также действительна. В качестве p выберем иррациональное число интервала $0 < p < 1$, которое можно достаточно хорошо аппроксимировать рациональными числами; именно, неравенство

$$0 < |p - pq| < \frac{1}{q!} \quad (12)$$

должно иметь, бесконечно много решений в натуральных числах p, q делящихся на 4.

Тогда для интеграла

$$\omega_1 = g(x, y) = x_1 y_1 + \sum_{l=3}^{\infty} g_l(x, y)$$

выполняется уравнение (9), и из сравнения коэффициентов при членах l -го порядка следует соотношения для составной части g_l функции $g(x, y)$

$$x_1 g_{l x_1} - y_1 g_{l y_1} + p(x_2 g_{l x_2} - y_2 g_{l y_2}) + i \sum_{p+q=l} p a_{pq} (x_1^p y_2^q - x_2^q y_1^p) = \dots,$$

где правая часть будет некоторым однородным многочленом l -й степени относительно x_1, y_1, x_2, y_2 , коэффициенты которого выражаются только через коэффициенты многочленов g_3, \dots, g_{l-1} и через a_{pq} при $p + q < l$. Для слагаемых $c_{pq} x_1^p y_2^q$ функции g_l отсюда следует

$$(p - pq)c_{pq} + i p a_{pq} = \gamma_{pq} \quad (13)$$

причем γ_{pq} выражаются через коэффициенты многочленов g_3, \dots, g_{l-1} и через a_{rs} при $r + s < l$. Выше уже отмечалось, что коэффициенты членов менее чем l -го порядка в канонической подстановке (3) определяется однозначно через коэффициенты членов H до l -го порядка включительно. Следовательно, g_3, \dots, g_{l-1} , также определены в зависимости от a_{rs} при $r + s < l$, и это же тогда имеет место и для γ_{pq} . Пусть теперь p, q будут положительными решениями неравенства (12), делящимися на 4; выберем $a_{pq} = \pm 1$ так, чтобы $|p a_{pq} + i \gamma_{pq}| \geq p \geq 1$; это можно сделать с помощью неравенства треугольника. Тогда в силу соотношений (12) и (13)

$$|c_{pq}| \geq q!, \quad (14)$$

и притом это соотношение выполняется для бесконечно многих q . Для всех других пар p, q положим $a_{pq} = 0$. Вследствие неравенств (12) и (14) ряд $g(x, y)$ не может сходиться ни в какой окрестности начала координат.

Следовательно, в этом примере преобразование в нормальную форму представляется расходящимся рядом. Но, с другой стороны, квадратный член

$$i(x_1 y_1 + p x_2 y_2) = -i(x_1 \bar{x}_1 + p x_2 \bar{x}_2)$$

функции H является определенно отрицательным, поэтому по теореме Дирихле решение $x_1 = x_2 = y_1 = y_2 = 0$ будет устойчивым. Этот результат замечателен тем, что в теоретико-функциональной проблеме центра в случае устойчивости преобразование в нормальную форму всегда задается сходящимся рядом.

Литература

1. Карл Людвиг Зигель, Юрген К. Мозер. «Лекции по небесной механике» «перевод М. С. Яров-Ярового, Л. Д. Пустильникова, А. Г. Арзамасцева», «Москва-Ижевск», 2001, с. 377.
2. А.Д. Брюно, А.С. Солеев. «Гамильтоновы укорочения системы Гамильтона», Препринт ИПМ РАН России «Москва», 1995, с. 26.
3. А. Д. Брюно. «Степенная геометрия», «М. Наука», 1999, с. 286.

УДК 517.946

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ

И. Э. Ниёзов, Э.Салимов

Самаркандский государственный университет

Аннотация. Рассматривается задача аналитического продолжения решения систем уравнений термоупругости в ограниченной области по её значениям и значениям её напряжений на части границы этой области, т.е. задача Коши.

Ключевые слова. Системы термоупругости, функция Карлемана, матрица Карлемана, задача Коши.

About one of the Cauchy problem for the system of theory of elasticity

Abstract.In this paper, we considered the problem of analytical continuation of the solution of the system equations of the system thermoelasticity in bounded domain from its values and values of its strains on part of the boundary of this domain, i.e., the Cauchy's problem.

Keywords: The Cauchy problem, system thermoelasticity, elliptic system, ill-posed problem, Carleman matrix, regularization.

Termoelastiklik nazariyasi sistemasi uchun Koshi masalasi

Annotasiya: Bu ishda termoelastiklik nazariyasi tenglamalari sistemasi yechimini yechim va uning kuchlanishi soha chegarasining musbat o'Ichovli qismida berilganda sohaning ichiga toppish masalasi qaraladi. Bunday masalaga Koshi masalasi deyiladi.

Kalit so'zlar: momentli elastiklik nazariyasi, Karleman funksiyasi, Karleman matritsasi, Koshi masalasi.

Введение

Система уравнений термоупругости эллиптическая [1]. Соответственно задача Коши для таких систем является некорректной [2]. Решение может существовать, тогда оно единственно, но не устойчиво, т.е. решение не устойчиво относительно малого изменения данных. В некорректных задачах существование решения и принадлежности её к классу корректности предполагается априори.

В данной работе на основе метода функции Карлемана строится регуляризованное решение задачи Коши для системы уравнений термоупругости [2-4].

Пусть $x = (x_1, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, \dots, y_n)$ точки вещественного евклидова пространства R^n , D – ограниченная односвязная область в R^n с кусочно-гладкой границей ∂D и S – гладкий часть ∂D , лежащая на верхней полуплоскости $y_n > 0$.

Пусть $n + 1$ – компонентная вектор-функция

$$U(x) = (u_1(x), \dots, u_n(x), u_{n+1}(x))$$

удовлетворяет в области D системе уравнений термоупругости [5] :

$$B(\partial_x, \omega)U(x) = 0, \tag{1}$$

где

$$B(\partial_x, \omega) = \llbracket B_{kj}(\partial_x, \omega) \rrbracket_{(n+1) \times (n+1)},$$

$$B_{kj}(\partial_x, \omega) = \delta_{kj}(\mu\Delta + \rho\omega^2) + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j}, \quad k, j = 1, \dots, n,$$

$$B_{k(n+1)}(\partial_x, \omega) = -\gamma \frac{\partial}{\partial x_n}, \quad k = 1, \dots, n,$$

$$B_{(n+1)j}(\partial_x, \omega) = i\omega\eta \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$B_{(n+1)(n+1)}(\partial_x, \omega) = \Delta + \frac{i\omega}{\theta},$$

δ_{kj} – символ Кронеккера, $i = \sqrt{-1}$, коэффициенты $\lambda, \mu, \rho, \omega, \theta$ характеризующие среды, удовлетворяют условиям $\mu > 0, \lambda + 2\mu > 0, \theta > 0, \rho > 0, \frac{\gamma}{\eta} > 0$.

Система уравнений термоупругости является эллиптическим так как детерминант характеристической матрицы

$$\chi(\xi) = \begin{pmatrix} (\lambda + \mu)\xi_1^2 + \mu|\xi|^2 & (\lambda + \mu)\xi_1\xi_2 & \dots & (\lambda + \mu)\xi_1\xi_n & 0 \\ (\lambda + \mu)\xi_1\xi_2 & (\lambda + \mu)\xi_2^2 + \mu|\xi|^2 & \dots & (\lambda + \mu)\xi_2\xi_n & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\lambda + \mu)\xi_1\xi_n & (\lambda + \mu)\xi_2\xi_n & \dots & (\lambda + \mu)\xi_n^2 + \mu|\xi|^2 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & |\xi|^2 \end{pmatrix}$$

для произвольных $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, $\xi_k \in R^1$ таких что $|\xi|^2 = 1, \det \chi(\xi) = (\lambda + 2\mu)\mu^{n-1} > 0$.

Уравнение (1) можно написать в виде системы

$$\begin{cases} \mu \Delta u + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} u - \gamma \operatorname{grad} v + \rho \omega^2 u = 0 \\ \Delta v + \frac{i\omega}{\theta} v + i\omega \eta \operatorname{div} u = 0, \end{cases} \quad (2)$$

где $U(x) = (u(x), v(x))$, $u(x) = (u_1(x), \dots, u_n(x))$, $v(x) = u_{n+1}(x)$.

Постановка задачи. Требуется определить регулярное решение $U \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$ системы (2) в области D , исходя из её данных Коши, заданных на поверхности S :

$$U(y) = f(y), \quad R(\partial_y, v(y))U(y) = g(y), \quad y \in S, \quad (3)$$

где $R(\partial_y, v(y))$ – оператор напряжения определяемый равенством

$$R(\partial_y, v(y)) = \llbracket R_{kj}(\partial_y, v(y)) \rrbracket_{(n+1) \times (n+1)} = \begin{pmatrix} T & -\gamma v_1 \\ & -\gamma v_2 \\ & \vdots \\ & -\gamma v_n \\ 0 & 0 \dots & \frac{\partial}{\partial v} \end{pmatrix},$$

здесь $T = T(\partial_y, v(y)) = \llbracket T_{kj}(\partial_y, v(y)) \rrbracket_{n \times n}$,

$$T_{kj}(\partial_y, v(y)) = \lambda v_k(y) \frac{\partial}{\partial y_j} + \mu v_j(y) \frac{\partial}{\partial y_k} + (\lambda + \mu) \delta_{kj} \frac{\partial}{\partial v(y)}, \quad k, j = 1, \dots, n,$$

$v(y) = (v_1(y), \dots, v_n(y))$ – единичный вектор нормали к поверхности ∂D в точке y , направленный во внешность по отношению к ∂D , $f = (f_1, \dots, f_{n+1})$, $g = (g_1, \dots, g_{n+1})$ заданные непрерывные вектор-функции на S .

Построение матрицы Карлемана. Известно, что для регулярного решения системы (2) верно интегральное представление [5], т.е. при $x \in D$:

$$\begin{aligned} 2U(x) = \int_{\partial D} [\Psi(x-y, \omega) \{R(\partial_y, v(y))U(y)\} - \\ - \{\tilde{R}(\partial_y, v(y))\tilde{\Psi}(x-y, \omega)\}^* U(y)] ds_y, \end{aligned} \quad (4)$$

где, «*» означает операцию транспонирования, $\Psi(x-y, \omega)$ – матрица фундаментальных решений системы термоупругих колебаний, $\tilde{\Psi}_{kj}(x, \omega) = \Psi_{jk}(-x, \omega)$,

$$\tilde{R}(\partial_y, v(y)) = \llbracket \tilde{R}_{kj}(\partial_y, v(y)) \rrbracket_{(n+1) \times (n+1)} = \begin{pmatrix} T & -i\omega v_1 \\ & -i\omega v_2 \\ & \vdots \\ & -i\omega v_n \\ 0 & 0 \dots & \frac{\partial}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

Определение. Матрицей Карлемана задачи (2), (3) называется $(n+1) \times (n+1)$ матрица, $\Pi(y, x, \omega, \sigma)$, зависящая от двух точек y, x и положительного числового параметра σ , удовлетворяющая следующим двум условиям:

$$1) \quad \Pi(y, x, \omega, \sigma) = \Psi(x-y, \omega) + G(y, x, \sigma),$$

где матрица $G(y, x, \sigma)$ удовлетворяет по переменной y системе (1) всюду в области D ;

$$2) \quad \int_{\partial D \setminus S} (|\Pi(y, x, \omega, \sigma)| + |R(\partial_y, v(y))\Pi(y, x, \omega, \sigma)|) ds_y \leq \varepsilon(\sigma),$$

где $\varepsilon(\sigma) \rightarrow 0$ при $\sigma \rightarrow \infty$.

Известно, что для регулярных вектор-функций $v(y)$ и $u(y)$ верна формула:

$$\int_D [v(y)\{B(\partial_y, \omega)u(y)\} - u(y)\{B(\partial_y, \omega)v(y)\}] dy =$$

$$= \int_{\partial D} [v(y) \{R(\partial_y, v(y)) u(y)\} - u(y) \{R(\partial_y, v(y)) v(y)\}] ds_y.$$

Подставляя в это равенство вместо $v(y)$ и $u(y)$ соответственно $G(y, x, \sigma)$ и регулярное решение $U(y)$ системы (2), имеем

$$0 = \int_{\partial D} [G(y, x, \sigma) \{R(\partial_y, v(y)) U(y)\} - \{\tilde{R}(\partial_y, v(y)) \tilde{G}(y, x, \sigma)\}^* U(y)] ds_y \quad (5)$$

Прибавляя (4) и (5) получим

Теорема 1. *Всякое регулярное решение $U(x)$ системы (2) в области D определяется формулой*

$$2U(x) = \int_{\partial D} [\Pi(y, x, \omega, \sigma) \{R(\partial_y, v(y)) U(y)\} - \{\tilde{R}(\partial_y, v(y)) \tilde{\Pi}(y, x, \omega, \sigma)\}^* U(y)] ds_y, \quad x \in D \quad (6)$$

где $\Pi(y, x, \omega, \sigma)$ – матрица Карлемана, и $\tilde{\Pi}(y, x, \omega, \sigma) = \Psi(y - x, \omega) + \tilde{G}(y, x, \sigma)$.

С целью построения приближенного решения задачи (2), (3) построим матрицу Карлемана следующим образом:

$$\begin{aligned} \Pi(y, x, \omega, \sigma) &= \|\Pi_{kj}(y, x, \omega, \sigma)\|_{(n+1) \times (n+1)}, \\ \Pi_{kj}(y, x, \omega, \sigma) &= \sum_{q=1}^3 \left\{ (1 - \delta_{k4})(1 - \delta_{j4}) \left(\frac{\delta_{kj}}{2\pi\mu} \delta_{3q} - \alpha_q \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j} \right) + \right. \\ &+ \beta_q \left[i\omega\eta(1 - \delta_{j4}) \frac{\partial}{\partial x_j} - \gamma(1 - \delta_{k4}) \frac{\partial}{\partial x_k} \right] + \delta_{k4}\delta_{j4}\gamma_q \left. \right\} \Phi_n(y, x, \sigma, ik_q), \quad (7) \end{aligned}$$

где

$$C_n K(\sigma x_n) \Phi_n(y, x, \sigma, \lambda) = \frac{\partial^{m-1}}{\partial s^{m-1}} \int_0^\infty \text{Im} \left[\frac{K(\sigma\omega)}{\omega - x_n} \right] \frac{\psi(\lambda u) du}{\sqrt{u^2 + s}}, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \omega &= i\sqrt{u^2 + s} + y_n, \\ C_n &= \begin{cases} (-1)^m \cdot 2^{-m} (n-2)(2m-1)! \pi \omega_n, & n = 2m + 1, m \geq 1 \\ (-1)^{m-1} (n-2)(m-1)! \omega_n, & n = 2m, m > 1, \end{cases} \\ C_2 &= 2\pi, \\ \psi(\lambda u) &= \begin{cases} u J_0(\lambda u), & n = 2m, m \geq 1 \\ \cos \lambda u, & n = 2m + 1, m \geq 1, \end{cases} \end{aligned}$$

$J_0(u)$ – Бесселева функция нулевого порядка,

$$s = \alpha^2 = (x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_{n-1} - y_{n-1})^2.$$

Лемма 1.4. *Матрица $\Pi(y, x, \omega, \sigma)$ заданная формулами (7) и (8) является матрицей Карлемана задачи (2), (3).*

Построим матрицу Карлемана для области типа «шапочки». При этом как в формулах (7) и (8) возьмем $K(\omega) = \exp(\sigma\omega)$.

Положим

$$2U_\sigma(x) = \int_S (\Pi(y, x, \omega, \sigma) \{R(\partial_y, v) U(y)\} - (\tilde{R}(\partial_y, v) \Pi(y, x, \omega, \sigma))^* U(y)) ds_y. \quad (9)$$

Верна теорема

Теорема 2. *Пусть $U(x)$ – регулярное решение уравнение (1) в области D , на части $\partial D \setminus S$ удовлетворяющее условию*

$$|U(y)| + |T(\partial_y, v) U(y)| \leq M, \quad y \in \partial D \setminus S \quad (10)$$

тогда при $\sigma \geq 1$ справедливы следующие оценки:

при $n = 2$

$$|U(x) - U_\sigma(x)| \leq MC_1(\lambda, \mu, x) \sigma \exp(-\sigma x_2), \quad x \in D$$

где

$$C_1(\lambda, \mu, x) = C(\lambda, \mu) \int_a^b \left[\ln(\alpha^2 + x_2^2) + \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + x_2^2}} \right] dy_1,$$

$\alpha = |y_1 - x_1|$, a и b – конечные точки отрезки $\partial D \setminus S$,
при $n > 2$

$$|U(x) - U_\sigma(x)| \leq MC(\lambda, \mu, x) \sigma^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \exp(-\sigma x_n), \quad x \in D$$

где символ $[x]$ – означает целую часть число x , a

$$C(\lambda, \mu, x) = C(\lambda, \mu) \int_{\partial D \setminus S} \frac{ds_y}{r^{n-1}}.$$

Доказательство. По формуле (6) и (9) имеем

$$\begin{aligned} |U(y) - U_\sigma(y)| &\leq \frac{1}{2} \left| \int_{\partial D \setminus S} \left[\Pi(y, x, \omega, \sigma) \{R(\partial_y, v(y)) U(y)\} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \{ \tilde{R}(\partial_y, v(y)) \tilde{\Pi}(y, x, \omega, \sigma) \}^* U(y) \right] ds_y \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\partial D \setminus S} \left(|\Pi| + |R(\partial_y, v(y)) \Pi| \right) \left(|U(y)| + |R(\partial_y, v(y)) U(y)| \right) ds_y. \end{aligned}$$

Теперь на основе (10) и свойства матрицы Карлемана получим требуемое неравенство. Теорема доказана.

Литература

1. Купрадзе В.Д. и др. Трёхмерные задачи математической теории упругости и термоупругости / В.Д. Купрадзе, Т.Г.Гегелия, М.О.Башелейтвили, Т.В. Бурчуладзе. М.: Наука, 1976.-663 с.
2. Лаврентьев М.М. О задачах Кош для уравнения Лапласа // Изв. АН СССР. Сер.математика. -1956. - Т 20.- с.819-842.
3. Ярмухамедов Ш.Я. О задаче Коши для уравнения Лапласа //ДАН СССР. 1977. Т.235. № 2.С.281-283.
4. E. Niyozov, O. I. Makhmudov. The Cauchy problem for the system of the thermoelasticity in E^n . IJMEEngineeringJournal, Vol. 15, No. 1, 2014,81-90 pp.
5. М.А. Алексидзе. Фундаментальные функции в приближенных решениях граничных задач. Москва. 1991., стр. 190-196.

УДК: 517.925.11

ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ, ПРАВАЯ ЧАСТЬ КОТОРОГО СОДЕРЖИТ ЛИНЕЙНЫЕ ЧЛЕНЫ

П.Д.Ходизода, И.Э.Кулмуродов

E-mail: djafar@mail.ru

Аннотация. В Статье «Исследование уравнения правая часть которого содержит линейные члены» изучается локальный фазовый портрет дифференциального уравнения специального вида с параметрами a, b, c, d, k, l, m, n . Опираясь на известные результаты Н.А.Сахарникова, А.Ф.Андреева и одного из авторов даётся исчерпывающее решение вопроса о типе особой точки $O = (0,0)$ в терминах параметров уравнения.

Ключевые слова: система дифференциальных уравнений, особые точки, фазовый портрет, параметр уравнения

The investigation of the equation on the right-hand side of which contains linear terms

Abstract. In this article, the investigation of the equation on the right-hand side of which contains linear terms, we study the local phase portrait of a differential equation of a special form with

parameters and a, b, c, d, k, l, m, n relying on known results on N.A.Sakharovnikov and A.F. Andreev and one of the authors, we give a exhaustive solution of the question of the type of the singular point $O = (0,0)$ in terms of the parameters of equation.

Keywords: system of differential equations, singular points, phase portrait, parameter equations.

O'ng tomonida chiziqli had qatnashgan differensial tenglama

Annotatsiya. Bu maqolada o'ng tomonida chiziqli had qatnashgan differensial tenglama tekshiriladi. Parametrlari a, b, c, d, k, l, m, n bo'lgan bir maxsus differensial tenglamaning lokal fazali "kartinasi" o'rganiladi. N.A.Saxarnikov, A.F.Andreev va avtorlarning birini ma'lum natijalaridan foydalanib $O = (0,0)$ maxsus nuqta tipi masalasi hal qilingan. Natijalar parametrlar orqali beriladi.

Kalit so'zlar: differensial tenglamalar sistemasi, yakka nuqtalar, faza kartinasi, parametr tenglamalar.

Статья посвящена качественному исследованию одного класса вещественных автономных систем дифференциальных уравнений на плоскости в окрестности изолированной точки покоя $O = (0,0)$.

Ранее в работах [3,4] изучалась система

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a(1 + e(x, y))x^k + b(1 + f(x, y))y^l, \\ \dot{y} &= c(1 + g(x, y))x^m + d(1 + h(x, y))y^n\end{aligned}$$

с нелинейной и в общем случае неоднородной главной частью

$$\dot{x} = ax^k + by^l, \quad \dot{y} = cx^m + dy^n \quad (1)$$

При этом за исходное принимается следующее

Предложение 1. 1) k, l, m, n – натуральные числа, большие 1. 2) a, b, c, d – вещественные постоянные, $|a| + |b| \neq 0$, $|c| + |d| \neq 0$, 3) $O = (0,0)$ – изолированная точка покоя системы (2). 4) Функции e, f, g, h удовлетворяют условию Липшица в некоторой окрестности точки 0 и исчезают в этой точке.

Наряду с системами (1) и (2) в вышеуказанных работах рассматриваются дифференциальные уравнения их траектории в фазовых координатах.

В этой работе мы рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax^k + by^l}{cx^m + dy^n} \quad (2)$$

Если все числа k, l, m, n равны 1, то топологическая структура особой точки $O(0,0)$ известна (классификация Пуанкаре). Допустим, что не все числа k, l, m, n равны 1. Составим матрицу A из линейных членов системы (1). Пусть Δ – определитель этой матрицы.

1. $\Delta \neq 0$ а) собственные числа матрицы A отличны от чисто мнимых. Уравнение (2) может иметь вид

$$1) \frac{dy}{dx} = \frac{ax + by}{cx + dy^n}, bc \neq 0, n > 1. \quad 2) \frac{dy}{dx} = \frac{ax + by}{cx^m + dy}, ad \neq 0, m > 1.$$

$$3) \frac{dy}{dx} = \frac{ax + by^l}{cx + dy}, ad \neq 0, l > 1. \quad 4) \frac{dy}{dx} = \frac{ax^k + by}{cx + dy}, bc \neq 0, k > 1.$$

$$5) \frac{dy}{dx} = \frac{ax + by^l}{cx^m + dy}, ad \neq 0, l > 1, m > 1; \quad 6) \frac{dy}{dx} = \frac{ax^k + by}{cx + dy^n}, bc \neq 0, k > 1, n > 1$$

Качественная картина в этих случаях определяется линейными членами.

б) собственные числа матрицы A чисто мнимы. Значит $\Delta > 0, b + c = 0$. Следовательно $c = -b, b^2 + ad < 0$. Значит общий вид уравнения с чисто мнимыми собственными числами следующий

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by^l}{cx^m + dy}, l > 1, m > 1, ad < 0.$$

Запишем это уравнение в виде $\frac{dy}{dx} = \frac{-x + by^l}{\lambda^2 y + cx^m}$, и пусть $\lambda = 1, l = m = p, \frac{dy}{dx} = \frac{-x + by^l}{y + cx^m}$. Точка 0 для уравнения (2) центр или фокус.

Из работы [6] известно, что если $b + c = 0$, то 0 – центр. Для чётного p в этой статье даётся ещё одно достаточное условие центра: $b - c = 0$, кроме того, по признаку Пуанкаре-

Ляпунова в $bc = 0$ также является условием центра для чётного p , т.е. $p -$ нечетное, $b + c = 0$, тогда $0 -$ центр, $p -$ четно, $bc(b^2 - c^2) = 0$, $0 -$ центр.

Докажем, что для нечетного p условие $b + c = 0$ является также необходимыми.

Перейдем в уравнении (2) к полярным координатам

$$\begin{aligned} r \frac{d\varphi}{dr} &= \frac{xY - yX}{xX + yY} = \frac{-x^r + bxy^p - y^r - cx^{py}}{by^{p+1} + cx^{p+1}} \\ r \frac{d\varphi}{dr} &= \frac{-1 + r^{p-1}(bc\cos\varphi \sin^p\varphi - c\cos^p\varphi \sin\varphi)}{r^{p-1}(b \sin^p\varphi + c\cos^{p+1}\varphi)} \\ \frac{d\varphi}{dr} &= \frac{r^p(b \sin^{p+1}\varphi + c\cos^{p+1}\varphi)}{r^p(b \sin^{p+1}\varphi + c\cos^{p+1}\varphi)} \\ \frac{d\varphi}{dr} &= \frac{-1 + r^{p-1}(bc\cos\varphi \sin^p\varphi - c\cos^p\varphi \sin\varphi)}{r^p(b \sin^{p+1}\varphi + c\cos^{p+1}\varphi)} \\ \frac{dr}{d\varphi} &= R_p(\varphi)r^p + R_{2p}(\varphi)r^{2p-1} + \dots \\ R_p(\varphi) &= -b\sin^{p+1}\varphi - c\cos^{p+1}\varphi \end{aligned}$$

Будем искать r в виде ряда

$$r = c + U_p(\varphi)c^p + U_{2p-1}(\varphi)c^{2p-1} + \dots$$

$$\frac{dU_p(\varphi)}{d\varphi} = R_p(\varphi)$$

Используя известные разложения в ряд функции $\cos^k\varphi, \sin^k\varphi$ ($k -$ четно). Проинтегрируем $b \sin^{p+1}\varphi + c\cos^{p+1}\varphi$, получим

$$2^{-(p+1)}C_{\frac{p+1}{2}}(b + c)\varphi + a_{p+1} \sin(p + 1)\varphi + a_{p-1} \sin(p - 1)\varphi + \dots$$

Значит, чтобы $b + c$, что доказывает утверждение.

Аналогично можно рассмотреть более общее уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x + by^p}{\lambda^2y + cx^p} \tag{3}$$

сводя её путём подстановки $\lambda y = y_1, \lambda t = t_1$, предварительно записав последнее уравнение в виде системы:

$$\frac{dx}{dt} = \lambda^2y + cx^p, \quad \frac{dy}{dt} = -x + by^p.$$

Значит, необходимое и достаточное условие центра для уравнения (3) при нечётном будет иметь вид $b + \lambda^{n-1}c = 0$. При $p -$ чётном получаем достаточные условия центра в виде $bc(b + \lambda^{n-1}c)(b - \lambda^{n-1}c) = a$.

Системы с одним нулевым собственным числом и одним ненулевым.

$$\Delta = 0, \quad \lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$$

Уравнение (1) при этих условиях может иметь вид

1. $\frac{dy}{dx} = \frac{y + ax^k}{cx^n + dy^n} \quad k \geq 1, m > 1, n > 1 (k > 1, m > 1, n \geq 1)$
2. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{cx^m + dy^n} \quad m > 1, n \geq 1;$
3. $\frac{dy}{dx} = \frac{y + ax^k}{cx^m} \quad k \geq 1, m > 1;$
4. $\frac{dy}{dx} = \frac{y + ax^k}{dy^n} \quad k \geq 1, n > 1; k > 1, n \geq 1.$
5. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{cx^m} \quad m > 1.$
6. $\frac{dy}{dx} = \frac{ax^k + by^l}{x + dy^n} \quad k \geq 1, l > 1, n > 1 (k > 1, l > 1, n \geq 1)$
7. $\frac{dy}{dx} = \frac{ax^k + by^l}{x} \quad k \geq 1, l > 1;$
8. $\frac{dy}{dx} = \frac{by^l}{x} \quad l > 1.$
9. $\frac{dy}{dx} = \frac{by^l}{x + dy^n} \quad l > 1, n \geq 1;$
10. $\frac{dy}{dx} = \frac{ax^k}{x + dy^n} \quad k \geq 1, n > 1; k > 1, n \geq 1$

Достаточно исследовать первые 5 уравнений, остальные получаются из первых пяти заменой $х$ на y и y на x .

Воспользуемся общей схемой [1] исследования.

Рассмотрим первое уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y + ax^k}{cx^m + dy^n}$$

$$\varphi(x) = cx^m + d(-ax^k)^n$$

$$m < nk, \quad m - \text{четно}$$

$$1) \quad m = nk, \quad m - \text{четно}$$

$$m > nk, \quad nk - \text{четно}$$

Точка 0 – седло-узел.

$$m < nk, \quad m - \text{нечетно}, c > 0$$

$$2) \quad m = nk, \quad m - \text{нечетно}, c + d(-a)^n > 0$$

$$m > nk, \quad nk - \text{нечетно}, d(-a)^n > 0$$

Точка 0 – узел.

$$m < nk, \quad m - \text{нечетно}, c < 0$$

$$3) \quad m = nk, \quad m - \text{нечетно}, c + d(-a)^n < 0$$

$$m > nk, \quad nk - \text{нечетно}, d(-a)^n < 0$$

Точка 0 – седло.

Следующие 4 уравнения частный случай первого. Итак, все случаи одного нулевого собственного числа рассмотрены.

$$\Delta = 0, \quad \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$$

Уравнение (1) при этих условиях может иметь вид

$$1. \frac{dy}{dx} = \frac{ax^k + by^e}{y + cx^m} \quad k > 1, l > 1, m > 1; \quad 2. \frac{dy}{dx} = \frac{ax^k + by^e}{y} \quad k > 1, l > 1,$$

$$3. \frac{dy}{dx} = \frac{ax^k}{y + cx^m} \quad k > 1, m > 1; \quad 4. \frac{dy}{dx} = \frac{by^e}{y + cx^m} \quad l > 1, m > 1,$$

$$5. \frac{dy}{dx} = \frac{ax^k}{y} \quad k > 1; \quad 6. \frac{dy}{dx} = \frac{x + by^e}{cx^m + dy^n} \quad l > 1, m > 1, n > 1$$

$$7. \frac{dy}{dx} = \frac{x}{cx^m + dy^n} \quad m > 1, n > 1; \quad 8. \frac{dy}{dx} = \frac{x + by^e}{cx^m} \quad l > 1, m > 1$$

$$9. \frac{dy}{dx} = \frac{x + by^l}{dy^n} \quad l > 1, n > 1; \quad 10. \frac{dy}{dx} = \frac{x}{dy^n} \quad n > 1.$$

Для исследования этих уравнений воспользуемся результатами работы [4].

Рассмотрим первое уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax^k + by^l}{y + cx^m} = \frac{Y(x, y)}{y + X(x, y)}$$

$$y + cx^m = 0, \quad y = -cx^m = F(x)$$

$$Y(x, y) = f(x) + \varphi(x)y + Y_1(x, y)y^2$$

$$f(x) = Y(x, F(x)) = ax^k + b(-c)^m x^{ml}$$

$$\varphi(x) = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \Big|_{y=F(x)}$$

$$\varphi(x) = mcx^{m-1} + lb(-cx^m)^{l-1}$$

$$I. \quad k < ml;$$

$$1) \quad k - \text{четно}; \quad a) \quad k > 2m - 1; \quad b) \quad k < 2m - 1 (\varphi(x) \equiv 0, \text{ т.е. } c = 0)$$

$$2) \quad k - \text{нечетно}, a > 0; \quad 3) \quad k - \text{нечетно}, a < 0$$

$$a) \quad k > 2m - 1, \quad m - \text{нечетно}$$

$$k = 2m - 1, \quad m - \text{нечетно}, \quad m^2 c^2 + 4am \geq 0$$

$$b) \quad k > 2m - 1, \quad m - \text{четно}$$

$$k = 2m - 1, \quad m - \text{четно}, \quad m^2 c^2 + 4am \geq 0$$

$$v) \quad k = 2m - 1, \quad m^2 c^2 + 4am < 0$$

$$k < 2m - 1 \text{ или } \varphi(x) \equiv 0, \text{ т.е. } c = 0$$

$$II. \quad k = ml; 1) \quad k - \text{четно} - \text{седло} - \text{узел}$$

$$2) \quad k - \text{нечетно}, \quad a + b(-c)^m > 0 - \text{седло}$$

$$3) \quad k - \text{нечетно}, \quad a + b(-c)^m < 0 - \text{узел}$$

$$III. \quad k > ml; 1) \quad ml - \text{четно} - \text{седло} - \text{узел}$$

- 2) ml – нечетно, $b(-c)^m > 0$ – седло
 3) ml – нечетно, $b(-c)^m < 0$ – узел

Следующие 4 уравнения – частные случаи первого. Последние 5 уравнений получаются из первых пять заменой x на y и y на x .

Таким образом все случаи двукратного нулевого собственного числа рассмотрены.

Литература

1. А.Ф.Андреев. Особые точки дифференциальных уравнений. Минск, 1979, 136 с.
2. А.Ф.Андреев. Введение в локальную качественную теорию дифференциальных уравнений. Учеб.пособие-СПб.: 2001. 160 с.
3. P.D.Khodi-zade. Local Analysis of a Polynomial System and Its Perturbations journal of differensial equations. 2008. Vol.44, №2. Pp.273-277.
4. П.Д.Ходизода. Схема исследования динамических систем методом Фроммера. Научный вестник СамГУ. 2013, №5. 21-25 с.
5. Н.Б.Хаимов. Уч.зап. Сталинабад. Гос.пед.ин-та, 1952, 2,3, с.3-45.

УДК: 517.9

СВОЙСТВА СТЕПЕННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ.

Х.Ф.Шарипов, Ш.Т.Хусенов

Самаркандский государственный университет

E-mail: sh_xurshid@yahoo.com

Аннотация. Статья посвящена изучению степенных преобразований, которые отчасти разрешает особенности алгебраических кривых и многообразий. В настоящее время разрешение особенностей алгебраических кривых и многообразий является очень актуальным в теории нелинейного анализа.

Ключевые слова. Степенное преобразование, векторные показатели, линейные преобразование, конусы укорочений.

Darajali almashtirishlarning xossalari

Annotatsiya. Ushbu maqolada darajali almashtirishlar o'rganilgan. Darajali almashtirishlar algebraik chiziqlar va ko'pxilliklarning maxsusliklarini hal etishda muhim ahamiyatga ega. Hozirgi vaqtda nohiziqli tahlilda algebraik chiziqlar va ko'pxilliklarni maxsusliklarini yechish dolzarb hisoblanadi.

Kalit so'zlar: darajali almashtirishlar, daraja ko'rsatkichlar, chiziqli almashtirishlar, qisqartma konus.

Qualities of transformation degree

Abstract. The article is dedicated to learning transformation degree which to some extent solves peculiarities of algebraic curves and diversities. Nowadays solving the features of algebraic curves and diversities is very actual in the theory of non-linear analysis.

Keywords: transformation degree, vectorial parameters, unidimensional conversion, truncated cone.

Пусть $\alpha = (\alpha_{ij})$ – квадратная матрица размера n с вещественными элементами α_{ij} и $\det \alpha \neq 0$. Преобразование

$$y_i = x_1^{\alpha_{i1}} \dots x_n^{\alpha_{in}}, i = 1, \dots, n, \quad (1)$$

называется степенным преобразованием с матрицей α . Обратное преобразование

$$x_i = y_i^{\beta_{i1}} \dots y_n^{\beta_{in}}, i = 1, \dots, n, \quad (2)$$

также является степенным преобразованием с матрицей $\beta = (\beta_{ij}) = \alpha^{-1}$. Если ввести векторы $\ln X = (\ln x_1, \dots, \ln x_n)$ и $\ln Y$, то степенные преобразования (1) и (2) суть линейные преобразования этих векторов: $\ln Y = \alpha \ln X$ и $\ln X = \beta \ln Y$.

Отметим некоторые свойства степенного преобразования (1).

1. При преобразовании (1) $X^Q = Y^{\tilde{Q}}$, где

$$\tilde{Q} = \beta^* Q \quad (3)$$

и β^* – транспонированная матрица β . Действительно,

$$X^Q = \langle \ln X, Q \rangle = \exp\langle \beta \ln Y, Q \rangle = \exp\langle \ln Y, \beta^* Q \rangle = Y^{\beta^* Q}.$$

Итак, при степенном преобразовании (1) векторные показатели испытывают линейное преобразование. Это справедливо и для суммы

$$f(X) = \sum f_Q X^Q \text{ по } Q \in S, \tag{4}$$

которая при преобразовании (2) перейдет в сумму

$$f(X) = g(Y) = \sum g_{\tilde{Q}} Y^{\tilde{Q}} \text{ по } \tilde{Q} \in \tilde{S}, \tag{5}$$

где $\tilde{Q} = \beta^* Q, \tilde{S} = \beta^* S, g_{\tilde{Q}} = f_Q$. Геометрическая конструкция множеств S и S' также связаны тем же линейным преобразованием (3). Поэтому при преобразовании (1) укорочение переходит в укорочение, т.е. операция выделения укорочений перестановочна со степенным преобразованием.

2. При преобразовании (1) кривая

$$x_i = b_i \tau^{p_i} (1 + o(1)), i = 1, \dots, n, \tau \rightarrow \infty,$$

с векторным порядком $P = (p_1, \dots, p_n)$ перейдет в кривую

$$y_i = \tilde{b}_i \tau^{\tilde{p}_i} (1 + o(1)), i = 1, \dots, n,$$

с векторным порядком

$$\tilde{P} = \alpha P. \tag{6}$$

Действительно, $\ln X = \ln \tau (P + o(1)), \ln Y = \ln \tau (\tilde{P} + o(1))$ и $\ln Y = \alpha \ln X$, т.е. $\ln \tau (\tilde{P} + o(1)) = \ln \tau (\alpha P + o(1))$. Следовательно, в пространстве \mathbb{R}_*^n порядков P степенное преобразование (1) индуцирует линейное преобразование (6). Это преобразование сопряжено преобразованию (3). Поэтому пространства \mathbb{R}^n и \mathbb{R}_*^n оказываются сопряженными, и скалярное произведение $\langle P, Q \rangle$ сохраняется при степенном преобразовании (1). В частности, конусы укорочений $U_k^{(d)}$ суммы (4) переходят в конусы укорочений $U_k'^{(d)}$ суммы (5). Вообще говоря, все геометрические объекты сопряженных пространств \mathbb{R}^n и \mathbb{R}_*^n испытывают линейные преобразования (3) и (6) и сохраняют все свои линейные свойства.

3. Преобразование (1) взаимно однозначно отображает множество $\{X: 0 < |x_i| < \infty, i = 1, \dots, n\}$ на множество $\{Y: 0 < |y_i| < \infty, i = 1, \dots, n\}$ тогда и только тогда, когда матрица α унимодулярна, т.е. все α_{ij} целые, $\det \alpha = \pm 1$. Действительно, если α унимодулярно тогда существует α^{-1} и α^{-1} тоже будет унимодулярным. Поэтому преобразование (1) будет взаимно однозначным и обратным.

4. Пусть, кроме (1), имеется степенное преобразование

$$z_i = y_1^{\gamma_{i1}} y_2^{\gamma_{i2}} \dots y_n^{\gamma_{in}}, i = 1, \dots, n, \tag{7}$$

с матрицей $\gamma = (\gamma_{ij})$. Тогда координаты Z связаны с координатами X степенным преобразованием с матрицей $\gamma \alpha$, т.е. степенные преобразования образуют группу, а степенные преобразования с унимодулярной матрицей образуют ее подгруппу. Действительно, из (1) вытекает что:

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1^{\alpha_{11}} \dots x_n^{\alpha_{1n}}, \\ y_2 &= x_1^{\alpha_{21}} \dots x_n^{\alpha_{2n}}, \\ &\dots \\ y_n &= x_1^{\alpha_{n1}} \dots x_n^{\alpha_{nn}}. \end{aligned}$$

Эти выражения подставим (7) и получим:

$$\begin{aligned} z_i &= (x_1^{\alpha_{11}} \dots x_n^{\alpha_{1n}})^{\gamma_{i1}} (x_1^{\alpha_{21}} \dots x_n^{\alpha_{2n}})^{\gamma_{i2}} \dots (x_1^{\alpha_{n1}} \dots x_n^{\alpha_{nn}})^{\gamma_{in}} = \\ &= x_1^{\gamma_{i1}\alpha_{11} + \gamma_{i2}\alpha_{21} + \dots + \gamma_{in}\alpha_{n1}} x_2^{\gamma_{i1}\alpha_{12} + \gamma_{i2}\alpha_{22} + \dots + \gamma_{in}\alpha_{n2}} \dots x_n^{\gamma_{i1}\alpha_{1n} + \gamma_{i2}\alpha_{2n} + \dots + \gamma_{in}\alpha_{nn}} = \\ &= x_1^{\beta_{i1}} x_2^{\beta_{i2}} \dots x_n^{\beta_{in}}, i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{cases} \beta_{i1} = \gamma_{i1}\alpha_{11} + \gamma_{i2}\alpha_{21} + \dots + \gamma_{in}\alpha_{n1} \\ \beta_{i2} = \gamma_{i1}\alpha_{12} + \gamma_{i2}\alpha_{22} + \dots + \gamma_{in}\alpha_{n2} \\ \dots \\ \beta_{in} = \gamma_{i1}\alpha_{1n} + \gamma_{i2}\alpha_{2n} + \dots + \gamma_{in}\alpha_{nn} \end{cases}$$

Значит, $\beta = (\beta_{ij}) = \gamma \alpha$

Теперь рассмотрим совокупность многочленов

$$f_i(X) \stackrel{\text{def}}{=} \sum f_{iQ} X^Q \text{ по } Q \in S_i, i = 1, \dots, m, \tag{8}$$

Предположим, что подобные члены в каждом многочлене f_i приведены. Каждому из полиномов f_i ($i = 1, \dots, m$) поставим в соответствие носитель S_i , многогранник Γ_i , укорочения $\hat{f}_{ik_i}^{(d_i)}(X)$, нормальные конусы $U_{ik_i}^{(d_i)}$ и другие объекты. При этом первый нижний индекс i будет указывать на принадлежность объекта к f_i . Совокупность укороченных многочленов

$$\hat{f}_{iP}(X) \stackrel{\text{def}}{=} \sum f_{iQ} X^Q \text{ по } Q \in S_{iP}, i = 1, \dots, m, \tag{9}$$

назовем укорочением совокупности (8) по порядку $P = (p_1, \dots, p_m)$, если для каждого $i = 1, \dots, m$, многочлен $\hat{f}_{iP}(X)$ является укорочением многочлена f_i по порядку P .

Множество Π векторов P в \mathbb{R}_*^n назовем конусом укорочения совокупности (9), если для любого $P \in \Pi$ укорочением по порядку P совокупности (8) является совокупность (9), и наоборот, если (9) — укорочение совокупности (8) по порядку P , то $P \in \Pi$. Конус Π совпадает с нормальным конусом Π некоторой совокупности граничных подмножеств $S_{ik_i}^{(d_i)}$, определенным в § 9 гл. I.[2]. Пусть d_i — размерность укорочения \hat{f}_{iP} в смысле § 3.[2] Размерность укороченной системы (9) — это коразмерность конуса укорочения этой системы, или

$$d = n - \dim \Pi \leq d_1 + d_2 + \dots + d_m.$$

Наряду с системами многочленов (8) и (9) рассмотрим систему уравнений

$$f_i(X) = 0, i = 1, \dots, m, \tag{10}$$

и укороченную систему уравнений

$$\hat{f}_{iP}(X) = 0, i = 1, \dots, m, \tag{11}$$

Здесь рассмотрим преобразования системы уравнений (8), которым в пространстве \mathbb{R}^n показателей степеней Q соответствуют параллельные переносы (для каждого f_i свой) и аффинные преобразования (одно для всех f_i). Эти преобразования делают геометрию показателей степеней более содержательной и дают способ для решения укороченных систем.

Пусть для системы уравнений (8), (10) имеется укороченная система уравнений (9), (11).

Теорема. Если размерность системы (11) равна d , то существует матрица α такая, что степенным преобразованием (1) с матрицей α и подходящими сокращениями эта система приводится к системе m уравнений относительно d переменных. Если в (9) все показатели Q целочисленные, то существует унимодулярная матрица α .

Доказательство. По доказательству теореме 3.1 § 3 гл. II [1], для каждого i найдётся свой вектор T_i такой, что

$$X^{T_i} \hat{f}_i(X) = \hat{g}_i(y_1, \dots, y_d), i = 1, \dots, m.$$

Но это означает, что $X^{T_i} \hat{f}_i(X)$ при степенном преобразовании (1) переходит в систему

$$\hat{g}_i(Y) = \sum \hat{g}_{iQ} Y^Q \text{ по } Q \in \alpha^{*-1}(S + T), i = 1, \dots, m. \tag{12}$$

в которой у всех Q равны нулю компоненты q_{d+1}, \dots, q_n . Следовательно, в сумме (12) координаты y_{d+1}, \dots, y_n встречаются только в нулевой степени, т.е. отсутствуют. Значит, это система приводится к системе m уравнений относительно d переменных. Доказательство окончено.

Пример: $f(X) = x_1 x_2^3 + x_1^3 x_3 + x_2^2 x_3 = 0$

Находим носители $Q_1 = (1,3,0)$, $Q_2 = (3,0,1)$, $Q_3 = (0,2,1)$. Теперь

Находим разностные векторы \bar{Q}_1, \bar{Q}_2 следующим образом

$$\bar{Q}_1 = Q_2 - Q_1 = (2, -3, -1), \quad \bar{Q}_2 = Q_3 - Q_1 = (-1, -1, 1)$$

и составим матрицу $\beta^* = (\bar{Q}_1 \bar{Q}_2 0)$.

$$\beta = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Сделаем элементарное преобразование над строками

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{2R_1+R_2} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Сделаем элементарное преобразование над столбцами

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{2C_3+C_2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-3C_2+C_3} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_1+c_2, -2c_1+c_3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

После элементарных преобразований над строками и столбцами, точно также сделаем элементарные преобразования над строками и столбцами единичную матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2R_1+R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2c_3+c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-3c_2+c_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1+c_2, -2c_1+c_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, мы преобразовали матрицу β к следующему виду

$$\beta = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \gamma \cdot \delta \cdot \gamma_1$$

Значит, если $\gamma \cdot \gamma_1$ обозначим как унимодулярная матрица $-\alpha$, тогда

$$\alpha = \gamma \cdot \gamma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -7 & 5 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

Степенное преобразование приходит к такому виду

$$\begin{cases} x_1 = y_1^3 y_2 y_3^{-2} \\ x_2 = y_1^2 y_2 y_3^{-3} \\ x_3 = y_1^4 y_2^2 y_3^{-5} \end{cases}$$

После такого преобразования, уравнение имеет вид

$$g(Y) = y_1^9 y_2^4 y_3^{-11} + y_1^{13} y_2^5 y_3^{-11} + y_1^8 y_2^4 y_3^{-11} = 0$$

$g(Y) = y_1^8 y_2^4 y_3^{-11} \cdot (y_1 + y_1^4 y_2 + 1) = 0$. Если обе стороны этого равенства делим на моном $y_1^8 y_2^4 y_3^{-11}$, мы получим следующее равенство

$$\hat{g}(Y) = y_1 + y_1^4 y_2 + 1$$

Литература

1. Брюно А.Д. Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. М.: Наука. Физматлит, 1998
2. Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М. Особенности дифференцируемых отображений. Монодромия и асимптотики интегралов. М.: Наука, 1984
3. Брюно. А. Д. Степенные асимптотики решений нелинейных систем // Изв.АН СССР. Сер. матем. 1965. Т. вып. С.329-364.
4. Солеев А.С., Арансон А. Вычисление многогранника и нормальных конусов его граней. Препринт Ин-та прикладной математики им. М.В.Келдышева РАН, Москва, 1994.

УДК 517.51

О ТОЧНЫХ ОЦЕНКАХ НАИЛУЧШИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ФУНКЦИЙ С ВЫПУКЛЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ УСЛОВИЮ ЛИПШИЦА НА КОНЕЧНОМ ОТРЕЗКЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ МНОГОЧЛЕНАМИ.

А. Хатамов, А. Хасанов

*Самаркандский государственный университет*E-mail: Khatamov@rambler.ru

Аннотация. В статье доказаны точные оценки наилучших приближений функций с выпуклыми производными удовлетворяющие условию Липшица на конечном отрезке в равномерной и интегральных метриках алгебраическими многочленами.

Ключевые слова: точная оценка, алгебраический многочлен, наилучшее приближение, выпуклая функция удовлетворяющая условию Липшица, равномерная и интегральные метрики.

Hosilalari qavariq va lipshits shartini qanoatlantiruvchi funksiyalarni algebraik ko'phadlar bilan chekli oraliqda eng yaxshi yaqinlashtirishning aniq baholari haqida.

Annotatsiya. Maqolada hosilalari qavariq va lipshits shartini qanoatlantiruvchi funksiyalarni algebraic ko'phadlar bilan chekli oraliqda tekis va integral mentrikalarda eng yaxshi yaqinlashtirishning aniq baholari isbotlangan.

Kalit so'zlar: aniq baho, algebraik ko'p had, eng yaxshi yaqinlashtirish, qavariq va Lipshits shartini qanoatlantiruvchi funksiya, ko'p hadli yaqinlashtirish, tekis va integral metrikalar.

On the estimates of the best approximations of functions with convex derivativs and satisfying lipshits condition in a finite segment by algebraic polynomials

In article the exact estimates of the best approximations of functions with convex derivativs and satisfying lipshits condition in a finite segment in uniform and integral metrics by algebraic polynomials are proved.

Keywords: exact estimate, algebraic polynomial, the best approximation, a convex function satisfying lipshits condition, uniform and integral metrics.

1. Основные понятия и обозначения. f – вещественная функция на конечном отрезке $\Delta = [a, b]$, $|\Delta| = b - a$, \mathbb{N} - множество натуральных чисел, \mathbb{Z}_+ - множество целых неотрицательных чисел, $L_p(\Delta)$ – квазинормированное пространство всех измеримых относительно n мерной меры Лебега действительных функций на отрезке Δ , суммируемых с p -ой степенью с квазинормой

$$\|f\|_{p,\Delta} := \left(\int_{\Delta} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (0 < p < \infty)$$

$$\|f\|_{p,\Delta} := \text{esssup}\{|f(x)| : x \in \Delta\}$$

Пусть $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, \dots, x_n)\}$ n -мерное евклидово пространство с обычной нормой $\|x\|$ ($n \geq 1$), G – произвольное открытое множество в \mathbb{R}^n , $V(G)$ его n мерный объем, а $|G|$ – диаметр, $L_p(G)$ – пространство всех измеримых действительных функций на G суммируемых с p -ой степенью с квазинормой

$$\|f\|_{p,G} := \left(\int_G |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (0 < p < \infty)$$

$$\|f\|_{p,G} := \text{esssup}\{|f(x)| : x \in G\}$$

При $0 < p \leq \infty$ и $l \in \mathbb{Z}_+$ через $\omega_p^{(l)}(G)$ обозначим изотропное пространство Соболева функций f , имеющих на G обобщенные в смысле Соболева частные несмешанные производные

$D^{(l)}(e)f(D^{(0)}(e)f \equiv f)$ порядка l по направлению каждого n - мерного единичного вектора e и обладающих конечной квази полунормой

$$\|f\|_{p,G} := \sup \left\{ \|D^{(l)}(e)f\|_{p,G} : e \in \mathbb{R}^n, \|e\| = 1 \right\}.$$

При $k \in \mathbb{Z}_+ \Delta^{(k)}(\varepsilon e)f$ обозначает k -ю разность от функции f с шагом $\varepsilon \geq 0$ по направлению вектора e :

$$\Delta^{(0)}(\varepsilon e)f(x) := f(x), \quad \Delta^{(k)}(\varepsilon e)f(x) := \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} C_k^i f(x + i\varepsilon e) \quad (k \geq 1)$$

Если для каждого n - мерного единичного вектора e множество G существует $D^{(l)}(e)f \in L_p(G)$, то определим модули гладкости k -го порядка :

$$\omega_k^{(l)}(f, \delta)_p := \sup \left\{ \sup \left\{ \|\Delta^{(k)}(\varepsilon e)D^{(l)}(e)f\|_{p,G_{k\varepsilon e}} : 0 \leq \varepsilon \leq \delta : e \in \mathbb{R}^n, \|e\| = 1 \right\} \right\}$$

где $k \in \mathbb{Z}_+, l \in \mathbb{Z}_+, 0 < p \leq \infty, \delta \geq 0, G_{k\varepsilon e}$ - подмножество G , состоящее из всех точек $x \in G$, для которых отрезки $[x, x + k\varepsilon e]$ полностью лежат в G .

Если $0 < p \leq \infty$ и при некоторых положительных числах K и α для всех $\delta \geq 0$ имеем $\omega_1^{(l)}(f, \delta)_p \leq K\delta^\alpha$, то будем говорить, что при любом единичном векторе $e D^{(l)}(e)f$ принадлежит классу Гёлдера– Липшица порядка α с константой K метрике $L_p(G)$, и писать $D^{(l)}(e)f \in KH_p^\alpha(G)$

При $N, n \in \mathbb{N}$ через $\mathcal{P}_{N,n}$ обозначим класс всех алгебраических полиномов $g(x) = \sum C_\lambda x^\lambda$ от n переменных степени не выше N , где $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ – мультииндекс с целыми неотрицательными компонентами $\lambda_i, x^\lambda = x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n} C_\lambda$ - действительные числа, а суммирование производится по всем λ , у которых $\lambda_1 + \dots + \lambda_n \leq N$.

При $s, l \in \mathbb{Z}_+, N \in \mathbb{N}$ и $0 < p \leq \infty$ через $E_N^{(s)}(f, G)_p$ обозначим наименьшее уклонение функции $f \in \omega_p^{(l)}(G)$ от полиномов $g \in \mathcal{P}_{N,n}$ по квазиполунорме пространство $\omega_p^{(l)}(G)$ т.е.

$$E_N^{(s)}(f, G)_p := \inf \left\{ \|f - g\|_{\omega_p^{(l)}(G)} : g \in \mathcal{P}_{N,n} \right\} \quad s = 0, 1, \dots, l$$

Положим $E_N(f, G)_p := E_N^{(0)}(f, G)_p, E_N(f, G)_\infty := E_N(f, G)_\infty$.

Через $Conv_n^{(l)}(G)$ обозначим множество всех функций f , для которых при каждом n - мерном единичном векторе $e D^{(l)}(e)f$ непрерывна на G и на непустом пересечении каждой прямой $L \subset \mathbb{R}^n$ с областью G выпукла (вверх или вниз) и

$$M^{(s)}(f, G)_p := \sup \left\{ \|D^{(l)}(e)f\|_{C(G)} : e \in \mathbb{R}^n, \|e\| = 1 \right\} < \infty$$

Положим $M(f, G) := M^{(0)}(f, G)$. При $K = const > 0$ через $Conv_n^{(l)}H^1(G, K)$ обозначим множество всех функций f , имеющих для каждого единичного вектора $e \in \mathbb{R}^n$ производную $D^{(l)}(e)f \in KH_\infty^1(G)$ которая выпукла (вверх или вниз) на непустом пересечении каждой прямой $L \subset \mathbb{R}^n$ с областью G . Пусть $M = const > 0$. Множество всех функции $f \in Conv_n^{(l)}(G)$ удовлетворяющих неравенству $M(f, G) \leq M$, обозначим через $Conv_n^{(l)}(G, M)$. В этих обозначениях верхние и нижние индексы опускаем в случае их равенство нулю и единице соответственно. Положим при $s = 0, 1, \dots, l + 1$

$$E_N^{(s)}\left(Conv_n^{(l)}H^1(G, K) \right)_p := \sup \left\{ E_N^{(s)}(f, G)_p : f \in Conv_n^{(l)}H^1(G, K) \right\}$$

В сюду ниже $C(p_1, p_2, \dots), C_1(p_1, p_2, \dots) \dots$ обозначают положительные величины, зависящие только от параметров, указанных в скобках, а C, C_1, \dots обозначают положительные абсолютные постоянные.

Следующая теорема 1 и лемма 1 и 2 приведены и доказаны в работе [1] А. Хатамова.

Теорема 1. Пусть G - ограниченное множество в $\mathbb{R}^n (n \geq 1), l \in \mathbb{Z}_+, N, n \in \mathbb{N}$ причем $l + k \geq 2, N \geq l + k$. Тогда существует функция $f = f_{N,l,k,G}$ обладающая свойствами.

- 1) $f \in Conv_n^{(l+k+2)}H^1(G, K)$ с константой $K = \left[(l+k)! + \frac{1}{6\pi n} \right] |G|$;
- 2) для всех $s = 0, 1, \dots, l+k$ и $0 < p \leq \infty$ верны оценки

$$E_N^{(s)}(f, \mathcal{G})_p \geq C(n, l, k, s, p, \mathcal{G})N^{-l-k+s}$$

Лемма 1. Для любого $l \in \mathbb{Z}_+$ и любых $N, n \in \mathbb{N}$ функция $f(x) := f_l(x) := x_1^l |x_1|$ такова что $f \in \text{Conv}_n^{(l)} H^1((-1,1)^n, K)$ с константой $K = (l+1)!$ и при $0 < p \leq \infty, s = 0, 1, \dots, l+1$ справедливы оценки

$$E_N^{(s)}(f, (-1,1)^n)_p \geq C(n, l, s, p)N^{-l-1-1/p+s}$$

Доказательство. Так как для любого единичного вектора $e = (e_1, \dots, e_n)$, любого $s \in \mathbb{Z}_+$ и любого $x \in \mathbb{R}^n$

$$D^{(s)}(e)f(x) = \sum_{i_1, \dots, i_s=1}^n e_{i_\tau} \left[\frac{\partial^s f(x)}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_s}} \right] = \frac{e_1^s \partial^s f(x)}{\partial x_1^s} = e_1^s (l+1)l \dots (l-s+2) x_1^{l-s} |x_1|, \quad (1)$$

то отсюда при $s = l$ имеем $D^{(l)}(e)f(x) = e_1^l (l+1)! |x_1|$. Поэтому функция $D^{(l)}(e)f(x)$ выпукла (вверх или вниз) на кубе $(-1,1)^n$ при $e_1 \neq 0$ и $D^{(l)}(e)f(x) \equiv 0$ при $e_1 = 0$. Кроме того, очевидно что $D^{(l)}(e)f \in KH_\infty^1((-1,1)^n)$ с константой $K = (l+1)!$. Следовательно, $f \in \text{Conv}_n^{(l)} H^1((-1,1)^n, (l+1)!)$. Пусть $g \in \mathcal{P}_{N,n}$ любой многочлен. Тогда при $0 < p < \infty$ получаем

$$\begin{aligned} \|f - g\|_{\omega_p^{(s)}((-1,1)^n)} &\geq \sup_{e \in \mathbb{R}^n, \|e\|=1} \left\{ \int_{(-1,1)^{n-1}} dx_2 \dots dx_n \times \right. \\ &\times \inf_{g_1 \in \mathcal{P}_{N,1}} \int_{-1}^1 |e_1^s|^p \left| \frac{\partial^s [f(x) - g_1(x_1)]}{\partial x_1^s} \right|^p dx_1 \Bigg\}^{\frac{1}{p}} \geq 2^{\frac{n-1}{p}} \sup_{e \in \mathbb{R}^n, \|e\|=1} \left\{ |e_1^s| E_N^{(s)}(f, (-1,1)) \right\}_p = \\ &= 2^{\frac{n-1}{p}} E_N^{(s)}(f, (-1,1))_p. \end{aligned} \quad (2)$$

Отсюда при $p \rightarrow \infty$ получим неравенство

$$\|f - g\|_{\omega_\infty^{(s)}((-1,1)^n)} \geq E_N^{(s)}(f, (-1,1))_\infty \quad (3)$$

Известно, что при любом $g \in \mathcal{P}_{N,n}$ и $0 \leq p \leq \infty$ точный порядок убывания $E_N(x_1^q |x_1|, [-1,1])_p$ при $N \rightarrow \infty$ равен $N^{-q-1-1/p}$ (см. [4, стр. 424 и 426])

Так как $(x_1^l |x_1|)^{(s)} = (l+1)l \dots (l-s+2) x_1^{l-s} |x_1|$ (см.(1)), то из сказанного, при $s = 0, 1, \dots, l+1$ и $1 \leq p \leq \infty$ следует что при любом $N \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$E_N^{(s)}(f, [-1,1])_p \geq C(p, l, s)N^{-l-1-\frac{1}{p}+s}$$

Согласно (2) и (3) отсюда получаем утверждение леммы 1.

Через $Q = \{x \in \mathbb{R}^n: a_i < x_i < b_i, i=1, \dots, n\}$ обозначим максимальный по n - мерному объему куб, содержащийся в ограниченном открытом множестве $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n (n \geq 2)$

Лемма 2. Для любого ограниченного открытого множества \mathcal{G} в $\mathbb{R}^n (n \geq 1)$ любого $l \in \mathbb{Z}_+$ функция

$$f(x) := f_{l,\mathcal{G}}(x) = \left(\frac{b_1 - a_1}{2} \right)^{l+1} \left(\frac{2}{b_1 - a_1} x_1 - \frac{b_1 + a_1}{b_1 - a_1} \right)^l \left| \frac{2}{b_1 - a_1} x_1 - \frac{b_1 + a_1}{b_1 - a_1} \right|$$

Такова, что $f \in \text{Conv}_n^{(l)} H^1(\mathcal{G}, K)$ с константой $K = (l+1)!$ и при $1 \leq p \leq \infty, s = 0, 1, \dots, l+1$ имеет место неравенство

$$E_N^{(s)}(f, \mathcal{G})_p \geq C(n, l, k, s, p, \mathcal{G})N^{-l-1-1/p+s}$$

Доказательство. Так же, как и при доказательстве леммы 1, легко показать, что $f \in \text{Conv}_n^{(l)} H^1(\mathcal{G}, K)$ с константой $K = (l+1)!$. Воспользовавшись леммой 1, при $1 \leq p \leq \infty, s = 0, 1, \dots, l+1$ имеем

$$E_N^{(s)}(f, \mathcal{G})_p \geq E_N^{(s)}(f, Q)_p = \inf_{g \in \mathcal{P}_{N,n}} \left\{ \left(\frac{b_1 - a_1}{2} \right)^{l+1-s+\frac{n}{p}} \times \right.$$

$$\begin{aligned} & \times \left\| D^{(l)}(e) \left[y_1^l |y_1| - g \left(\frac{b_1 - a_1}{2} y_1 + \frac{b_1 + a_1}{2} \dots \frac{b_n - a_n}{2} y_n + \frac{b_n + a_n}{2} \right) \right] \right\|_{p, (-1,1)^n} = \\ & = \left(\frac{b_1 - a_1}{2} \right)^{l+1-s+\frac{n}{p}} E_N^{(s)}(f, (-1,1)^n)_p \geq 2^{-l-1-\frac{n}{p}+s} [V(Q)]^{\frac{l+1-s}{n}+\frac{1}{p}} C(n, p, l, s) N^{-l-1-\frac{1}{p}+s} \end{aligned}$$

где $C(n, p, l, s)$ - величина из леммы 1. Лемма 2 доказана.

Из леммы 2 при $n = 1, s = 1$ следует снизу для всех $N \geq l$ теоремы 1.

$$E_N(f, [a, b])_p \geq C(k, p, l, |\Delta|) KN^{-l-1-\frac{1}{p}}$$

Теорема 1 доказана.

Лемма 3. Пусть $\Delta = [a, b]$ конечный отрезок прямой, $k \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{Z}_+$ и $k - l \geq 1, 1 \leq p \leq \infty$ и $f^{(l)} \in L_p(\Delta)$, то для любого числа $\delta \in (0, \infty)$ верна оценка $\omega_k(f, \delta)_p \leq \delta^l \omega_{k-l}(f^{(l)}, \delta)_p$.

Доказательство. Из определения модуля гладкости k -го порядка, из теоремы Лебега о представлении абсолютно непрерывной функции в виде неопределенного интеграла от своей производной с точностью до постоянного слагаемого [2, гл. VI, §4, теоремы 2 и 3] и из обобщенного неравенства Минковского [3, гл. 1, п. 1.3.2, неравенства (1)] имеем

$$\begin{aligned} \omega_k(f, \delta)_p &= \sup_{0 \leq h \leq \delta} \left\| \Delta^{(k)}(h) f(x) \right\|_{p, [a, b-kh]} \\ &= \sup_{0 \leq h \leq \delta} \left\| \Delta^{(k-l)}(h) \int_{[0, h]^l} f^{(l)} \left(x + \sum_{j=1}^l t_j \right) \prod_{j=1}^l dt_j \right\|_{p, [a, b-kh]} \\ &\leq \sup_{0 \leq h \leq \delta} \int_{[0, h]^l} \left\{ \int_a^{b-kh} \left| \Delta^{(k-l)}(h) f^{(l)} \left(x + \sum_{j=1}^l t_j \right) \right|^p dx \right\} \prod_{j=1}^l dt_j = \delta^l \omega_{k-l}(f^{(l)}, \delta)_p \end{aligned}$$

Лемма 3 доказана.

Теорема 2. Пусть l произвольное целое неотрицательное числа, $K = const > 0$ произвольная постоянная и $f \in Conv_1^{(l)} H^1(\Delta, K)$ произвольная функция. Тогда для любого действительного числа $p, 1 \leq p \leq \infty$, любого натурального числа $N \in \mathbb{N}$ имеет место следующее неравенство

$$E_N(f, \Delta)_p \leq C(p, l, k, |\Delta|) KN^{l-1-1/p}$$

Доказательство. Согласно теореме Джексона – Ахиезера – Стечкина для всех $k, N \in \mathbb{N}, 1 \leq p \leq \infty$, и для любого $f \in L_p(\Delta)$ справедливо неравенство

$$E_N(f, \Delta)_p \leq C_1(p, l, k) \omega_k \left(f, \frac{|\Delta|}{N} \right)_p \quad (3)$$

Так как $f \in Conv_1^{(l)} H^1(\Delta, K)$, то функция $f^{(l)}$ выпукла на отрезке Δ и принадлежит классу $Lip_K 1$, по этому $f^{(l+1)}$ на отрезке Δ монотонна и $\|f^{(l+1)}\|_{\infty, \Delta} \leq K$, следовательно, $f^{(l+1)} \in L_p(\Delta)$ для всех $p, 1 \leq p \leq \infty$ и поэтому согласно лемма 3 для $k - l - 1 \geq 1$

$$E_N(f, \Delta)_p \leq C_1(p, l, k) \left(\frac{|\Delta|}{N} \right)^{l+1} \omega_k \left(f^{(l+1)}, \frac{|\Delta|}{N} \right)_p \quad (4)$$

По известному свойству модуля гладкости порядка $k - l - 1$

$$\omega_{k-l-1} \left(f^{(l+1)}, \frac{|\Delta|}{N} \right)_p \leq 2^{k-l-2} \omega_k \left(f^{(l+1)}, \frac{|\Delta|}{N} \right)_p \quad (5)$$

(3, гл.4, п.4.2, неравенство (10)).

Но по определению модуля гладкости функции $f^{(l+1)}$

$$\begin{aligned} \omega \left(f^{(l+1)}, \frac{|\Delta|}{N} \right)_p &\leq \sup_{0 \leq h \leq \delta} \left\| \Delta^{(k-l-1)}(h) f^{(l+1)} \right\|_{p, [a, b-h]} = \sup_{0 \leq h \leq \delta} \left\{ \int_a^{b-h} |f^{(l+1)}(x+h) - f^{(l+1)}(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq (2K)^{1-\frac{1}{p}} \left\{ \int_a^{b-h} |f^{(l+1)}(x+\delta) - f^{(l+1)}(x)| dx \right\}^{\frac{1}{p}} \\ &= (2K)^{1-\frac{1}{p}} \left\{ \int_a^{b-h} |f^{(l+1)}(x+h) - f^{(l+1)}(x)| dx \right\}^{\frac{1}{p}} \\ &= (2K)^{1-\frac{1}{p}} \{ [f^{(l+1)}(x+\delta) - f^{(l+1)}(x)]/a^{b-h} \}^{1/p} \leq 2K\delta^{1/p} \quad (6) \end{aligned}$$

Подставляя в неравенство (4) оценки (5) и (6), получим

$$E_N(f, \Delta)_p \leq C_2(p, l, k) \left(\frac{|\Delta|}{N} \right)^{l+1} \omega_k \left(f^{(l+1)}, \frac{|\Delta|}{N} \right)_p \leq C_2(p, l, k, |\Delta|) KN^{-l-1-1/p}$$

Теорема 2 доказана.

Оценки снизу Теорема 1 показывает точность оценок Теоремы 2 смысле порядка малости наилучших приближений функций $f \in Conv^{(l)}H^1(\Delta, K)$ алгебраическими многочленами степен не выше N .

Литература

1. Хатамов А. Полиномиальные и рациональные приближения функций многих переменных с выпуклыми производными в метриках L_p ($0 < p \leq \infty$). //РАН, Серия тематическая, 1994, Т.58, №1, стр. 167-181.
2. Колмогоров А.Н, Фомин С.В. Элементы теории функции и функционального анализа. М.: Изд-во «Наука», 1972, 496 стр.
3. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теорема вложения. М.: Изд-во «Наука», 1969, 480 стр.
4. Тиман А.Ф. Теория приближения функций действительного переменного. М.: Физматгиз 1960.

UDK: 519.6

BIANALITIK TENGLAMALAR UCHUN FOK-KUNI TEOREMASINING ANALOGI

T.Ishankulov, A.Raximova

E-mail: tolibi@mail.ru, adolatxon@yandex.ru

Annotatsiya. Ushbu maqolada bianalitik tenglama uchun Koshi masalasi yechimining mavjudligi qaraladi va bianalitik funksiyalar uchun Fok-Kuni teoremasi analogi o'ratiladi.

Kalit so'zlar: bianalitik tenglama, Koshi masalasi, Karleman formulalari, yagonalik teoremasi.

Аналог теоремы Фока-Куни для бианалитического уравнения

Аннотация. Рассматривается вопрос существования решения задачи Коши для бианалитического уравнения, устанавливается аналог теоремы Фока-Куни для бианалитических функций.

Ключевые слова: бианалитического уравнения, задача Коши, формула Карлемана, теорема единственности

An analogue of theorem Fok-Cuny for bianalytic equation

Abstract. We consider the question of the existence of solutions of the Cauchy problem bianalytic equation and it is established an analogue of theorem Fok-Cuny for bianalytic equation

Keywords: bianalytic equation, Cauchy problem, formula Carlemans, uniqueness theorem

z kompleks tekisligidagi chegarasi L konturdan iborat bo'lgan sohani qaraymiz. Bunda L haqiqiy o'qning AB kesmasi va haqiqiy o'qdan yuqori yarim tekislikda joylashgan l konturdan iborat. D

sohada f(z) bialitik tenglamani qaraymiz : $\frac{\partial^2 f(z)}{\partial \bar{z}^2} = 0$

Bu tenglama yechimining D soha ichidagi qiymatlarni uning va z bo'yicha hosilasining l konturdagi limitik qiymatlari orqali ifodalash masalasini qaraymiz. Bu masala bialitik tenglama uchun Koshi masalasidan iborat. Analitik funksiyalar uchun qaralayotgan masala Fok-Kuni tomonidan yechilgan[1].

Bu masala yechimi Karleman formulasiga asoslanadi. Shuning uchun oldin Karleman formulasini keltiramiz.

Teorema-1: f(z) funksiya D sohaning ichida bialitik va l gacha uzluksiz bo'lsin. U holda ixtiyoriy z ∈ D uchun

$$f(z) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{e^{-i\tau(t-z)}}{t-z} f(t) dt + \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{e^{-i\tau(t-z)}}{t-z} (\bar{z} - \bar{t}) \frac{\partial f(t)}{\partial \bar{t}} dt \tag{1}$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{f(t)}{t-z} dt + \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{(\bar{z} - \bar{t})}{t-z} \frac{\partial f(t)}{\partial \bar{t}} dt - \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\tau \left[\int_l e^{-i\tau(t-z)} f(t) dt + \int_l e^{-i\tau(t-z)} (\bar{z} - \bar{t}) \frac{\partial f(t)}{\partial \bar{t}} dt \right] \tag{1.a}$$

formular o'rinli.

Isbot. (1) formula (1.a) formulaga ekvivalent formula bo'lganligi uchun, (1) formulani isbotlaymiz.

Bialitik funksiya uchun Koshi integral formulasi o'rinli[2]:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t)}{t-z} dt + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{(\bar{z} - \bar{t})}{t-z} \frac{\partial f(t)}{\partial \bar{t}} dt$$

Bialitik funksiyasini e^{-itz} analitik funksiyaga ko'paytirganda:

$$f(z)e^{-itz} = F(z)$$

funksiya D sohada bialitik va D da uzluksiz bo'ladi. F(z) funksiya Koshi integral formulasiga ko'ra

$$f(z)e^{-itz} = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t)}{t-z} e^{-it\alpha} dt + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{(\bar{z} - \bar{t})}{t-z} e^{-it\alpha} \frac{\partial f(t)}{\partial \bar{t}} dt$$

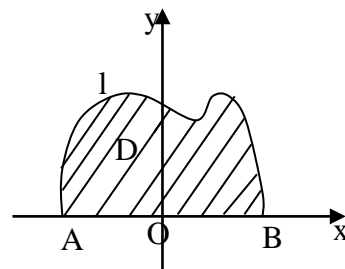
kelib chiqadi. Bu tengsizlikning ikkala tomonini e^{-itz} ga bo'lib, quyidagi tenglikka ega bo'lamiz:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{e^{-i\tau(t-z)}}{t-z} f(t) dt + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{e^{-i\tau(t-z)}}{t-z} (\bar{z} - \bar{t}) \frac{\partial f(t)}{\partial \bar{t}} dt$$

L = l ∪ AB ekanligini inobatga olib oxirgi tenglikni:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{e^{-i\tau(t-z)}}{t-z} f(t) dt + \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{e^{-i\tau(t-z)}}{t-z} (\bar{z} - \bar{t}) \frac{\partial f(t)}{\partial \bar{t}} dt + \frac{1}{2\pi i} \int_{AB} \frac{e^{-i\tau(t-z)}}{t-z} f(t) dt + \frac{1}{2\pi i} \int_{AB} \frac{e^{-i\tau(t-z)}}{t-z} (\bar{z} - \bar{t}) \frac{\partial f(t)}{\partial \bar{t}} dt$$

ko'rinishda yozib olamiz. Oxirgi tenglikning o'ng tomonidagi birinchi va ikkinchi qo'shiluvchilarni tenglikning chap tomoniga o'tkazib, ayirmani baholaymiz:



$$\begin{aligned} & \left| f(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{e^{-i\tau(t-z)}}{t-z} f(t) dt - \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{e^{-i\tau(t-z)}}{t-z} (\bar{z} - \bar{t}) \frac{\partial f(t)}{\partial \bar{t}} dt \right| \leq \\ & \leq \frac{1}{2\pi i} \int_{AB} \left| \frac{e^{-i\tau(\xi-z)}}{\xi-z} \right| |f(\xi)| d\xi + \frac{1}{2\pi i} \int_{AB} \left| \frac{e^{-i\tau(\xi-z)}}{\xi-z} \right| |(\bar{z} - \bar{\xi})| \left| \frac{\partial f(\xi)}{\partial \bar{\xi}} \right| d\xi \leq \\ & \leq \frac{M e^{-\tau y}}{2\pi y} + \frac{M_1 e^{-\tau y}}{2\pi} = \left(\frac{M}{y} + M_1 \right) \frac{e^{-\tau y}}{2\pi} \quad (2) \end{aligned}$$

Bu yerda $M = \max_{\xi \in AB} |f(\xi)|, M_1 = \max_{\xi \in AB} \left| \frac{\partial f(\xi)}{\partial \bar{\xi}} \right|$. (2) tengsizlikdan AB bo'yicha olingan integral moduli

bo'yicha $\left(\frac{M}{y} + M_1 \right) \frac{e^{-\tau y}}{2\pi}$ dan oshmaydi. D sohada $y > 0$ bo'lgani va M_1, M chekli sonlar bo'lgani uchun, (2) tengsizlikning o'ng tomoni $\tau \rightarrow \infty$ da nolga intiladi.

Natijada (1) formula kelib chiqadi.

Endi bianalitik tenglama uchun Koshi masalasi yechimining mavjudligi haqidagi teoremani keltiramiz. Ya'ni bianalitik funksiyalar uchun Fok-Kuni teoremasining analogini o'rnatamiz[3].

Quyidagi belgilashni kiritib olamiz: $f(z) \in A_1(D)$ -D sohada bianalitik funksiya.

2-Teorema: l egri chiziqqa Lipshits shartini qanoatlantiruvchi $C(l) \cap L^1(l)$ sinfga tegishli bo'lgan $\varphi(z)$ va $\varphi_1(z)$ funksiyalar berilgan bo'lsin. U holda D sohada bianalitik $\bar{D} = D \cup L$ uzliksiz differensiallanuvchi bo'gan hamda

$$\begin{aligned} f(z) &= \varphi(z) & z \in l \\ \frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}} &= \varphi_1(z) & z \in l \end{aligned}$$

shartini qanoatlantiruvchi $f(z) \in A_1(D) \cap C^1(D \cup l)$ funksiya mavjud bo'lishi uchun har bir $K \subset \{Imz > 0\}$ kompaktda

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty d\tau \left[\int_l \varphi(t) e^{-i\tau(t-z)} dt + \int_l \varphi_1(t) (\bar{z} - \bar{t}) e^{-i\tau(t-z)} dt \right] \right| \leq \infty \quad (*)$$

integralning tekis yaqinlashishi zarur va yetarli.

Isbot. Zaruriyiligi. Teorema shartiga ko'ra $\varphi(z)$ va $\varphi_1(z)$ (*) shartni qanoatlantirsin. D sohada bianalitik va $\bar{D} = D \cup L$ da uzliksiz differensiallanuvchi bo'lgan, hamda

$$\begin{aligned} f(z) &= \varphi(z) & z \in l \\ \frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}} &= \varphi_1(z) & z \in l \end{aligned}$$

shartlarni qanoatlantiruvchi f funksiya mavjud bo'lsin. U holda (*) dagi integralning har bir $K \subset \{Imz > 0\}$ kompaktda tekis yaqinlashishini ko'rsatishimiz kerak.

$$\int_L e^{-i\tau(t-z)} f(t) dt + \int_L e^{-i\tau(t-z)} (\bar{z} - \bar{t}) \frac{\partial f(t)}{\partial \bar{t}} dt = 0$$

$L = l \cup AB$ bo'lgani uchun oxirgi tenglikni quyidagicha yozib olishimiz mumkin:

$$\int_l e^{-i\tau(t-z)} f(t) dt + \int_l e^{-i\tau(t-z)} (\bar{z} - \bar{t}) \frac{\partial f(t)}{\partial \bar{t}} dt = - \left(\int_{AB} e^{-i\tau(\xi-z)} f(\xi) d\xi + \int_{AB} e^{-i\tau(\xi-z)} (\bar{z} - \bar{\xi}) \frac{\partial f(\xi)}{\partial \bar{\xi}} d\xi \right). \quad (3)$$

Bu yerda ξ AB kesmadagi nuqta. Endi (3) dagi birinchi va ikkinchi integralda

$$\begin{aligned} f(z) &= \varphi(z) & z \in l \\ \frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}} &= \varphi_1(z) & z \in l \end{aligned}$$

almashtirishlarni qo'yib,

$$\int_l \varphi(t) e^{-i\tau(t-z)} dt + \int_l \varphi_1(t) e^{-i\tau(t-z)} (\bar{z} - \bar{t}) dt = - \left(\int_{AB} e^{-i\tau(\xi-z)} f(\xi) d\xi + \int_{AB} e^{-i\tau(\xi-z)} (\bar{z} - \bar{\xi}) \frac{\partial f(\xi)}{\partial \bar{\xi}} d\xi \right). \quad (3)$$

tenglikni hosil qilamiz. Oxirgi tenglikdan

$$\begin{aligned} & \left| \int_l \varphi(t) e^{-i\tau(t-z)} dt + \int_l \varphi_1(t) e^{-i\tau(t-z)} (\bar{z} - \bar{t}) dt \right| \leq \\ & \left| \int_{AB} e^{-i\tau(\xi-z)} f(\xi) d\xi \right| + \left| \int_{AB} e^{-i\tau(\xi-z)} (\bar{z} - \bar{\xi}) \frac{\partial f(\xi)}{\partial \bar{\xi}} d\xi \right| \leq \\ & \leq e^{-\tau \operatorname{Im} z} \left(\int_{AB} |f(\xi)| d\xi + \int_{AB} |(\bar{z} - \bar{\xi})| \left| \frac{\partial f(\xi)}{\partial \bar{\xi}} \right| d\xi \right) \leq \\ & \leq e^{-\tau \operatorname{Im} z} \left(M(b-a) + M_1(b-a) \int_{AB} \sqrt{(\xi-x)^2 + y^2} d\xi \right). \end{aligned}$$

Bundan $K \in \{\operatorname{Im} z > 0\}$ da $\operatorname{Im} z \geq h > 0$ bo'lgani uchun

$$\left| \int_l \varphi(t) e^{-i\tau(t-z)} dt + \int_l \varphi_1(t) e^{-i\tau(t-z)} (\bar{z} - \bar{t}) dt \right| \leq C e^{-\tau \operatorname{Im} z}$$

kelib chiqadi, bu yerda

$$C = M(b-a) + M_1(b-a) \int_{AB} \sqrt{(\xi-x)^2 + y^2} d\xi.$$

Oxirgi tengsizlikdan foydalanib, $z \in K$ bo'lganda (*) integralni baholaymiz: $\operatorname{Im} z = h$ desak

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \left(\int_l \varphi(t) e^{-i\tau(t-z)} dt + \int_l \varphi_1(t) e^{-i\tau(t-z)} (\bar{z} - \bar{t}) dt \right) \leq \\ & \int_0^\infty C e^{-h\tau} d\tau = C \int_0^\infty e^{-h\tau} d\tau = \frac{C}{h} < \infty \end{aligned}$$

Demak (*) integral har bir $K \in \{\operatorname{Im} z > 0\}$ kompaktda tekis yaqinlashar ekan.

Yetarliligi. φ va φ_1 (*) shartni qanoatlantirsin. Endi

$$f(z) = \varphi(z) \quad z \in l \quad \frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}} = \varphi_1(z) \quad z \in l$$

shartni qanoatlantiruvchi $f(z) \in A_1(D) \cap C^1(D \cup l)$ funksiya mavjudligini ko'rsatamiz.

Biz (1.a) formuladagi birinchi integral ostidagi $f(t)$ o'rniga $\varphi(t)$, uning hosilasi o'rniga $\varphi_1(t)$ ni qo'ysak quyidagi tenglikka ega bo'lamiz:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{\varphi(t)}{t-z} dt + \frac{1}{2\pi i} \int_l \varphi_1(t) \frac{(\bar{z}-\bar{t})}{t-z} dt - \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\tau \left[\int_l \varphi(t) e^{-i\tau(t-z)} dt + \int_l \varphi_1(t) e^{-i\tau(t-z)} (\bar{z}-\bar{t}) dt \right] \quad (**)$$

(**) dagi birinchi va ikkinchi qo'shiluvchi l egri chiziqdan tashqarida bianalitik funksiya bo'lib, uning \bar{t} bo'yicha hosilasining l da pastdan va yuqoridan limit qiymatlari ayirmasi mos ravishda $\varphi(t)$ va $\varphi_1(t)$ ga teng. (**) dagi uchinchi qo'shiluvchi (*) ga asosan butun yuqori yarim tekislikda bianalitik funksiyani ifodalaydi. Demak, (**) ifoda D ning ichida biror $F_1(z)$ bianalitik funksiyani va D ning tashqarisida, ya'ni $\{Imz > 0\} \setminus \bar{D}$ da biror $F_2(z)$ bianalitik funksiyani ifodalaydi,

Bu funksiyalarning l dagi limitik qiymatlari ushbu

$$F_1(t) - F_2(t) = \varphi(t), \quad t \in l \quad (4)$$

$$\frac{\partial F_1(t)}{\partial \bar{t}} - \frac{\partial F_2(t)}{\partial \bar{t}} = \varphi_1(t), \quad t \in l \quad (5)$$

shartlarni qanoatlantiradi. Ikkinchi tomondan (1) formulaga asosan $Imz > h_1 = \max_{z \in \bar{D}} Imz$ bo'lganda

$F_2(z) = 0$ va $\frac{\partial F_2(t)}{\partial \bar{t}} = 0$ bo'ladi. Bianalitik funksiyalar uchun yagonalik teoremasiga asosan

$$F_2(z) \equiv 0, \quad z \in \{Imz > 0\} \setminus \bar{D}.$$

U holda (4) va (5) tengliklardan $F_1(t) = \varphi(t)$ va $\frac{\partial F_1(t)}{\partial \bar{t}} = \varphi_1(t)$, $t \in l$ tengliklar kelib chiqadi

Izlanayotgan $f(z)$ funksiya sifatida $F_1(z)$ funksiyani olishimiz mumkin.

Teorema isbotlandi.

Adabiyotlar

1. В.А.Фок,Ф.М.Куни, О введении "гасящей" функции в дисперсионные соотношения Доклады Академии наук СССР 1959,Том 127,№ 6
2. М.Б.Балк,М.Ф.Зуев, О полианалитических функциях, УМН, 1970, Том 25, 203-226
3. Ишанкулов Т. Аналог теоремы Фока-Куни для эллиптической системы первого порядка на плоскости. СамДУ, Ахборотномаси, 1999. - С. 18 - 20.

UDK 519.21

M|G|1|N va GJ|M|1|N - 1 XIZMAT KO'RSATISH TARMOQLARI BANDLIK DAVRI TAQSIMOTLARI UCHUN IKKILANMA MUNOSABAT

H.Qurbonov, Z.Madatova

Annotatsiya. Ishda ikkilanma xizmat ko'rsatish tarmoqlari bandlik davrlari taqsimotlari o'rtasida munosabat o'rnatilgan. Bu munosabat bir tarmoq uchun olingan natijalarni bevosita ikkilanma tarmoqqa o'tkazish imkonini beradi.

Kalit so'zlar: xizmat ko'rsatish tarmog'i, bandlik davri, ikkilanmalik munosabati, ikkilanma xizmat ko'rsatish tarmoqlari.

Соотношение двойственности для распределений периодов занятости систем обслуживания $M|G|1|N$ и $GJ|M|1|N - 1$.

Аннотация. В работе устанавливается соотношение двойственности между распределениями двойственных систем. Это позволяет перенести результатов, полученных для одной системы к двойственной.

Ключевые слова. Система обслуживания, период занятости, соотношение двойственности, двойственные системы обслуживания.

The dual relation for the distributions of busy periods of the queue systems $M|G|1|N$ and $GJ|M|1|N - 1$

Abstract. In the work is established a duality relation between distributions of busy periods of dual systems. It allows to transfer results taken for one system to dual.

Keywords: queue systems, busy period, duality relation, duality relation, dual queue systems.

Quyidagicha aniqlanadigan $F_1 - M|G|1|N$ va $F_2 - GJ|M|1|N - 1$ bir kanalli xizmat ko'rsatish tarmoqlarini qaraymiz:

- 1) F_1 tarmoqda talablarning kelib tushish momentlari orasidagi vaqt uzunliklari va F_2 tarmoqda talablarga xizmat ko'rsatish vaqti uzunliklari bir xil λ parametrli ko'rsatgichli taqsimot funksiyasiga ega;
- 2) F_1 tarmoqda talablarga xizmat ko'rsatish vaqti uzunliklari va F_2 tarmoqda talablarning kelib tushish momentlari orasidagi vaqt uzunliklari o'zaro bog'liq bo'lmagan va bir xil $B(x)$ [$B(+0) = 0$] taqsimot funksiyasiga ega bo'lgan tasodifiy miqdorlarni tashkil etadi;
- 3) Kutish joylari soni F_1 tarmoqda N ga va F_2 tarmoqda $N - 1$ ga teng.

Quyidagi belgilashlarni kiritaylik:

$\xi_1(t)$ va $\xi_2(t)$ mos holda F_1 va F_2 tarmoqlarda t momentda mavjud bo'lgan talablar soni;

ζ_1 va ζ_2 mos holda F_1 va F_2 tarmoqning boshlang'ich bandlik davrlari;

$$\bar{g}^{(j)} = \bar{g}^{(j)}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dP(\zeta_1 < x/\xi_1(0) = j), \quad Re\ s \geq 0,$$

$$\bar{f}^{(j)} = \bar{f}^{(j)}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dP(\zeta_2 < x/\xi_2(0) = j), \quad Re\ s \geq 0,$$

$$\bar{b}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dB(x).$$

[4] va [1] ishlarda $\bar{g}^{(j)}(s)$ va $\bar{f}^{(1)}(s)$ funksiyalarni aniqlovchi funksiyalar keltirilib chiqarilgan. Shuningdek, [3] ishda ζ_1 miqdorning taqsimoti uchun asimptotik ko'rinishlar topilgan. Qaralayotgan ishda $\bar{f}^{(1)}$ va $\bar{g}^{(j)}$ funksiyalar o'rtasida bog'lanish (ikkilanma munosabat) o'rnatiladi. Ushbu munosabat yordamida ζ_1 uchun olingan har qanday natijani ζ_2 ga o'tkazish mumkin bo'ladi.

Teorema. $N \geq 3$ da quyidagi munosabat o'rinli:

$$\begin{aligned} \bar{f}^{(1)} = 1 - s[(s + \lambda)(1 - 2\bar{g}^{(1)} + \bar{g}^{(2)})]^{-1} \cdot \left[1 - \left(1 + \frac{s}{s + \lambda}\right) \bar{g}^{(1)} + \right. \\ \left. + l(s)\bar{g}^{(N-1)} + \left(\frac{s}{s + \lambda}\right)^2 \sum_{k=0}^{N-3} \left(\frac{\lambda}{s + \lambda}\right)^k \bar{g}^{(k+2)} \right], \end{aligned} \tag{1}$$

bu yerda

$$l(s) = \left(\frac{\lambda}{s + \lambda}\right)^{N-1} \cdot \left[\frac{s}{\lambda} - 1 + \bar{b}(s)\right] \cdot \frac{\bar{b}(s + \lambda)}{\bar{b}(s + \lambda) - \bar{b}(s) + 1}.$$

Isbot. [1] ishda $\bar{f}^{(1)}$ uchun ushbu formula keltirib chiqarilgan:

$$\bar{f}^{(1)} = 1 - \frac{sP_{N-1}}{Q_{N-1} - Q_{N-2}}, \quad N \geq 3 \tag{2}$$

bu yerda P_k va Q_k lar

$$\sum_{k=0}^{\infty} v^k P_k = \frac{1}{\bar{b}(s + \lambda - \lambda v) - v} \cdot \frac{1 - \bar{b}(s + \lambda - \lambda v)}{s + \lambda - \lambda v},$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} v^k Q_k = \frac{1}{\bar{b}(s + \lambda - \lambda v) - v}$$

tengliklardan aniqlanadi. Bu tengliklardan

$Q_{N-1} - Q_{N-2} = (s + \lambda)P_{N-1} - \lambda P_{N-2}$
munosabat kelib chiqadi va (2) formulani quyidagicha yozish mumkin:

$$\frac{1 - \bar{f}^{(1)}}{s} = \frac{P_{N-1}}{(s + \lambda)P_{N-1} - \lambda P_{N-2}}. \quad (3)$$

[4] ishda quyidagi formula isbotlangan:

$$\bar{g}^{(j)} = a_{N-j} \cdot a_N^{-1}, \quad j > 0, \quad (4)$$

bu yerda a_k ushbu hosil qiluvchi funksiya orqali aniqlanadi:

$$\sum_{k=0}^{\infty} v^k a_k = \frac{v\bar{b}(s) - \bar{b}(s + \lambda - \lambda v)}{(1 - v)[v - \bar{b}(s + \lambda - \lambda v)]}. \quad (5)$$

Bu tenglikni quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$\frac{(1 - v)^2}{1 - \bar{b}(s)} \sum_{k=0}^{\infty} v^k a_k = \frac{v(1 - v)}{\bar{b}(s + \lambda - \lambda v) - v} + \frac{1 - v}{1 - \bar{b}(s)}. \quad (6)$$

Agar

$$(s + \lambda - \lambda v) \sum_{k=0}^{\infty} v^k P_k = \frac{(1 - v)}{\bar{b}(s + \lambda - \lambda v) - v} - 1$$

tenglik e'tiborga olinsa, (6) dan quyidagi munosabatga ega bo'lamiz:

$$(s + \lambda - \lambda v)v \sum_{k=0}^{\infty} v^k P_k = \frac{(1 - v)^2}{1 - \bar{b}(s)} \sum_{k=0}^{\infty} v^k a_k - \frac{1 - v\bar{b}(s)}{1 - \bar{b}(s)}. \quad (7)$$

Bundan darajali qatorlarning tenglik shartiga ko'ra

$$(s + \lambda)P_{N-1} - \lambda P_{N-2} = \frac{1}{1 - \bar{b}(s)} (a_N - 2a_{N-1} + a_{N-2}) \quad (8)$$

munosabatni hosil qilamiz.

Agar $\left| \frac{v\lambda}{s+\lambda} \right| < 1$ da

$$\frac{1}{s + \lambda - \lambda v} = \frac{1}{s + \lambda} \sum_{k=0}^{\infty} v^k \left(\frac{\lambda}{s + \lambda} \right)^k$$

yoyilma o'rinli ekanligi e'tiborga olinsa, (7) dan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$v \sum_{k=0}^{\infty} v^k P_k = \frac{1}{(s + \lambda)[1 - \bar{b}(s)]} \cdot \left\{ (1 - v)^2 \sum_{k=0}^{\infty} v^k a_k \cdot \right. \\ \left. \cdot \sum_{k=0}^{\infty} v^k \left(\frac{\lambda}{s + \lambda} \right)^k - [1 - v\bar{b}(s)] \sum_{k=0}^{\infty} v^k \left(\frac{\lambda}{s + \lambda} \right)^k \right\}. \quad (9)$$

Bu yerda

$$\sum_{k=0}^{\infty} v^k a_k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} v^k \left(\frac{\lambda}{s + \lambda} \right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} v^k \sum_{k=0}^{\infty} v^k \left(\frac{\lambda}{s + \lambda} \right)^k a_{k-n}$$

tenglik o'rinli bo'lganligi sababli (9) ushbu ko'rinishga keladi:

$$v \sum_{k=0}^{\infty} v^k P_k = \frac{1}{(s + \lambda)[1 - \bar{b}(s)]} \cdot \left\{ (1 - v)^2 \sum_{k=0}^{\infty} v^k c_k - [1 - v\bar{b}(s)] \sum_{k=0}^{\infty} v^k \left(\frac{\lambda}{s + \lambda} \right)^k \right\},$$

bu yerda

$$c_k = \sum_{n=0}^k v^n \left(\frac{\lambda}{s+\lambda}\right)^n a_{k-n}.$$

Bu yerdan v^k ning koeffitsiyentlarini tenglashtirib

$$P_{N-1} = \frac{1}{(s+\lambda)[1-\bar{b}(s)]} \left\{ c_N - 2c_{N-1} + c_{N-2} - \left(\frac{\lambda}{s+\lambda}\right)^{N-1} \left[\frac{\lambda}{s+\lambda} - \bar{b}(s) \right] \right\} \quad (10)$$

tenglikni hosil qilamiz.

Agar

$$c_N - 2c_{N-1} + c_{N-2} = a_n - \left(1 + \frac{s}{s+\lambda}\right) a_{N-1} + \left(\frac{\lambda}{s+\lambda}\right)^2 \sum_{k=0}^{N-2} \left(\frac{\lambda}{s+\lambda}\right)^k a_{N-k-2}$$

munosabat e'tiborga olinsa, (4), (8) va (10) ga ko'ra (2) dan ushbu tenglikga ega bo'lamiz.

$$\frac{1-\bar{f}^1}{s} = [(s+\lambda)(1-2\bar{g}^1+\bar{g}^2)]^{-1} \cdot \left\{ 1 - \left(1 + \frac{s}{s+\lambda}\right) \bar{g}^1 + \left(\frac{s}{s+\lambda}\right)^2 \sum_{k=0}^{N-2} \left(\frac{\lambda}{s+\lambda}\right)^k \bar{g}^{(k+2)} - \left(\frac{\lambda}{s+\lambda}\right)^{N-1} a_N^{-1} \left[\frac{\lambda}{s+\lambda} - \bar{b}(s) \right] \right\}. \quad (11)$$

(5) dana $a_0 = 1$, $a_1 = 1 + [1 - \bar{b}(s)]\bar{b}^{-1}(s+\lambda)$ tengliklar o'rinli ekanligiga ishonch hosil qilish qiyin emas.

Shunday qilib,

$$\frac{1}{a_N} = \frac{a_1}{a_N} \cdot \frac{1}{a_1} = \bar{g}^{N-1} \cdot \left(1 + \frac{1-\bar{b}(s)}{\bar{b}(s+\lambda)}\right)^{-1}.$$

Bunga asosan (11) dan (1) formula hosil bo'ladi.

Adabiyotlar

1. Азларов Т.А., Тахиров А. Случайные процессы и статистические выводы, вып. 4, –Ташкент: Фан, 1974. – С.4-7.
2. Висков О.В., Исмоилов А.И. Система массового обслуживания с ограниченной очередью, Исследования по математической статистике и смежные вопросы, науч. Труды. ТашГУ, вып. 402, 1972. – С.17-29.
3. Harris T.J. The remaining busy period of finite queue, Oper. Res., v19, 1971, 219-233 .
4. Курбанов Х. Переходные явления для распределения периода занятости система массового обслуживания $M|G|1|N$. "Предельные теорема для случайных процессов и статистические выводы", Сб трудов. ИМ АН У₃ССР, 1981.– С.108-122 .

UDK: 517.984

IKKI BOZONLI SISTEMA HAMILTONIANINING STATIONAR HOLATLARI

J.I.Abdullayev, O'.N.Quljonov

Samarqand davlat universiteti

E-mail: jabdullaev@mail.ru, utkir_nq83@mail.ru

Annotatsiya. Ikki bozonli sistemaga mos Shredinger operatori xos qiymatlarining kichik qo'zg'alishdagi asimptotik formulasining birinchi va ikkinchi koeffitsiyentlari topilgan.

Kalit so'zlar: Hamiltonian, ikki bozonli sistema, stationar holatlar, xos qiymat, xos funktsiya, asimptotika, xos qiymatning qo'zg'alishlari.

Стационарные состояния двух бозонных систем Гамильтона

Аннотация. Вычислены первый и второй коэффициенты асимптотики собственного значения оператора Шрёдингера соответствующего системы двух бозонов при малых возмущений.

Ключевые слова: Гамильтониан, система двух бозонов, стационарное состояние, собственное значение, собственная функция, возмущение соответственных значение.

Stationar states of two boson system Hamiltonian

Abstract. There are found the first and second coefficients of asymptotics for every eigenvalues of the Schrodinger operator corresponding to system of two bozons under small perturbation.

Keywords: Hamiltonian, system of two bozons, bound states, eigenvalue, eigenfunction, asymptotic, perturbation.

Masalaning dolzarbligi. Ikki zarrachali uzluksiz Shredinger operatori $H(\lambda) = -\Delta + \lambda V$ ning diskret spektri ko'plab mualliflar tomonidan tadqiq qilingan bo'lib, potensial V ga qo'yilgan shartlar koordinat fazoda berilgan. Masalan, V potensial chekli radiusli shardan tashqarida $|V(x)| \leq C(1+|x|)^{-\alpha}$ shartni qanoatlantirib, $\alpha > 1$ bo'lsa $H(\lambda)$ operator musbat xos qiymatlarga ega emasligi T.Kato tomonidan [1] ishda isbotlangan. $H(\lambda)$ operator manfiy xos qiymatlari sonining chekliligi haqida juda ko'p alomatlar keltirilgan. Masalan, L.D.Faddeev [2] ishda $\alpha > 2$ bo'lganda $H(\lambda)$ operatorning $(-\infty, 0)$ da yotuvchi spektri chekli sondagi chekli karrali xos qiymatlardan iborat ekanligini ko'rsatgan. M.Sh.Birmanning [3] ishida manfiy xos qiymatlar soni chekli bo'lishligining umumiy shartlari keltirilgan.

Panjaradagi ikki zarrachali sistema Hamiltonianining ba'zi spektral xossalari [4] ishda tahlil qilingan. [5] ishda esa ikki o'lchamli panjarada berilgan ikki zarrachali sistema Hamiltonianining kvaziimpuls koordinatalaridan biri $k^{(1)} = \pi$ yoki $k^{(2)} = \pi$ bo'lganda cheksiz ko'p xos qiymatlarga ega ekanligi isbotlangan. Xos qiymatlar uchun asimptotik formula ham [5] ishda keltirilgan.

Xos qiymatlarning sistema to'la kvaziimpuls koordinatalari $k^{(i)} \in O[-\rho, \rho], i = 1, 2, 3$ larga monoton bog'liqligi [6] ishda isbotlangan. Ikki fermionli sistema Hamiltonianining xos qiymatlari soni $N(k)$, $k \in [-\pi, \pi]$ ning $[0, \pi]$ kesmada kamaymovchi funksiya ekanligi [7] ishida ko'rsatilgan. Bundan tashqari, $N(k)$ funksiyaning uzilish nuqtalari topilgan va uning bu uzilish nuqtalaridagi sakrashlari hisoblangan. Bir o'lchamli panjarada ikki zarrachali Shryodinger operatorining xos qiymatlarining qo'zg'alishlari [8] ishda o'rganilgan.

Masalaning qo'yilishi. Ikki bozonli sistema Hamiltoniani \tilde{H}_2 bir o'lchamli panjara Z da quyidan chegaralangan operator bo'lib, u

$$\ell_2^s(Z^2) = \{f \in \ell_2(Z^2) : f(x_1, x_2) = f(x_2, x_1)\}$$

simmetrik Hilbert fazosida

$$\tilde{H}_2 = \tilde{H}_2^0 - \tilde{V}_2$$

formula yordamida beriladi. Bu yerda $\tilde{H}_2^0 = -\frac{1}{2}\Delta \otimes I - \frac{1}{2}I \otimes \Delta$, Δ – ayirmali Laplas operatori bo'lib, u zarraning bir tugundan qo'shni tugunga o'tishini ifodalaydi

$$(\Delta f)(x) = f(x+1) + f(x-1) - 2f(x), \quad f \in \ell_2(Z),$$

\tilde{V}_2 operator zarralarning o'zaro ta'sirini ifodalaydi, ya'ni

$$(\tilde{V}_2 f)(x_1, x_2) = \tilde{v}(x_1 - x_2)f(x_1, x_2), \quad f \in \ell_2^s(Z^2).$$

Bu yerda

$$\tilde{v}(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ a, & |x| = 2 \\ b, & |x| = 4 \\ 0, & \text{qolgan hollarda} \end{cases}$$

a va b lar haqiqiy sonlar bo'lib, $0 \leq b < a \leq 1$ shartlarni qanoatlantiradi.

Aniqlanishiga ko'ra ikki bozonli sistema Hamiltoniani \tilde{H}_2 , simmetrik Hilbert fazosi $\ell_2^s(Z^2)$ da o'z-o'ziga qo'shma chegaralangan operator bo'ladi [7-8].

Kvant mexanikasidan ma'lumki, $H\psi = \lambda\psi$ tenglama Shryodingerning statsionar tenglamasi deyiladi. Agar bu tenglama biror $\lambda \in R$ da ψ yechimga ega bo'lsa, bu ψ holat vaqtga bog'liq bo'lmaydi. Hamiltonianning koordinata ko'rinishidan uning impuls ko'rinishiga o'tish F standart Furye almashtirishi orqali amalga oshiriladi. $H = F\tilde{H}_2F^{-1}$ operator aniqlanish sohasi simmetrik funksiyalarning Hilbert fazosi

$$L_2^s(T^2) = \left\{ f : \int_{T^2} |f(k_1, k_2)|^2 dk_1 dk_2 < \infty, f(k_1, k_2) = f(k_2, k_1) \right\}, \quad T = (-\pi; \pi]$$

bo'lib, u quyidagicha aniqlanadi:

$$(Hf)(k_1, k_2) = (\varepsilon(k_1) + \varepsilon(k_2))f(k_1, k_2) - \frac{1}{2\pi} \int_{T^2} \delta(k_1 + k_2 - s_1 - s_2) v\left(\frac{k_1 - k_2 - s_1 + s_2}{2}\right) f(s_1, s_2) ds_1 ds_2.$$

Bu yerda $\varepsilon(p) = 1 - \cos p$, δ esa Dirakning delta funksiyasi, v funksiya \tilde{v} funksiyaning Furye tasviri, ya'ni

$$(F\tilde{v})(p) = v(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{s \in Z} \tilde{v}(s) e^{ips} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (1 + 2a \cos 2p + 2b \cos 4p).$$

Aniqlanishiga ko'ra v funksiya $T = (-\pi; \pi]$ da aniqlangan haqiqiy qiymatli uzluksiz, juft funksiya bo'ladi. Ma'lumki [6,8,9], H operator $H(k)$, $k \in T$, $k = k_1 + k_2$ operatorlarning to'g'ri integraliga yoyiladi:

$$H = \int_T \oplus H(k) dk.$$

$H(k) = H_0(k) - V$ qatlam operatorlari Shryodinger operatorlari deyiladi. $H_0(k)$ va V operatorlar juft funksiyalarning Hilbert fazosi $L_2^e(T) = \left\{ f : \int_T |f(p)|^2 dp < \infty, f(-p) = f(p) \right\}$ da quyidagicha aniqlanadi:

$$(H_0(k)f)(q) = \varepsilon_k(q) f(q), \quad \varepsilon_k(q) = 2 - 2 \cos \frac{k}{2} \cos q,$$

$$(Vf)(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_T v(q-s) f(s) ds = \frac{1}{2\pi} \int_T (1 + 2a \cos 2(p-q) + 2b \cos 4(p-q)) f(s) ds.$$

$H(k)$ operatorning xos funksiyalari H operatorning bog'langan holatlari sifatida talqin qilinadi va unga mos xos qiymatlar esa shu bog'langan holatlarga mos energiyaning qiymatlari bo'ladi. Shuning uchun $H(k)$ operatorning xos qiymatlarini izlaymiz.

Shredinger operatorining xos qiymatlari. Dastlab ayrim faktlarni keltiramiz. $H_0(k)$ operatorning spektri $[m(k); M(k)]$ kesmadan iborat. Bu yerda $m(k)$ va $M(k)$ sonlar $\varepsilon_k(q)$ funksiyaning mos ravishda eng kichik va eng katta qiymatlari, ya'ni

$$m(k) = \min_{q \in T} \varepsilon_k(q) = 2 - 2 \cos \frac{k}{2}, \quad M(k) = \max_{q \in T} \varepsilon_k(q) = 2 + 2 \cos \frac{k}{2}.$$

V operator o'z-o'ziga qo'shma, kompakt operator bo'lgani uchun uning spektri faqat xos qiymatlardan iborat. Uning xos qiymatlari cheklita bo'lib, ular $0, 1, a$ va b lardir. Muhim spektrning invariantligi haqidagi Veyl teoremasiga ko'ra $H(k)$ operatorning muhim spektri $H_0(k)$ operatorning muhim spektri bilan ustma-ust tushadi, ya'ni $\sigma_{ess}(H(k)) = \sigma_{ess}(H_0(k))$. Endi $H(k) = H_0(k) - V$ operatorning xos qiymatlari bilan qiziqamiz. $H(k)$ operator o'z-o'ziga qo'shma chegaralangan operator bo'lganligi uchun uning xos qiymatlari haqiqiy va biror kesmada yotadi. V musbat operator bo'lganligidan $H(k) = H_0(k) - V$ operatorning barcha xos qiymatlari $(-\infty; m(k)]$ da yotadi, boshqacha aytganda $H(k) = H_0(k) - V$ operator $M(k)$ dan o'ngda yotuvchi xos qiymatlarga ega emas. Shuning uchun $H(k)$ operatorning xos qiymatlariga nisbatan tenglama yozganda $z < m(k)$ deb faraz qilinadi. Dastlab $H(k)$ operatorning xos qiymatlarini $k = \pi$ bo'lganda, ya'ni $H(\pi)$ operatorning xos qiymatlarini izlaymiz. Shu maqsadda xos qiymatlar uchun $H(\pi)f = zf$ tenglamani qaraymiz:

$$2f(p) - \frac{1}{2\pi} \int_T (1 + 2a \cos 2p \cos 2q + 2b \cos 4p \cos 4q) f(q) dq = zf(p). \quad (1)$$

Bu tenglamada

$$c_1 = \frac{1}{2\pi} \int_T f(q) dq, \quad c_2 = \frac{1}{2\pi} \int_T \cos 2q f(q) dq, \quad c_3 = \frac{1}{2\pi} \int_T \cos 4q f(q) dq \quad (2)$$

belgilashlar kiritamiz. U holda (1) tenglamadan

$$f(p) = \frac{c_1 + 2ac_2 \cos 2p + 2bc_3 \cos 4p}{2 - z}$$

ni olamiz. f ning ushbu ifodasini (2) ga qo'yib, c_1, c_2, c_3 larga nisbatan quyidagi chiziqli tenglamalar sistemasiga kelamiz:

$$\begin{cases} (1-z)c_1 = 0 \\ (2-a-z)c_2 = 0 \\ (2-b-z)c_3 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Demak, $H(\pi)$ operator xos qiymati uchun (1) tenglama nolmas yechimga ega bo'lishi uchun (3) sistema nolmas yechimga ega bo'lishi zarur va yetarlidir. (3) sistema nolmas yechimga ega bo'lishi uchun, uning determinanti

$$\Delta(z) = (1-z)(2-a-z)(2-z-b)$$

nol bo'lishi zarur va yetarli. Determinant $\Delta(z)$ ning nollari $z_1 = 1, z_2 = 2 - a, z_3 = 2 - b$ sonlardir. Bu sonlar $H(\pi)$ operatorning xos qiymatlari bo'ladi ([3]) va $f_1(p) = 1, f_2(p) = \cos 2p, f_3(p) = \cos 4p$ lar ularga mos xos funksiyalardir. Bundan tashqari $z = 2$ soni $H(\pi)$ operatorning cheksiz karrali xos qiymati bo'lib, unga mos xos funksiyalar quyidagi $f_n(p) = \cos np, n \in N \setminus \{2, 4\}$ ko'rinishda bo'ladi.

Bizning asosiy maqsadimiz $H(\pi)$ operator xos qiymatlarining kvaziimpuls k ning π nuqta atrofida kichik qo'zg'algandagi chetlanishlarini tekshirishdan iborat, ya'ni $k = \pi - 2\beta, \beta \in R$ bo'lganda $H(k)$ operator xos qiymatlarini "qo'zg'almas" $H(\pi)$ operator xos qiymatlaridan qanchalik chetlanishini tekshirishdan iborat. Qo'zg'alishlar nazariyasining asosiy teoremlaridan biri bo'lgan Kato-Rellix teoremasini keltiramiz, qaysikim keyinchalik biz bu teoremdan foydalanamiz.

Teorema (Kato-Rellix [9]). Faraz qilaylik, z_0 soni B operatorning yakkalangan oddiy xos qiymati bo'lsin. U holda yetarlicha kichik $\beta \in R$ lar uchun $T(\beta) = B - \beta W$ operator yagona oddiy $z_0(\beta)$ xos qiymatga ega bo'ladi. Bu xos qiymat $U_\delta(z_0) = \{z \in C : |z - z_0| < \delta\}$ atrofda yotadi va $\beta = 0$ nuqtaning atrofida analitik. $z_0(\beta)$ xos qiymat $\beta = 0$ nuqtaning atrofida quyidagicha darajali qatorga yoyiladi

$$z_0(\beta) = z_0 - \frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \beta^n}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \beta^n} = z_0 - \sum_{n=1}^{\infty} c_n \beta^n.$$

Agar $T(\beta)$ o'z-o'ziga qo'shma operator bo'lsa, u holda Reley-Shryodinger koeffitsiyentlari deb ataluvchi a_n va b_n lar quyidagi formulalar yordamida aniqlanadi

$$a_n = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\varepsilon} (\varphi_0, [W(B-zI)^{-1}]^n \varphi_0) dz, \quad n \in N,$$

$$b_n = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\varepsilon} (\varphi_0, (B-zI)^{-1} [W(B-zI)^{-1}]^n \varphi_0) dz, \quad n \in N. \quad (4)$$

Bu yerda $\varepsilon > 0$ soni shunday tanlanganki, $|z - z_0| < \varepsilon$ doira o'z ichiga $T(\beta)$ operatorning yagona $z_0(\beta)$ xos qiymatini oladi. φ_0 esa B operatorning z_0 xos qiymatiga mos keluvchi normallangan xos funksiyai.

Endi $H(\pi - 2\beta)$ operatorni quyidagi ko'rinishda tasvirlab olamiz:

$$H(\pi - 2\beta) = H(\pi) - \sin \beta W$$

Bu yerda $(Wf)(p) = 2 \cos pf(p)$. Bizga $H(\pi)$ operatorning xos qiymatlari ma'lum. Kato-Rellix teoremasiga ko'ra β ning kichik qiymatlarida $H(\pi - 2\beta) = H(\pi) - \sin \beta W$ operatorning xos qiymatlari $z_1 = 1$, $z_2 = 2 - a$, $z_3 = 2 - b$ nuqtalar atrofida yotadi va ular β parametrga analitik bog'liq bo'ladi. Biz bu xos qiymatlarni β^2 aniqligida topishga harakat qilamiz. Agar $0 < b < a < 1$ deb faraz qilsak $H(\pi)$ operatorning $z_1 = 1$, $z_2 = 2 - a$, $z_3 = 2 - b$ xos qiymatlari oddiy bo'ladi.

$H(\pi)$ operator oddiy xos qiymati $z_3 = 2 - b$ ning kichik qo'zg'alishlardagi holatini o'rganamiz. Qo'zg'alishlar nazariyasining umumiy teoremasi (Kato-Rellix) ga ko'ra $H(\pi - 2\beta)$ operatorning $z_3 = 2 - b$ nuqta atrofida yagona oddiy xos qiymati mavjud va u β parametrga analitik bog'liq. Quyidagi teorema $H(\pi - 2\beta)$ operatorning $z_3(\beta) = 2 - b - x\beta - y\beta^2 + o(\beta^2)$ xos qiymatini birinchi va ikkinchi (x va y) koeffitsiyentlarini topishga bag'ishlangan.

1-teorema. Parametr β ning yetarlicha kichik qiymatlarida $H(\pi - 2\beta) = H(\pi) - \sin \beta W$ operatorning $z_3 = 2 - b$ nuqta atrofida yagona oddiy $z_3(\beta)$ xos qiymati mavjud bo'lib, uning uchun quyidagi asimptotik formula o'rinli:

$$z_3(\beta) = 2 - b - \frac{2}{b} \beta^2 + o(\beta^2), \quad \beta \rightarrow 0.$$

Isbot. Kato-Rellix teoremasiga ko'ra, $z_3(\beta)$ xos qiymat uchun

$$z_3(\beta) = z_3 - \sum_{n=1}^{\infty} c_n \beta^n$$

ni yozishimiz mumkin. Biz $z_3(\beta)$ xos qiymatni β^2 aniqlikda hisoblaymiz. Buning uchun Reley-Shryodinger qatorining a_1, a_2, b_1 koeffitsiyentlarini topish yetarli, chunki

$$c_1 = a_1, \quad c_2 = a_2 - a_1 b_1. \quad (5)$$

a_n va b_n koeffitsiyentlarni topish uchun $(\varphi_0, [W(H(\pi) - z)^{-1}]^n \varphi_0)$, $\varphi_0 = \frac{\cos 4p}{\sqrt{\pi}}$ skalyar ko'paytmani hisoblashimiz kerak. Bu skalyar ko'paytma barcha toq natural sonlar uchun nolga teng, ya'ni

$$(\varphi_0, [W(H(\pi) - zI)^{-1}]^{2n-1} \varphi_0) = 0, \quad \forall n \in N.$$

(4) ga asosan ixtiyoriy $n \in N$ uchun $a_{2n-1} = 0$ kelib chiqadi.

$$(\varphi_0, (H(\pi) - zI)^{-1} [W(H(\pi) - zI)^{-1}]^{2n-1} \varphi_0) = \frac{1}{z_3 - z} (\varphi_0, [W(H(\pi) - zI)^{-1}]^{2n-1} \varphi_0) = 0, \quad \forall n \in N$$

tenglikdan va (4) dan esa $b_{2n-1} = 0$ ni olamiz. Demak, ixtiyoriy $n \in N$ uchun $c_{2n-1} = 0$ ekan. Murakkab bo'lmagan hisoblashlar ko'rsatadiki,

$$(\varphi_0, [W(H(\pi) - zI)^{-1}]^2 \varphi_0) = \frac{2}{(z_3 - z)(2 - z)}.$$

Bu tenglikni ikkala tomonini $(-2\pi)^{-1}$ ga ko'paytiramiz va $|z - z_3| = \varepsilon$ aylana bo'yicha integrallaymiz, u holda $a_2 = \frac{2}{b}$ kelib chiqadi. (5) tengliklardan $c_1 = 0$,

$c_2 = a_2$ tengliklar kelib chiqadi. Teorema isbotlandi.

Qo'zg'alishlar nazariyasining asosiy teoremlari oddiy xos qiymatlar uchun keltirilgan. O'z-o'ziga qo'shma operatorning karrali xos qiymatlari uchun qo'zg'alishlar nazariyasi teoremlari asosan mavjudlik haqida bo'lib, ularning asimptotik holatlari yaxshi o'rganilmagan. Shuning uchun masalani soddalashtirish maqsadida $a = 1, b = 0$ deb faraz qilamiz. Bu holda $H(\pi)$ operatorning $z = 1$ xos qiymati ikki karrali bo'ladi. Quyidagi teorema $H(\pi - 2\beta)$ operatorning $z = 1$ nuqta atrofida yotuvchi xos qiymatlarining asimptotikasi haqidadir.

2-teorema. Faraz qilaylik $a = 1, b = 0$ bo'lsin. U holda shunday $\delta > 0$ son mavjud bo'lib, barcha $\beta \in (0, \delta)$ larda $H(\pi - 2\beta)$ operator $z_1 = 1$ nuqta atrofida ikkita oddiy xos qiymatga ega va ular uchun quyidagi asimptotik formulalar o'rinli:

$$z_1^{(1)}(\beta) = 1 - (2 + \sqrt{2})\beta^2 + o(\beta^2), \quad z_1^{(2)}(\beta) = 1 - (2 - \sqrt{2})\beta^2 + o(\beta^2).$$

Isbot. $H(\pi - 2\beta)$ operator xos qiymati uchun

$$(2 - 2 \sin \beta \cos p) f(p) - \frac{1}{2\pi} \int_T (1 + 2 \cos 2p \cos 2q) f(q) dq = z f(p)$$

tenglamani qaraymiz. Bu tenglama (2) belgilashlarda quyidagi ko'rinishni oladi:

$$(2 - 2 \sin \beta \cos p) f(p) - c_1 - 2c_2 \cos 2p = z f(p).$$

Bundan esa

$$f(p) = \frac{c_1 + 2c_2 \cos 2p}{2 - z - 2 \sin \beta \cos p} = \frac{1}{2 - z} \cdot \frac{c_1 + 2c_2 \cos 2p}{1 - \frac{2 \sin \beta}{2 - z} \cos p}$$

ga kelamiz. Teoremada ko'rsatilgan $\delta > 0$ ni shunday tanlash mumkinki, barcha $\beta \in (0; \delta)$ va

$$p \in T \text{ larda } \left| \frac{2 \sin \beta}{2-z} \cos p \right| < 1 \text{ bo'ladi va } \sin \beta \square \beta \text{ ekanligidan}$$

$$f(p) = (c_1 + 2c_2 \cos 2p) \left\{ \frac{1}{2-z} + \frac{2\beta \cos p}{(2-z)^2} + \frac{4\beta^2 \cos^2 p}{(2-z)^3} + \frac{8\beta^3 \cos^3 p}{(2-z)^4} + \frac{16\beta^4 \cos^4 p}{(2-z)^5} + o(\beta^4) \right\}$$

ga ega bo'lamiz. $f(p)$ funksiyaning topilgan ushbu ifodasini (2) belgilashlardagi c_1 va c_2 larga qo'yamiz va quyidagi chiziqli bir jinsli tenglamalar sistemasiga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} \left((2-z)^5 - (2-z)^4 - 2(2-z)^2 \beta^2 - 6\beta^4 \right) c_1 - \left(2(2-z)^2 \beta^2 + 8\beta^4 \right) c_2 = 0 \\ \left(-(2-z)^2 \beta^2 - 4b\beta^4 \right) c_1 + \left((2-z)^5 - (2-z)^4 - 2(2-z)^2 \beta^2 - 7\beta^4 \right) c_2 = 0 \end{cases} \quad (6)$$

Bu sistemaga mos determinantni tuzamiz:

$$\Delta(z; \beta) = \begin{vmatrix} (2-z)^5 - (2-z)^4 - 2(2-z)^2 \beta^2 - 6\beta^4 & -2(2-z)^2 \beta^2 - 8\beta^4 \\ -(2-z)^2 \beta^2 - 4b\beta^4 & (2-z)^5 - (2-z)^4 - 2(2-z)^2 \beta^2 - 7\beta^4 \end{vmatrix} \quad (7)$$

Algebra kursidan ma'lumki, chiziqli bir jinsli tenglamalar sistemasi nolmas yechimga ega bo'lishi uchun uning asosiy determinant nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir, ya'ni $\Delta(z; \beta) = 0$. (7) ga ko'ra $\Delta(z; \beta)$ determinant β ning faqat juft darajalariga bog'liqligi va analitikligi sababli $H(\pi - 2\beta)$ operatorning xos qiymatini quyidagi ko'rinishda izlaymiz:

$$z_1(\beta) = 1 - x\beta^2 + o(\beta^2), \quad x \in \mathbf{R} \quad (8)$$

$z_1(\beta)$ ning (8) ifodasini (7) ga qo'ysak, $\Delta(z; \beta)$ quyidagicha bo'ladi:

$$\Delta(\beta) = \left((x-2)^2 - 2 \right) (1-b) \beta^4 + o(\beta^4) = 0.$$

Endi β^4 oldidagi koeffitsiyentni nolga tenglashtirib, $(1-b) < 0$ ekanligini hisobga olsak

$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{2}$ ga kelamiz. Demak, $H(\pi - 2\beta)$ operatorning xos qiymatlari

$$\begin{aligned} z_1^{(1)}(\beta) &= 1 - (2 + \sqrt{2})\beta^2 + o(\beta^2) \\ z_1^{(2)}(\beta) &= 1 - (2 - \sqrt{2})\beta^2 + o(\beta^2) \end{aligned} \quad (9)$$

ko'rinishda bo'ladi.

Ma'lumki, $z_1 = 1$ soni $H(\pi)$ operator uchun ikki karrali xos qiymat edi. Demak, kichik qo'zg'alishlarda bu xos qiymat ikkita oddiy $z_1^{(1)}(\beta)$ va $z_1^{(2)}(\beta)$ xos qiymatlarga ajraladi, ya'ni β ning kichik qiymatlarida $H(\pi - 2\beta)$ operatorning $z_1 = 1$ nuqta atrofida ikkita $z_1^{(1)}(\beta)$ va $z_1^{(2)}(\beta)$ oddiy xos qiymatlari mavjud.

Bu xos qiymatlarga mos xos funksiyalarni topamiz. $z_1^{(1)}(\beta)$ va $z_1^{(2)}(\beta)$ larning (9) ifodalarini (6) sistemaga qo'yib, $c_1 = \sqrt{2}c_2$ va $c_1 = -\sqrt{2}c_2$ munosabatlarni olamiz, u holda $z_1^{(1)}(\beta)$ va $z_1^{(2)}(\beta)$ xos qiymatlarga mos xos funksiyalar uchun quyidagi ko'rinishni olamiz:

$$f_1^{(1)}(p) = c_2 \left(\sqrt{2} + 2 \cos 2p \right) \left(\frac{1}{2 - z_1^{(1)}(\beta)} + \frac{2\beta \cos p}{(2 - z_1^{(1)}(\beta))^2} + \frac{4\beta^2 \cos^2 p}{(2 - z_1^{(1)}(\beta))^3} + o(\beta^2) \right) \quad (10)$$

$$f_1^{(2)}(p) = c_2 \left(-\sqrt{2} + 2 \cos 2p \right) \left(\frac{1}{2 - z_1^{(2)}(\beta)} + \frac{2\beta \cos p}{(2 - z_1^{(2)}(\beta))^2} + \frac{4\beta^2 \cos^2 p}{(2 - z_1^{(2)}(\beta))^3} + o(\beta^2) \right) \quad (11)$$

$\frac{1}{2 - z_1^{(1)}(\beta)}$ va $\frac{1}{2 - z_1^{(2)}(\beta)}$ ifodalarni mos ravishda $\frac{1}{2 - z_1^{(1)}(\beta)} = 1 - (2 + \sqrt{2})\beta^2 + o(\beta^2)$ va $\frac{1}{2 - z_1^{(2)}(\beta)} = 1 - (2 + \sqrt{2})\beta^2 + o(\beta^2)$ shakllarda ifodalaymiz hamda ularni (10) va (11) larga qo'yib, $f_1^{(1)}(p)$ va $f_1^{(2)}(p)$ xos funksiyalar uchun quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$f_1^{(1)}(p) = c_2 \left(\sqrt{2} + 2 \cos 2p + 2\beta \cos p \left(\sqrt{2} + 2 \cos 2p \right) + 2\beta^2 \cos 4p + o(\beta^2) \right),$$

$$f_1^{(2)}(p) = c_2 \left(-\sqrt{2} + 2 \cos 2p + 2\beta \cos p \left(-\sqrt{2} + 2 \cos 2p \right) + 2\beta^2 \cos 4p + o(\beta^2) \right)$$

Adabiyotlar

1. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. – Москва: Мир, 1972.
2. Фаддеев Л.Д. О разложении произвольных функций по собственным функциям оператора Шредингера. Вестник ЛГУ. № 7. Выпуск-2. 1957. ст.147-166.
3. Бирман М.Ш. О числе собственных значений в задаче квантового рассеяния. Вестник ЛГУ. № 13. Выпуск-3. 1961. ст.163-166.
4. P.P.A. Faria da Viegа, L.Ioriatti and M.O'Carrol. Energy-momentum spectrum of some two-particle lattice Schrodinger Hamiltonian. Phys. Rev. 2002. E(3) 66, 016130, 9 pp.
5. Абдуллаев Ж.И., Собственные значения двухчастичного оператора Шредингера на двумерной решетке, Узбекский Математический Журнал, № 1, 2005. ст.3-11.
6. Абдуллаев Ж.И., Монотонность собственных значений двухчастичного оператора Шредингера на решетке, ДАН РУз, 2005, № 2, ст.11-16.
7. Абдуллаев Ж.И. Связанные состояния системы двух фермионов на одномерной решетке. Теоретическая и математическая физика. 2006. Том-147, № 1. ст.36-47.
8. Абдуллаев Ж.И. Теория возмущений для двухчастичного оператора Шредингера на решетке. Теоретическая и математическая физика. 2005. Том-145, № 1, ст.212-220.
9. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Том-4, Анализ операторов. – Москва: Наука, 1982.

УДК: 593.3

УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЯ ВЯЗКОУПРУГОЙ ПЛАСТИНКИ

Р.И.Халмурадов

Самаркандский государственный университет

Аннотация. Выведены уравнения нестационарных колебаний пластинки из вязкоупругого материала, связь между напряжениями и деформациями которого задана в виде интегральных соотношений Больцмана-Вольтерра. Предполагается, что коэффициент Пуассона материала пластинки в общем случае не постоянен и пластинка удовлетворяет всем трем гипотезам Кирхгофа. Полученные уравнения колебания в частных случаях переходят в известные уравнения колебания и равновесия упругой пластинки.

Ключевые слова: вязкоупругость, гипотеза, деформация, колебание, напряжение, пластинка.

Qovushoq- elastic plastinka tebranishlari tenglamalari

Annotatsiya. Maqolada to'rtburchakli qovushoq-elastik plastinkaning nostatsionar tebranishlari tenglamalari keltirib chiqarilgan. Bunda materialning Poisson koeffitsiyenti, umumiy holda, o'zgaruvchan hamda kuchlanishlar va deformatsiyalar orasidagi bog'lanishlar Boltzman-Volterrin tegral munosabatlari bilan berilgan deb hisoblanadi. Chiqarilgan tebranish tenglamalari, xususiyl hollarda elastic plastinkalar uchun ma'lum bo'lgan harakat va muvozanat tenglamalariga o'tadi.

Калит so'zlar: plastinka, tebranish, qovushoq-elastik, kuchlanish, deformatsiya, gipoteza

Vibration equations of viscoelastic plate

Abstract. Non-stationary vibration equations of viscoelastic plate are derived, relations between stresses and deformations are given in the Boltzmann- Voltaire's integral form. It is supposed that the Poisson's coefficient of the plate material generally is not constant; also the plate satisfies to all three Kirchhoff's hypothesis. In particular cases received vibration equations pass into known vibration and equilibrium equations of elastic plate.

Keywords: plate, vibration, viscoelastic, load, deformation, hypothesis

Введение. В различных областях техники и строительства широко применяются тонкостенные оболочки и пластинки. При этом во многих случаях динамические расчеты пластин основываются на классические теории, опирающихся на гипотезы Кирхгофа [1,2,3]. Дальнейшее развитие и уточнение классической теории стимулировалось главным образом желанием более полно использовать ресурс материала посредством учета новых его физико-механических свойств и новых видов геометрической формы и структуры конструкций из них и осуществлялось многими авторами [4,5]. Данная работа посвящена разработке разрешающих уравнений нестационарных колебаний пластинки из вязкоупругого материала, связь между напряжениями и деформациями которого задана интегральными соотношениями Больцмана-Вольтерра и при непостоянстве коэффициента Пуассона материала.

1. Постановка задачи. Отнесем четырехугольную в плане пластинку толщиной h к

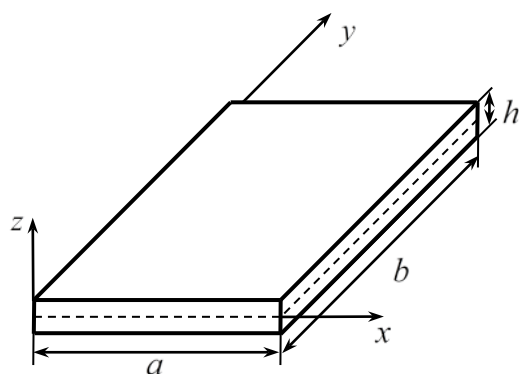


рис. 1

прямоугольной системе координат $Oxyz$, где начало координат выберем в срединной плоскости, а ось Oz направим по нормали к ней (рис.1). При выводе уравнений колебания пластинки будем считать, что все компоненты тензоров напряжений σ_{ij} и деформаций ε_{ij} , а также вектора перемещения $\vec{U}(u, v, w)$ зависят от координат и времени, т.е.

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(x, y, z, t); \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(x, y, z, t);$$

$$u = u(x, y, z, t); \quad \vartheta = \vartheta(x, y, z, t); \quad w = w(x, y, z, t).$$

Рассмотрим классический случай, т.е. будем считать, что пластина удовлетворяет всем трем гипотезам, предложенным Кирхгоффом. Тогда

$$\varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zx} = 0, \quad \varepsilon_{zz} = 0 \tag{1.1}$$

и

$$\sigma_{zz} = 0 \tag{1.2}$$

Из третьего уравнения (1.1) следует, что прогиб пластинки w не зависит от координаты z , т.е. $w = w(x, y, t)$, которое означает, что все точки пластинки лежащие на одной вертикали, получают одинаковые прогибы. При этом ненулевые компоненты деформации через прогиб выражаются следующим образом [3]

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad \varepsilon_{xy} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \tag{1.3}$$

Далее будем считать, что рассматриваемая пластинка строго подчиняется математической линейной теории вязкоупругости и описывается трехмерными её уравнениями движения. Зависимости между напряжениями и деформациями в точках пластинки заданы в виде интегральных соотношений Больцмана-Вольтерра [6]

$$\sigma_{ij} = 2M(\varepsilon_{ij}); \quad \sigma_{ij} = L_1(\varepsilon_{ii}) + 2M(\varepsilon_{ij}); \quad i \neq j, \quad (i, j = x, y, z), \tag{1.4}$$

где по i нет суммирования; ε – объемная деформация; L_1, M - вязкоупругие операторы

$$L_1(\varphi) = \lambda \left[\varphi(t) - \int_0^t f_1(t-\xi)\varphi(\xi)d\xi \right]; \quad M(\varphi) = \mu \left[\varphi(t) - \int_0^t f_2(t-\xi)\varphi(\xi)d\xi \right]; \tag{1.5}$$

λ, μ - коэффициенты Ламэ; $f_1(t), f_2(t)$ - произвольные ядра интегральных операторов, при этом L_1 и M – обратимы.

2. Напряжения в пластинке. В рассматриваемом случае объемная деформация равна $\varepsilon = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}$, с учетом которой из (1.4) будем иметь

$$\sigma_{xx} = L_1(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) + 2M(\varepsilon_{xx}) = (L_1 + 2M)(\varepsilon_{xx}) + L_1(\varepsilon_{yy})$$

или

$$\sigma_{xx} = L(\varepsilon_{xx}) + L_1(\varepsilon_{yy}), \tag{2.1}$$

где

$$\begin{aligned} L(\varphi) &= L_1(\varphi) + 2M(\varphi) = (\lambda + 2\mu)\varphi(t) - \int_0^t [\lambda f_1(t-\xi) - 2\mu f_2(t-\xi)]\varphi(\xi)d\xi = \\ &= (\lambda + 2\mu) \left[\varphi(t) - \int_0^t f_0(t-\xi)\varphi(\xi)d\xi \right]; \quad f_0(t-\xi) = \frac{\lambda f_1(t-\xi) + 2\mu f_2(t-\xi)}{\lambda + 2\mu}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Аналогично,

$$\sigma_{yy} = L(\varepsilon_{yy}) + L_1(\varepsilon_{xx}), \quad \sigma_{xy} = 2M(\varepsilon_{xy}) = M \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right). \tag{2.3}$$

Подставляя в (2.1), (2.2) и (2.3) выражения деформаций (1.3) будем иметь

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= L\left(-z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + L_1\left(-z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = -z\left[L\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + L_1\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right]; \\ \sigma_{yy} &= -z\left[L\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + L_1\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right]; \quad \sigma_{xy} = -2zM\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Вследствие (1.1) касательные напряжения в двух других плоскостях после подстановки составляющих деформации в формулы закона Гука (1.4) обратятся в нуль:

$$\sigma_{yz} = M(\varepsilon_{yz}) = 0; \quad \sigma_{zx} = M(\varepsilon_{zx}) = 0. \quad (2.5)$$

В действительности эти касательные напряжения не равны нулю, такой результат получен только вследствие принятых ранее гипотез и противоречит условиям равновесия. Отыскание этих напряжений выполняется аналогично упругому случаю, на основании дифференциальных уравнений равновесия деформируемого тела для каждого фиксированного момента времени.

3. Уравнения колебания. Для вывода уравнений колебания пластинки воспользуемся трехмерными уравнениями движения вязкоупругого тела

$$\sigma_{ij,j} + \rho f_i = \rho \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2}. \quad (3.1)$$

Из первых двух уравнений системы (3.1) с учетом инерционных сил, считая отсутствующими объемные силы, с учетом (1.2) и (2.5) получим уравнения

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2}. \quad (3.2)$$

Левая часть третьего уравнения равняется нулю в силу принятых гипотез Кирхгоффа. Поэтому в качестве третьего уравнения движения примем уравнение моментов [7]. При этом будем считать, что вместе с распределенной по площади пластины силой $(-q)$ действует и распределенная по той же площадке вертикальная составляющая инерционной силы, т.е.

$$-\rho \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} dz.$$

Тогда это уравнение для пластинки толщиной h примет вид

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 H}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -\rho \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} dz - q, \quad (3.3)$$

здесь M_x и M_y -осевые, H -крутящий моменты. Эти моменты выражаются через напряжения следующим образом:

$$M_x = \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xx} z dz; \quad M_y = \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{yy} z dz; \quad H = \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xy} z dz. \quad (3.4)$$

Подставив выражения для напряжений (2.4), (2.6) и (2.7) в уравнение (3.2) получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (L_1 + M)L^{-1}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right) + ML^{-1}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) &= \rho L^{-1}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right); \\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (L_1 + M)L^{-1}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right) + ML^{-1}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) &= \rho L^{-1}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right). \end{aligned} \quad (3.5)$$

С учетом выражений для напряжений (2.4) формулы (3.4) примут вид

$$M_x = -\frac{h^3}{36} \left[L \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + L_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right]; \quad M_y = -\frac{h^3}{36} \left[L \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + L_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right];$$

$$H = -\frac{h^3}{18} M \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right).$$
(3.6)

Подставив (3.6) в уравнение (3.3) получим

$$-\frac{h^3}{36} \left[L \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + 2L_1 \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) \right] - \frac{h^3}{9} M \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) = -\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \text{ или}$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{36}{h^2} \rho L^{-1} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) + \frac{36}{h^3} q.$$
(3.7)

Полученные уравнения (3.5), (3.7) являются уравнениями движения вязкоупругой пластинки в рамках гипотез Кирхгоффа. Из них следуют следующие частные случаи:

- коэффициент Пуассона материала пластинки постоянен. Тогда имеют места соотношения (2.12), (2.13) и (2.14), с учетом которых система (3.5), (3.7) принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{a^2} M_0^{-1} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right);$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} M_0^{-1} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right);$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{36}{h^2} \left[\frac{1}{c^2} M_0^{-1} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) + \frac{q}{h} \right],$$
(3.8)

где a, b – скорости продольных и поперечных волн, c – скорость волны в пластинке

$$c = \sqrt{\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}} b;$$

- материал пластинки упругий. Тогда $M_0 = M_0^{-1} = 1$ и система (3.8) запишется как

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{36}{h^2} \left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{q}{h} \right];$$
(3.9)

- пластинка находится в равновесии, тогда из (3.9), приравняв нулю правые части уравнений, можно получить классические уравнения равновесия упругой пластинки [7].

4. Уравнения колебания в усилиях. Интегрировав левые и правые части уравнений

(3.2) по координате Z в пределах от $-\frac{h}{2}$ до $+\frac{h}{2}$, а также переписав уравнение (3.3) при

$q = 0$ и с учетом внешних сил с компонентами X, Y, Z в осях координат, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T_x}{\partial x^2} + \frac{\partial S}{\partial y} &= \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + X; \\ \frac{\partial^2 T_y}{\partial y^2} + \frac{\partial S}{\partial x} &= \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + Y; \\ \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} &= -\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + Z, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где

$$T_x = L(\hat{\varepsilon}_{xx}) + L_1(\hat{\varepsilon}_{yy}); \quad T_y = L(\hat{\varepsilon}_{yy}) + L_1(\hat{\varepsilon}_{xx}); \quad S = 2M(\hat{\varepsilon}_{xy}); \quad \hat{\varepsilon}_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \varepsilon_{ij} dz, \quad (i, j = x, y).$$

Если пластинка находится в квазистатическом состоянии равновесия, то $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0$ и система (4.1) приобретает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T_x}{\partial x^2} + \frac{\partial S}{\partial y} &= X; \\ \frac{\partial^2 T_y}{\partial y^2} + \frac{\partial S}{\partial x} &= Y; \\ \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} &= Z. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Эти уравнения в точности совпадают с уравнениями равновесия пластинки [7]. Уравнения (4.1) и (4.2) удобны для применения в случае армированной или оребренной пластинки. Дополнительные усилия, связанные с наличием арматур и ребер отразятся в правых частях уравнений (4.1) и (4.2).

Литература

1. Григолюк Э. И., Селезов И. Т. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек // Итоги науки и техники / ВИНТИ. Механика твердого деформируемого тела. - 1973. - Т.5. - 199 с.
2. Халмурадов Р.И. Совершенствование методов расчета железобетонных плит// Экспресс-информация «Строительство и архитектура», Сейсмостойкое строительство, вып.1.- М., 1995. – С.18-25.
3. Пшеничников Г.И. Теория тонких оболочек и пластинок.- Москва: Наука,1980. - 352 с.
4. Филиппов И.Г. Уточненные уравнения колебания вязкоупругих пластин и стержней // Прикл. Механика.-1986.-22, №2.- С.71-78.
5. Халмурадов Р.И. Способ расчета ребристых плит // Узб. Журнал «Проблемы механики», 1995, №6. – С.23-32
6. Худойназаров Х. Нестационарное взаимодействие цилиндрических оболочек и стержней с деформируемой средой.-Ташкент: Изд-во мед.лит. им. Абу Али Ибн Сина, 2003 - 325 с.
7. Халмурадов Р.И., Каршиев А.Б. Расчет элементов конструкций с нарушениями регулярности структуры.- Ташкент: Изд-во мед.лит. им. Абу Али Ибн Сина, 2002. - 288 с.

УДК 532.546

ЗАДАЧА АНОМАЛЬНОГО ПЕРЕНОСА ВЕЩЕСТВА В ПОРИСТОЙ СЕРЕДЕ

Б.Х.Хужаёров¹, Т.О.Джиянов², И.Э.Шодманов³¹Самаркандский государственный университет,²Самаркандский сельскохозяйственный институт,³Самаркандский институт экономики и сервиса

Аннотация. В работе рассматривается задачи релаксационного переноса вещества в пористой среде. На основе уравнения баланса массы и релаксационного закона Фика получено уравнение переноса вещества. Уравнение решено численно и установлено влияние релаксационного параметра на характеристики переноса вещества.

Ключевые слова: релаксация; фильтрация; перенос вещества; пористая среда; суспензия; математическая модель.

A problem of anomalous solute transport in a porous medium

Abstract. In the paper a problem of relaxing solute transport in a porous medium is considered. On the basis of mass balance equation and the relaxing Fick's law a solute transport equation is derived. The equation is numerically solved and the influence of the relaxation parameter on solute transport characteristics is established.

Keywords: relaxing; filtration; porous media; suspension; solute transport; mathematical model.

G'ovak muhitda anomal modda ko'chish masalasi

Annotasiya. Bu maqolada g'ovak muhitlarda relaksasion modda ko'chish masalasi qaralgan. Massa balans tenglamasi va Fik relaksasion qonuni asosida modda ko'chishi tenglamasi keltirilib chiqarildi. Tenglama sonli yechildi va relaksatsion parametrlarning modda ko'chishi xarakteristikasiga ta'siri aniqlangan.

Kalit so'zlar: relaksatsiya, filtratsiya, g'ovak muhit, suspenziya, moda ko'chishi, matematik model.

В последнее время значительно возросла интенсивность исследования аномальных явлений при диффузии и дисперсии частиц примеси в пористой среде. Одной из первых работ, где было отмечено отклонение от фиковского закона переноса, является [1]. В [2] показано, что при больших градиентах концентрации в пористой среде фиковский закон дисперсии нарушается. Оригинальный подход для описания хвостового эффекта при дисперсии веществ в пористой среде предложен в [3], где классический закон Фика [4] приобретает аномальный характер, устанавливающий неравновесную связь между потоком и градиентом концентрации. Новое, нефиковское конституционное уравнение предложено для массового потока за счет макроскопической дисперсии в пористой среде. Уравнение содержит два члена — классический фиковский диффузионный член и новый член, рассматриваемый как инерционный. В работе [5] дан анализ моделей, основанных на обобщении закона Фика с различными дифференциальными зависимостями, включающими производные по времени массового дисперсионного потока, а также стохастические модели, приводящие к интегро-дифференциальным уравнениям, в которых тензор дисперсии растет асимптотически по времени и по пространственной координате. В [6] выведены макроскопические уравнения переноса вещества в пористой среде для различных характерных масштабов релаксационных и диффузионных явлений.

В данной работе дадим вывод одномерного уравнения переноса для релаксационного закона Фика [3]. На основе численной реализации уравнения оценим роль релаксационных эффектов в развитии профилей концентрации вещества и диффузионного потока.

Баланс массы вещества в одномерном случае выражается уравнением

$$m \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

где m — пористость среды, c — концентрация, F — общий поток массы, состоящий из конвективного (F_c) и диффузионного (F_d) потоков $F = F_c + F_d$.

Конвективный поток принимается в виде

$$F_c = v_f c = v m c, \quad (2)$$

где v_f – скорость фильтрации, v – физическая скорость жидкости.

Диффузионный поток носит релаксационный характер [3]

$$F_d = -mD \frac{\partial c}{\partial x} - \lambda \frac{\partial F_d}{\partial t}, \quad (3)$$

где λ – время релаксации диффузионного потока.

Уравнение (1) с учетом (2), (3) становится

$$m \frac{\partial c}{\partial t} + v m \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial F_d}{\partial x} = 0. \quad (4)$$

Из (3) имеем

$$F_d + \lambda \frac{\partial F_d}{\partial t} = -mD \frac{\partial c}{\partial x}. \quad (5)$$

Дифференцируя (5) по x получим

$$\left(1 + \lambda \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial F_d}{\partial x} = -mD \frac{\partial^2 c}{\partial x^2},$$

или с учетом (4)

$$\left(1 + \lambda \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial c}{\partial t} + v \frac{\partial c}{\partial x}\right) = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}. \quad (6)$$

Это – уравнение релаксационного переноса вещества в пористой среде.

Уравнение (6) можно представить в виде

$$\frac{\partial c}{\partial t} + v \frac{\partial c}{\partial x} + \lambda \frac{\partial^2 c}{\partial t^2} + v \lambda \frac{\partial^2 c}{\partial t \partial x} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}. \quad (7)$$

С целью оценки релаксационных эффектов на характеристики переноса рассмотрим следующую задачу. Пусть в пористую полубесконечную среду, заполненную жидкостью с концентрацией c_0 , с момента $t > 0$ начинает поступать суспензия с объемной концентрацией твердых частиц c_1 . Тогда начальные и граничные условия имеют вид

$$c(0, x) = c_0, \quad \frac{\partial c(0, x)}{\partial t} = 0, \quad 0 \leq x < \infty, \quad (8)$$

$$c(t, 0) = c_1, \quad c(t, \infty) = c_0. \quad (9)$$

Для решения задачи (6), (8), (9) применяем метод конечных разностей [7]. В области $D = \{0 \leq x < \infty, 0 \leq t \leq T\}$ вводим сетку, где T максимальное время, в течение которого исследуется процесс. Для этого интервал $[0, \infty)$ разбиваем с шагом h , а $[0, T]$ – с шагом τ . В результате имеем сетку:

$$\omega_{ht} = \{(x_i, t_j), i = 0, 1, 2, \dots, j = 0, 1, \dots, J; x_i = ih; t_j = j\tau; \tau = T / J\}.$$

Аппроксимируем уравнение (7) используя неявную схему на сетке ω_{ht} в виде

$$\begin{aligned} \frac{c_i^{j+1} - c_i^j}{\tau} + v \frac{c_i^{j+1} - c_{i-1}^{j+1}}{h} + \lambda \frac{c_i^{j+1} - 2c_i^j + c_{i-1}^{j-1}}{\tau^2} + \lambda v \frac{c_i^{j+1} - c_{i-1}^{j+1} - c_i^j + c_{i-1}^j}{\tau h} = \\ = D \frac{c_{i+1}^{j+1} - 2c_i^{j+1} + c_{i-1}^{j+1}}{h^2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Начальные и граничные условия аппроксимируются как

$$c_i^0 = c_0, \quad \frac{c_i^1 - c_i^0}{\tau} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, \quad (11)$$

$$c_0^{j+1} = c_1, \quad c_I^{j+1} = c_0, \quad j = 0, 1, \dots, J. \quad (12)$$

где I – достаточно большое число, для которого приблизительно выполняется второе условие (12).

Разностная схема (10) приведена к системе линейных алгебраических уравнений

$$Ac_{i-1}^{j+1} - Bc_i^{j+1} + Ec_{i+1}^{j+1} = -F_i^j, \quad i = \overline{1, I-1}, \quad j = \overline{0, J-1}, \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} A &= -hv\tau^2 - \lambda v\tau h - D\tau^2, \\ B &= -\tau h - hv\tau^2 - \lambda h^2 - \lambda v\tau h - 2D\tau^2, \\ E &= -D\tau^2, \\ F_i^j &= (-h^2\tau - 2\lambda h^2 + \lambda v h\tau)c_i^j + \lambda v h\tau c_{i-1}^j + \lambda h^2 c_i^{j-1}. \end{aligned}$$

Систему (13) решаем методом прогонки при известных c_i^j и c_i^{j-1} , для чего решение представится в виде

$$c_i^{j+1} = \eta_{i+1} c_{i+1}^{j+1} + \mu_{i+1}, \quad i = \overline{I-1, 0}, \quad j = \overline{0, J-1},$$

где

$$\eta_{i+1} = \frac{E}{B - A\eta_i}, \quad \mu_{i+1} = \frac{A\mu_i + F_i^j}{B - A\eta_i}, \quad i = \overline{1, I-1}, \quad j = \overline{0, J-1}.$$

Из граничного условия имеем

$$c_0^{j+1} = \eta_1 c_1^{j+1} + \mu_1, \quad \text{откуда } \eta_1 = 0, \mu_1 = c_0.$$

В соответствии с (5) определим поток вещества. При $F_d(0, x) = 0$ имеем

$$F(t, x) = -\frac{mDe^{-t/\lambda}}{\lambda} \int_0^t e^{\xi/\lambda} \frac{\partial c(\xi, x)}{\partial x} d\xi. \quad (14)$$

Поток $F(t, x)$ может быть определен вычислением интеграла (14) при известном распределении концентрации $c(t, x)$. Можно также непосредственно дискретизировать уравнение (5) на введенной сетке. Сеточные значения F_d обозначим как $F_{d,i}^j$. Тогда уравнение (5) аппроксимируется как

$$F_{d,i}^{j+1} + \lambda \frac{F_{d,i}^{j+1} - F_{d,i}^j}{\tau} = -mD \frac{c_{i+1}^{j+1} - c_i^{j+1}}{h},$$

из которого определяется $F_{d,i}^{j+1}$

$$F_{d,i}^{j+1} = \frac{\lambda}{\tau + \lambda} F_{d,i}^j - \frac{mD\tau}{\tau + \lambda} \frac{c_{i+1}^{j+1} - c_i^{j+1}}{h}. \quad (15)$$

Схема (15) устойчива, т.к. $\frac{\lambda}{\tau + \lambda} < 1$.

В расчетах использованы следующие значения исходных параметров: $c_0 = 0$, $c_1 = 0,01$ и различные v, D, λ . Как видно из рис.1, релаксационные эффекты приводят к запаздывающему развитию профилей концентрации вещества. При больших λ относительно λ запаздывающий эффект ослабевает.

Расчет диффузионного потока вещества в определенных точках среды показывает, что релаксационные эффекты приводят к его запаздывающей динамике (рис.2). Чем точка ближе к входному концу среды, тем выше значения F_d при одном и том же значении t . Например при $x = 0$ значения F_d гораздо больше, чем в точках $x = 0,1$ и $0,2$ м при заданном значении t . Кроме того, отмечается медленное развитие динамики F_d с увеличением расстояния от входного конца среды, что отчетливо видно на рис.2в. Как видно из (14), значения F_d в заданных точках определяются через значения $\frac{\partial c}{\partial x}$ в соответствующих точках. Для того, чтобы

объяснить эффекты запаздывания F_d построены динамики $\frac{\partial c}{\partial x}$ в соответствующих точках x (рис.2). Как видно из этого рисунка градиент концентрации имеет запаздывающую динамику с увеличением времени релаксации. Таким образом, запаздывающий характер F_d отчасти определяется аналогичным характером $\frac{\partial c}{\partial x}$.

Для того, чтобы исследовать влияние скорости фильтрации на интенсивность диффузионного потока вещества проводились расчеты при увеличенном значении скорости фильтрации v (рис.3). За счет более быстрого продвижения концентрационных профилей в среде образуются градиенты концентрации с меньшими абсолютными значениями. Это приводит к уменьшению значений диффузионного потока вещества в заданной точке при одном и том же моменте времени. Этому можно убедиться сравнивая рис.2 с рис.3. Переходной процесс в распределении концентрации укорачивается. Это можно объяснить с относительно быстрым установлением постоянной концентрации C_0 в рассматриваемой точке при больших скоростях фильтрации. Характер влияния релаксационного параметра не изменяется. Заметим, что данное явление при увеличении v относится только диффузионному потоку вещества. Естественно, общий поток вещества, состоящий из конвективной и диффузионной частей, может быть значительно большим при больших скоростях фильтрации, так как конвективный поток прямо пропорционален скорости фильтрации. Как и в предыдущем случае, характер изменения F_d определяется значениями $\frac{\partial c}{\partial x}$. Для двух значений v изменение $\frac{\partial c}{\partial x}$ показано на рис.4,5. Сравнивая эти рисунки можно убедиться, что отмеченные выше характерные изменения F_d полностью определяются характером изменения соответствующих $\frac{\partial c}{\partial x}$.

Увеличение значений D приводит к существенному изменению F_d (рис.6). Сравнение графиков рис.2 и рис.6 показывает, что при увеличении значений D диффузионный поток F_d также увеличивается. Однако характер его изменения в целом сохраняется. Время релаксации λ диффузионного потока приводит к аналогичным запаздывающим эффектам, что наблюдается при относительно меньших значениях D .

В целом можно сделать заключение, что релаксационный характер закона Фика приводит к запаздывающей динамике характеристик переноса, таких как концентрация, градиент концентрации, диффузионный поток вещества и др.

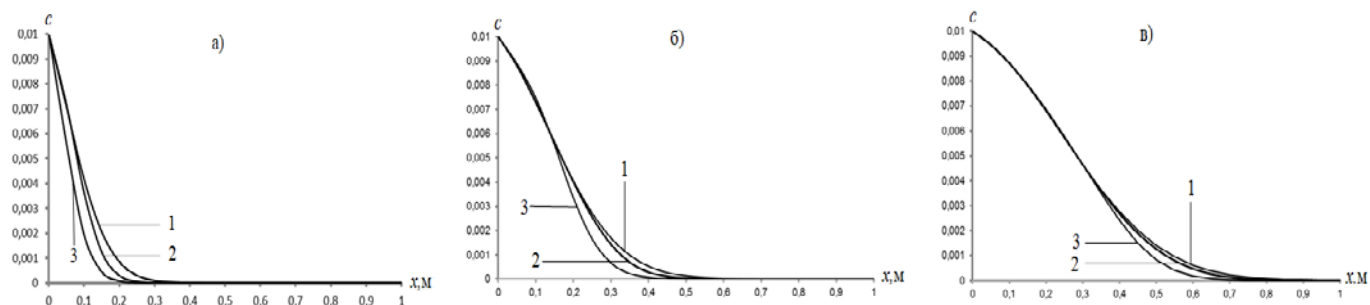


Рис 1.Профили c при различных λ и $v = 10^{-5}$ м/с, $D = 10^{-6}$ м²/с, $t=3600$ с (а); 10000 с (б); 20000 с (в); $\lambda = 0$ (1), 1000 с (2), 3000 с (3).

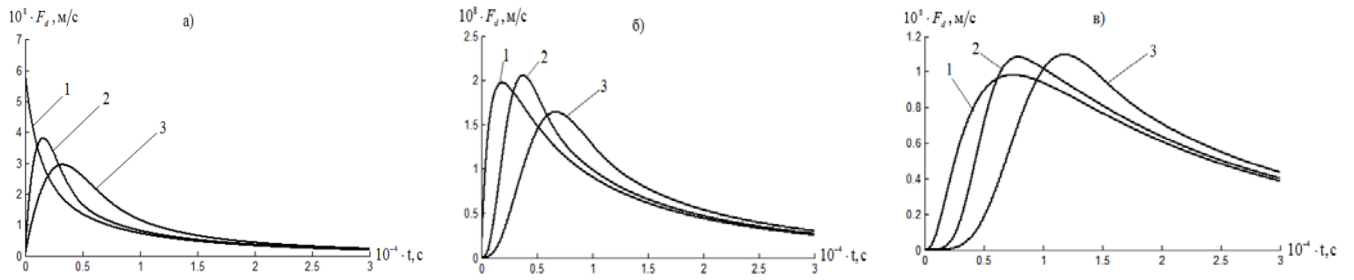


Рис 2. Динамика F_d при различных λ и $\nu = 10^{-5}$ м/с, $D = 10^{-6}$ м²/с, $m = 0,3$, $x = 0$ (а); 0,1м (б); 0,2м (в); $\lambda = 0$ (1), 1000 с(2), 3000 с(3).

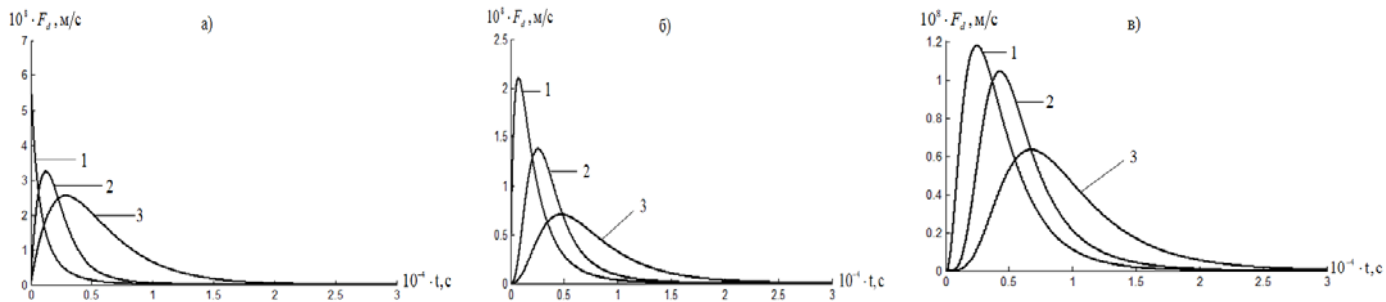


Рис 3. Динамика F_d при различных λ и $\nu = 5 \cdot 10^{-5}$ м/с, $D = 10^{-6}$ м²/с, $m = 0,3$, $x = 0$ (а); 0,1м (б); 0,2м (в); $\lambda = 0$ (1), 1000 с(2), 3000 с(3).

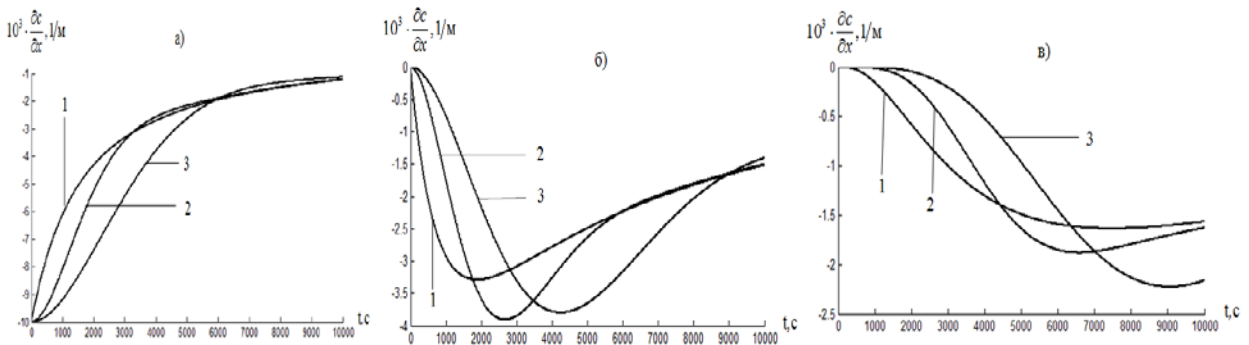


Рис 4. Динамика $\frac{\partial c}{\partial x}$ при различных λ и $\nu = 10^{-5}$ м/с, $D = 10^{-6}$ м²/с, $m = 0,3$, $x = 0$ (а); 0,1м (б); 0,2м (в); $\lambda = 0$ (1), 1000 с(2), 3000 с(3).

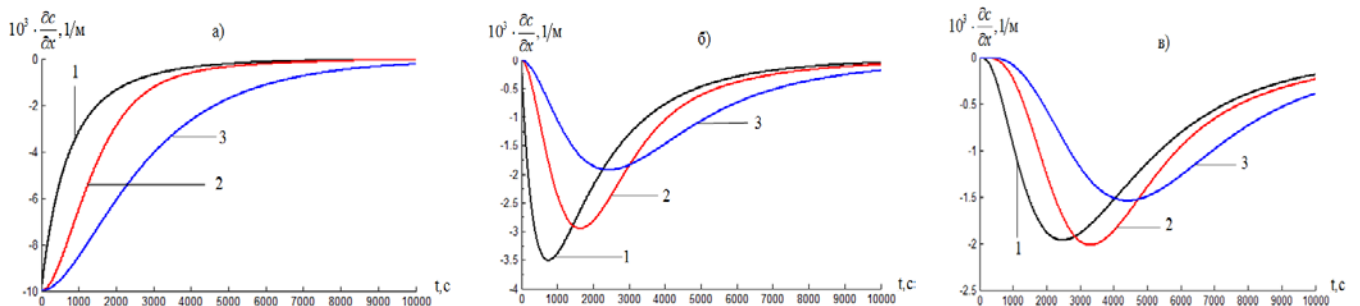


Рис 5. Динамика $\frac{\partial c}{\partial x}$ при различных λ и $\nu = 5 \cdot 10^{-5}$ м/с, $D = 10^{-6}$ м²/с, $m = 0,3$, $x = 0$ (а); 0,1м (б); 0,2м (в); $\lambda = 0$ (1), 1000 с(2), 3000 с(3).

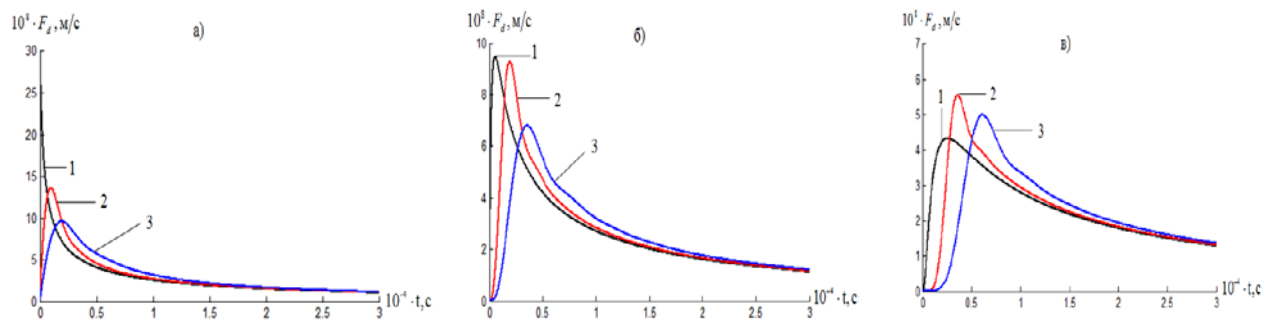


Рис 6. Динамика F_d при различных λ и $\nu = 10^{-5} \text{ м/с}$, $D = 5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$, $m = 0,3$, $x = 0$ (а); $0,1\text{м}$ (б); $0,2\text{м}$ (в); $\lambda = 0$ (1), 1000с (2), 3000с (3).

Литература

1. Matheron G., G. de Marsily. Is transport in porous media always diffusive? A counterexample // Water Resours. Res. 1980. 16(5). 901-917.
2. Hassanizadeh S.M., A. Leijnse. A non-linear theory high-concentration-gradient dispersion in porous media // Advances in Water Resources. 1995. 18(4). 203-215.
3. Stract O.D.L. A mathematical model for dispersion with a moving front in groundwater // Water resours. Res. 1992. 28(11). 2973-2980.
4. Bear J. Dynamic of fluids in porous media. Dover, New York. 1972.
5. Hassanizadeh S.M. On the transient non-Fickian dispersion theory // Transport in Porous Media. 1996. 23(1). 107-124.
6. Хужаёров Б.Х. Макроскопическое моделирование релаксационного переноса вещества в пористой среде // Изв. РАН. «Механика жидкости и газа». 2004. №5.С.21-30.
7. Самарский А.А. Теория разностных схем. М. Наука. 1977. 656 с.

УДК 532.546

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ФИЛЬТРОВАНИЯ СУСПЕНЗИЙ С ОБРАЗОВАНИЕМ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОГО КЕЙК-СЛОЯ

Б.Х.Хужаёров, У.Ж.Сайдуллаев

Самаркандский государственный университет

E-mail: b.khuzhayorov@mail.ru

Solution of suspension filtration equations with forming an elasto – plastic cake layer

Abstract. In the paper elasto-plastic equations of suspensions filtration are derived with using different behaviors of cake layer at pressure loading and unloading regimes. Different dependences of compression pressure, solid content and relatively permeability of the cake layer at first and secondary loading regimes are analyzed.

Keywords: cake, filtration, elasto-plastic, suspension.

Решение уравнения фильтрации суспензий с образованием упруго - пластического кейк-слоя

Аннотация. В работе приведены уравнения фильтрации суспензий с образованием упруго - пластического кейк-слоя с учетом различного поведения кейк-слоя в режимах нагружения и разгружения. Проанализированы различные зависимости компрессионного давления, твердосодержания и проницаемости кейк-слоя при первичном и вторичном режимах нагружения.

Ключевые слова: кейк, фильтрация, упруго-пластический режим, суспензия.

Эластик-пластик ryeyk qatlam hosil bo'lganda suspenziyalarning filtrlash tenglamalarini yechish

Аннотация. Мақоллада турли xil yuklanish va yuksizlanish rejimlarida elastik-plastik keyk-qatlam hosil bo'lganda suspenziyalarni filtrlash tenglamalari keltirib chiqarilgan. Birinchi va ikkinchi yuklanish rejimlarda keyk-qatlamdagi kompression bosim, qattiq zarralar konsentratsiyasi va o'tkazuvchanglikning bog'lanishlari o'rganilgan.

Калит so'zlar: keyk-qatlam, filtrlash, elastik-plastik, suspenziya.

Здесь дадим вывод уравнений фильтрования, где образующийся кейк-слой имеет упруго-пластические свойства. В режиме увеличения давления происходит обычное фильтрование с формированием кейк-слоя. Когда снимается внешнее давление, процесс фильтрования останавливается, установленное во время фильтрования распределение давления также снимается. Однако кейк-слой не будет восстанавливать свои характеристики до первоначального, т.е. происходит остаточное деформирование слоя осадка. Основные характеристики кейк-слоя- пористость и проницаемость, концентрация твердых частиц – твердосодержание принимают другие значения после снятия давления, чем первоначальные.

Для моделирования упруго-пластических свойств осадков используем общие принципы упруго-пластической фильтрации, развитые в работах [1-7]. Характерная кривая изменения проницаемости осадка по давлению показана на рис.1[8-10]. Аналогичная кривая может быть приведена и для пористости осадка. При увеличении давления до $p_s^{(1)}$ проницаемость снижается от k^0 до некоторых величин (точка А). С этого момента происходит разгрузка осадка, т.е. процесс фильтрования останавливается, давление снимается. При падении давления p_s до нуля проницаемость за счет восстановления структуры осадка (набухания) увеличивается до величины $k^{(1)}$, что меньше, чем первоначальное значение k^0 .

При последующем нагружении осадка, т.е. возобновлении фильтрования в диапазоне изменения давления $0 \leq p_s \leq p_s^{(1)}$ проницаемость уменьшается с той же закономерностью, что и при разгрузке. В диапазоне $p_s^{(1)} \leq p_s \leq p_s^{(2)}$ происходит уменьшение проницаемости по той же зависимости, что была до разгрузки. В точке В при $p_s = p_s^{(2)}$ опять процесс фильтрования останавливается и начинается разгрузка. Проницаемость восстанавливается до величины $k^{(2)}$. При последующей нагрузке процесс повторяется аналогично.

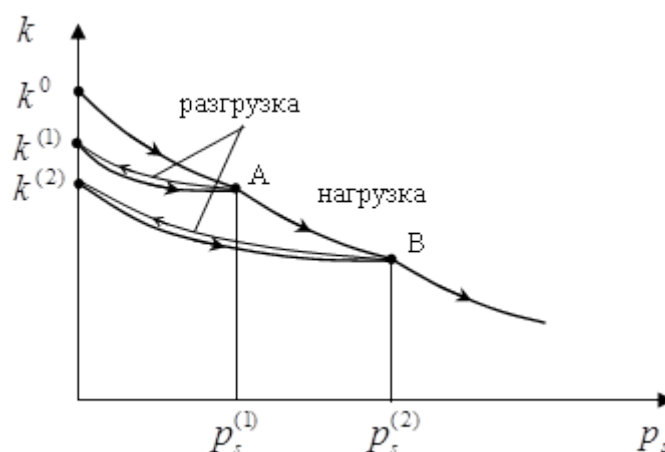


Рис.1. Характерные кривые изменения проницаемости при увеличении и уменьшении давления

Предположим, что такая же закономерность справедлива и для ϵ_s .

На кривых рис.1 можно заметить тот факт, что чем больше давление p_s , с которого начинается разгрузка, тем больше отличаются восстановленные значения $\varepsilon_s^{(1)}$, $k^{(1)}$ и $\varepsilon_s^{(2)}$, $k^{(2)}$ от первоначальных $\varepsilon_s^{(0)}$, $k^{(0)}$.

Отмеченные характерные явления будем использовать при составлении моделей фильтрования с образованием упруго – пластического осадка, т.е. кейк-слоя. Вывод уравнений фильтрования суспензий с образованием кейк-слоя осуществим используя методологию [10].

Сначала рассмотрим процесс фильтрования с ростом слоя осадка.

Изменение ε_s, k в режиме повышения давления p_s происходит по степенным закономерностям

$$\uparrow \varepsilon_s = \varepsilon_s^0 \left(1 + \frac{p_s}{p_A}\right)^\beta, \quad \uparrow k = k^0 \left(1 + \frac{p_s}{p_A}\right)^{-\delta}, \quad (1)$$

где ε_s^0 , k^0 – значения ε_s , k при $p_s = 0$, соответственно, p_A – характерное давление, β , δ – показатели – постоянные величины, знак \uparrow означает режим увеличения давления, $\uparrow \varepsilon_s$, $\uparrow k$ – концентрация твердых частиц и проницаемость в слое осадка в режиме повышения давления, p_s – компрессионное давление,

В режиме повышения давления в итоге имеем уравнение фильтрования

$$\uparrow \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{k^0}{\mu} \varepsilon_s \left(\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_s^0}\right)^{-\delta/\beta} \frac{\partial p_s}{\partial x} \right] - q_{\ell m} \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial x}, \quad (2)$$

где

$$q_{\ell m} = \left[\frac{k}{\mu} \frac{\partial p_s}{\partial x} \right]_{x=0} = \frac{-p_{\ell m}}{\mu R_m}, \quad (3)$$

μ – вязкость, $p_{\ell m}$ – давление в фильтрате при $x = 0$, R_m – приведенное сопротивление фильтровального элемента (фильтра), t – время.

Пусть в определенный момент процесс фильтрования останавливается и начинается процесс разгрузки. В процессе разгрузки изменение характеристик происходит такими же степенными закономерностями (1), но с другими коэффициентами и показателями

$$\downarrow \varepsilon_s = \varepsilon_s^0 \left(1 + \frac{p_s^{(1)}}{p_A}\right)^{\beta-\beta_1} \left(1 + \frac{p_s}{p_A}\right)^{\beta_1}, \quad \downarrow k = k^0 \left(1 + \frac{p_s^{(1)}}{p_A}\right)^{\delta_1-\delta} \left(1 + \frac{p_s}{p_A}\right)^{-\delta_1}. \quad (4)$$

Предположим, что показатели β_1, δ_1 также зависят от того, с какого давления p_s происходит процесс разгрузки. Пусть эти зависимости также носят степенной характер

$$\beta_1 = \beta \left(1 + \frac{p_s^{(1)}}{p_A}\right)^{-\gamma_\varepsilon}, \quad \delta_1 = \delta \left(1 + \frac{p_s^{(1)}}{p_A}\right)^{-\gamma_k}, \quad (5)$$

где γ_ε и γ_k - показатели степенных зависимостей, характеризующих уменьшение β_1 и δ_1 по отношению к β и δ , соответственно. Их можно назвать коэффициентами необратимого изменения концентрации ε_s и проницаемости k . Заметим, что при $\gamma_\varepsilon = 0, \gamma_k = 0$ имеем полностью обратимый процесс, т.е. режим будет чисто упругим.

Пусть режим фильтрования продолжается до $t = T_1$ и начинается режим разгрузки. В режиме разгрузки началом отсчета времени принимается нуль. Используя (4) выводим уравнение фильтрования

$$\downarrow \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial t} = -\frac{\varepsilon_s^0 k^0}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(1 + \frac{p_s^{(1)}}{p_A}\right)^{\beta - \beta_1 + \delta_1 - \delta} \left(1 + \frac{p_s}{p_A}\right)^{\beta_1 - \delta_1} (-f') \frac{\partial p_s}{\partial x} \right] - q_{\ell m} \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial x}. \quad (6)$$

Уравнение (9) используя (7) можно выразить через p_s , тогда начальные и граничные условия могут быть заданы так

$$\downarrow p_s(0, x) = \uparrow p_s(T_1, x) = p_s^{(1)}, \quad \downarrow p_s(t, L(t)) = 0, \quad \downarrow p_s(t, 0) = 0. \quad (7)$$

Считаем, что в режиме разгрузки рост слоя осадка не происходит, так что $L(t)$ остается без изменения, имея значение $L(T_1)$.

При повторном нагружении системы изменение характеристик ε_s и k происходит в соответствии с законами (4) до $p_s \leq p_s^{(1)}$:

$$\uparrow\uparrow \varepsilon_s = \varepsilon_s^0 \left(1 + \frac{p_s^{(1)}}{p_A}\right)^{\beta - \beta_1} \left(1 + \frac{p_s}{p_A}\right)^{\beta_1}, \quad \uparrow\uparrow k = k^0 \left(1 + \frac{p_s^{(1)}}{p_A}\right)^{\delta_1 - \delta} \left(1 + \frac{p_s}{p_A}\right)^{-\delta_1}, \quad p_s \leq p_s^{(1)}, \quad (8)$$

где $\uparrow\uparrow$ означает режим повторного нагружения.

Когда давление p_s достигает $p_s^{(1)}$ режим фильтрования сменится на предыдущий режим первого нагружения.

Для этого режима выводится уравнение фильтрования следующего вида

$$\uparrow\uparrow \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial t} = -\frac{\varepsilon_s^0 k^0}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(1 + \frac{p_s^{(1)}}{p_A}\right)^{\beta - \beta_1 + \delta_1 - \delta} \left(1 + \frac{p_s}{p_A}\right)^{\beta_1 - \delta_1} (-f') \frac{\partial p_s}{\partial x} \right] - q_{\ell m} \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial x},$$

$$p_s \leq p_s^{(1)}. \quad (9)$$

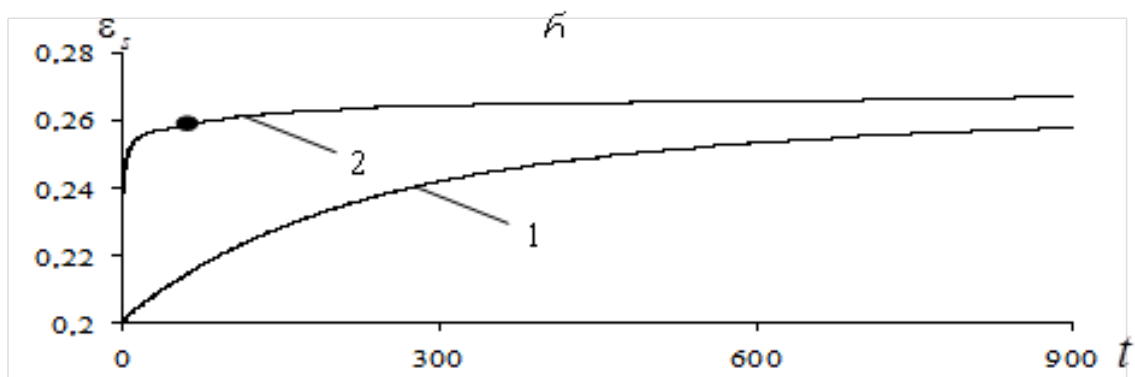
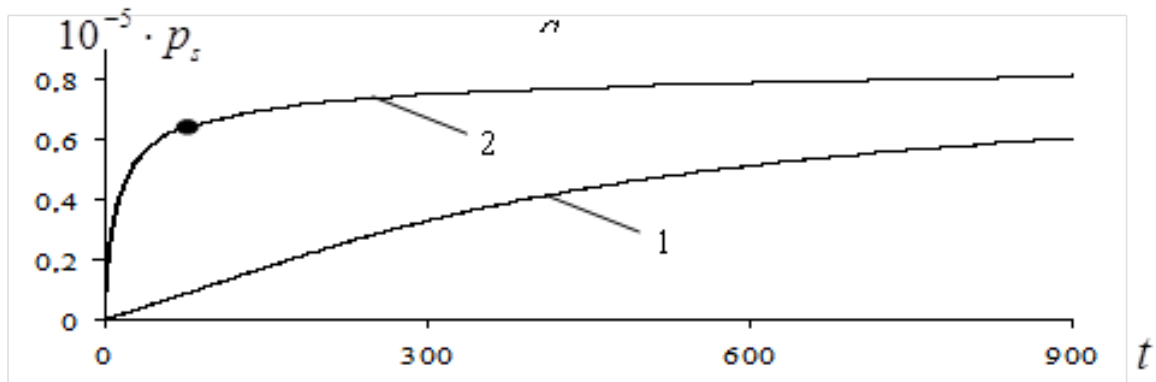
Пусть процесс разгрузки завершился за время T_2 . За это время во всей толщине осадка устанавливается нулевое давление p_s . Повторное нагружение системы можно начинать с заданным давлением на $x = 0$: $p_s = p_0^{(1)}$, где $p_0^{(1)}$ заданное давление, оно может отличаться от заданного давления p_0 при первом нагружении. Тогда начальные и граничные условия относительно давления имеют вид (время опять начинается с нуля)

$$\uparrow\uparrow p_s(0, x) = 0, \quad -\uparrow\uparrow k \frac{\partial p_s}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{p_0^{(1)} - p_s}{R_m} \Big|_{x=0}, \quad \uparrow\uparrow p_s(t, L(t)) = 0. \quad (10)$$

Заметим, что уравнение (9) решается до соблюдения условия $p_s \leq p_s^{(1)}$. Когда достигается условие $p_s = p_s^{(1)}$, нужно переходить к решению уравнения (2) при соответствующих условиях.

Здесь рассмотрим решение задачи фильтрования в режиме повторного нагружения. В этом случае решается уравнение (6) с начальным и граничными условиями (7) при $p_s \leq p_s^{(1)}$, а при $p_s > p_s^{(1)}$ решается уравнение (2) с (10). Для этого используем метод конечных разностей с ловлей подвижного фронта [11,12].

Численные результаты решения задачи получены при следующих значениях параметров: $p_A = 10^4$ Па, $p_0 = 10^5$ Па, $R_m = 10^{12}$ 1/м, $\mu = 10^{-3}$ Па · с, $k^0 = 10^{-13}$ м², $\varepsilon_s^0 = 0.20$, $\varepsilon_{s_0} = 0,0076$, $\beta = 0,13$, $\delta = 0,57$.



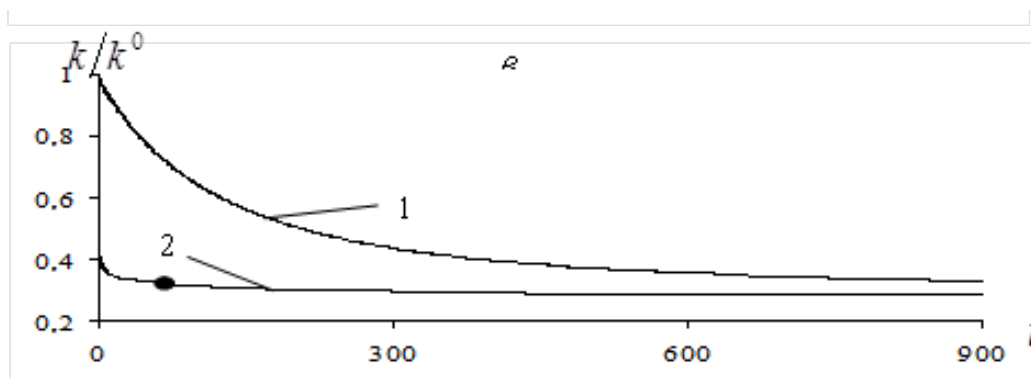


Рис.2. Динамика p_s (а), ε_s (б), k/k_0 (в) в точке $x = 0,002$ м при первом (1) и втором режиме нагружения (2), $\gamma_\varepsilon = 0,6$, $\gamma_k = 0,6$. Знаком обозначено время достижения $p_s^{(1)}$ при повторном нагружении.

На рис. 2. показана динамика характеристик в заданной точке для обоих нагружений. Как видно из рисунка, пластическая деформация слоя осадка существенно меняет динамику изменения характеристик при повторном нагружении. При этом, система достаточно быстро доходит до состояния первого нагружения и в дальнейшем происходит фильтрование по его условиям. На графиках кружочком показано состояние достижения компрессионного давления p_s значения $p_s^{(1)}$ при повторном нагружении.

Литература

1. Баренблатт Г.И., Крылов А.П. Об упругопластическом режиме фильтрации // Изв.АН СССР, ОТН. 1955, №2. С.5-13
2. Баренблатт Г.И. О некоторых задачах восстановления давления и распространения волн разгрузки при упруго-пластическом режиме фильтрации // Изв.АН СССР, ОТН. 1955, №2. С.14-26.
3. Barenblatt G.I., Entov V.M., Ryzhik V.M. Theory of fluid flows through natural rocks. Kluwer Academic Publisher, 1990. – 395 pp.
4. Горбунов А.Т. Упруго-пластический режим фильтрации жидкости в пористых средах // Изв. АН СССР, Мех.жидкости и газа. 1973, №5. С.84-90.
5. Горбунов А.Т. Разработка аномальных нефтяных месторождений. – М.: Недра, 1981. – 237 с.
6. Хужаёров Б.Х., Шодмонов И.Э., Холияров Э.Ч., Закиров А.А. Упругопластическая фильтрация жидкости в неустойчивых пластах // Инж.-физ. журнал. 2003. Т.76. №6. С. 1340-1347.
7. Хужаёров Б.Х., Давиденко М.А., Шодмонов И.Э. Фильтрация однородной жидкости в упруго-пластическом режиме с учётом разрушения пород // Узб.журнал «Проблемы механики». 1997, № 3. С. 40-43.
8. Федоткин И.М., Воробьев Е.И., Вьюн В.И. Гидродинамическая теория фильтрования суспензией. Киев:Вища. шк.,Головное изд-во.1986. -166с.
9. Федоткин И.М. Математическое моделирование технологических процессов. Киев: Вища шк., Головные изд-во. 1988.-415с.
10. Tien C. Principles of filtration. Elsevier, The Netherlands. 2012.
11. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Вычислительная теплопередача. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 784 с.
12. Caldwell J., Kwan Y.Y. Numerical methods for one-dimensional Stefan problems. Communications in Numerical Methods in Engineering, 2004; 20: 535–545.

УДК 532.546

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВОДЫ С ПОРОДОЙ ПРИ ЗАВОДНЕНИИ НЕФТЯНЫХ ПЛАСТОВ

Б.Х. Хужаёров¹, Ж.М. Махмудов¹, Ш.Х. Зикиряев²

¹Самаркандский государственный университет

²Самаркандский государственный архитектурно-строительный институт

Аннотация: В работе численно решена задача растворения породы при заводнении нефтяных пластов с учетом адсорбции растворенных веществ за зоной контакта воды с породой. Оценена роль диффузионных, адсорбционных эффектов в динамике характеристик переноса вещества.

Ключевые слова: адсорбция, диффузия, растворение солей, пористая среда, заводнение.

Modeling of interaction between water and rock at water flooding of oil beds

Annotation. In the paper a problem of rock's dissolution at water flooding of oil beds with adsorption of realized matter on the rock's surface behind of the contact zone is numerically solved. The role of adsorption, diffusion effects in solute transport characteristics is estimated.

Keywords: adsorption, diffusion, dissolution of salts, porous medium, water flooding.

Neft qatlamlariga suv haydashda suv vamuhitning o'zaro ta'sirlashuv jarayonini modellashtirish

Annotasiya: Maqolada neft qatlamlariga suv haydashda suv va muhitning o'zaro ta'sirlashuv masalasi hosil bo'ladigan moddalar adsorbsiyasini hisobga olib, sonli yechilgan. Diffuziya, adsorbsiya hodisalarining modda ko'chishi xarakteristikalariga ta'siri baholangan.

Kalit so'zlar: adsorbsiya, diffuziya, tuzning erishi, g'ovak muhit, suv haydash.

Введение. При заводнении нефтяных пластов взаимодействие воды с пластовой водой и скелетом пласта может привести к ряду осложнений. Одним из явных примеров таких процессов является взаимодействие воды (обычно пресной, слабоминерализованной) с породой пласта, в результате которого в породе происходят различные изменения: растворение солей и отдельных минералов породы и переход их в водную фазу, набухание (обычно глинистых) и нарушение структуры пород и др. В данной работе дается анализ одного из таких процессов – растворение солей пород при контакте с закачиваемой водой.

Рассмотрим пористую среду, скелет которой содержит легкорастворимые соли. При продвижении фронта смачивания $X_0(t)$ за счет контакта закачиваемой воды со скелетом породы соли мгновенно растворяются [1]. Затем перешедшие в жидкую фазу соли переносятся вместе с ней по пласту. Процесс переноса происходит в соответствии с конвективными и диффузионными механизмами. В процессе переноса соли вновь могут осаждаться на поверхности скелета породы за счет адсорбционных эффектов. Тогда растворенные соли переносятся под воздействием комбинированных эффектов: конвекции, дисперсии (диффузии) и адсорбции. Из физических соображений ясно, что если растворение солей действует как генерирующий (источник), то адсорбция, наоборот, действует как дегенерирующий (сток) фактор.

Постановка задачи. Пусть пористая среда с пористостью m в твердой фазе содержит соли с концентрацией $\varphi(x)$. В пласт закачивается жидкость, не содержащая соли (например, пресная вода). Первоначально пласт был сухим и соли находились в твердой фазе в нерастворенном виде.

Уравнение баланса вещества (соли) в одномерном случае принимается как [2, 3]

$$m \frac{\partial c}{\partial t} + v \frac{\partial c}{\partial x} + \beta \frac{\partial S}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \quad (1)$$

где C - концентрация растворенного вещества, m^3/m^3 , S - объем адсорбированного вещества в одном килограмме породы, m^3/kg , D - коэффициент дисперсии, m^2/c , v - осредненная поровая скорость движения раствора, m/c , β - общая плотность пористой среды, kg/m^3 , t - время, x - линейная координата.

Определенные химические вещества могут различным образом реагировать составляющими грунта и вступать в различные реакции. В [4] чтобы описать общую реакцию предложена комбинация равновесной и кинетической моделей адсорбции. Дано аналитическое решение одномерного дифференциального уравнения с комбинацией линейной изотермы Френдлиха и обратимой кинетической адсорбции первого порядка. Анализировано отдельное или комбинированное влияние модельных параметров на кривые вытеснения и на профили адсорбции. Показана применимость комбинированной равновесно-кинетической модели к описанию переноса пестицидов, нитратов и тяжелых металлов в почвах. Этот подход позже был назван двухместной моделью равновесной и кинетической адсорбции (сорбции). Кинетическое уравнение обратимой адсорбции имеет вид [4, 5]

$$\frac{\partial S}{\partial t} = k_1 \frac{m}{\beta} c - k_2 S, \tag{2}$$

k_1, k_2 - const.

Начальные и граничные условия следующие:

$$c(0, x) = 0, \quad S(0, x) = 0, \tag{3}$$

$$c(t, 0) = 0, \tag{4}$$

$$D \frac{\partial c}{\partial x} = \varphi(x) x_0', \quad x_0(t) = \frac{vt}{m}. \tag{5}$$

Условие (5) означает мгновенное растворение солей, что создает диффузионный поток позади фронта смачивания.

Решение задачи. Задача (1) - (5) решена численно с использованием метода конечных разностей [6]. В рассматриваемой области $\Omega = \{(t, x), 0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq \infty\}$ введена равномерная по направлениям сетка

$$\bar{\omega}_{th} = \left\{ (t_j, x_i); t_j = \tau j, x_i = ih, \tau = \frac{T}{J}, i = \overline{0, I}, j = \overline{0, J} \right\},$$

где I - достаточно большое целое число, выбираемое так, чтобы отрезок $[0, x_I]$, $x_i = ih$, перекрывал область расчетного изменения полей c, S и N, h - шаг сетки по направлению x .

В открытой сеточной области

$$\omega_{th} = \left\{ (t_j, x_i); t_j = \tau j, x_i = ih, \tau = \frac{T}{J}, i = \overline{1, I-1}, j = \overline{1, J} \right\}$$

уравнения (1), (2), (5) аппроксимировались следующим образом:

$$m \frac{c_i^{j+1} - c_i^j}{\tau} + v \frac{c_i^{j+1} - c_{i-1}^{j+1}}{h} + \beta \frac{S_i^{j+1} - S_i^j}{\tau} = D \frac{c_{i-1}^{j+1} - 2c_i^{j+1} + c_{i+1}^{j+1}}{h^2}, \tag{6}$$

$$\frac{S_i^{j+1} - S_i^j}{\tau} = k_1 \frac{m}{\beta} c_i^j - k_2 S_i^j, \tag{7}$$

$$D \frac{c_{i-1}^{j+1} - c_{i+1}^{j+1}}{h} = \phi(Ih) \frac{v}{m}, \tag{8}$$

где c_i^j, S_i^j - сеточные значения функций $c(t, x), S(t, x)$ в точке (t_j, x_i) .

Из явного сеточного уравнения (7) определяем S_i^{j+1}

$$S_i^{j+1} = q_1 S_i^j + q_2, \tag{9}$$

где $q_1 = (1 - k_2 \tau)$, $q_2 = \frac{\tau k_1 m}{\beta} c_i^j$.

Сеточные уравнения (6) приводятся к виду

$$\gamma_1 c_{i-1}^{j+1} - \gamma_2 c_i^{j+1} + \gamma_3 c_{i+1}^{j+1} = -F_i^j, \tag{10}$$

где $\gamma_1 = \frac{D\tau}{h^2} + \frac{\tau v}{h}$, $\gamma_2 = \frac{2D\tau}{h^2} + m + \frac{v\tau}{h}$, $\gamma_3 = \frac{D\tau}{h^2}$, $F_i^j = mc_i^j - \beta(S_i^{j+1} - S_i^j)$.

Устанавливается следующий порядок расчета решений. По (9) определяется S_i^{j+1} , затем решая систему линейных уравнений (10) методом прогонки - c_i^{j+1} . При заданном k_2 шаг τ выбирается так, чтобы было $|q_1| < 1$. Тогда схема (9) устойчива, а для (10) условия устойчивости метода прогонки выполняются.

Результаты и выводы. Результаты некоторых расчетов для $\varphi(x) = 0,01 \text{ м}^3/\text{м}^3$ представлены на рис.1-2. Графики рис.1. показывают, что растворение солей на фронте $x_0(t)$ приводит к росту концентрации солей в растворе. С увеличением времени t вслед за $x_0(t)$ распределение концентрации претерпевает изменения. За счет адсорбционных эффектов концентрация в отдельно взятых точках пласта уменьшается. Зависимость адсорбции вещества от линейной координаты показана на рис.1.б. Аналогичные результаты при меньшем значении коэффициента дисперсии D показаны на рис.2. Поскольку v и m_1 в процессе расчетов остается без изменения, закон изменения $x_0(t)$ для всех расчетов одинаково, уменьшение значения D компенсируется значением градиента концентрации (вернее, значением $\frac{\partial c}{\partial x}$).

Поэтому, по сравнению с рис.1., на рис.2. можно заметить увеличение как $\frac{\partial c}{\partial x}$, так и самих значений c . Это в свою очередь приводит к интенсификации процесса адсорбции (рис.2.б). Согласно кинетическому уравнению темп адсорбции определяется двумя факторами: благоприятствующим, член $\frac{k_1 m_1}{\beta} c$, и неблагоприятствующим, член $-k_2 S$. В отдельных точках адсорбция может изменяться немонокотонно (рис.1, 2). Уменьшение значений адсорбции в отдельных точках с увеличением времени объясняется уменьшением доли благоприятствующего фактора $\frac{k_1 m_1 c}{\beta}$ за счет уменьшения c . По сути дела, мы имеем дело с обратимой адсорбцией и уменьшение S объясняется десорбцией вещества.

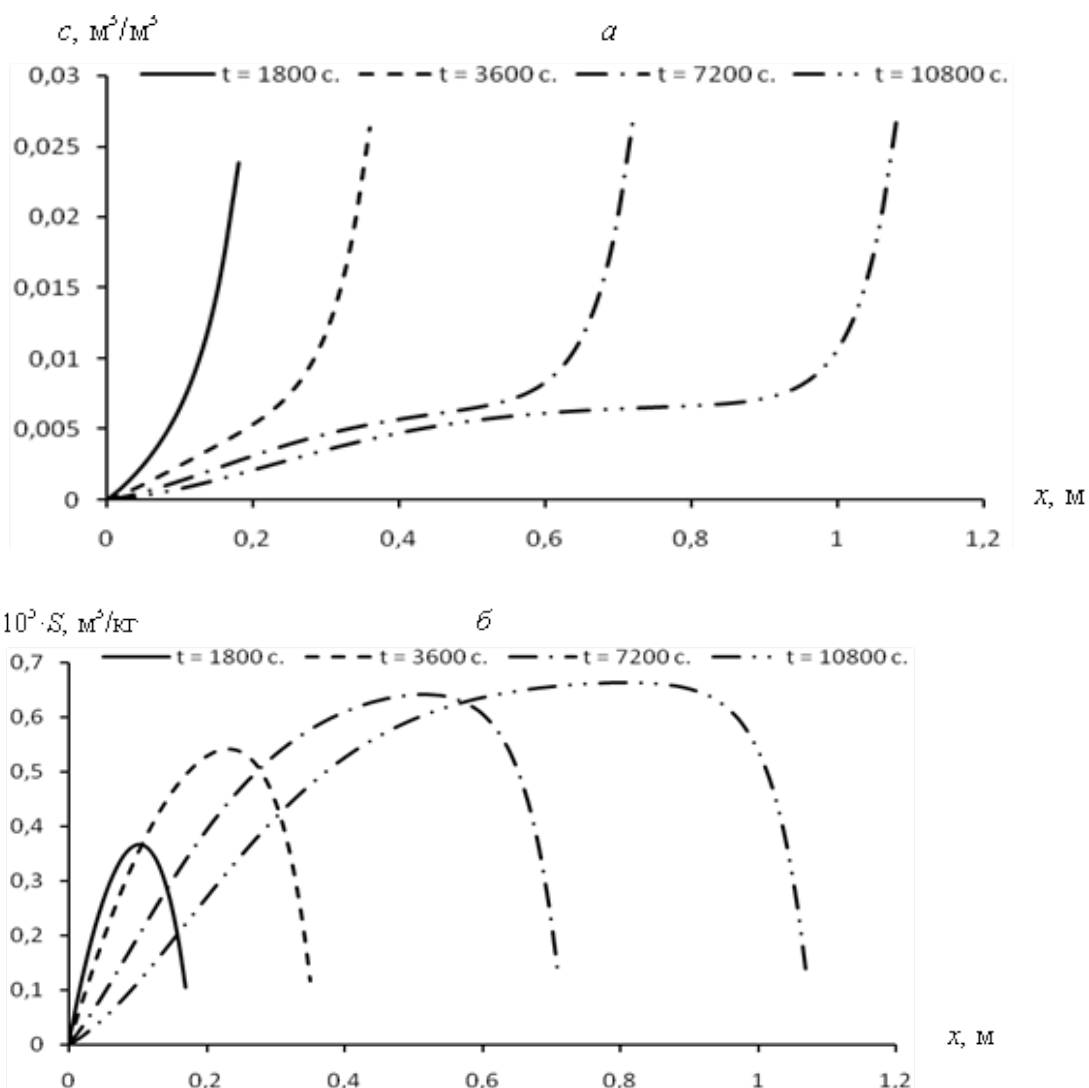
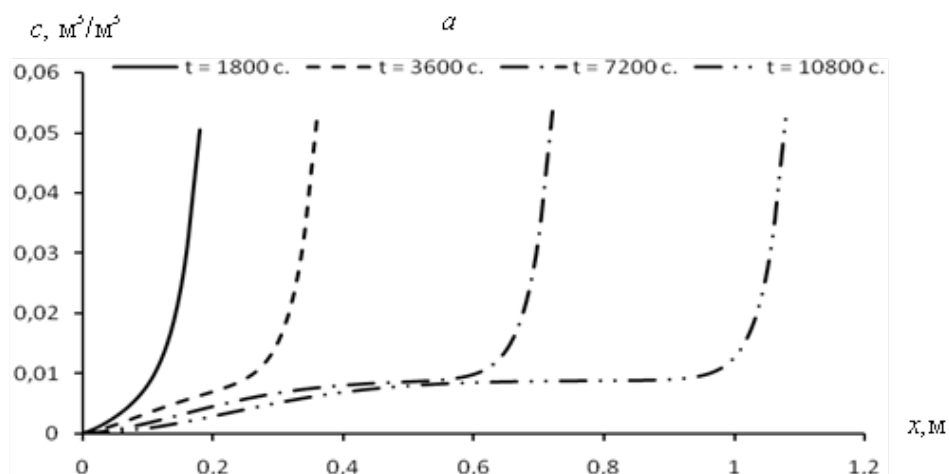


Рис.1. Профили концентраций $c(a)$, $S(b)$ при $k_1 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ c}^{-1}$, $k_2 = 5 \cdot 10^{-4} \text{ c}^{-1}$, $\beta = 2000 \text{ кг/м}^3$, $D = 3 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$, $\varphi(x) = 10^{-2} \text{ м}^3/\text{м}^3$ в различные моменты времени.



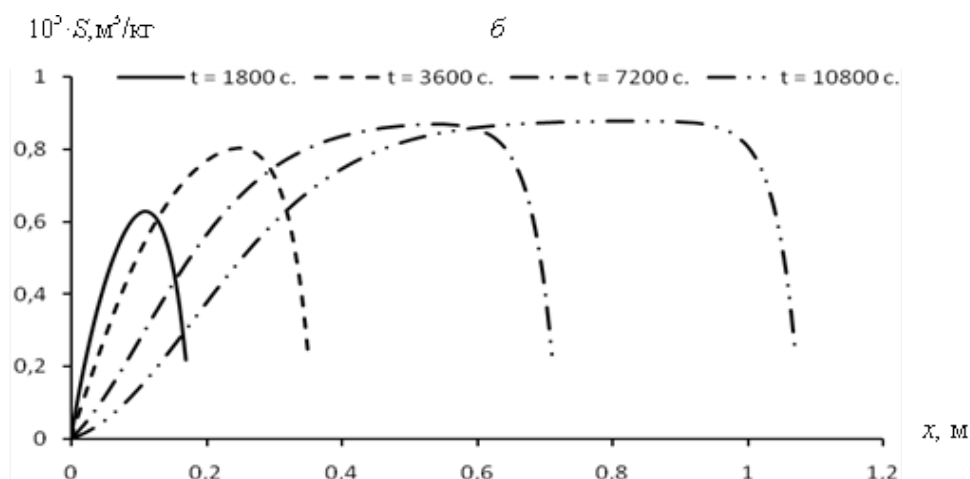


Рис.2. Профили концентраций $c(a)$, S (б) при $k_1 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ c}^{-1}$, $k_2 = 5 \cdot 10^{-4} \text{ c}^{-1}$, $\alpha = 2000 \text{ c}$, $D = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$, $\varphi(x) = 10^{-2} \text{ м}^3/\text{м}^3$ в различные моменты времени.

Установлено, что растворение солей на фронте смачивания приводит к росту концентрации солей в растворе. За фронтом смачивания за счет адсорбционных эффектов концентрация в отдельно взятых точках уменьшается. Для заданного закона продвижения фронта смачивания уменьшение значений D приводит к образованию больших концентраций и их градиентов. Использование нелинейной кинетики адсорбции при прочих равных параметрах приводит к увеличению значений адсорбции, и следовательно, уменьшению C .

Литература

1. Данаев Н.Т., Корсакова Н.К., Пеньковский В.И. Массоперенос в прискважинной зоне и электромагнитный каротаж пластов. Алматы: КНУ, 2005. – 208 с.
2. Bear, J. Dynamics of fluids in porous media, Elsevier, New York, 1972, 764 pp.
3. Хужаёров Б.Х., Махмудов Ж.М., Зикийев Ш.Х. Перенос вещества в пористой среде, насыщенной подвижной и неподвижной жидкостью // ИФЖ. Том 83, №2. 2010. 248-254 стр.
4. Cameron, D.R., Klute, A. Convective-Dispersive Solute Transport With a Combined Equilibrium and Kinetic Adsorption Model // *Water resources research*, 1977. Vol. 13. NO. 1, Pp. 183-188.
5. Van Genuchten M.Th., J.M. Davidson and P.J. Wierenga, An evaluation of kinetic and equilibrium equations for the prediction of pesticide moment through porous media // *Soil Sci. Soc. Am. Proc.*, 1974. 38(1), 29-35.
6. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. - 656 с.

UDK: 517.9

ПОСТРОЕНИЕ АЦИКЛИЧЕСКИХ И МОНОЦИКЛИЧЕСКИХ ОБЛАСТЕЙ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ.

Ф.Х.Саттаров, Э.А.Исмоилов

Самаркандский государственный университет

Аннотация. В статье рассматривается вопрос о построении ациклических и моноциклических областей для некоторых двумерных автономных систем вида $\frac{dx}{dt} = P(x, y)$, $\frac{dy}{dt} = Q(x, y)$; Метод исследования основан на свойствах дифференциального оператора $D(\alpha, \beta) = \alpha'_x + \beta'_y$, определенного в пространстве однозначных аналитических функций $\alpha(x, y)$ и $\beta(x, y)$, удовлетворяющих функциональному уравнению

$\alpha Q - \beta P = P'_x + Q'_y$; В случаях существования аналитических решений этого функционального уравнения, находятся досточные условия существования не более одного предельного цикла для некоторых двумерных динамических систем.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, траектория, движение, динамическая система, фазовая плотность, решение.

Ba'zi Avtonom Sistemalar Uchun Assiklik Va Monossiklik Sohalarni Yasash

Annotatsiya. Maqolada ikki o'lchovli $\frac{dx}{dt} = P(x, y), \frac{dy}{dt} = Q(x, y)$ ko'rinishdagi avtonom dinamik sistemalar uchun assiklik va monossiklik sohalarni yasash masalasi qaraladi. Tadqiqot usuli $D(\alpha, \beta) = \alpha'_k + \beta'_y$ ko'rinishidagi differensial operatorning xossalari asoslangan. Berilga sistema bilan birgalikda ushbu $\alpha Q - \beta P = P'_x + Q'_y$ funksional tenglamaning $P(x, y)$ va $Q(x, y)$ funksiyalarning maxsus ko'rinishlari uchun bir qiymatli analitik yechimlarni $\alpha(x, y)$ va $\beta(x, y)$ mavjud bo'lgan hollarda limitik sikllarning yagonalik kriteriyalari aniqlanadi

Kalit so'zlar: differensial tenglama, trayektoriya, harakat, dinamik sistema, fazoviy tekisliklar, yechim.

Construction Of Acyclic And Monocyclic Regions For Certain Autonomous Systems

Abstract. In article the question of creation of acyclic and monocyclic areas for some two-dimensional autonomous systems of a look is considered $\frac{dx}{dt} = P(x, y), \frac{dy}{dt} = Q(x, y)$; The method

of a research is based on properties of the differential operator $D(\alpha, \beta) = \alpha'_k + \beta'_y$, defined in space unambiguous analytical function $\alpha(x, y)$ and $\beta(x, y)$ satisfying to the functional equation $\alpha Q - \beta P = P'_x + Q'_y$; In cases of existence of analytical solutions of this functional equation, there are conditions no more than one limit a cycle for some two-dimensional dynamic systems.

Key words: differential equations, trajectory, movement, dynamic system, decision.

Введение. В статье рассматривается вопрос о построении ациклических и моноциклических областей для некоторых двумерных автономных систем вида $\frac{dx}{dt} = P(x, y), \frac{dy}{dt} = Q(x, y)$, где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ предполагаются однозначными и аналитическими функциями своих аргументом. Применяется метод [1] и [2], основанных на свойства дифференциального оператора $D(\alpha, \beta) = \alpha'_k + \beta'_y$, определенного в пространстве однозначных аналитических функций $\alpha(x, y)$ и $\beta(x, y)$, удовлетворяющих функциональному уравнению

$$\alpha Q - \beta P = X'_x + Y'_y,$$

Находятся досточные условия существования не более одного предельного цикла для некоторых автономных систем на плоскости.

I. Рассмотрим автономную систему дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y + \psi(x, y) \equiv P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = \varphi(x) \equiv Q(x, y), \end{cases} \quad (1)$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x, y)$ однозначные и аналитические функции своих аргументов на всей плоскости (x, y) .

Теорема 1. Пусть правые части системы (1) удовлетворяют следующим условиям:

- 1) $\varphi(0) = 0, \varphi'(0) > 0, x \cdot \varphi(x) \neq 0, x \neq 0,$
- 2) $\psi'_x(0, y) = 0, \psi''_{xx}(0, y) = 0, \psi(0, 0) = 0,$
- 3) Функция $\phi(x, y) \equiv \frac{d}{dx} \left(\frac{\psi'_x}{\varphi} - \psi \right)$ сохраняет знак в плоскости (x, y) .

В таком случае эта система не может иметь более одной замкнутой траектории.

Доказательство: Из условий 1) и 2) теоремы непосредственно следует, что начало координат является единственным состоянием равновесия системы.

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ \varphi'(0) & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (2)$$

соответствующее этой точке, имеет чисто мнимые корни $\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{-\varphi'(0)}$, следовательно начало координат есть либо фокус, либо центр. Направление на траекториях системы может быть установлено непосредственно: при $x = 0$ и $y > 0$ из первого уравнения системы (1) имеем

$\frac{dx}{dt} < 0$. Это означает, что в точках оси ординат с возрастанием t абсцисса x убывает,

следовательно, движение на траекториях системы осуществляется в положительном направлении. Функциональное уравнение [1], соответствующие этой системе

$$\alpha[\varphi(x)] - \beta[-y + \psi(x, y)] = \psi'_x \quad (3)$$

имеет регулярное решение

$$\alpha = y - \psi(x, y) + \frac{\psi'_x(x, y)}{\varphi(x)}, \quad \beta = -\varphi(x), \quad (4)$$

такое, что

$$D(M) \equiv \Phi(x, y)$$

По условию теоремы $\Phi(x, y)$ знакопостоянная функция в плоскости (x, y) , следовательно, к рассматриваемому случаю применимы все рассуждения теоремы 2 [1], согласно которой система (1) имеет не более одной замкнутой траектории, окружающей состояние равновесия.

Теорема доказана.

II. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \varphi(y) \equiv P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= f(x) + \varphi(y)g(x) \equiv Q(x, y), \end{aligned} \quad (5)$$

где $f(x)$, $\varphi(y)$, $g(x)$ и $\varphi(y)$ аналитические функции при всех x и y . Сформулируем условия, при выполнении которых система (5) не может иметь замкнутых траекторий.

Теорема 2. Пусть правые части динамической системы (5) удовлетворяют следующим условиям:

- 1). $f(0) = 0, f'(0) > 0, xf(x) \neq 0, x \neq 0,$
- 2). $\varphi(0) = 0, \varphi'(0) = 0, \varphi''(0) \neq 0,$
- 3). $\psi(0) = 0, \psi'(0) < 0, y \cdot \psi(y) \neq 0, y \neq 0,$
- 4). $g(x) \geq 0, (g = 0), g(0) \neq 0,$

$$5). F(y) = \frac{\varphi'(y)}{\psi(y)} \text{ –монотонная функция при всех действительных } y.$$

В таком случае рассматриваемая система не имеет замкнутых траекторий.

Доказательство. Прежде всего заметим, что система (5) имеет одну единственную особую точку типа центра или фокуса в начале координат, что следует из условий 1) и 3) теоремы. Используя рассуждения предыдущей теоремы, легко показать, что движение изображающей точки при возрастании t совершается в положительном направлении, Т.е. система (5) является системой класса R [2]. Соответствующее функциональное уравнение для данной системы

$$\alpha[f(x) + \varphi(y)g(x)] - \beta\psi''(y) = g(x)\varphi'(y) \tag{6}$$

имеет решение [2]

$$\alpha \equiv 0, \beta = -g(x) \frac{\varphi'(y)}{\psi(y)}, \tag{7}$$

регулярное всюду в плоскости (x,y) и такое, что, соответствующий оператор

$$D(M) = -g(x)F'(y) \tag{8}$$

представляет собой знакопостоянную функцию. Так как при этом $D_0 \neq 0$, то это показывает, что выполнены все условия теоремы, согласно которой рассматриваемая система не может иметь предельных циклов. *Теорема доказана.*

Пример: Динамическая система класса R

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -y - y^3 - y^5 \equiv P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= x + y^2 \left(1 + x^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} y^2 + \frac{1}{6} y^4 \right) \right) \equiv Q(x, y) \end{aligned} \tag{9}$$

имеющая в начале координат неустойчивый фокус кратности единица, удовлетворяет всем требованиям перечисленным в теореме. Следовательно, система (9) не имеет замкнутых траекторий на фазовой плоскости.

Заключение. Из вышеизложенных доказанных теорем можно сделать следующие заключения.

- 1) Из теоремы 1 следует, что для рассматриваемой системы (1) можно построить моноциклическую область в окрестности начало координат, если существуют однозначные аналитические решения $\alpha(x, y)$ и $\beta(x, y)$ функционального уравнения (3). Тогда оператор $D(M) \equiv \Phi(x, y)$ представляет собой знакопостоянную функцию переменных x и y , и это позволяет сделать вывод о существовании не более одного предельного цикла на всей плоскости (x,y) .
- 2) Из теоремы 2 следует, что для динамической системы (5) можно построить ациклическую область, как только функции $f(x)$, $\varphi(y)$, $g(x)$ удовлетворяют условиям 1-5 теоремы.

Таким образом, в этом случае рассматриваемая система (5) вообще не имеет на фазовой плоскости замкнутых траекторий. Приведенный пример системы вида (5) показывает, что такие системы с аналогичными характеристиками встречаются очень часто на практике.

Литература

1. Н.Ф.Отроков. Аналитические интегралы и предельные циклы// Волго-Вятское издательство, Нижний Новгород. -1996 г. –стр. 23-25.
2. Ф.Х.Саттаров. Об условиях существования и единственности предельных циклов// Ученые записки Нижнего Новгородского университета, вып. 188, 2000 г, -стр. 89-100.
3. Ф.Х.Саттаров, Э.А.Исмоилов. Достаточные условия отсутствия предельных циклов// “Меъморчилик ва қурилиш муаммолари” илмий техник журнал. 2014 йил, 2-сон, -б 88-89.

UDK 539.3

UCH QATLAMLI KOMPOZIT SILINDRIK QOBIQ BURALMA TEBRANISHLARINING MATEMATIK MODELII

B.F.Yalg'ashev

*Toshkent davlat texnika universiteti*E-mail: burxon-f@inbox.uz burxon@samdu.uz

Annotatsiya. Masalaning aniq matematik qo'yilishi asosida uch qatlamli doiraviy silindrik qovushoq-elastik qobiqning nostacionar buralma tebranishlari haqidagi masala qaralgan. Qobiq o'rta qatlamining "oralik" sirti nuqtalarining buralma ko'chishlari bosh qismlariga nisbatan tebranish tenglamalari keltirib chiqarilgan. Kiritilgan "oralik" sirti o'rta qatlamning boshqa qatlamlar bilan kontakt sirtlariga yoki qobiqning o'rta sirtlariga o'tishi mumkin.

Kalit so'zlar: silindrik qobiq, qatlam, qovushoq-elastiklik, buralma tebranish, tenglama, "oralik" sirt, kuchlanish, ko'chish.

Математическая модель крутильных колебаний трехслойной композитной цилиндрической оболочки

Аннотация. Рассмотрена задача о нестационарных крутильных колебаниях круговой цилиндрической трехслойной оболочки из вязкоупругого материала на основе точной математической постановки задачи. Получены уравнения колебания относительно главных частей крутильного смещения точек некоторой «промежуточной» поверхности среднего слоя оболочки, которая может, переходит в срединную или контактные, между слоями поверхности, оболочки.

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка, слой, вязкоупругость, крутильные колебания, «промежуточная» поверхность, уравнения, напряжения, перемещение.

Mathematical model of torsional vibrations of three layered composite cylindrical shell

Abstract. The problem about non-stationary torsional vibrations of a circular cylindrical three-layered shell from viscoelastic material on the basis of an exact mathematical statement of problem is considered. The equations of vibrations concerning principal parts of torsion displacement of some "intermediate" surface of middle layer of the shell which can be gained passes in median or contact, between layers of the shell surface are obtained.

Key words: cylindrical shell, layer, viscoelasticity, torsional vibrations, "intermediate" surface, equation, stress, displacement.

Silindrik (r, θ, z) koordinatalar sistemasida cheksiz uzunlikdagi uch qatlamli doiraviy silindrik qovushoq-elastik qobiqni qaraymiz. Umumiy holda qatlam materiallari turli hil bo'lib, ular orasidagi bog'lanish qattiq deb hisoblanadi.

Oz o'qni qobiqning simmetriya o'qi bo'ylab yo'naltiramiz va qatlamlarni 1-chizmada ko'rsatilganidek, ko'ndalang kesim bo'yicha markazdan uzoqlashish tartibida raqamlaymiz.

Qobiqning ichki va tashqi radiuslari r_1 va r_2 , o'rta qatlamning ichki va tashqi radiuslari esa r_1^* va r_2^* ; qatlamlar materiallarining zichliklari ρ_m ($m = 1, 2, 3$), siljish koeffisientlari esa μ_m ($m = 1, 2, 3$) bo'lsin.

Silindrik qobiqning buralma tebranishlari haqidagi masala o'qqa nisbatan simmetrik masaladir. Shu sababli ko'chish vektori va kuchlanish tenzori komponentalari θ koordinatadan bog'liq bo'lmaydi. Ko'chish vektorining faqat $U_\theta(r, z, t)$ komponentasi, kuchlanish tenzorining esa $\sigma_{r\theta}(r, z, t)$ va $\sigma_{z\theta}(r, z, t)$ komponentalari noldan farqli bo'ladi.

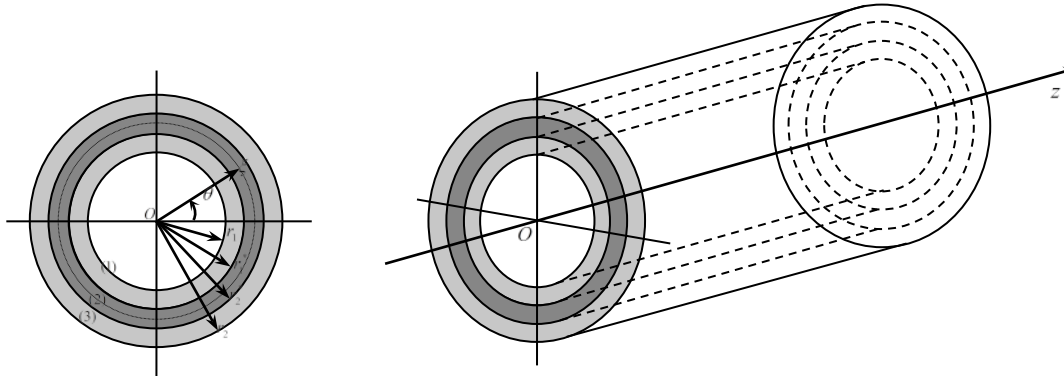
Bu holda kuchlanish tenzori komponentalariga nisbatan harakat tenglamalari

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(m)}}{\partial r} + \frac{2\sigma_{r\theta}^{(m)}}{r} + \frac{\partial \sigma_{z\theta}^{(m)}}{\partial z} = \rho_m \frac{\partial^2 U_\theta^{(m)}}{\partial z^2}, \quad (m = 1, 2, 3) \quad (1)$$

qatlamning barcha nuqtalari uchun o'rinli bo'ladi.

Qobiq qatlamlaridagi kuchlanish va deformatsiya orasidagi munosabatlar Boltzman integral munosabatlari ko'rinishida quyidagi chiziqli operatorlar orqali ifodalanadi

$$\sigma_{i\theta}^{(m)} = M_m(\varepsilon_{i\theta}^{(m)}), \quad M_m[\zeta(t)] = \mu_m \left[\zeta(t) - \int_0^t K_m(t-\tau)\zeta(\tau)d\tau \right], \quad (i = r, z), \quad (m = 1, 2, 3). \quad (2)$$



a) Ko'ndalang kesim

b) Uch o'lchamli ko'rinish

1-chizma. Uch qatlamli cilindrik qobiq

Qatlamlardagi ko'chishlarni ψ_m potensial funksiyalar orqali quyidagi ko'rinishda ifodalaymiz [2]

$$U_{\theta}^{(m)} = -\frac{\partial \psi_m}{\partial r}, \quad (m = 1, 2, 3). \quad (3)$$

Agar (1) harakat tenglamalari va (2) munosabatlarda (3) ni hisobga olsak ψ_m lrganisbatan

$$M_m(\Delta \psi_m) = \rho_m \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial r^2}, \quad (m = 1, 2, 3) \quad (4)$$

to'liqin tenglamalarini hosil qilamiz.

Vaqtning $t \leq 0$ paytida qobiq tinch holatda bo'lib, $t > 0$ bo'lganda uning ichki va tashqi sirtlariga buralma tebranishlarni yuzaga keltiruvchi taqsimlangan $f_{r\theta}^{(1)}(z, t)$ va $f_{r\theta}^{(2)}(z, t)$ tashqi kuchlar ta'sir qilsin. U holda

$$\begin{aligned} 1) \quad r = r_1 \text{ bo'lganda} \quad & \sigma_{r\theta}^{(1)}(r_1, z, t) = f_{r\theta}^{(1)}(z, t); \\ 2) \quad r = r_2 \text{ bo'lganda} \quad & \sigma_{r\theta}^{(2)}(r_2, z, t) = f_{r\theta}^{(2)}(z, t) \end{aligned} \quad (5)$$

shartlar o'rinli. qatlamlar orasidagi sirtlarda quyidagi kinematik va dinamik shartlar o'rinli deb hisoblaymiz

$$\begin{aligned} 3) \quad r = r_1^* \text{ bo'lganda} \quad & U_{\theta}^{(1)}(r_1^*, z, t) = U_{\theta}^{(2)}(r_1^*, z, t), \\ & \sigma_{r\theta}^{(1)}(r_1^*, z, t) = \sigma_{r\theta}^{(2)}(r_1^*, z, t); \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} 4) \quad r = r_2^* \text{ bo'lganda} \quad & U_{\theta}^{(2)}(r_2^*, z, t) = U_{\theta}^{(3)}(r_2^*, z, t), \\ & \sigma_{r\theta}^{(2)}(r_2^*, z, t) = \sigma_{r\theta}^{(3)}(r_2^*, z, t). \end{aligned} \quad (7)$$

Boshlang'ich shartlar esa nolga teng, ya'ni

$$t = 0 \text{ da } \psi_m = \frac{\partial \psi_m}{\partial t} = 0 \quad (m = 1, 2, 3). \quad (8)$$

$$t = 0 \text{ da } \psi_m = \frac{\partial \psi_m}{\partial t} = 0 \quad (m = 1, 2, 3). \quad (8)$$

Shunday qilib, uch qatlamli silindrik qobiqning nostasionar buralma tebranishlari haqidagi masala (5) - chegaraviy, (6) va (7) - kontakt, (8) – boshlang'ich shartlar bilan (4) to'liq tenglamasini yechishga keltirildi.

Masalani yechish uchun tashqi ta'sir kuchi funksiyasini quyidagi ko'rinishda ifodalaymiz [3]

$$f_{r\theta}^{(i)}(z, t) = \int_0^\infty \frac{\sin kz}{-\cos kz} \left. \right\} dk \int_{(i)} \tilde{f}_{r\theta}^{(i)}(k, p) e^{pt} dp, \quad (i = 1, 2) \quad (9)$$

bu yerda $(l) - p$ tekislikning mavhum o'q $(-i\omega_0, i\omega_0)$ ga o'ngdan tutashgan yopiq konturi. Bundan tashqari, $0 < k \leq k_0$, $\text{Im}|p| < \omega_0$ sohadan tashqarida $\tilde{f}_{r\theta}^{(i)}(k, p)$ ($i = 1, 2$) funksiyalar e'tiborga olmaslik darajada kichik.

ψ_m potensial funksiyalarni ham (9) ko'rinishda ifodalab hamda ularni (4) tenglamalarga qo'yib, almashtirilgan $\tilde{\psi}_m$ lar uchun odatdagi Bessel differensial tenglamalariga ega bo'lamiz

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \beta_m^2 \right) \tilde{\psi}_m = 0, \quad (m = 1, 2, 3) \quad (10)$$

bu yerda $\beta_m^2 = k^2 + \rho_m \tilde{M}_m^{-1} p^2$; $\tilde{M}_m = \mu_k [1 - \tilde{K}_m(p)]$; $\tilde{K}_m(p) = \int_0^\infty K_m(\tau) e^{-p\tau} d\tau$.

Bu tenglamalarning umumiy yechimlari quyidagi ko'rinishda bo'ladi

$$\tilde{\psi}_m = B_m^{(1)} I_0(\beta_m r) + B_m^{(2)} K_0(\beta_m r) \quad (m = 1, 2, 3), \quad (11)$$

bu yerda $I_0(\beta_m r)$, $K_0(\beta_m r)$ – Besselning modifikatsiyalangan funksiyalari.

Xuddi shunday $U_\theta^{(m)}$ ko'chishlarga ham (9) ko'rinishdagi integral almashtirishni qo'llab almashtirilgan $\tilde{U}_\theta^{(m)}$ lar uchun

$$\tilde{U}_\theta^{(m)} = -\beta_m [B_m^{(1)} I_1(\beta_m r) + B_m^{(2)} K_1(\beta_m r)] \quad (m = 1, 2, 3) \quad (12)$$

ga ega bo'lamiz.

Qobiqning o'rta qatlamidagi nuqtalarda ko'chish va kuchlanishlarni aniqlash uchun quyidagi formula bilan aniqlanuvchi [2] radiusni kiritamiz (1a-chizma)

$$\xi = \frac{r_1^*}{2} \left(\chi - \frac{r_1^*}{r_2^*} \right), \quad (13)$$

bu yerda χ o'zgarmas

$$2 + \frac{r_1^*}{r_2^*} \leq \chi \leq 2 \frac{r_2^*}{r_1^*} + \frac{r_1^*}{r_2^*}$$

tengsizlikni qanoatlantiradi.

Shuningdek, χ ning quyidagi qiymatlariga mos ravishda ξ qobiq o'rta qatlamining o'rta yoki kontakt sirtlari radiusi bo'lishi ham mumkin

$$2 + r_1^*/r_2^*; \quad 2r_2^*/r_1^* + r_1^*/r_2^*; \quad 1 + r_2^*/r_1^* + r_1^*/r_2^*.$$

Кейин I_1 va K_1 funksiyalarining standart qatorlardagi yoyilmasidan foydalanib, almashtirilgan ko'chishlarning radial koordinata bo'yicha darajali qatorga yoyilgan (12) ifodalarni keltirib qo'yamiz. qobiq o'rta qatlamining $\tilde{U}_\theta^{(2)}$ almashtirilgan ko'chishlari uchun keltirib chiqarilgan ifodalarga $r = \xi$ ni qo'yamiz va qatorning birinchi hadlari bo'lgan bosh qismlarni kiritamiz

$$\tilde{U}_{\theta 1}^{(2)} = \frac{1}{\xi} B_2^{(2)}, \quad \tilde{U}_{\theta 0}^{(2)} = -\frac{1}{2} \beta_2^2 \left\{ B_2^{(1)} - B_2^{(2)} \left[\ln \frac{\beta_2 \xi}{2} - \psi(1) - \frac{1}{2} \right] \right\}. \quad (14)$$

(5) chegaraviy shartlarni (11) umumiy yechimlar orqali ifodalaymiz

$$\beta_1^2 [I_2(\beta_1 r_1) B_1^{(1)} + K_2(\beta_1 r_1) B_1^{(2)}] = -M_{10}^{-1} [f_{r\theta}^{(10)}(k, p)];$$

$$\beta_3^2 [I_2(\beta_3 r_2) B_3^{(1)} + K_2(\beta_3 r_2) B_3^{(2)}] = -M_{30}^{-1} [f_{r\theta}^{(20)}(k, p)] \quad (15)$$

ni hosil qilamiz.

(5) – (7) ko‘rinishdagi chegaraviy shartlar [4] da ham keltirilgan va (15) ga o‘hshash munosabatlar hosil qilinib, uch qatlamli silindrik qobiqning chastota xarakteristikalari o‘rganilgan, lekin uning yordamida qaralayotgan sistemada sodir bo‘luvchi jarayonni to‘liq o‘rganib bo‘lmaydi.

Uch qatlamli silindrik qobiq buralma tebranishlari keltirib chiqarish maqsadida (6) va (7) kontakt shartlardagi $B_1^{(i)}$, $B_3^{(i)}$ ($i=1,2$) integrallash o‘zgarmlarini $B_2^{(1)}$ va $B_2^{(2)}$ o‘zgarmlar orqali, demakki $\tilde{U}_{\theta 1}^{(2)}$ va $\tilde{U}_{\theta 0}^{(2)}$ almashtirilgan ko‘chishlarning bosh qismlari orqali aniqlab, hamda ularni (15) ga qo‘yib chegaraviy shartlarni ko‘chishning bosh qismlari orqali ifodalaymiz.

Endi $b = \max\{\mu_m / \rho_m\}$, ($m=1,2,3$) bo‘lganda p Laplas almashtirishi parametrining $p \gg bk$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi vaqt oralig‘ida sodir bo‘ladigan to‘liq jarayonni qaraymiz [1]. Shu tarzda (15) chegaraviy shartlarda qatnashuvchi $\tilde{U}_{\theta 1}^{(2)}$ va $\tilde{U}_{\theta 0}^{(2)}$ funksiyalar, hamda β_m^{2n} operatorlarni quyidagi formulalar bo‘yicha teskari almashtiramiz

$$[U_{\theta 0}^{(2)}, U_{\theta 1}^{(2)}] = \int_0^\infty \frac{\sin kz}{-\cos kz} \left. \right\} dk \int_{(i)} [\tilde{U}_{\theta 0}^{(2)}, \tilde{U}_{\theta 1}^{(2)}] e^{pt} dp; \quad (16)$$

$$\lambda_m^n(\xi) = \int_0^\infty \frac{\sin kz}{-\cos kz} \left. \right\} dk \int_{(i)} (\beta_m^{2n} \xi) e^{pt} dp.$$

Natijada $U_{\theta 1}^{(2)}$ va $U_{\theta 0}^{(2)}$ larning vaqt va koordinata bo‘yicha hosilalariga nisbatan tartibi cheksiz bo‘lgan qator ko‘rinishidagi integro-differensial tenglamalar sistemasini hosil bo‘ladi va uch qatlamli silindrik qobiq buralma tebranishlarining umumiy tenglamasi deb ataladi. Uning yordamida amaliy masalalar yechishning imkoni yo‘q, shuning uchun undagi hadlar sonini cheklab turli yaqinlashishlardagi tenglamalarni hosil qilish mumkin. Faqat birinchi hadlar bilan chegaralansak ushbu integro-differensial tenglamalar sistemasini hosil qilamiz

$$\left[M_2 r_1^* (h_1^2 \lambda_1 + 2) \left(\frac{(r_1^*)^2}{8} N_2(r_1^*) \lambda_2^2 + \frac{\lambda_2}{2} - \frac{2}{(r_1^*)^2} \right) - M_1 h_1 \lambda_1 \left((r_1^*)^2 N_1(r_1^*) \lambda_2 + 2 \right) \right] \xi U_{\theta 0}^{(2)} +$$

$$+ [M_2 r_1^* ((h_1^2 \lambda_1 + 2) \lambda_2 - 8 M_1 h_1 \lambda_1) \left(\frac{r_1^*}{2} \right)^2] U_{\theta 1}^{(2)} = 2 \sqrt{r_1^*} f_{r\theta}^{(1)}(z, t);$$

$$\left[M_2 r_2^* (h_3^2 \lambda_3 + 2) \left(\frac{(r_2^*)^2}{8} N_2(r_2^*) \lambda_2^2 + \frac{\lambda_2}{2} - \frac{2}{(r_2^*)^2} \right) + M_3 h_3 \lambda_3 \left((r_2^*)^2 N_1(r_2^*) \lambda_2 + 2 \right) \right] \xi U_{\theta 0}^{(2)} +$$

$$+ [M_2 r_2^* ((h_3^2 \lambda_3 + 2) \lambda_2 + 8 M_3 h_3 \lambda_3) \left(\frac{r_2^*}{2} \right)^2] U_{\theta 1}^{(2)} = 2 \sqrt{r_2^*} f_{r\theta}^{(2)}(z, t), \quad (17)$$

bu yerda $\lambda_m = \rho_m M_m^{-1} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}$; $M_m(\xi) = \mu_m \left(\xi(t) - \int_0^t R_m(t-\tau) \xi(\tau) d\tau \right)$ ($m=1,2,3$); $h_1 = r_1^* - r_1$;

$$h_3 = r_2 - r_2^*; N_1(r_s^*) = \ln \frac{r_s^*}{\xi} + \frac{n+2}{2(n+1)} - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}; \quad N_2(r_s^*) = \ln \frac{r_s^*}{\xi} + \frac{n^2 + 5n + 5}{2(n+1)(n+2)} - \sum_{k=1}^{n+2} \frac{1}{k} \quad (s=1,2).$$

Qobiq bir jinsli bo‘lgan holda (17) dan bizga ma‘lum bo‘lgan qobiq tebranish tenglamalari [2] kelib chiqadi. Ushbu (17) tebranish tenglamalari bilan birgalikda qobiqning barcha qatlamlaridagi

ko'chish va kuchlanishlar uchun uning istalgan kesimidagi kuchlanganlik-deformatsiyalanganlik holatini aniqlashga imkon beruvchi formulalar keltirib chiqarilgan.

Adabiyotlar

1. Филиппов И.Г., Чебан В.Г. Математическая теория колебаний упругих и вязкоупругих пластин и стержней. – Киченев: «Штиинца», 1988.- 190с.
2. Худойназаров Х.Х., Амиркулова Ф.А. Взаимодействие цилиндрических слоев и оболочек со связанными полями. -Т.: Из-во “Наврўз”, 2011-336 с.
3. Петрашень Г.И. Проблемы инженерной теории колебаний вырожденных систем. // Исследования по упругости и пластичности.–Л.: Издательство ЛГУ. 1966. №5. с. 3 -33.
4. Wafik Abassi, Adil El Baroudi, Fulgence Razafimahery. Torsionalvibrationsoffluid-filledmultilayeredtransverselyisotropic finitescircularcylinder. International Journal of Applied Mechanics. DOI: 10.1142/S17588251165003.

UDK 534.112

DINAMIK SO'NDIRGICH O'RNATILGAN BALKA KO'NDALANG TEBRANISHLARINING USTIVORLIGI

X.M.Buranov, A.A.Parmonov

Samarqand davlat universiteti

E-mail: abdutolib1993@mail.ru

Annotatsiya. Balka va unga o'rnatilgan dinamik so'ndirgichdan iborat mexanik sistemaning kinematik qo'zg'atishlardagi tebranishlari ustivorligi masalasi qaralgan. Sistemaning ustivorlik shartlari topilgan.

Kalit so'zlar: tebranishlardan himoyalalanuvchi sistema, tebranishlar, ustivorlik, tebranishlar dekrementi, elastik dissipativ xarakteristika.

Устойчивость поперечных колебаний балки с динамическим гасителем

Аннотация. Рассматривается задача устойчивости механической системы, состоящей из балки и динамического гасителя колебаний при кинематических воздействиях. Найдены условия устойчивости системы.

Ключевые слова: виброзащитная система, колебания, устойчивость, декремент колебаний, упругодиссипативная характеристика.

Stability of bar with dynamic absorber on intersectional oscillations

Abstract. Problem of bar stability with dynamic absorber on kinematic influences is considered. Conditions of the system stability is found.

Keywords: vibroprotection system, oscillations, stability, vibration decrement, elastic-dissipate characteristics.

Ichki nomukammallikka ega taqsimlangan parametrli mexanik sistemalar dinamikasini tadqiq etish masalasi sistema harakat differensial tenglamalarining murakkab tuzilishga egaligi sababli yechilishi murakkab bo'lgan masalalardan hisoblanadi. Bu tipdagi masalalarning yechilishi maxsus metodlarni qo'llashni talab etadi. [1] da gisterezis elastik dissipativlik xususiyatlari e'tiborga olingan holda dinamik so'ndirgich o'rnatilgan balkaning harakat differensial tenglamalari tuzilgan va tebranish tenglamalari uzatish funksiyalari ko'rinishida olingan. Ushbu ishda bu yechimlarning ustivorligi masalasi qaraladi. Nomukammal elastik dissipativ xarakteristikasi G.Pisarenko gipotezasi asosida olingan.

Sistema harakat differensial tenglamalari quyidagicha:

$$EJ[1 + C_0(-\eta_1 + i\eta_2)] \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{24}{h^3} EJ(-\eta_1 + i\eta_2) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \int_0^{h/2} f(\xi_{or}) z^2 dz \right] +$$

$$+ \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - c[1 + (-\theta_1 + i\theta_2)(D_0 + f(\zeta_{or}))] \zeta \delta(x - x_0) = -\rho F \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}; \quad (1)$$

$$m \frac{\partial^2 w(x_0)}{\partial t^2} + m \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + c[1 + (-\theta_1 + i\theta_2)(D_0 + f(\zeta_{or}))] \zeta = -m \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2},$$

bunda E –balka elastiklik moduli; J –balka kesimining inersiya momenti; $f(\xi_{or})$ va $f(\zeta_{or})$ – tebranishlar dekrementi bo‘lib, ξ_{or} va ζ_{or} nisbiy deformatsiyalarning funksiyalari:

$$f(\xi_{or}) = C_1 \xi_{or} + C_2 \xi_{or}^2 + \dots + C_{r_1} \xi_{or}^{r_1}; \quad f(\zeta_{or}) = D_1 \zeta_{or} + D_2 \zeta_{or}^2 + \dots + D_{r_2} \zeta_{or}^{r_2}, \quad (2)$$

$\eta_1, \eta_2, \theta_1, \theta_2$ – o‘zgarma koeffitsiyentlar.

Sistema uchun quyidagi uzatish funksiyalari olingan [1]:

$$\Phi(q_{ka}) = |q_{ka}| = \frac{W_0}{|\Delta|} \left\{ [d_k \omega^2 - n^2(1 - \theta_1 Q)(\mu \mu_k u_0 + d_k)]^2 + [\theta_2 Q n^2(\mu \mu_k u_0 + d_k)]^2 \right\}^{1/2}; \quad (3)$$

$$\Phi(\zeta_a) = |\zeta_a| = \frac{W_0}{|\Delta|} \left\{ [(1 - d_k u_0) \omega^2 - p^2(1 - \eta_1 R)]^2 + [\eta_2 p^2 R]^2 \right\}^{1/2}.$$

bunda

$$\Delta = [\omega^2 - p^2(1 + (-\eta_1 + i\eta_2)R)][\omega^2 - n^2(1 + (-\theta_1 + i\theta_2)Q)] -$$

$$- n^2(1 + (-\theta_1 + i\theta_2)Q)\mu \mu_k u_0^2 \omega^2.$$

bunda $\mu = \frac{m}{m_c}$; $\mu_k = \frac{\ell}{d_{2k}}$; m_c – balka massasi; $d_k = \frac{d_{1k}}{d_{2k}}$; p_k – energiya tarqalishi e‘tiborga

olinmagan holdagi xususiy chastota;

$$d_{1k} = \int_0^\ell u_k dx; \quad d_{2k} = \int_0^\ell u_k^2 dx; \quad R = C_0 + \frac{3EJ\mu_k}{m_c p_k^2} \sum_{i=1}^{r_2} C_i q_{ka}^i \frac{h^i}{2^i(i+3)} G_{ki};$$

$$Q = D_0 + f(\xi_{or}); \quad G_{ki} = \int_0^\ell u_k \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} \left| \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} \right|^i \right) dx.$$

Olingan yechimlarning ustivorligini tekshiramiz. Bunda 2 ta xususiy hollarni qarab o‘tamiz: 1) balkaning elastiklik xarakteristikasi chiziqli bo‘lgan hol – $R = const$ va $\eta_2 = 0$, 2) dinamik so‘ndirgich elastik xarakteristikasi chiziqli bo‘lgan hol – $Q = const$ va $\theta_2 = 0$.

(3) tenglamalar bilan aniqlanuvchi egri chiziqlar chiziqlimas mexanik sistemalarning o‘ziga xos jihati – tebranishlar amplitudasining chastotaga bog‘liqligi sababli ma‘lum shartlar bajarilganda argument (ω) bo‘yicha bir qiymatli aniqlanmasligi mumkin. Tebranishlar chastotasining bu qiymatlariga mos soha qaralayotgan mexanik sistema (3) yechimi uchun noustivorlik sohasi bo‘ladi. Ushbu sohani topish uchun (3) tenglamalarning har biridan to‘liq differensiallarni hisoblab,

$\frac{d\Phi(q_{ka})}{d\omega}$ ni topamiz. Oshkormas funksiyalarning bir qiymatli bo‘lishligining Lagranj teoremasiga

asosan, ushbu hosila chekli qiymatlarga ega bo‘lishlik shartlarini topamiz.

Hisoblashlarni bajarib, qaralayotgan sistema uchun ustivorlik oraliqlarini aniqlash imkonini beruvchi quyidagi munosabatlarni olamiz:

birinchi hol uchun

$$\begin{aligned} \omega^4 - \omega^2 \left(n^2 (1 + \mu \mu_k u_0^2) + p_k^2 (1 - \eta_1 R) \right) + p_k^2 (1 - \eta_1 R) n^2 = \\ = \beta_{1,2} \left[(1 + \mu \mu_k u_0^2) \omega^2 - p_k^2 (1 - \eta_1 R) \right] n^2, \end{aligned} \quad (6)$$

bunda

$$\beta_{1,2} = \frac{1}{2} \left[-\theta_1 (2Q + Q' \zeta) \pm \sqrt{\theta_1^2 \zeta^2 Q'^2 - 4Q(Q' \zeta) \theta_2^2} \right]. \quad (7)$$

ikkinchi hol uchun

$$\left(2A + \left(2R + \frac{\partial R}{\partial q_k} q_k \right) \eta_1 B \right)^2 = B^2 \left[\left(\eta_1 \frac{\partial R}{\partial q_k} q_k \right)^2 - 4\eta_2^2 R \frac{\partial(Rq_k)}{\partial q_k} \right], \quad (8)$$

bunda

$$A = (\omega^2 - p^2) (\omega^2 - n^2 (1 - \theta_1 Q)) - n^2 (1 - \theta_1 Q) \mu \mu_k u_0^2 \omega^2;$$

$$B = p^2 (\omega^2 - n^2 (1 - \theta_1 Q)).$$

Olingan (6) – (8) tengliklar biror haqiqiy ω larda bajarilsa, (3) bilan aniqlanuvchi egri chiziq (oshkormas funksiya) argumentning bu qiymatlarida chekli hosilaga ega bo‘lmasligini va oshkormas funksiya bir qiymatli bo‘lmasligini ifodalaydi. Demak, bu tengliklarni sistema ustivorlik oraliqlarini topish ifodalari hisoblanadi.

(8) tenglikni m_c ga ko‘paytirib, m ning o‘rniga nol qo‘ysak (dinamik so‘ndirgichsiz) balkaning chiziqalmas tebranishlarining ustivorlik shartlarini hosil qilamiz.

$$\begin{aligned} (\omega^2 - p^2 - p^2 \eta_1 R)^2 - q_k \frac{\partial R}{\partial q_k} p^2 \eta_1 (\omega^2 - p^2 - p^2 \eta_1 R) + \\ + p^4 \eta_2^2 \left(R + q_k \frac{\partial R}{\partial q_k} \right) = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Xuddi shunga o‘xshash munosabat [2] da olingan natijalarga mos keladi.

Adabiyotlar

1. Dumatov O.M. Issledovanie poperechnix kolebaniy sterjnya s dinamicheskimi gasitelem/ Kiyev. – 1987.-11s.-Rus.-Dep. v UkrNIINTI. 11.05.87, №1431-Uk87.
2. Rijkov L.M. O statsionarnix poperechnix kolebaniyax sterjnya s gisterezisnim rasseyanijem energii.// Probl. prochnosti. №4. 1987. – s. 102-105.
3. Pisarenko G.S. Obobshennaya nelineynaya model ucheta rasseyanija energii pri kolebaniyax. – Kiyev: Naukovo dumka, 1985. – 240 s.
4. Buranov X., Raxmonov A. Poperechniye kolebaniya uprugogo sterjnya s dinamicheskimi gasitelem kolebaniy//Sovremennije problemi mexaniki gruntov va slojnih reologicheskix sistem. Materiali mejd. nauchno-texnicheskoy konfrensii. - Samarkand-2013. 123-125 s.

УДК 658.512.011

ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДОСТОВЕРНОСТИ ЭЛЕКТРОННЫХ ДОКУМЕНТОВ С УЧЕТОМ СВОЙСТВ И ОСОБЕННОСТЕЙ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕДАЧИ И ОБРАБОТКИ ДАННЫХ¹ А.Р.Ахатов, ²Н.О.Исроилов, ³Д.А.Махкамова¹доктор технических наук, профессор кафедры информационных технологий СамГУ,²студент отделения прикладной математики и информатики СамГУ,³магистрант Самаркандского филиала ТУИТE-mail: akmalar@rambler.ru

Аннотация. Разработаны методические основы повышения достоверности информации электронных документов на основе использования свойств и особенностей переходных процессов ввода, передачи и обработки данных. Предложены алгоритмы выделения, формирования и использования контролирующих наборов данных на основе методов отбора достоверных и недостоверных элементов по метрическим характеристикам и контроля достоверности в нечеткой среде. Реализованные алгоритмы протестированы в системах электронного документооборота предприятий и организаций.

Ключевые слова: электронный документ, достоверность информации, кластеризация, переходной процесс, принадлежность, нечеткая среда, база данных, база знаний, нечеткие правила, стратегия контроля.

Ma'lumotlarni uzatish va qayta ishlash o'tish jarayonlarining xossa va xususiyatlari asosida elektron hujjatlar ishonchligini ta'minlash

Annotatsiya. Ma'lumotlarni kiritish, uzatish va qayta ishlashning o'tish jarayonlari xossa va hususiyatlarini qo'llash bo'yicha elektron hujjatlar axboroti ishonchligini oshirish uslubiy asoslari ishlab chiqilgan. Ishonchli va ishonchsiz elementlarga metrik tavsiflar bo'yicha ajratish, notiniq muhitda nazorat qilish, hamda ma'lumotlarni nazorat qiluvchi jamlamani tanlash, shakllantirish va foydalanish usullariga asoslangan algoritmlar taklif etilgan. Joriylashtirilgan algoritmlar korxon va tashkilotlarning elektron hujjat almashuv tizimlarida sinovdan o'tkazilgan.

Kalit so'zlar: elektron hujjat, axborot ishonchligi, klasterlash, o'tish jarayoni, tegishlilik, notiniq muhit, ma'lumotlar bazasi, bilimlar bazasi, notiniq qoidalar, nazorat strategiyasi.

Ensuring of electronic documents authenticity by help of properties and features of transition process of data transfer and processing

Abstract. The methodical bases to increase the authenticity of information in electronic documents are developed on the basis of use of properties and features of transition processes during data input, transfer and processing. The algorithms of allocation, formation and use of supervising data sets are offered on the basis of methods for selection of authentic and doubtful elements under metric characteristics and methods for control of authenticity in fuzzy environment. The realized algorithms are tested in systems of electronic document circulation of enterprises and organizations.

Keywords: non-stationary object, identification, data processing, characteristic function, membership function, potential function, clustering, fuzzy environment, base of knowledge.

Актуальность темы. Существующие методы повышения достоверности информации в современных системах электронного документооборота (СЭД) предприятий и организаций, главным образом, основаны на применение статистических и динамических моделей, на основе которых строятся алгоритмы поиска, распознавания, классификации, интерпретации контролируемых данных в электронных документах (ЭД). Этим моделям свойственна высокая вычислительная сложность, многоитеративность алгоритмов и их реализация осуществляется сложными вычислительными схемами для решения дифференциальных, разностных, рекуррентных уравнений [1]. В связи с этим, перспективным направлением проектирования эффективных СЭД с целью устранения недостатков существующих методов, является применение компонентов математического аппарата мягких вычислений, дающих высокоточные и менее затратные инструменты для повышения достоверности информации ЭД, а следовательно оптимизации результатов анализа и обработки данных [2].

Одним из наиболее эффективных инструментов контроля достоверности ЭД представляется формирование и использование наборов данных, в которых отражаются закономерности переходных процессов для использования особенностей и свойств информации, представляемой для обнаружения и коррекции различного рода искажений, возникающих на этапах ввода, передачи и обработки [2,3].

Настоящая работа посвящена разработке методических основ повышения достоверности передачи и обработки ЭД на основе набора данных со специфическими характеристиками, используемых при построении методов и технологий ИАД с компонентами мягких вычислений, обобщающих также возможности статистических и динамических моделей при поиске, распознавании, классификации контролируемой информации в СЭД.

Основные подходы и задачи повышения достоверности информации ЭД. Предлагаемый подход предполагает выделение, формирование и использование набора данных с локально-оптимальным покрытием из множества ЭД, циркулирующих в СЭД.

Повышение достоверности информации ЭД при этом базируется на результаты решений следующих задач:

- формирование базы данных (БД), включающей контролируемые наборы данных, выделенных из множества элементов ЭД, сведения о статистических параметрах, динамических, специфических характеристиках данных и законах распределений;

- формирование базы знаний (БЗ), включающих различные правила контроля и анализа данных в зависимости от характера, методов и подходов к повышению достоверности обработки данных на основе статистических, динамических, нечетких моделей и нейронных сетей (НС);

- разбиение общего интервала значений элементов ЭД на непересекающиеся подмножества (сегменты, группы, классы); установление границ сегментов, интервалов значений подмножеств;

- выработка стратегии контроля достоверности обработки данных для обнаружения и коррекции искаженных значений элементов ЭД на основе обобщения свойств, особенностей вводимых данных, специфических характеристик набора [3].

- оптимизация методов повышения достоверности информации ЭД с учетом параметров внешних и внутренних обратных воздействий в переходных процессах, которые продолжаются до момента выбора и принятия достоверного альтернативного решения о точности обработки данных.

Следует отметить, что существующие методики определения стратегии и методов оценки достоверности обработки данных базируются на локальные метрики, в которых применяются эвристические алгоритмы и статистические критерии для выбора альтернативных решений, а самое главное в них, не в достаточной мере используются динамические свойства данных, полезные знания и специфические характеристики объектов [4].

В этой связи особенно актуально формирование и использование контролируемых наборов (КН), в которые включены логические отношения, взаимосвязи, закономерности распределения признаков, отражающиеся в виде специфических характеристик и особенностей каждого объекта при построении стратегии и методов оценки достоверности обработки данных.

Наряду с этими вопросами, требуется, чтобы механизмы выделения и формирования КН и настройки параметров на основе нечетких множеств и нечетких логических выводов имели возможность выполняться за приемлемое время и оптимизировать обработку данных.

Построение механизмов выделения и формирования контролируемых наборов для повышения достоверности ЭД. На этапе предварительной обработки данных необходимо решение следующих задач:

- выделение, разбиение контура идентифицируемых ЭД на сегменты, определение количественных признаков и непересекающихся интервалов их значений;

- определение стратегий контроля достоверности элементов ЭД по функциям принадлежности, границ разрешенных значений или же интервалов, оценка достоверности формирования классов достоверных и недостоверных элементов объекта;

- преобразование значений количественных признаков в номинальные, присвоение их значениям номеров разрешенных интервалов и классов, которым они принадлежат;

– формирование матрицы метрики близости по парам номинальных значений для выделения разности между достоверными значениями элементов объекта и недостоверными элементами противоположного к нему класса;

– определение степени коррелированности элементов, упорядочивание по степени коррелированности, формирование матрицы метрики близости с учетом коррелированности;

– введение механизмов настройки параметров, построение правил оценки достоверности результатов для достижения высокой эффективности обработки данных.

Обобщенный алгоритм выделения и формирования контролируемых наборов для повышения достоверности элементов ЭД. Пусть в СЭД представляется множество образцов ЭД $E_0 = \{S_1, \dots, S_m\}$ и требуется по значениям элементов ЭД и измерениям координат в контуре сформировать множества достоверных и недостоверных значений, которые обозначаются в виде двух непересекающихся классов K_1 и K_2 , а $E_0 = K_1 \cup K_2$.

При описании пространства контура ЭД требуется определение принадлежности элементов к классам K_1 и K_2 и формирование набора, который может включать достоверные и недостоверные элементы во входной последовательности $X(n) = (x_1, \dots, x_n)$.

Вводимый алгоритм предполагает выделение множества $\{x_i\}_{i \in I}$ достоверных элементов ЭД по I индексам из $X(n)$ и включение следующих процедур:

– разбиение множества значений элементов $\{x_i\}_{i \in I}$ на непересекающиеся интервалы для выделения достоверных и недостоверных значений и кластеризация по классам K_1 и K_2 ;

– проверка принадлежности признака к одному из непересекающихся интервалов;

– определение для каждого элемента индивидуального описания, а также градации достоверности из E_0 в номинальной шкале;

– оценки достоверности значения C -го элемента, принадлежащего к описанию E_0 , для чего элементы упорядочиваются в последовательности по возрастанию степени коррелированности $r_{c_1}, r_{c_2}, \dots, r_{c_m}$;

– разбиение последовательности $r_{c_1}, r_{c_2}, \dots, r_{c_m}$ при $\tau_c \geq 2$ на τ_c непересекающихся интервалов $[r_{c_u}, r_{c_v}]^i$, для чего требуется соблюдение следующих условий:

$$1 \leq u, u \leq v \leq m, i = 1, 2, \dots, \tau_c;$$

– принятие решений по значениям элемента в интервале $[r_{c_u}, r_{c_v}]^i$ относительно градации достоверных и недостоверных значений;

– формирование представителей $d_1^i(u, v)$, $d_2^i(u, v)$ соответственно класса K_1 достоверных и класса K_2 недостоверных значений элементов в интервале $[r_{c_u}, r_{c_v}]^i$.

– вычисление максимума критерия в пределах границ интервала $[r_{c_u}, r_{c_v}]^1$ последовательности $r_{c_1}, r_{c_2}, \dots, r_{c_m}$ в следующем виде

$$\left| \frac{d_1^i(u, v)}{|K_1|} - \frac{d_2^i(u, v)}{|K_2|} \right| \rightarrow \max;$$

– установление степени вхождения расчетного значения критерия в границе $[r_{c_u}, r_{c_v}]^1, \dots, [r_{c_u}, r_{c_v}]^{p-1}$;

– проверка условия соответствия значения критерия в $[r_{c_u}, r_{c_v}]^p$ при $p > 1$;

– проверка условия покрытия всех значений $r_{c_1}, r_{c_2}, \dots, r_{c_m}$ непересекающимися интервалами.

Модифицированный алгоритм выделения и формирования контролирующих наборов для повышения достоверности элементов ЭД. Для уменьшения комбинаторной сложности рассмотренного обобщенного алгоритма требуется построение алгоритма с упрощенной кластеризацией. Алгоритм кластеризации включает следующие процедуры:

- разбиение пространства элементов на пары $a, b \in \{1, \dots, m\}$;
- ввод объектов $S_a = (x_{a1}, \dots, x_{an})$ и $S_b = (x_{b1}, \dots, x_{bn})$ для метрического сравнения;
- осуществление метрического сравнения по условию

$$g(a, b, i, j) = \begin{cases} 2, & x_{ai} \neq x_{bi} \quad \text{è} \quad x_{aj} \neq x_{bj}, \\ 1, & x_{ai} \neq x_{bi} \quad \text{è} \quad x_{aj} = x_{bj}, \\ 0, & x_{ai} = x_{bi} \quad \text{è} \quad x_{aj} = x_{bj}; \end{cases}$$

- определение меры близости элементов $S_u \in K_t, t = 1, 2$;
- определение пары контролирующих элементов $(x_i, x_j),$ где $i, j \in \{1, \dots, n\}$ в виде

$$b_{ij}(S_u) = \frac{\sum_{S_v \in K_{3-t}} g(u, v, i, j)(l_i(x_{ui}) + l_j(x_{uj}))}{2|K_1||K_2|}, \quad i \neq j,$$

где $l_i(x_{ui})$ ($l_j(x_{uj})$) - число элементов из E_0 с градацией x_{ui} (x_{uj});

- проверка принадлежности значений элементов в пределах $0 \leq b_{ij}(S_u) \leq 1,$ при $i \neq j$;

- проверка выполнения условия:

$$b_{ij}(S_u) = 1, \text{ если } l_i(x_{ui}) = l_j(x_{uj}) = |K_t|, \quad \forall S_p \in K_t, \quad x_{ui} = x_{pi}, \quad x_{uj} = x_{pj};$$

- формирование упорядоченной последовательности по степени принадлежности элементов к классам;

- формирование матрицы $B(S_u) = \{b_{ij}(S_u)\}_{n \times n}$ по рекурсивной процедуре построения упорядоченной последовательности $x_{u1}, x_{u2}, \dots, x_{un}$ из $X(r) = (x_1, \dots, x_r),$ при $r < n$;

- выделение пары (x_i, x_j) с наибольшим значением b_{ij} из матрицы $B(S_u)$ и включение их в последовательность $x_{u1}, x_{u2}, \dots, x_{un}$ по правилу слева – направо, для чего задается в (x_i, x_j) порядок следования по условию $l_i(x_{ui}) \geq l_j(x_{uj});$

- удаление из $B(S_u)$ строк и столбцов с номерами i и j и представление следующей пары из $x_{u1}, x_{u2}, \dots, x_{un}$ для формирования КН.

Состав рассмотренного модифицированного алгоритма расширяется включением процедур поиска с запретом и по правилам ограниченного перебора, выделения и формирования КН по метрическим характеристикам признакового пространства элементов ЭД.

В связи с этим представляют большой интерес результаты исследования методов оценки принадлежности признаков к классам по критерию меры близости [5,6].

Методика оценки достоверности значений признаков элемента по критерию меры близости. Для вычисления оценок достоверности элемента по КН определяются достоверные и недостоверные значения на основе меры близости:

$$\rho(S_a, S_b) = \sum_{x_i \in X(k)} \begin{cases} 1, & x_{ai} \neq x_{bi}, \\ 0, & x_{ai} = x_{bi}, \end{cases}$$

где $X(k)$ - определяемый набор достоверных значений элементов;

$S_a = \{x_{a1}, \dots, x_{an}\}, S_b = \{x_{b1}, \dots, x_{bn}\}$ - объекты соответственно с достоверными и недостоверными значениями элементов.

Алгоритм контроля достоверности информации предполагает включение процедур проверки принадлежности элемента S_d к классу K_p , $p = 1, 2$, определения метрических характеристик $S_{d_0}, S_{d_{m-1}}, S_{d_0} = S_d$, формирования упорядоченной последовательности признаков элементов E_0 .

Для определения класса достоверных элементов устанавливаются отношения между наборами признаков $X(k) = (x_1, \dots, x_k)$, $k \geq n$, которые вытекают из неравенств

$$\rho(S_{d_i}, S_d) \leq \rho(S_{d_{i+1}}, S_d), \text{ где } S_d \in K_p \cap E_0.$$

Устойчивость алгоритма оценивается по функционалу

$$F(S_d, X(k)) = \max_{0 \leq i \leq m-1} \left(\frac{z_p(i)}{|K_p \cap E_0|} - \frac{z_{3-p}(i)}{|K_{3-p} \cap E_0|} \right), \quad (6)$$

где $z_p(i)$, $z_{3-p}(i)$ - число элементов в $\{S_{d_0}, \dots, S_{d_i}\} \subset E_0$, определяемых из классов K_p и K_{3-p} в множестве допустимых значений (6) в интервале $[0, 1]$;

S_d - элемент, принадлежащий классу достоверных;

K_p - коэффициент принадлежности к классу достоверных элементов, $p = 1, 2$.

Следующей задачей исследования по оптимизации методов оценки достоверности ЭД является применение моделей нечетких множеств и нечетких логических выводов и выработка механизмов настройки параметров переходных процессов передачи и обработки данных.

Методы оценки достоверности ЭД в нечеткой среде. В настоящее время отсутствуют конструктивные методы повышения достоверности передачи и обработки данных в СЭД на основе моделей нечетких множеств и нечетких логических выводов. Для принятия решений о достоверности обрабатываемых ЭД в нечеткой среде необходимо построение комплекса процедур анализа и обработки данных для представления альтернативных решений.

Пусть требуется выработать m - альтернатив для принятия решений о достоверности результатов обработки данных по сформированным m нечетким правилам, представляемым в виде числовых оценок.

Методика решения задачи предполагает применение функций принадлежности (ФП) $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$. Для нечетких множеств $\{\mu_j / \sum_{s=1}^n \mu_s\}_{j=1}^n$ рассматриваются величины $\{f_{jk} / \sum_{s=1}^n f_{sk}\}_{j=1}^n$ в качестве некоторого оценочного функционала F для принятия решения $\varphi_k \in \Phi$. Согласно методике задачи решаются при задании следующих сведений:

- множество $A^l = \{a_1^l, \dots, a_{ml}^l\}$ возможных состояний контролируемых ЭД, в которых учитываются предыдущие $(l-1)$ состояния для формирования множества $\Phi^l = \{\varphi_1^l, \dots, \varphi_{ml}^l\}$ возможных альтернативных решений;

- априорные вероятности $p^l = \{p_1^l, \dots, p_{nl}^l\}$ состояний переходных процессов;

- N - шаги выполнения алгоритма контроля достоверности информации, в котором синтезируются алгоритмы нечетких множеств и нечеткой логики на этапе l ($1 \leq l \leq N$).

Оптимизация контроля достоверности обработки данных на основе контролирующего набора. Входной элемент X в ЭД представляется в диапазоне чисел от 0 до k . Динамика переходных процессов ввода, передачи и обработки данных задается

дифференциальным уравнением $\frac{dx}{dt} = uk - v$, а функционал качества контроля достоверности информации представляется в виде

$$Q = \int_0^T (x(t) - g)^2 dt \rightarrow \min,$$

где k - коэффициент динамической характеристики элемента;

u - параметр переходного процесса;

v - параметр внешних воздействий и помех.

Принципом контроля достоверности обработки данных является поддержание и регулирование значения выходного (расчетного) параметра u на требуемом уровне для минимизации среднеквадратического отклонения значений контролируемого элемента ЭД от порогового, который заложен в КН [5]. В соответствие с чем, расчетный выход сравнивается со значениями характеристик КН, выявляются разности, значения которых формируются бинарной последовательностью 0 и 1, где «0» - соответствует недостоверному элементу, а «1» - достоверному.

Отметим, что оптимизация контроля достоверности по традиционной постановке решения задачи, как правило, основывается на задании условия Коши $x(0) = 0$. В данном случае для оптимизации известный принцип максимума Понтрягина неприменим, так как при достижении $x(t)$ порогового уровня g могут существовать бесконечное количество переключений.

В связи с этим, предлагаются эвристические подходы к решениям задач оптимизации на основе следующих вариантов правил контроля достоверности обработки данных.

Вариант 1. Контроль достоверности осуществляется на основе правил:

- если $x < g$ то $u = 1$;

- если $x = g$ то $u = v/k$;

- если $x > g$ то $u = 0$.

Элемент x представляется в реальном режиме времени с определенным интервалом значений. Если в принятом интервале значение контролируемого элемента превышает уровень порога g , то считается, что значение расчетного элемента недостоверно.

Вариант 2. Контроль достоверности осуществляется по адаптивным правилам:

- если x "*меньше g* " то $u = 1$;

- если x " *g* " то $u = v/k$;

- если x "*больше g* " то $u = 0$.

Вариант 3. Контроль достоверности производится по «мягким» правилам:

- если x "*меньше g* " то u "*около 1*";

- если x " *g* " то u "*около v/k* ";

- если x "*больше g* " то u "*около 0*".

Заключительный этап исследования состоит в определении оценки эффективности E_0 для стратегий контроля достоверности обработки данных на основе предложенных правил по принципу применения набора-эталона. Для этого анализируется следующее соотношение

$$E_0 = \lambda D_s + (1 - \lambda) T_s,$$

где D_s , T_s - соответственно емкости подмножество разрешенных и запрещенных значений элементов;

$\lambda \in [0,1]$ - значения вероятностной функции оценки принадлежности элемента к подмножествам D_s и T_s .

Установлено, что эффективность алгоритма контроля достоверности обработки данных на основе КН в первую очередь зависит от степени принадлежности элемента к границам подмножеств D_s и T_s , стратегии расчета параметра u , регулированием значений которого повышается либо уменьшается значение E_0 .

Литература

1. Jumanov I.I., Akhatov A.R. The control of information transfer reliability in intellectual control systems on the basis of statistical redundancy //Sixth World Conference on Intellectual Systems for Industrial Automation, Uzbekistan, TSTU. - Tashkent, 2010. – p. 70-75
2. Жуманов И.И., Ахатов А.Р. Интеллектуальный контроль достоверности текстовой информации на основе учета свойств и распределений данных // «Химическая технология. Контроль и управление» - ТГТУ, - Ташкент, 2011. - № 1 (37), - с.41-47.
3. Жуманов И.И., Ахатов А.Р., Тишликов С.А. Адаптивные алгоритмы оптимизации процессов обнаружения и исправления ошибок в системе обработки текстов // Журнал «Вестник ТУИТ», Ташкентский университет информационных технологий. - Ташкент, 2011. - №3/2011. - с. 31-37
4. Прикладные методы исследования процессов принятия решений / Под ред. Р. И. Трухаева. - Владивосток: ДВНЦ АН СССР, 1976. - 188 с.
5. Прикладные нечеткие системы / Под ред. Т. Тэрано. - М.: Мир, 1993.-512С.
6. Рыжов А.П. Элементы теории нечетких множеств и измерения нечеткости. - М.: Диалог-МГУ, 2000. - 116 с.

УДК 658.512.011

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ НА ОСНОВЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ СВОЙСТВ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ И СПЕЦИФИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ИЗОБРАЖЕНИЙ

О.И. Джуманов

Самаркандский государственный университет

E-mail: olimjondi@mail.ru

Аннотация. Сформулирована проблема и разработаны методические основы идентификации, распознавания и классификации на основе использования свойств нейронных сетей (НС) и специфических характеристик изображений динамических объектов. Предложена методика редукции неинформативных точек в контурах изображений, настройки вычислительных схем НС и параметров модели идентификации объекта. Исследована эффективность реализации алгоритмов идентификации на примере изображений отпечатков пальцев.

Ключевые слова: динамический объект, изображение, отпечатки пальцев, идентификация, специфические характеристики, минуции, папиллярные линии, нейронная сеть, вычислительные схемы, структурные компоненты, адаптивное обучение, настройка.

Neyron tarmog'i xossalari va tasvir maxsus tavsiflarini qo'llash asosida dinamik obyektlarni identifikatsiya qilish

Annotatsiya. Neyron tarmog'i (NT) va dinamik obyektlar tasvirining maxsus tavsiflarini qo'llash asosida identifikatsiyalash, tanish va sinflashtirish muammosi talqin qilingan va uslubiy asoslari ishlab chiqilgan. Tasvir konturida noinformativ nuqtalarni bartaraf qilish, NT hisoblash sxemalarini va obyektini identifikatsiyalash modeli parametrlarini muvofiqlashtirish uslubiyati taklif etilgan. Identifikatsiya algoritmlari joriylashuv samaradorligi barmoq izi tasvirlari misolida tadqiq qilingan.

Kalit so'zlar: dinamik obyekt, tasvir, barmoq izlari, identifikatsiya, maxsus tavsiflar, minusiya, papillyar chiziqlar, neyron tarmog'i, hisoblash sxemlari, tarkibiy komponenta, adaptiv o'rgatish, sozlash.

Identification of dynamic objects on the basis of use of properties of neural networks and specific characteristics of the images

Abstract. The problem is formulated for optimization of informative attributes selection on the basis of convolution neural network (NN) during non-stationary objects identification. Modified computing circuits of NN are developed and mechanisms are offered for adjustment of parameters of structural component in convolution NN. The efficiency of realization of algorithms for intellectual analysis of data is investigated in systems of monitoring of industrial-technological complexes.

Keywords: dynamic object, image, fingerprints, identification, specific characteristics, minucius, papillary line, neural network, computing circuits, structural components, adaptive training, adjustment.

Актуальность темы. Современные технологии интеллектуального анализа данных (ИАД) представляют базовую основу многих практических приложений, направленных на решение задач распознавания и классификации изображений динамических объектов, например, отпечатков пальцев, пыльцевых зерен, одноклеточных организмов, минералов в составе горной породы и др. Востребованность систем и технологий ИАД особенно повышается при применении методов верификации, идентификации, интерпретации и прогнозирования нестационарных процессов с динамическими объектами в медицинских, биологических, экологических исследованиях, а также при создании систем управления технологическими процессами и защиты информации с функциями контроля за доступом пользователей [1].

В связи с этим имеют большую актуальность исследования по разработке методов и алгоритмов распознавания и классификации на основе применения нейронных сетей (НС), которые представляют широко распространенную компоненту систем ИАД при построении методов повышения качества идентификации и оптимизации обработки данных. При этом механизмы использования уникальных свойств НС, отбора информативных признаков, извлечения и использования специфических характеристик и структурных особенностей объектов, формирования наборов обучающих данных изображений динамических объектов составляют новизну намеченного направления исследований, находящегося на стадии развития [2,3].

Настоящая работа посвящена разработке методических основ построения технологий идентификации динамических объектов на основе НС для визуализации, распознавания и классификации динамических объектов сложной структуры с разветвленными глобальными и локальными характеристиками по результатам решения следующих задач [4,5]:

- выделение и формализация специфических глобальных и локальных характеристик и особенностей динамического объекта для идентификации и интеллектуального анализа;
- разработка основных принципов, подходов и методов идентификации динамического объекта за счет учета динамики изменения локальных характеристик;
- параметризация специфических характеристик объекта в алгоритмах идентификации и обучения НС;
- разработка механизмов настройки параметров моделей идентификации и обучения НС на основе использования свойств глобальных и локальных характеристик изображений динамических объектов;
- разработка методики и реализация методов и алгоритмов идентификации для распознавания и классификации изображений отпечатков пальцев.

Выделение специфических характеристик и особенностей динамического объекта для интеллектуального анализа. В каждом изображении динамического объекта определяется два типа специфических характеристик: глобальные и локальные признаки. Глобальные признаки объекта представляют папиллярный узор, область изображения, ядро, пункт «дельта», тип линий, количество линий. Локальные признаки для каждого объекта уникальны и специфические структурные характеристики определяются изменением папиллярных линий в виде окончания, раздвоения, разрывов и т.д.

Изображение динамического объекта в различные моменты идентификации отличаются друг от друга поворотом, смещением, изменением масштаба и площадью соприкосновения. В то же время различные объекты имеют одинаковые глобальные признаки, но совершенно разными могут быть их локальные признаки, которые необходимо учитывать для обеспечения

качественной идентификации.

Изображение имеет характерную центральную область (центр), а также дельту, т.е. точку в которой линии расходятся и характеризуются следующими основными геометрическими параметрами: количеством дельт (окончаний и раздвоений линий); местоположение особых точек (центр и смещение); расположением линий (средним расстоянием между линиями, средней протяженностью линии).

Наряду с этим, при идентификации динамического объекта выделяются наиболее информативные характеристики в виде плотности распределения папиллярных линий или гребневый счет. Наиболее универсальной характеристикой развития папиллярного рельефа объекта (контура изображения) является количество особых точек, присутствующих на единице площади изображения объекта. К особенностям объекта, позволяющий оценить информативность выделенных характерных точек в контуре изображения папиллярного рельефа следует отнести дисперсию (разброс) плотности особых точек, угол наклона рисунков одного типа и разброс углов между папиллярными рисунками, параметры средней протяженности папиллярных линий и распределение этих параметров. Среди них параметры разброса локальных характеристик, например, плотность особых точек на каждом изображении более подвержены искажениям, которые приводят к большой погрешности идентификации.

Ниже предложена модель идентификации изображения динамического объекта, которая основывается на использовании особенностей локальных признаков и минуций путем выделения характеристик одинаковой размерности, сопоставления и анализа.

Основные принципы и методы идентификации на основе локальных характеристик. Основные принципы идентификации изображений динамического объекта отражаются в модели, которая предназначена для описания контура изображения и процедур сопоставления идентифицируемого изображения объекта с характеристиками эталонных примеров (исходное состояние объекта), выявления отклонений, перемещений, смещений, расчета коэффициентов соответствия, определения порогов оценки изменения локальных характеристик. Обработка изображения объекта производится по особому формату, который позволяет решать задачи, связанные с вычислением ориентации папиллярных линий, улучшением их качества, проведением бинаризации изображения по линиям [5].

Формируется матрица данных I по описанию исходного изображения динамического объекта и ее размерность задается в пикселях в виде натуральных чисел (от 0 до 255 – цвет пикселя). Для каждой точки (i, j) в матрице I формируется окно вида [3]

$$W(u, v, n) = \{(i, j) \mid |i - u| < n, |j - v| < n\}.$$

Для любой точки каждого окна определяются векторы

$$P(i, j) = ((i - u), (j - v)); \quad d(i, j) = P(i, j) / |P(i, j)|.$$

Окна $W(u, v, n)$ для всех точек $(u, v) \in I$ используются при уточнении направления полученных векторов. При этом задается нулевой вектор $D(i, r)$, а для других векторов $D(i, j)$ определяется угол между векторами $D(i, r)$ и $D(i, j)$.

Для решения задачи задаются следующие условия. Если этот угол тупой, то определяется расстояние

$$D(i, r) = D(i, r) - D(i, j),$$

в противном случае $D(i, r) = D(i, r) + D(i, j)$.

Для всех точек окна $W(u, v, n)$ вычисляется вектор $D(u, v) = D(i, r) / |D(i, j)|$.

Алгоритм параметрической идентификации на основе использования специфических характеристик нестационарного объекта. В предложенном методе идентификации изображений динамических объектов используются следующие параметры: вектора $D(u, v)$; средний вес окон $W(u, v, n)$; суммы $S_1 = \sum_{(i, j) \in W} g_1(u, v, i, j)$ и

$S_2 = \sum_{(i,j) \in W} g_2(u, v, i, j)$; порог разности $|I(u, v) - I(i, j)| = T_{\bar{A}}$ элементов (u, v) ; коэффициенты

g_1, g_2 смещения точек в контуре изображения объекта, которые определяются как [4]:

$$g_1(u, v, i, j) = \begin{cases} 0, & \text{если } \Delta_{\bar{A}} < T_{\bar{I}}; \\ d(i, j) \cdot \Delta_{\bar{A}}, & \text{если } d_x(i, j) \geq 0; \\ -d(i, j) \cdot \Delta_{\bar{A}}, & \text{если } d_y(i, j) < 0. \end{cases}$$

$$g_2(u, v, i, j) = \begin{cases} 0, & \text{если } \Delta_{\bar{A}} < T_{\bar{I}}; \\ d(i, j) \cdot \Delta_{\bar{A}}, & \text{если } d_x(i, j) \geq 0; \\ -d(i, j) \cdot \Delta_{\bar{A}}, & \text{если } d_x(i, j) < 0. \end{cases}$$

Вектор $D(u, v)$ определяется согласно правилу

$$D(u, v) = \begin{cases} \frac{S_1}{|S_1|}, & |S_1| > |S_2|; \\ \frac{S_2}{|S_2|}, & |S_2| > |S_1|. \end{cases}$$

Средний вес элементов (u, v) окна $W(u, v, n)$ рассчитывается как

$$\bar{I}(u, v) = \frac{S(u, v)}{Q(u, v)},$$

где $S(u, v) = \sum_{(i,j) \in W} I(i, j) \cdot |\sin \alpha|$, $Q(u, v) = \sum_{(i,j) \in W} |\sin \alpha|$;

α - угол между векторами $D(u, v)$ и $d(i, j)$, $(i, j) \in W$, $(u, v) \in I$;

$|\sin \alpha|$ - вес окна элемента $(i, j) \in W$.

В случае бинаризации изображения объекта средний вес элементов (u, v) окна $W(u, v, n)$ рассчитывается как

$$\bar{I}(u, v) = \begin{cases} 0, & \frac{S(u, v)}{Q(u, v)} > 0; \\ 255, & \frac{S(u, v)}{Q(u, v)} \leq 0. \end{cases}$$

Далее окна $W(u, v, n)$ рассматриваются для всех точек (u, v) , которые не имеют соседних линий с точками черного цвета и в спектре черных линий фиксируются крайние точки. Сумма коэффициентов смещения при этом рассчитывается как

$$S(u, v) = \sum_{(i,j) \in W} I(i, j) \cdot \cos \alpha.$$

Алгоритм идентификации изображений отпечатков пальцев на основе изменения папиллярных линий. Для выявленных точек черный цвет изображения заменяется на белый путем замены элементов (u, v) матрицы I нулями, при этом соответствующие суммы $S(u, v)$ должны быть не больше величины $T_{\bar{I}}$.

Далее для определения минуции выбирается центральная точка в установленном окне и определяется число ненулевых пикселей, находящихся вокруг окна. Если количество ненулевых пикселей вокруг окна равно одной минуции, то фиксируется «окончание» папиллярных линий [6].

Если количество ненулевых пикселей вокруг окна равно трем минуциям, то фиксируется точка «раздвоения». Координаты обнаруженных минуций и их углы ориентации записываются в вектор $M(p)$, где p – количество минуций.

Рассматривается пара элементов множества $M(p)$, вычисляется расстояние между

элементами данной пары. Если расстояние между элементами меньше, чем заданная величина $T_{\bar{r}}$, то они удаляются из множества $M(p)$, а вместо этого элемента в множество $M(p)$ добавляется средняя точка.

Для редукции неинформативных точек в папиллярных линиях изображения объекта вводятся следующие процедуры:

- удаление из множества $M(r)$ тех точек (u, v) , которым соответствует нулевой вектор $D(u, v)$, в результате чего образуется множество минуций $M(q)$, где $q \leq p$;

- формирование окончательного множества реальных минуций при достижении краевых точек изображения путем удаления из множества $M(q)$ тех точек, расстояние которых от края изображения меньше, чем величина $T_{\bar{r}}$;

- выполнение идентификации изображения отпечатков пальцев по реальным минуциям, оценка качества идентификации по коэффициенту робастности изображения объекта.

Таким образом, из множества $M(p)$ определяются реальные минуции путем удаления соседних точек в контуре папиллярных линий. В результате формируется множество минуций $M(q)$, где $q \leq p$.

Робастность изображений отпечатков пальцев оценивается по коэффициенту

$$K = 1 - \frac{M(q)}{M(p)}.$$

Если значение коэффициента равно нулю, то идентифицированное изображение считается не робастным к эталонному объекту; если значение коэффициента близко к единице, то идентифицированное изображение считается робастным. Отметим, что значение коэффициента может достигать единицы в случае информативных минуций.

Для дальнейшей регуляции качества идентификации изображения на основе папиллярных линий алгоритм может быть дополнен процедурами нахождения следующих параметров: центр, перемещение, поворот и изменение масштаба папиллярных линий изображения объекта. При этом перемещение определяется по центральным точкам элементов множеств M и E , которые фиксируются как средняя точка элементов множества реальных минуций. Выбираются точки $a \in M(p)$ и $b \in E(q)$ такими, чтобы расстояние от точки a до центральной точки M и расстояние от точки b до центральной точки E были меньше величины $T_{\bar{r}}$. Перемещение изображения завершается сдвигом всех точек множества $M(p)$ таким образом, чтобы точки a и b совпали.

Для определения поворота рассматриваются все пары минуций (a, b) , $a \in M(p)$ и $b \in E(q)$, удовлетворяющих следующим требованиям:

- расстояние от точки a до центральной точки M и расстояние от точки b до центральной точки E должно быть меньше, чем $T_{\bar{r}}$;

- изображение поворачивается вокруг центральной точки на угол α , где α - угол между векторами D рассматриваемой пары минуций.

Алгоритм идентификации изображений динамического объекта на основе НС. Рассмотрена многослойная НС, которая состоит из последовательно соединенных между собой слоев нейронов. Входной слой НС осуществляет прием и распространение входной информации x_1, \dots, x_L . Каждый нейрон скрытого слоя имеет несколько входов, соединенных с выходными нейронами предыдущего слоя или же непосредственно с входными x_1, \dots, x_L и лишь только один выход. Нейроны последнего слоя сети описывают выходной результат. НС суммирует, поступающие к нему сигналы от нейронов предыдущего слоя с весами, а активационные функции преобразуют результат этих суммирований [2].

В предложенном алгоритме необходимая устойчивость обучения НС обеспечивается с помощью применения нелинейной функции активации $F(\xi)$ в виде [5]

$$Y = F(\xi) = 1/(1 + \exp(-\xi)),$$

где $\xi = \sum_{k=1}^L x_k \omega_k$;

x_k – входы нейрона;

ω_k – синаптические веса входных нейронов;

L – количество входов сети.

Синтезируется алгоритм обучения НС по методу обратного распространения ошибки, использующего априори о выходах последнего слоя сети.

Сеть обучается на множестве пар входов и выходов, при котором синаптические веса нейронов инициализируются случайными числами в диапазоне от 0 до 0,1.

Вычисляется выходной вектор сети и производится коррекция весовых матриц, сформированных для каждой обучающей пары. Коррекция весов нейронов в скрытом слое НС осуществляется по выражению

$$\omega_{l-k}(i+1) = \omega_{l-k}(i) + \eta \delta_m Y_l,$$

где i – номер текущей итерации обучения НС;

$$\delta_m = Y_m(1 - Y_m) \sum_{k=1}^N \delta_k \omega_{m-k} - \text{погрешность скрытого слоя } m;$$

ω_{l-m} – величина синаптических весов нейронов входного слоя, связанных с нейронами скрытого слоя m ;

η – коэффициент настройки изменения средней величины весов нейронов, который также определяет скорость обучения сети;

Y_l – выход сети;

N – количество нейронов выходного слоя.

Алгоритм обучения НС в реализованном варианте модели сети выполняет перебор всех обучающих пар с целью минимизации суммарной среднеквадратической ошибки. При этом вычисляются суммарные ошибки текущей, предыдущей итерации и их разности. Требуется, чтобы величина вычисленной разности ошибок была меньше, чем значение заданного порога. В случае выполнения этого условия процесс обучения НС прекращается.

Реализация алгоритмов идентификации изображений отпечатков пальцев. Предложенная методика идентификации изображений динамических объектов реализована на примере решения задач распознавания и классификации отпечатков пальцев. Представлены дактилоскопические изображения (ДИ) отпечатков пальцев, которые инициализированы в детектированном поле направления папиллярных линий на основе метода векторного поля градиента. Установлена значимая вероятность правильного детектирования частных признаков и распознавания ДИ изображения с помощью частных признаков [7].

Для тестирования эффективности алгоритмов представлены 10^4 изображений отпечатков пальцев, которые обучаются на эталонных векторах частных признаков изображений. Изображение объекта представляется массивом значений яркости пикселей. Мощность пространства для всех изображений оценивается как

$$|F| = 256^{N \cdot M},$$

где N и M – ширина и высота изображения объекта;

256 – число градаций серого изображения.

Для вычисления модуля и аргумента векторного поля $|F|$ реализована процедура уменьшения размерности пространства всех изображений. При этом задаются пределы изменения модуля (0..200) и аргумента (0..180). Размеры для небольших окрестностей векторного поля определяются как

$$|F| = 180^{(N \cdot M)/i^2} + 200^{(N \cdot M)/i^2}.$$

Для изображения 1000Ч1000 пикселей и окрестности 10Ч10 мощность составляет

$$|F| \sim C_1 * 2^{C_2 * 10^4},$$

где C_1, C_2 – константы.

Реализованы программные модули предварительной обработки данных, которые производят считывание битовой карты изображения тестируемого объекта, построение гистограммы изображения, сглаживание высокочастотных шумов в изображении, формирование векторного поля градиента изображения.

Для идентификации и аппроксимации изображений объекта сеть обучается на основе сформированного множества информативных признаков, а настройка параметров модели идентификации производится на основе сравнения с характеристиками модальных объектов в базах данных.

В спроектированной трехслойной нейронной сети входной слой содержит 30 нейронов, скрытый слой - 15 нейронов, а выходной - 24. Для учета динамических характеристик объекта задаются дополнительно в предыдущем скрытом слое 12 нейронов, а сигналы настройки сети представляется 10 нейронами.

В реализованном программном модуле обучения трехслойной НС в качестве специфических признаков в БД указываются координаты и направления изображений, сформированные обучающие наборы, части векторного поля градиента в виде вектора модуля и вектора аргумента градиента. Дополнительно к обучающим векторам добавляются векторы, соответствующие областям изображения, не содержащие неинформативные признаки.

Механизмы настройки НС протестированы при различных активационных функциях, вычислительных схемах адаптивного обучения НС, методах оптимизации обучения и адаптации наборов обучающих векторов.

Установлено, что разработанные методические основы построения методов и алгоритмов идентификации динамических объектов на основе использования глобальных и локальных характеристик позволяют более точно до 95% распознавать ДИ изображений отпечатков пальцев за счет использования свойств НС, модифицированных вычислительных схем алгоритмов обучения сети, механизмов настройки параметров структурных компонентов НС и размера обучающих векторов.

Литература

1. Яне Б. Цифровая обработка изображений / Б. Яне; пер. с англ. А.М.Измайлова. – М.: Техносфера, 2007. – 583 с.
2. Осовский, С. Нейронные сети для обработки информации / С. Осовский; пер. с польского И.Д. Рудинского. – М.: Финансы и статистика, 2002. – 344с.
3. В.Задорожный, Идентификация по отпечаткам пальцев. // PC Magazine, № 1, 2, 2004.
4. Джуманов О.И. Модель структурного представления изображения отпечатка пальца в мультиагентной системе идентификации // Журнал «Вестник ТУИТ», Ташкентский университет информационных технологий. - Ташкент, 2015. - № 3(35)/2015. - с. 92-98
5. Джуманов О.И. , Инатов А.И. Оптимизация структуры нейронной сети на основе моделей ветвления аксонов для идентификации отпечатков пальцев // Труды XI Международной Азиатской школы-семинара «Проблемы оптимизации сложных систем», 27 июля – 7 августа 2015 г., Кыргызская Республика, Иссык-Кульская область, с. Булан-Соготу – Алматы, 2015 - с. 284-289.
6. Папиллярные узоры: Идентификация и определение характеристик личности (Дактилоскопия и дерматоглифика), Под ред. Л.Г. Эджубова и Н.Н.Богданова, М. АК, 316 с., 2002.
7. Ratha, N. Automatic Fingerprint Recognition Systems / N. Ratha – New York, Business Media, 2004. – 458 с.

UDK: 378.046.4

QAYTA TAYYORLASH VA MALAKA OSHIRISH JARAYONLARIDA MASOFAVIY TEST TIZIMINI JORIY ETISH**T.T.Shoyardonov***Bosh ilmiy-metodik markaz.*E-mail: tuymurod@mail.ru

Annotatsiya: Maqolada test sinovlarini amalga oshirishda masofaviy texnologiyalardan foydalanishning afzalliklari bayon etilgan. Shuningdek, taklif etilayotgan tizimni qayta tayyorlash va malaka oshirish kurslarida joriy etish jihatlari yoritilgan.

Kalit soʻzlar: qayta tayyorlash va malaka oshirish, axborot texnologiyalari, masofaviy test, variant, nazorat, natija, tahlil.

Использований дистанционные технологии в процессов тестирования

Резюме: В статье рассматриваются преимущества использований дистанционные технологии в процессов тестирования. А также, освещаются аспекты внедрения предлагаемой системы в курсах переподготовки и повышения квалификации.

Ключевые слова: переподготовка и повышение квалификации, информационные технологии, дистанционный тест, вариант, проверка, результат, анализ.

Application of distance test system in requalification and preparation process

Abstract: In this article the advantages of using remote technology in the testing process is discussed. Aspects of the implementation of the proposed system of retraining courses are showed.

Keywords: retraining, information technology, remote test, option, inspection, result, analysis.

Respublikamizda istiqloqlning dastlabki yillaridanoq barcha sohalarda boʻlgani kabi taʼlim sohasini ham tubdan isloh etishga alohida eʼtibor qaratildi. “Taʼlim toʻgʻrisida”gi Qonun, Kadrlar tayyorlash milliy dasturida belgilangan vazifalarning hayotga kyeng joriy etilishi mamlakatimizni taraqqiy ettirish, turmushimizni farovonlashtirish, hech kimdan kam boʻlmagan salohiyatli avlodni voyaga yetkazish uchun mustahkam zamin yaratdi. Yuksak maʼnaviyatli va intellektual rivojlangan yosh avlodni shakllantirishda taʼlim-tarbiya jarayonlarining sifati va samaradorligini taʼminlash muhim ahamiyat kasb etadi. Bu esa oliy taʼlim muassasalarining pedagog kadrlari oldiga yuksak vazifalarni qoʻyadi.

Bugungi taʼlimni modernizatsiyalash sharoitida taʼlim oluvchilarning ehtiyojlaridan kelib chiqqan holda oʻquv-tarbiya jarayonini loyihalashtirish; oʻquv jarayonlariga ilgʻor xorijiy tajribalar, axborot-kommunikatsiya va pedagogik texnologiyalarni keng tadbiiq etish; talabalarning bilish faoliligini rivojlantirishga yoʻnaltirilgan innovatsion yondashuvlar, metodikalarni ishlab chiqish; oʻz-oʻzini mustaqil kasbiy rivojlantirib borish pedagog kadrlar faoliyati mazmunining asosini tashkil etadi.

Oʻquv-tarbiya jarayonini yuqori ilmiy-uslubiy darajada taʼminlash, malakaviy talablar, oʻquv rejaları va dasturlari asosida kasbiy va pedagogik mahoratni doimiy ravishda rivojlantirishga koʻmaklashish uchun zarur boʻlgan kasbiy bilim, koʻnikma va mahoratni muntazam ravishda yangilab borish qayta tayyorlash va malaka oshirish kurslarining maqsadi hisoblanadi.

Rahbar va pedagog kadrlarning kasbiy bilimlari, koʻnikmalari va mahoratlarini uzluksiz yangilab borish mexanizmlarini joriy etish, zamonaviy talablarga muvofiq oliy taʼlim sifatini taʼminlash uchun zarur darajada kasbiy tayyorgarlikni oshirish, qayta tayyorlash va malaka oshirishning toʻgʻridan-toʻgʻri va bivosita shakllarini amaliyotga joriy etish, pedagog kadrlari tomonidan zamonaviy axborot-kommunikatsiya texnologiyalari va xorijiy tillarni samarali oʻzlashtirish uchun qoʻshimcha shart-sharoitlar yaratish esa, qayta tayyorlash va malaka oshirish kurslarining asosiy vazifalarini tashkil qiladi.

Ayni paytda, tinglovchilar oʻzlashtirgan yangi bilim, koʻnikma va malakalarni shakllanganlik darajasini aniqlash va ularni baholashda kompyuter test sinovlari keng qoʻllanilmoqda. Maʼlumki test metodi bir qancha turlarga boʻlinadi.

Pedagogik testlash – bu tinglovchilar bilimini baholashning pedagogik testlarga asoslangan shakli hisoblanadi [1]. Bu sifatli testni ishlab chiqish, test jarayonini oʻtkazish va natijalarni tahlil

qilib, ishtirokchilarni baholash jarayonlarini o'z ichiga oladi. Pedagogik test – bu bilimni baholash vositasi bo'lib, test topshiriqlari, test o'tkazishning standart protsedurasi, natijalarni qayta ishlash va tahlil qilish tizimlaridan tashkil topadi.

An'anaviy testlar savollar va turli variantli javoblardan tashkil topadi. Har bir savol ma'lum ball bilan baholanadi. Bunda test natijasi to'g'ri javob berilgan savollar soniga bog'liq. V.S.Avanesova fikriga ko'ra an'anaviy test – barcha test topshiruvchilar uchun bir xil baholashli va murakkablik darajasi oshib boruvchi topshiriqlar tizimidir.

Adaptiv (moslashuvchan) testda har bir navbatdagi topshiriq oldingi topshiriqqa berilgan javobdan kelib chiqib tanlanadi. Bunday testda topshiriqlar ketma-ketligi va ularning miqdori dinamik ravishda belgilanadi.

Nazoratning bu kabi usullarini amalga oshirishda zamonaviy axborot texnologiyalaridan keng foydalanish maqsadga muvofiqdir. Ya'ni test sinovlarini masofaviy tarzda o'tkazish tezligi, ishonchliligi, soddaligi, moslashuvchanligi kabi qator imkoniyatlarining kengligi bilan alohida ahamiyat kasb etadi. Bugungi kunda masofaviy test nazoratlarini o'tkazish bilim darajasini tekshirishning eng yaxshi usullaridan biri hisoblanadi. Test nazoratining muhim jihati shundaki, unda ma'lum bir darajadagi standartlashgan savol va topshiriqlardan foydalaniladi.

Masofaviy test sinovlarini istalgan masofadan amalga oshirish, natijalarni turli usullarda va takroriy ravishda tahlil qilish, oldingi test natijalarini saqlash imkoniyatlari mavjudligi, anonimlik – test natijalarini faqat ruxsat etilgan shaxslargina ko'ra olishi, test o'tkazish uchun vaqt chegarasining erkinligi, bir savolga berilgan javoblarni turli taraflama o'rganish imkoniyatini beradi.

Masofaviy test sinovlarining asosiy yutuqi quyidagilardan iborat:

- masofadan test sinovlarini amalga oshirish (internetga bog'lanish imkoniyati bo'lgan joyda real vaqt rejimida test sinovlarini o'tkazish);
- natijalarni qayta ishlash va to'liq hisobot olish;
- test natijalarini ruxsat etilgan shaxslar ko'ra olishi (test tizimiga kirishning maxsus autentifikatsiya orqali amalga oshirilishi);
- test hisobotlarining fayl ko'rinishida saqlanishi;
- test jarayonining istalgan tartibda va istalgan vaqtda o'tkazilishi;
- testda ma'lum tartibda bir necha yo'nalishlarni qamrab olish imkoniyati.

Pedagogning kasbiy kompetentligini baholashda on-layn test sinovlarining quyidagi yutuqli jihatlari mavjud:

- avtomatik rejim asosida, test topshiruvchining qarashlaridan mustasno holda mutaxassisning bilim va malaka darajasining ob'yektiv baholanishiga erishish;
- kompyuter tarmoqlari orqali keng miqyosda ko'p sonli ishtirokchilardan test sinovlari o'tkazilganda natijalarning maxfiyligini ta'minlash;
- qisqa vaqt ichida samarali test nazoratini tashkillashtirish;
- ishtirokchilar uchun baholashning qulay usulda bo'lishi;
- o'z vazifalarini amalga oshirish uchun yetarli bilimga ega bo'lmagan ishtirokchilar uchun istisnoli holatlarning mavjudligi.

Bugungi kunda qayta tayyorlash va malaka oshirish tizimida tinglovchilarning kurslar avvalidagi kirish va kurslar yakunidagi chiqish test sinovlarini o'tkazishda tadqiqotimiz doirasida ishlab chiqilgan on-layn texnologiyalarga asoslangan masofaviy test sinovlari tizimidan foydalanilmoqda[2].

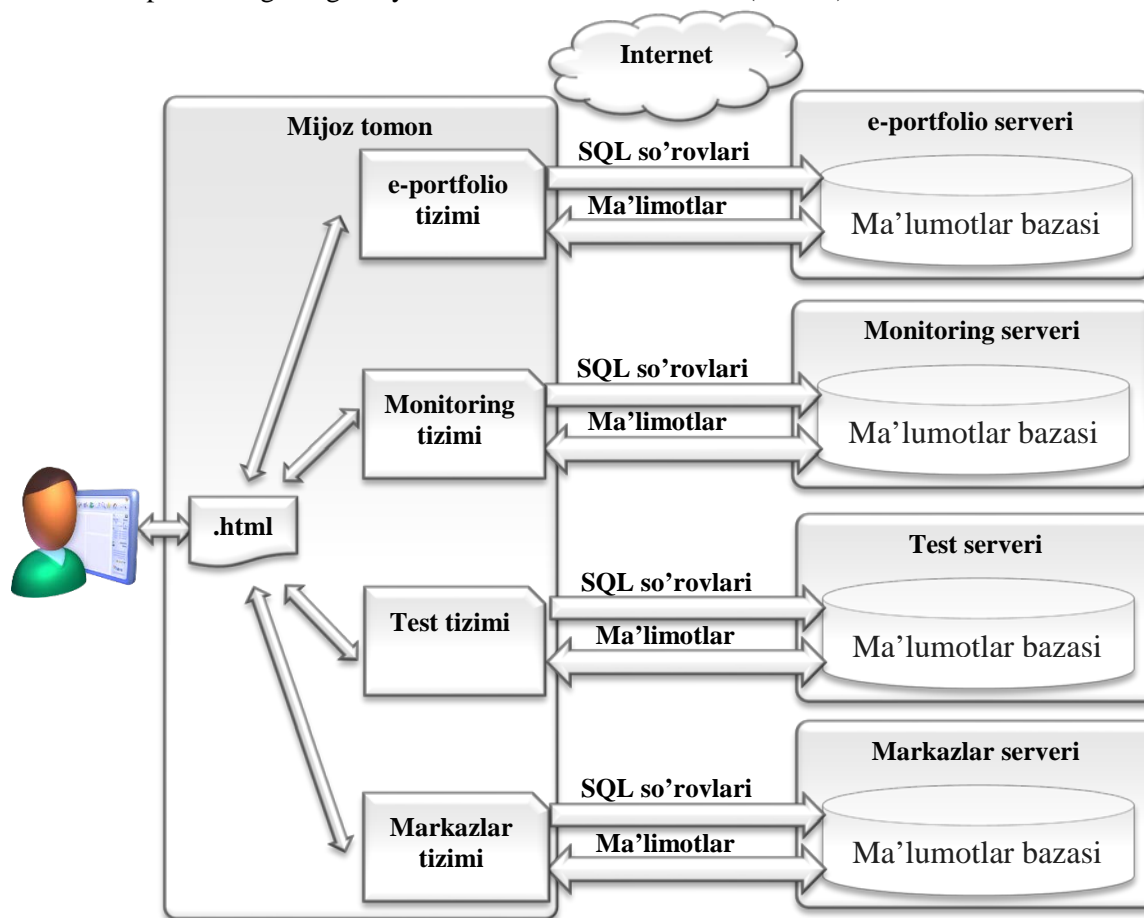
Test asosida nazorat qilishga qo'yiladigan asosiy talablar quyidagilardan iborat:

- validiligi (funksiya va mazmuni jihatidan adekvatligi);
- aniqligi (hamma uchun tushunariligi);
- soddaligi;
- bir xil ma'noni anglatishi (javoblariga ko'ra baholash);
- ishonchliligi.

Quyida tadqiqotlarimiz davomida ishlab chiqilgan masofaviy test sinovlarini o'tkazish dasturiy platformasining tarkibi va undan foydalanish bo'yicha fikr almashamiz.

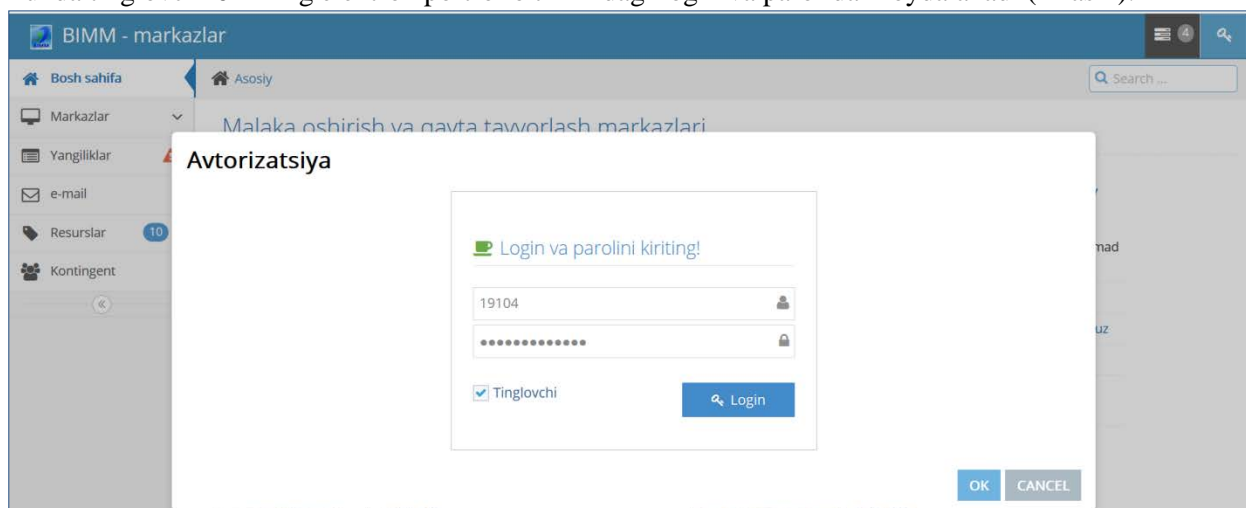
Demak, qaralayotgan soha Oliy ta'lim tizimi rahbar va pedagog kadrlarini qayta tayyorlash va malakasini oshirish kurslari bo'lganligi uchun test natijalari tinglovchilarning elektron portfolilarida shuningdek, elektron monitoring tizimida aks ettirilishi kerak. Buning uchun masofaviy test tizimi,

elektron monitoring tizimi, elektron portfolio tizimi hamda qayta tayyorlash va malaka oshirish muassasalari portalining integratsiyasini ta'minlash talab etiladi (1-rasm).



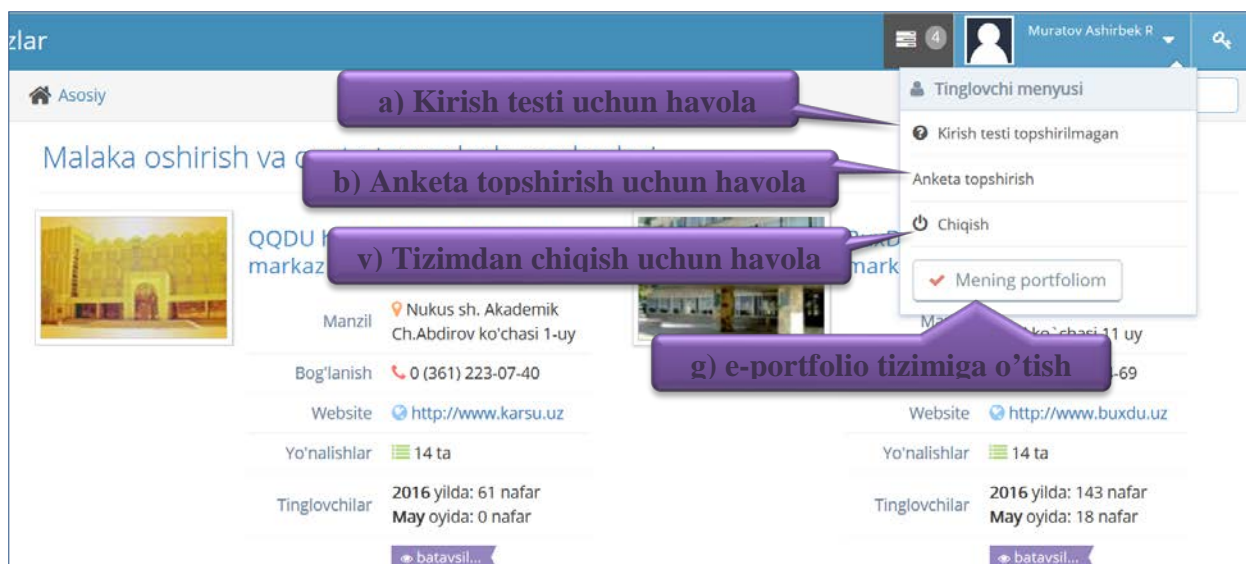
Rasm 1. Tizimlar integratsiyasi

Tinglovchi test topshirig'ini boshlashi uchun dastlab markazlar tizimida avtorizatsiyadan o'tadi. Bunda tinglovchi o'zining elektron portfolio tizimidagi login va parolidan foydalanadi (2-rasm).



Rasm 2. Tinglovchi avtorizatsiyasi

Tinglovchi tizimga avtorizatsiyadan o'tgandan so'ng kirish yoki chiqish on-layn testlarini topshirishi mumkin bo'ladi [3,4]. Testlar qat'iy belgilangan vaqt oralig'ida topshiriladi. Qayta tayyorlash va malaka oshirish kursining birinchi haftasida kirish testini, sakkizinchi haftasida esa chiqish testini topshirish mumkin bo'ladi. Buning uchun tinglovchi menyusidagi kirish (yoki chiqish) testini topshirish havolasi tanlanadi (3-rasm).

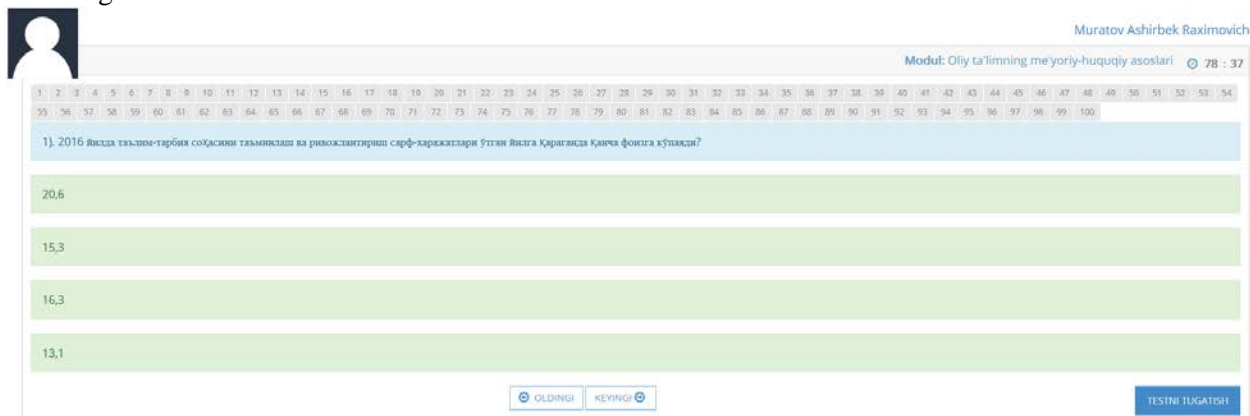


Rasm 3. Tinglovchi menyusi

Shundan so'ng on-layn testni boshlash sahifasi ochiladi. Bunda tinglovchi haqidagi qisqacha ma'lumotlar (tinglovchining rasmi, qayta tayyorlash kursi yo'nalishi va vaqti) hamda testni qaysi tilda topshirishi mumkinligi aks ettiriladi.

Tinglovchi testni qaysi tilda topshirishini tanlab "Boshlash" havolasini bosish orqali testni boshlaydi (4-a rasm). Test sahifasida tinglovchining ismi, familiyasi va rasmi aks ettiriladi. Shuningdek joriy savol qaysi modulga tegishliligi hamda test tugashiga qolgan vaqt ham ko'rsatib turiladi.

Test topshirish blokining yuqori qismida navigatsiya tugmalari va test uchun ajratilgan vaqt (vaqt kamayish tartibida) indikatori joylashgan. Undan so'ng savollar tartib nomerlari joylashgan bo'lib, ular ham navigatsiya vazifasini bajaradi. Buning qulayligi shundaki, joriy savol biroz qiyinchilik tug'dirayotgan bo'lsa, vaqtdan yutish uchun bu savolga javob bermasdan boshqa savollarga tez o'tish mumkin.



Rasm 4 a). On-layn test jarayoni

Navbatdagi qismda test savoli matni bo'lib, uning tarkibiga turli grafik elementlar, rasmlar bo'lishi mumkin. Savol matnidan so'ng ketma-ket variantlar joylashgan. Variantlar soni 2 tadan 5 tagacha bo'lishi mumkin va ulardan faqat bittasi to'g'ri javob bo'la oladi. Test savollari va variantlar har safar tasodifiy ravishda o'zgaradi. Bu testlarni oson variatsiyalash imkonini beradi[5,6].

Savolga javob variantlaridan biri tanlanganidan so'ng keyingi savol namoyish etiladi. Shuningdek tinglovchi istagan vaqtida ixtiyoriy boshqa savolga ham o'tishi mumkin. Buning uchun "Keyingi", "Oldingi" (4-a rasm) yoki savolning tartib nomeri bilan nomlangan tugmalardan birini tanlash kerak bo'ladi (4-b rasm).



Muratov Ashirbek Raximovich

Modul: Oliy ta'limning me'yoriy-huquqiy asoslari 77 : 40

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68		
69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100			

20). Талабалик гувоҳномасининг шакли ва тайёрланиш қондалари Олий ва ўрта махсус таълим вазирлигининг қайси буйруғи билан қачон тасдиқланган?

Олий ва ўрта махсус таълим вазирлигининг 2010 йил 29 августдаги № 340-сонли буйруғи билан тасдиқланган

Rasm 4 b). On-layn test jarayoni

Test jarayonida javob berilgan va javob berilmagan hamda joriy savollar bir-biridan tartib nomerlaridagi ranglar bilan ajratiladi.

Barcha savollarga javob berilgandan so'ng testni tugatish tugmasi bosiladi va test jarayonini tugatish tasdiqlangandan so'ng ekranga test natijalari namoyish etiladi (5-rasm). Agar vaqt hisoblagichi 0 daqiqa 1 soniyagacha kamayganida ham test topshiruvchi tomonidan "Testni tugatish" tugmasi bosilmasa, test avtomatik tarzda tugatiladi va ayni damgacha belgilangan savollar natijasi hisoblanadi.

TEST NATIJALARI [kirish_uz]

Modullar	Savollar soni	To'g'ri	Xato	Ball
Oliy ta'limning me'yoriy-huquqiy asoslari	20	3	17	15%
Ilg'or ta'lim texnologiyalari va pedagogik mahorat	20	4	16	20%
Axborot-kommunikatsiya texnologiyalarini ta'lim jarayonida qo'llash	15	4	11	27%
Amaliy xorijiy til	15	2	13	13%
Tizimli tahlil va qarorlar qabul qilish asoslari	10	2	8	20%
Maxsus fanlar	20	6	14	30%
	100	21	79	21% (6.3 ball)

Rasm 5. Test natijalari sahifasi

Test natijalari har bir modul bo'yicha alohida taqdim etiladi va tinglovchi qaysi modulni qay darajada o'zlashtirganligi haqidagi ma'lumotga ega bo'ladi.

Bunda on-layn test natijalari tinglovchining elektron portfoliosiga hamda elektron monitoring tizimiga qayd etiladi.

Testlar tizim administratori tomonidan kiritiladi va tahrirlanadi. Bunda administrator huquqini beruvchi maxsus kalit so'zlar (login va parol) dan foydalaniladi. Bundan tashqari tizimning xavfsizligini ta'minlash uchun administrator uchun alohida manzil (URL) dan foydalaniladi.

Administrator tizimga kiritilgan test jadvallari ro'yxatini ko'rishi, o'chirishi va yangi test jadvali yaratishi mumkin. Test savolida ko'pi bilan beshtagacha variant bo'lishi mumkin va ulardan faqat bittasi to'g'ri bo'ladi.

Ushbu test tizimining yana bir imkoniyatlaridan biri shuki, bunda bir necha turdagi test jadvallaridan ma'lum qoida asosida test sozlamasini hosil qilish mumkin. Shuningdek test natijalari umumiy o'zlashtirish holati yoki alohida test jadvallari bo'yicha tahlil qilish mumkin.

Test sinovlarini tashkillashtirish va o'tkazishda masofaviy texnologiyalardan foydalanish nazorat turining ob'yektivligini ta'minlash, qayta tayyorlash va malaka oshirish kurslari davomidagi o'zlashtirish monitoringini olib borish, tinglovchilarning kasbiy kompetentlik darajasi dinamikasini kuzatish hamda ushbu jarayonlarning kelgusidagi holatini tashxis qilish imkoniyatlarining mavjudligi

bilan qayta tayyorlash va malaka oshirish tizimida o'zining munosib o'rnini egallashiga to'liq asos bor deb hisoblaymiz.

Adabiyotlar

1. Asyurov S.V. Педагогические тестирование в системе оценки знаний слушателей // Учебное пособия. – Ташкент, 2006 г. с-9.
2. Isyanov R.G., U.Sh.Begimkulov va b. Oliy ta'lim muassasalari professor-o'qituvchilarining malakasini oshirish texnologiyalari // Monografiya. – Toshkent, 2011 y. s-72.
3. Avanesov V. S. Педагогические тестирование в системе оценки знаний слушателей // Учебное пособия. –Ташкент, 2006 г. с-9.
4. Bateshov E.A. Основы технологизации компьютерного тестирования // Учебное пособие. – Астана: ТОО «Полиграф-мир», 2011. – 241 с.
5. Mayofov A. N. Теория и практика создания тестов для системы образования: Как выбирать, создавать и использовать тесты для целей образования. – М: Интеллект-Центр, 2002.
6. Neuman YU. M., Xlebnikov V. A. Педагогическое тестирование как измерение. Ч.1. — – М.: Центр тестирования МО РФ, 2002.

УДК: 538.214:538.222

**ПОЛУЭМПИРИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КОСВЕННОГО ОБМЕННОГО
ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В СИСТЕМЕ РЕДКОЗЕМЕЛЬНЫЙ МЕТАЛЛ –
НЕМАГНИТНЫЙ МЕТАЛЛ****Х.О.Шакаров***Samarqand davlat universiteti*E-mail: shakarov_x@samdu.uz.

Аннотация. Впервые полуэмпирически исследовано обменное взаимодействие типа Рудерман-Киттеля-Касуя-Иосиды (РККИ) в соединениях бинарных систем РЗМ (Редкоземельный металл) – НМ (немагнитный металл) (РЗМ = *Gd, Tb, Dy, Ho, Er, Tm*) (НМ = *Al, In*) с использованием экспериментальных значений парамагнитной температуры Кюри (θ_p) этих соединений. Подтверждено предсказание теории РККИ о существовании прямой пропорциональной зависимости экспериментальные значения θ_p от фактора де Жена для эквивалентных соединений тяжелых РЗМ с НМ, подобно как у чистых РЗМ. Полуэмпирически оценены значения параметра косвенного обменного взаимодействия в изучаемых соединениях. В целом установлено, что для соединений РЗМ с НМ, как у чистых РЗМ, характерно обменное взаимодействие типа РККИ.

Ключевые слова: обменное взаимодействие, парамагнитная температура, магнитная восприимчивость, магнитный момент, фактор де Жена.

Kam yer elementi - nomagnit metal tizimida bilvosita almashinuv ta'sirini yarim empirik tadqiq qilish

Annotatsiya: *KYeM* (Kamyob Yer metallari)-*NM* (nomagnit metall) (*KYeM = Gd, Tb, Dy, Ho, Er, Tm*) (*NM = Al, In*) binar sistemalarining birikmalarida Ruderman-Kitell-Kasuya-Iosida(RKKI) turidagi bilvosita almashinuv o'zaro ta'sir, ularning paramagnit Kyuri temperaturasining(θ_p) tajribaviy qiymatlaridan foydalanib yarim empirik usul bilan birinchi marta tadqiq qilindi. RKKI nazariyasining, paramagnit Kyuri temperaturasi tajribaviy qiymatining de Jen faktoriga to'g'ri proporsionalligi haqidagi toza *KYeM* uchun bashorati og'ir *KYeM*ning *NM* bilan ekvatomli birikmalari uchun ham o'rinli bo'lishi tasdiqlandi. O'rganilgan birikmalardagi bilvosita almashinuv o'zaro ta'sir parametrining qiymatlari yarim empirik usul bilan hisoblandi. *KYeM* bilan *NM* birikmalarida ham, toza *KYeM*dagidek, RKKI turidagi o'zaro ta'sir amal qilishi aniqlandi.

Kalit so'zlar: Almashinuv o'zaro ta'siri, magnit qabul qiluvchanlik, paramagnit temperature, magnit moment, de Jen faktori.

Semi-empirical study of implicit exchange interaction in rare earth metal – non magnetic metal system

Abstract. For the first time the exchange interaction of Ruderman – Kittel – Kasuya – Yosida (RKKY) type is studied semi-empirically in compounds of binary systems of rare-earth metal (REM) – non-magnetic metal (NMM) (REM = *Gd, Tb, Dy, Ho, Er, Tm*) (NMM = *Al, In*) using experimental values of paramagnetic Curie temperature (θ_p) of these compounds. The prediction of theory of RKKY about the existence of direct proportional dependence of experimental values of θ_p on de Gennes factor for equiatomic compounds of heavy REM with NMM similar pure REM. Values of parameter of implicit exchange interaction in the studied compounds are evaluated semi-empirically. As a whole, it is found that for REM compounds with NMM as well as for pure REM the exchange interaction of RKKY type is characteristic.

Keywords: exchange interaction, magnetic susceptibility, paramagnetic temperature, magnetic moment, de Gennes factor.

I. Введение

В РЗМ и соединений на их основе приобретает особенно важное значение вопрос о происхождении атомного магнитного порядка. В изолированных атомах РЗМ происходит

последовательная застройка ранее пропущенного 4f-слоя электронной оболочки. Этот слой лежит глубоко и экранирован от внешних воздействий слоем $5s^25p^6$ даже в кристаллическом состоянии РЗМ. Для тяжёлых РЗМ характерно, что средний радиус 4f-оболочки составляет 1/10 межионного расстояния. Поэтому, прямое обменное взаимодействие (перекрывание) между электронами 4f-слоев соседних ионов почти невозможно. Однако, исследования показывают, что РЗМ и их соединения с другими металлами обладают магнитным упорядочением, обусловленным обменным взаимодействием локализованных в узлах кристаллической решётки 4f-электронов через электроны проводимости, называемое косвенным обменным взаимодействием РККИ [1-5]. Такое взаимодействие осуществляется следующим образом: электроны 4f-слоя, расположенные в n -узле (определяемом радиус-вектором \vec{R}_n) кристаллической решётки, влияют на электроны проводимости и магнитно поляризуют их. Поляризованные электроны проводимости, в свою очередь, влияют на электроны 4f-слоя, расположенные в m -узле (определяемом радиус-вектором \vec{R}_m) решётки. Таким образом, возникающее упорядоченное состояние магнитных моментов электронов 4f-слоев разрушается при их нагреве до определённой температуры $T = \theta_p$ (называемой парамагнитной температурой Кюри), характерной для каждого РЗМ. При температуре $T = \theta_p$ происходит магнитный фазовый переход магнитное упорядочение - магнитный беспорядок (парамагнетизм). Таким образом, θ_p является энергетической характеристикой (мерой) ($k_B T$) обменного взаимодействия типа РККИ в РЗМ и соединениях на их основе.

Температурная зависимость магнитной восприимчивости РЗМ и соединений на их основе непосредственно отражает парамагнитную температуру Кюри [по закону Кюри-Вейсса $\chi = C/(T - \theta_p)$, где C - постоянная Кюри-Вейсса]. По экспериментальной зависимости $\chi^{-1}(T)$ определяется значение θ_p . Информация о парамагнитной температуре Кюри РЗМ в зависимости от их атомного номера, а в соединениях на их основе в зависимости от концентрации сплавляемых компонентов, необходима для развития теоретических представлений о природе обменных взаимодействий в этих объектах.

Цель настоящей работы - изучение влияния парамагнитного металла алюминия и диамагнитного металла индия на косвенное обменное взаимодействие в тяжёлых РЗМ и проверка применимости теории РККИ для интерметаллидов в бинарных системах РЗМ- (Al, In) (где РЗМ = Gd, Tb, Dy, Ho, Er, Tm) с использованием их экспериментальных значений θ_p .

II. Результаты и их обсуждение

В ряде работ, например в [6-12], ранее было установлено, что зависимости $\chi(T)$ тяжёлых РЗМ (РЗМ = Gd, Tb, Dy, Ho, Er, Tm) и их соединений с парамагнитным металлом алюминием и диамагнитным металлом индием в широком интервале температур (300-2000 К), охватывающем их твердое состояние, процесс плавления и жидкое состояние, описывается законом Кюри - Вейсса. По экспериментальной зависимости $\chi^{-1}(T)$ были определены значения θ_p .

В рамках теории РККИ [1-5] с использованием представления молекулярного поля для объяснения экспериментальных значений θ_p РЗМ получено следующее выражение [1,5,13,14]:

$$\theta_p = \frac{3\pi^2}{k_B \Omega^2 E_F} A_{sf}^2(0) G \sum_{n \neq m} F(2\vec{k}_F | \vec{R}_n - \vec{R}_m |), \quad (1)$$

где n - число электронов проводимости на атом; Ω - атомный объём; $A_{sf}(0)$ - интеграл $s - f$ - обменного взаимодействия, не зависящий от \vec{k}_F ; E_F и \vec{k}_F - энергия и волновой вектор на поверхности Ферми; $|\vec{R}_n - \vec{R}_m|$ - расстояния между магнитными ионами РЗМ, находящимися в

узлах кристаллической решётки n и m ; $F(2\vec{k}_F|\vec{R}_n - \vec{R}_m|) = F(y)$ – функция Рудермана-Киттеля, определяемая выражением:

$$F(y) = (y \cos y - \sin y)/y^4; \quad (2)$$

$$G = (g_J - 1)^2 J(J + 1) \quad (3)$$

– фактор де Жена [14] для РЗМ. В (3) g_J –фактор Ланде - определяется следующим выражением:

$$g_J = 1 + [J(J + 1) + S(S + 1) - L(L + 1)]/2J(J + 1), \quad (4)$$

где S, L и J – соответственно, суммарные значения квантовых чисел спинового, орбитального и полного механических моментов электронов 4f-слоя.

В рамках теории РККИ для вычисления интеграла косвенного обменного взаимодействия получено следующее выражение [1,5]:

$$A = \frac{9\pi^2}{E_F \Omega^2} A_{sf}^2(0) \sum_{n \neq m} F(2\vec{k}_F|\vec{R}_n - \vec{R}_m|). \quad (5)$$

Учитывая (5) и (3), из выражения (1) для значения θ_p чистых РЗМ, находим:

$$\theta_p = \frac{A}{3k_B} G. \quad (6)$$

Фактор де Жена для изучаемых соединений можно вычислить по правилу аддитивности:

$$G = (1 - x)G_{PЗМ} + xG_{НМ}, \quad (7)$$

где x – содержание НМ(Al, In) в атомных долях; $G_{PЗМ}$ и G_{Al} –соответственно, факторы де Жена для РЗМ и НМ. Поскольку терм основного состояния трехвалентного иона НМ $-^1S_0$, поэтому $G_{НМ} = 0$. При учете этого факта и (7), для значения θ_p изучаемых соединений находим:

$$\theta_p = \frac{A}{k_B} (1 - x)(g_J - 1)^2 J(J + 1) \quad (8)$$

Внешняя электронная оболочка трехвалентных ионов РЗМ практически одинакова ($5s^2 5p^6$), причем они находятся в узлах кристаллической гексагональной решётки, которая почти не изменяется при переходе от одного металла к другому. Интеграл косвенного обмена A по (5) зависит от n , $A_{sf}(0)$, Ω , E_F и решеточных сумм (функция $F(y)$). Все эти величины в первом приближении можно считать постоянными [15]. Поэтому, по (6) и (8) θ_p тяжелых РЗМ и изучаемых соединений должна быть пропорциональна фактору де Жена. Эти выражения дают возможность полуэмпирически проверить это предсказание теории РККИ.

В работах [6–12] было установлено, что экспериментальные значения эффективных чисел магнитных моментов, приходящиеся на один ион тяжёлых РЗМ³⁺ ($\mu_{эфф}$), во всех изученных тяжёлых РЗМ и соединениях с алюминием и индием удовлетворительно соответствуют значениям $\mu_{эфф}$ свободных ионов тяжёлых РЗМ³⁺. Это свидетельствует о том, что 4f электроны, ответственные за магнитные свойства изучаемых объектов локализованы в узлах их кристаллической решётки также, как в чистых тяжёлых РЗМ. Слабмагнитная среда (Al, In) и высокая температура ($T \approx 2000$ К) не влияют на энергетическое состояние 4f электронов в изучаемых объектах. Энергетический интервал между основным и первым возбуждённым уровнем велик по сравнению с $k_B T$, и заселенность возбуждённого уровня очень мала. Поэтому при расчетах G для тяжёлых РЗМ и изучаемых соединений можно использовать значения J и g_J для основных уровней свободных ионов тяжёлых РЗМ³⁺ [$Gd^{3+}(J = 7/2, g_J = 2)$; $Tb^{3+}(J = 6, g_J = 3/2)$; $Dy^{3+}(J = 15/2, g_J = 4/3)$; $Ho^{3+}(J = 8, g_J = 5/4)$; $Er^{3+}(J = 15/2, g_J = 6/5)$; $Tm^{3+}(J = 6, g_J = 7/6)$].

Результаты вычислений по (6) и (8) представлены, соответственно, на рис.1 и 2. Из рис. 1 видно, что зависимости $\theta_p(G)$ для изучаемых эквИАтомных соединений тяжёлых РЗМ с алюминИем(2-6-графики) имеют почти линейный характер и удовлетворительно соответствуют линейному характеру зависимости $\theta_p(G)$ для тяжёлых РЗМ(1-график). Из рис. 2 видно, что зависимости $\theta_p(G)$ для изучаемых эквИАтомных соединений тяжёлых РЗМ с индием(2-5-графики) тоже имеют почти линейный характер и удовлетворительно соответствуют линейному характеру зависимости $\theta_p(G)$ для тяжёлых РЗМ(1-график). Следовательно, изменение θ_p в изучаемых соединениях довольно близко к тому, что предсказывает теории РККИ. Это свидетельствует о том, что обменное взаимодействие в изучаемых соединениях является взаимодействием типа РККИ, как у чистых тяжёлых РЗМ.

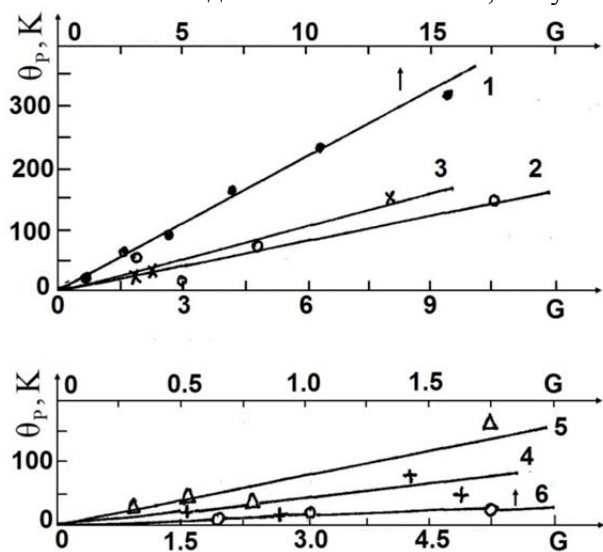


Рис.1. Зависимости $\theta_p(G)$ для изучаемых соединений. Кр. 1 РЗМ (РЗМ = Cd, Tb, Dy, Ho, Er, Tm); кр.2.- PZM_2Al ; кр. 3 - $PZMAl$; кр. 4 – PZM_3Al_2 ; кр. 5 – $PZMAl_2$; кр. 6 – $PZMAl_3$.

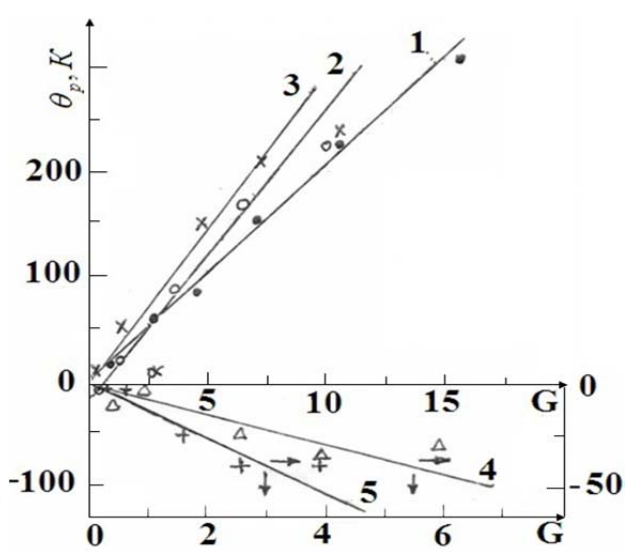


Рис.2. Зависимости $\theta_p(G)$ для изучаемых соединений. Кр. 1 РЗМ (РЗМ = Cd, Tb, Dy, Ho, Er, Tm); кр.2.- PZM_5In_3 ; кр. 3 – PZM_2In ; кр. 4 – PZM_3In_5 ; кр. 5 – $PZMIn_3$.

III. Выводы

1. Впервые сделана попытка полуэмпирической оценки интеграла косвенного обменного взаимодействия в бинарных системах РЗМ – (Al, In) (РЗМ = Gd, Tb, Dy, Ho, Er, Tm) с использованием экспериментальных значений парамагнитной температуры Кюри образцов этих систем.

2. Подтверждено предсказание теории РККИ, т.е. установлена такая же пропорциональная зависимость между экспериментальным значением парамагнитных температур Кюри и фактором де Жена для изучаемых эквИАтомных соединениях, подобно как у чистых тяжёлых РЗМ.

В целом установлено, что для всех соединений изучаемых систем РЗМ – (Al, In) как и для чистых тяжёлых РЗМ, характерно обменное взаимодействие типа РККИ.

Литература

1. С. В. Вонсовский. Магнетизм. М.: Наука, 1971. - 1031 с.
2. М. А. Ruderman, С. Kuttel. Indirect exchange coupling of nuclear magnetic moments of conduction electrons.//Phys. Rev.-1954. – v.96.-№1.-P.99-102.
3. Т. А. Kasuya. Theory of metallic ferro and antiferromagnetism on Zener’s model.// Prog. Theor. Phys. (Kyoto). -1956.-V.16.-№1. –P.45-55.
4. К.Yosida. Magnetic properties of Cu-Mn alloys.// Phys. Rev. -1957.-V.106-№.5.-P.893-898

5. К.Тейлор. Интерметаллические соединения редкоземельных металлов. М.: Мир, 1974.–221 с.
6. Кувандиков О.К., Шакаров Х.О. Магнитные свойства интерметаллических соединений редкоземельных металлов с алюминием при высоких температурах//Узб. физ. журнал.– 1998.– №3.– с.62-67.
7. Кувандиков О.К., Шакаров Х.О. Магнитная восприимчивость интерметаллидов в системе РЗМ-А1 при высоких температурах// Известия вузов.Физика. Россия. – 2004.– №3.– с.78-81.
8. Кувандиков О.К., Шакаров Х.О. Исследования магнитных свойств интерметаллидов в системе РЗМ-А1 в твердом и жидком состояниях.// Металлофизика и новейшие технологии. Украина.– 2004.– т.26.– №10.– с.1323-1331.
9. Шакаров Х.О. Магнитная восприимчивость интерметаллических соединений лантаноидов с индием при высоких температурах.// Кандидатская диссертация, Самарканд, 1983.
10. Шакаров Х.О. Магнитная восприимчивость интерметаллидов в системе Er-In при высоких температурах//Известия вузов. Физика. Россия.- 2004.– №12.– с.7-10.
11. Шакаров Х.О. Магнитная восприимчивость интерметаллидов в системе Dy-In при высоких температурах//Известия вузов. Физика. Россия. - 2005.– №1.– с.88-89
- 12.Кувандиков О.К, Шакаров Х.О., Абдурахмонов А.. Исследование магнитных свойства интерметаллидов в системе РЗМ-In в твёрдом и жидком состояниях.//Металлофизика и новейшие технологии. Украина.- 2013.- Т. 35.- №7.- с.879-888.
- 13.Rocher Y. A. Emploi des niveaux lies virtuels dans les metaux de terres rares.//Phys. Chem. Sol.-1962.-V.247.- PP.1621-1629.
- 14.De Gennes P.G. Sur les proprietes des metaux de terres rares.//Compt. Rend. -1958. – V.247. –PP.1836-1838.
- 15.Никитин С. А. Температура магнитного упорядочения и интеграл косвенного обмена в редкоземельных сплавах тербий – иттрий и тербий – гадолиний// ЖЭТФ.– 1979.– Т. 77.– вып.1.– с.343-351.
16. Yatsenko S. P., Semyannikov A.A., Shakarov H.O., Fedorova E. G.// J.Less- Comm. Met.- 1983.-V. 90.- No.1.- P. 95 – 108.

UDK: 538 681

ОСОБЕННОСТИ ВРАЩАЮЩЕГО МОМЕНТА МНОГОСЛОЙНЫХ ПЛЕНОК

Х.О.Уринов¹, И. Субханкулов²

¹*Самаркандское высшее военное автомобильное командно-инженерное училище*

²*Самаркандский государственный университет*

Аннотация. Исследовано основное состояние тонкой пленки с конкуренцией объемной и поверхностной анизотропий во внешнем магнитном поле. Показано наличие фазового перехода из неоднородного в однородное состояние, построены фазовые диаграммы «толщина пленки – напряженность магнитного поля».

Ключевые слова: вращение вектора намагниченности, тонкие магнитные плёнки, магнитоупорядоченные кристаллы, неупорядоченные магнетики.

Ko‘p qatlamli qoplamalar aylanturuvchi momentning o‘ziga xosliklari

Annosiya. Tashqi magnit maydon ta’sirida yupqa qatlamli qatlamalarni asosiy hajmiy holatiga, sirt anizotropiyasi ta’siri o‘rganildi. Birjinsli holatdan birjinsli bo‘lmagan holatga faza o‘tishi borligi aniqlangan, “qatlam qalinligi – magnit maydon kuchlanganligi” faza diagrammasi qurilgan.

Kalitl so‘zlar: magnitlanish vektorining aylanishi, yupqa qatlamli magnit qoplamalar, tartibli magnit kristallar, tartibsiz magnetiklar.

Characteristic properties of the rotational moment of multilayer films

Abstract. The ground state of a thin film versus volume and surface anisotropies in an external magnetic field is investigated. The presence of a phase transition from an unhomogeneous to a

homogeneous state is shown, “ film thickness-magnetic field strength” phase diagrams are constructed.

Keywords: rotation of magnetizability vector, thin magnetic film, magneto-orderer crystal, disordered magnetics.

В настоящее время интерес к изучению вращающего момента возрос в связи с исследованиями многослойных магнитных структур, появление которых обеспечено прогрессом в технологии тонких пленок.

Если реальная толщина слоя d выбрана больше некоторой критической $d_{k0} = \pi/2 \cdot \sqrt{\alpha/(4\pi - \beta_2)}$, где α — обменная константа; β — константа, то при вращении пленки в магнитном поле при угле Ψ_k , определяемом из соотношения

$$\sin\Psi = \frac{H_k}{H} \left[1 - \left(\frac{d_{k0}}{d} \right)^2 \right], \quad (1)$$

где Ψ — угол между направлением магнитного поля и плоскостью пленки; внешнее магнитное поле напряженностью \mathbf{H} ; H_m — поле размагничивания; $H_k = (4\pi - \beta_2)M$. M — намагниченность насыщения; произойдет ФП с изменением полного магнитного момента. Исследуем подробно этот случай. Рассмотрим угловую зависимость вращающегося момента L пленки в магнитном поле.

Поскольку заранее известно, что будет исследоваться кривая фазового равновесия «неоднородное состояние — однородное состояние», то можно считать, что Θ_{\min} и Θ_{\max} в магнитном поле продолжают соответствовать центрам слоев и поэтому можно использовать следующие соотношения:

$$\lim_{\Theta \rightarrow \pi/2} \sin\Theta = 1/2 + 1/2 \sin^2\Theta$$

В то время как в однородном состоянии вращающий момент определяется углом отклонения вектора магнитного поля от нормали к плоскости пленки, в неоднородном состоянии ситуация усложняется и зависимость должна находиться по известной функции $\Theta(z, \Psi, H)$. Удобно по отдельности рассмотреть случаи сильных и слабых магнитных полей [1].

Примем, что внешнее поле намного превышает поле анизотропии $H_k (\Psi_k \ll 1)$. Задача сводится к минимизации функционала

$$\text{div}(H_m + 4\pi M) = 0, \quad (3)$$

и решению уравнения Эйлера при условии $L\sqrt{\gamma_2 - h/2 \cdot \sin\Psi} = \infty, (\Theta(z = \pm d) = \pi/2)$. L — толщина приповерхностного слоя, $h = \frac{2H}{\alpha M}$.

При сделанных допущениях первый интеграл уравнения Эйлера имеет следующий вид [2]:

$$z = \int_{\Theta_{\min}}^{\Theta} \frac{d\Theta}{\sqrt{c + h \cos\Theta + \Psi h \sin\Theta}}, \quad (4)$$

который может быть представлен как

$$z = \int_{\Theta_{\min}}^{\Theta} \frac{d\Theta}{\sqrt{c + h \cos\Theta}} - \Psi h \int_{\Theta_{\min}}^{\Theta} \frac{\sin\Theta d\Theta}{(c + h \cos\Theta)^{3/2}}. \quad (5)$$

Первый член в правой части (5) может быть приведен к нормальной форме интеграла Лежандра, и после несложных преобразований можно получить:

$$z + \Psi h \left[\frac{1}{\sqrt{c+h \cos\Theta}} - \frac{1}{\sqrt{c+h \cos\Theta_{\min}}} \right] = \frac{2}{\sqrt{c+h}} \left[F \left(\Theta, \sqrt{\frac{2h}{c+h}} \right) - F \left(\Theta_{\min}, \sqrt{\frac{2h}{c+h}} \right) \right]. \quad (6)$$

В выражении в квадратных скобках левой части (6) заменим $\cos \Theta$ на его среднее значение, которое будет найдено ниже (первая ступень итерационного процесса для нахождения усредненной намагниченности), а само выражение для кратности будем записывать в виде σ_h .

Анализ граничных условий показывает, что $2h/(c+h) > 1$, что как и в предыдущем случае, требует замены модуля. С учетом сказанного распределение намагниченности имеет вид [3]:

$$\sin \theta = q \operatorname{sn} [K(q) + \sqrt{2h}(z + \sigma_h \Psi h), q], \tag{7}$$

Модуль $q = \sqrt{(c+h)/2h}$ находится из краевого условия

$$1 = q \operatorname{sn} [K(q) + \sqrt{2h}(d + \sigma_h \Psi h), q]. \tag{8}$$

Среднее от $\sin \theta$ является решением уравнения

$$\langle \sin \theta \rangle = \frac{1}{d\sqrt{2h}} \ln \frac{\sqrt{1-q^2}}{\operatorname{dn} f(\Psi) - q \operatorname{cn} f(\Psi)}, \tag{9}$$

где $f(\Psi) = K(q) + h\sqrt{2h}\sigma_h$. Ориентация оси легкого намагничивания (ОЛН) — угол Ψ_0 — находится из условия:

$$\sin \Psi_0 = \frac{1}{d\sqrt{2h}} \ln \frac{\sqrt{1-q^2}}{\operatorname{dn} f(\Psi_0) - q \operatorname{cn} f(\Psi_0)}. \tag{10}$$

случае больших толщин ($q \rightarrow 1$) выражение (10) приобретает следующий вид:

$$\sin \Psi_0 \approx \frac{2.125}{2d\sqrt{2h}} \ln \frac{2 - 1.2e^{-d\sqrt{2h}}}{1.2e^{-d\sqrt{2h}}}, \tag{11}$$

(здесь использовано разложение полного эллиптического интеграла и эллиптических функций по параметру $q \leq 1$).

Таким образом, направление ОЛН не соответствует нормали к плоскости пленки и угол отклонения. ОЛН монотонно уменьшается при увеличении напряженности магнитного поля.

Отличный от нуля вращающий момент L_0 при $\Psi=0$ определяется как:

$$L_0 = \frac{MH}{d\sqrt{2h}} \ln \frac{\sqrt{1-q^2}}{\operatorname{dn} K(q) - q \operatorname{cn} K(q)}. \tag{12}$$

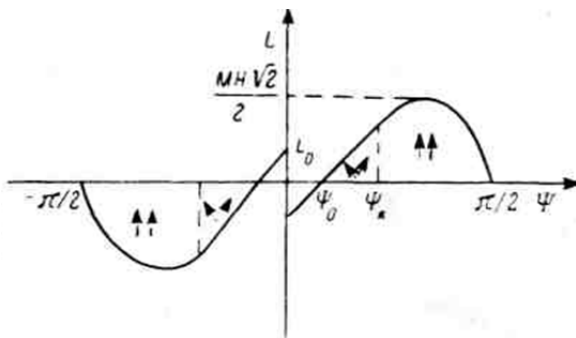


Рис. 1. Угловая зависимость вращающего момента тонкой пленки с поверхностной анизотропией.

Угловая зависимость вращающего момента показана на рис. 1. Рассмотрим случай слабых магнитных полей, $H \ll H_k$. Первый интеграл уравнения Эйлера имеет вид:

$$z = \int_{\theta_{min}}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{c + \gamma \sin^2 \theta - h \cos(\Psi - \theta)}}, \tag{13}$$

который может быть представлен как:

$$z = \int_{\theta_{min}}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{c + \gamma \sin^2 \theta}} + \frac{1}{2} h \int_{\theta_{min}}^{\theta} \frac{\cos(\Psi - \theta)}{(c + \gamma \sin^2 \theta)^{3/2}}. \tag{14}$$

Поскольку в данном случае константа c является отрицательной, обе части (14) необходимо умножить на мнимую единицу, здесь также необходимо произвести замену модуля. В итоге имеем:

$$\sin \theta = p \operatorname{sn} \left[K(p) + i(z + h\Phi)\sqrt{|\gamma|}, p \right], \quad p = \sqrt{\frac{\gamma}{c}}. \quad (15)$$

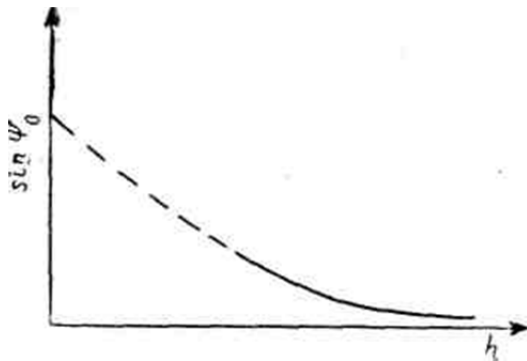


Рис. 2. Зависимость ориентации ОЛН тонкой пленки с поверхностной анизотропией от напряженности внешнего магнитного поля по (16).

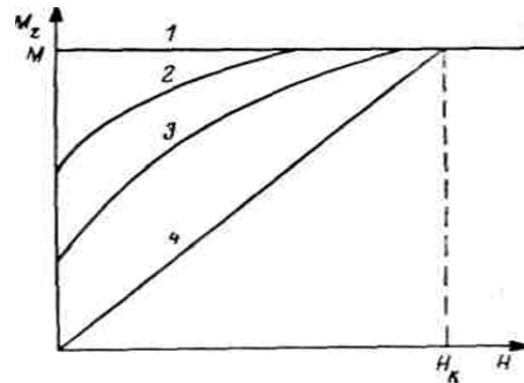


Рис. 3. Кривые намагничивания пленок с поверхностной анизотропией, магнитное поле направлено по нормали к плоскости пленки. 1 – $d \leq d_{k0}$, 2 – $d = 1.7 d_{k0}$, 3 – $d = 3 d_{k0}$, 4 – $d = \infty$.

Подобным образом можно найти среднее от $\sin \theta$ и ориентацию ОЛН [4]. Уместно отметить, что в отсутствие магнитного поля ОЛН задается выражением.

$$\sin \psi_0 = \frac{1}{d\sqrt{\gamma}} \ln \frac{\sqrt{1-p^2}}{\operatorname{dn} K(p) - p \operatorname{cn} K(p)} \quad (16)$$

В случае больших толщин ($p \rightarrow 0$) выражение (16) принимает вид

$$\sin \psi_0 \approx \frac{0.215}{d\sqrt{\gamma}ch^2d\sqrt{\gamma}} \quad (17)$$

Таким образом, в зависимости от внешнего магнитного поля направление ОЛН пленки изменяется (рис. 2). Это наиболее характерный эффект для пленок с конкурирующей анизотропией. На опыте это должно проявляться в повороте или (при достаточном моменте инерции) вращении образца в изменяющемся по амплитуде внешнем магнитном поле. На рис. 3 показаны кривые намагничивания пленок в магнитном поле, нормальном к их плоскости.

В заключение следует отметить, что, поскольку критическая толщина d_{k0} для типичных ферромагнетиков, согласно [5], составляет 10^2 – 10^3 Å, а константа поверхностной анизотропии k_s , по теоретическим оценкам Нееля и согласно экспериментальным данным для многослойных пленок [3,5], составляет 0.1 – 1 эрг/см², что соответствует «объемной» анизотропии поверхности $k_v/k_s/a \approx 10^7$ – 10^8 эрг/см² (a — параметр кристаллической решетки), то в данном случае справедливы сделанные приближения о «жестком» закреплении магнитного момента и возможность индуцированной магнитной анизотропии в пленках поверхностными эффектами не представляется экзотической.

Литература

1. Барьяхтар В. Г., Клепиков В. Ф., Соболев В. Л. // ФТТ» 1971. Т. 13. № 5. С. 1454-1462 .
2. Бабкин Е.В., Уринов Х.О. Анизотропия магнитокалорического эффекта в ферромагнитных кристаллах. // ФТТ, 1990.- Т. 32, вып. 4.- С. 689-694.
3. Бабкин Е.В., Баранов Г. И., Уринов Х.О. Магнитное охлаждение композиционного ферромагнетика. //- Письма в ЖТФ, 1991.- Т. 17, вып.5. – С.10-12.
4. Бабкин Е.В., Уринов Х.О. Рабочее тело магнитной холодильной машины. Авт. Свид. № 1746161 8.03.1992.
5. Уринов Х.О. Магнитокалорический эффект в кубическом ферромагнетике. СамДУ Илмий таджикотлар Ахборотномаси. 2016. 3-сон, 89-94 б.

UDK: 537.311.23

**YARIM O‘TKAZGICHLARDA ULTRATOVUSHNING YUTILISHIDAGI
NOCHIZIQLI EFFEKTLAR HAQIDA**

O. Pardayev, M. Shoimov

Samarqand davlat universiteti

E-mail: artikpardaev@mail.ru

Annotatsiya. To‘lqin uzunligi elektronlarning diffusion uzunligidan ancha kichik, lekin ularning erkin chopish uzunligidan ancha katta bo‘lgan tovush to‘lqinining yarimo‘tkazgichlarda yutilishida yuzaga keladigan nochizikli effektlarga tovush yaratgan elektr maydoni tomonidan elektronlarning qizishining ta‘siri qarab chiqilgan. Elektronlar energiyasining ortishi bilan impulsning relaksatsiya vaqti sochilishning yetarlicha tez oshadigan ayrim mexanizmlarida tovush yutilishi koeffitsiyentining elektronlarning tovush to‘lqini tomonidan qizdirilishiga juda ta‘sirchan bo‘lishligi, ya‘ni yutilishning nochizikli koeffitsiyentining chizikli yutilish koeffitsiyentidan qizish parametrining hatto kichik qiymatlarida ham sezilarli farq qilishi ko‘rsatilgan. O‘rganilgan sharoitlarda tovush yutilishining nochizikli koeffitsiyentining tovush intinsivligi va chastotasidan qanday bog‘liq bo‘lishligi qarab chiqilgan.

Kalit so‘zlar: ultratovush, uzunlik, chopish, erkin, yarimo‘tkazgich, yutilish, koeffitsiyen, sochilish, mexanizm, chizikli, nochizikli, chastota, to‘lqin uzunlik, relaksatsiya, qizish, effektiv, elektr maydon

Об эффектах при поглощении ультразвука в полупроводниках

Аннотация. Рассмотрены нелинейные эффекты в поглощении ультразвука, длина волны которого много меньше диффузионной длины, но много больше длины свободного пробега носителей, связанные с разогревом носителей электрическим полем звуковой волны. Показано, что при некоторых механизмах рассеяния, при которых время релаксации импульса достаточно быстро возрастает с ростом энергии, коэффициент поглощения звука может быть чрезвычайно чувствительным к разогреву полем звуковой волны-нелинейный коэффициент поглощения может существенно отличаться от линейного уже при малых значениях параметра разогрева. Изучены зависимости нелинейного коэффициента поглощения звука от интенсивности звука и частоты в них условиях.

Ключевые слова: ультразвук, поглощение, усиление, волновой вектор, частота, электрон, линейный, нелинейный, коэффициент, рассеяние, механизм, распределение

On nonlinear effects in ultrasound absorption in semiconductors

Abstract. We consider nonlinear effects in ultrasound absorption, whose wavelength is much smaller than the diffusion length, but much larger than the mean free path of carriers associated with the heating of carriers by the electric field of the sound wave. It is shown that for some scattering mechanisms, for which the pulse relaxation time increases rapidly with increasing Energy, the sound absorption coefficient can be extremely sensitive to heating by the sound wave field-the nonlinear absorption coefficient can differ substantially from linearly Th already at small values of the heating parameter. The dependences of the nonlinear coefficient of sound absorption on the intensity of sound and frequency in their conditions are studied.

Keywords: ultrasound, absorption, amplification, wave vector, frequency, electron, linear, nonlinear, coefficient, scattering, mechanism, distribution.

Keyingi yillarda bir qancha eksperimental va nazariy ishlar [1-4] paydo bo‘ldi-ki, ularda

$$ql \ll 1 \quad (1),$$

$$\omega\tau_\varepsilon \gg 1 \quad (2)$$

shartlar bajarilganda yarimo‘tkazgichlarda ultratovushning yutilishi va kuchayishi atroflicha o‘rganildi. Bu yerda q – tovushning to‘lqin vektori, ω – uning chastotasi, l – tok tashuvchilarining erkin chopish uzunligi, τ_ε – energiyaning relaksatsiya vaqti. (1) va (2) sharoitlar yuqori ildamlikka ega bo‘lgan n - $InSb$ turidagi yarimo‘tkazgichlarda to‘lasincha amalgam oshadi.

(2) shartga ko'ra tovush tebranish davri ichida tizimda energiya bo'yicha elektronlarning muvozanatli taqsimoti o'rnashib ulgura olmaydi. Shu sababdan berilgan yarimo'tkazgichlarda tovushning yutilishini va kuchayishini Uaytning [5] gidrodinamik nazariyasi yordamida tavsiflab bo'lmaydi hamda tovush yutilish va kuchayish koeffitsiyentlari kattalik jihatdan ham chastotaga bog'liqligi jihatidan ham Uayt nazariyasi beradigan natijalaridan tubdan farq qiladi. Ayniqsa bunday farq

$$\omega \ll q^2 D \quad (3)$$

shart bajarilganida katta bo'lishi mumkin. Bu yerda D – elektronlarning diffuziya koeffitsiyenti. (3) shart bajarilganida impulsning relaksatsiya vaqti τ_p energiya ε ning oshishi bilan osha boradi.

Kagan [4] ning ko'rsatishicha, tovushning yutilish koeffitsiyenti gidrodinamik nazariya natijasidan sezilarli darajada katta bo'lishi va chastotadan bog'liqligi butunlay boshqacha bo'lishi ham mumkin.

Bunday o'ziga xos bog'lanish quyidagi holatlar tufayli yuzaga kelgan bo'ladi. Bizda (1) shart bajarilar ekan, elektronlar to'liq uzunligi tartibidagi masofalarda aralashmalar yoki fononlar bilan ko'p martalab to'qnashib ulgurgan bo'ladi va natijada o'zlarining harakat yo'nalishlarini o'zgaradi. Ayni shu paytda yuqori ildamlikli yarimo'tkazgichlarda yetarlicha past temperaturalarda elektronlarning sochilishi kvazielastik hisoblanadi, ya'ni quyidagi shart bajarilgan bo'ladi:

$$\tau_\varepsilon \gg \tau_p \quad (4)$$

Demak, doimiy energiyali qatlam ichida elektronlar juda tez aralashganligini va qatlamlar orasida elektronlarning sekin qayta taqsimlanganligini kuzatishimiz mumkin. Shuning uchun nomuvozanat elektronlar quyqasining so'rilishining xarakterli vaqti ω^{-1} , τ_ε , $[q^2 D(\varepsilon)]^{-1}$ vaqtlardan birining minimal qiymati bilan aniqlangan bo'ladi. Bu vaqtlarning birinchisi tovush to'liqini maydonining davriga mos kelsa, ikkinchisi-energetik qatlamlar o'rtasidagi o'tishga, uchinchisi-koordinatalar fazosida berilgan energiyali elektronlar diffuziyasiga mos keladi.

Biz (2) va (3) shartlarni bajariladi deb hisoblayotganimiz uchun bizning holatda elektronlarning nomuvozanat quyqasining relaksatsiya qilishining asosiy mexanizmi bo'lib $q^2 D(\varepsilon)$ had bilan tavsiflanuvchi diffuziya hisoblanadi. Lekin, agar diffuziyaning parsial koeffitsiyentini ifodalovchi $D(\varepsilon)$ energiyaning daraja bo'yicha oshib boruvchi qonun bilan o'zgarsa, kichik energiyalarda ($\varepsilon \ll T$) (Boltsman doimiysi $k = 1$ deb hisobladik) relaksatsiyaning diffuziyali mexanizmi noeffektiv bo'lib qolishi mumkin. Yutilishning chastotaga bog'lanishining aniq ko'rinishi ω^{-1} yoki τ_ε vaqtlardan qaysi birining kichikligi bilan aniqlanadi. Shulardan $\omega \tau_\varepsilon \ll 1$ [4] ishda o'rganilgan, $\omega \tau_\varepsilon \gg 1$ hol esa [5] ishda o'rganilgan. Ushbu maqolaning maqsadi yuqorida aytilgan fikrlarni konkret modelda namoyish qilishdan iboratdir.

Tovush intensivligini yetarli darajada kichik deb hisoblaymiz va

$$\omega \tau_\varepsilon \gg 1 \quad (5)$$

tengsizligi o'rinli bo'lsin. Bu yerda e – electron zaryadi, φ_q – elektronga ta'sir etuvchi effektiv elektr maydoni potensialining amplitudasi, $\bar{\varepsilon}$ – elektronning o'rtacha energiyasi. Bu shart bajarilgan holda elektronlarning tovush to'liqiniga ta'siri kichik bo'ladi va [1, 5] ishlarda ko'rsatilganiga ko'ra, tovush to'liqinini garmonik qonunlar bilan tarqaladi deb hisoblash mumkin bo'ladi. Bu holda bizni qiziqtirayotgan barcha kattaliklarni vaqt bo'yicha doimiy qismlardan va $\exp[i(qx - \omega t)]$ ga proporsional qismlardan iborat deb olishimiz mumkin.

Elastiklik nazariyasi tenglamasi va Puasson tenglamasidan foydalanib, pyezoelektrik yarimo'tkazgichda tarqalayotgan tovush to'liqini uchun dispersiya qonunini yoza olamiz

$$\frac{\omega^2 - \omega_0^2(q)}{\omega_0^2(q)} = \chi \left[1 + \frac{4\pi e^2}{\varepsilon_0 q^2} K_q(\omega) \right]^{-1} \quad (6)$$

Bu yerda χ – o'lchamsiz elektromexanik bog'lanish doimiyligi, ε_0 – dielektrik singdiruvchanlik, $\omega_0(q) = \omega q$ – pyezoeffekt bo'lmaganida q to'liqin vektorli tovushning chastotasi. Tovushning yutilish koeffitsiyenti $\alpha = 2\text{Im}q(\omega)$ (6)-dispersiya qonunidan topiladi. Bu qonunga elektronlarni

g'alayonlantiruvchi $e\varphi_q$ energiyaga n_q elektronlar konsentratsiyasining javob funksiyasi $K_q(\omega)$ kirgan bo'ladi

$$n_q(\omega) = -e\varphi_q K_q(\omega) \quad (7)$$

Javob funksiyasini aniqlash uchun elektronlar uchun Boltsmanning kinetic tenglamasini yechish kerak bo'ladi. Yuqorida qayd qilib o'tilgan sharoitlarni hisobga olgan holda elektronlarning energiyasi doimiy bo'lgan sirt bo'yicha o'rtachalangan taqsimot funksiyasini vaqt va fazo bo'yicha doimiy bo'lgan $F(\varepsilon)$ va garmonik o'zgaruvchi $f(\varepsilon)$ qismlarning yig'indisi tariqasida olashimiz qulay bo'ladi. Maqsadimiz $f(\varepsilon)$ ni hisoblashdan iborat, chunki elektronlar konsentratsiyasining Furye komponentasi ana shu funksiya orqali topiladi

$$n_q = \int_0^{\infty} d\varepsilon \rho(\varepsilon) f(\varepsilon) \quad (8)$$

Bu yerda $\rho(\varepsilon)$ – holatlar zichligi. (2), (3) va (5) formulalar asosida taqsimot funksiyasining «tez» qismi uchun tenglamani

$$[-i\omega + q^2 D(\varepsilon)] f(\varepsilon) = q^2 D(\varepsilon) e\varphi_q \frac{dF}{d\varepsilon} \quad (9)$$

ko'rinishida yozish mumkin bo'ladi. Bu yerda

$$D(\varepsilon) = \frac{q_i q_k}{q^2} D_{ik}(\varepsilon), \quad D_{ik}(\varepsilon) = \langle \mathcal{G}_i \hat{I}^{-1} \mathcal{G}_k \rangle \quad (10)$$

Bu yerda $\langle \dots \rangle$ belgi doimiy ε energiyali sirt bo'yicha olingan o'rtachalashni ifodalaydi; \hat{I}^{-1} – kinetik tenglamada ishtirok etuvchi to'qnashuv operatorining teskarisi (magnit maydoni mavjud bo'lganda bu operator $\left\{ \hat{I} \rightarrow \hat{I} - \frac{e}{c} [\vec{v}x\vec{H}] \right\}^{-1}$ operatorga almashtiriladi). $D(\varepsilon)$ kattalik, aytib o'tganimizdek, berilgan energiyali tovushning to'lqin vektori yo'nalishidagi diffuziya koeffitsiyenti hisoblanadi.

Faraz qilaylikki, $D(\varepsilon)$ ning energiyaga bog'likligi darajali bo'lsin. U holda $D(\varepsilon)$ kattalikni q yo'nalishidagi diffuziya koeffitsiyenti bilan osongina quyidagicha bog'lash mumkin:

$$D(x) = D \frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma(u+1)} x^{u-\frac{1}{2}}, \quad (11)$$

bu yerda $x = \varepsilon/T$, $\Gamma(u+1)$ – Eylerning gamma-funksiyasi, u – energiyaning relaksatsiya mexanizmini ko'rsatuvchi son va u impulsning relaksatsiya vaqti τ_p ning energiyaga bog'lanishini ($\tau_p \sim \varepsilon^s$) ko'rsatadi; agar $H = 0$ yoki kuchli magnit maydon bo'lib, unda $\mathbf{q} \uparrow \uparrow \mathbf{H}$ bo'lsa, $u = s + 3/2$ bo'ladi; agar $\mathbf{q} \perp \mathbf{H}$ bo'lgan magnit maydoni bo'lsa, $u = 3/2 - s$ bo'ladi.

Bizning bunday belgilashlarimizda (9) tenglamaning yechimi quyidagicha yoziladi:

$$f(x) = \frac{x^{u-1/2}}{-it + x^{u-1/2}} \frac{e\phi_q}{T} \frac{dF}{dx} \quad (12), \quad t = \frac{\omega}{q^2 D} \frac{2\Gamma(u+1)}{\sqrt{\pi}} \sim \frac{w}{\bar{v}} (ql)^{-1} \quad (13)$$

-biz qurayotgan nazariyaning kichik parametri. Shu qayd qilib o'tamizki, bu parametrlarning kichikligi (1) shartni inkor etmaydi, chunki $\frac{w}{\bar{v}} \sim 10^{-2} - 10^{-3}$ qiymatga ega bo'ladi. Tovushning yutilishini va dispersiyasini aniqlovchi javob funksiyasi $K_q(\omega)$ berilgan belgilashlarda quyidagiga teng bo'ladi:

$$K_q(\omega) = \rho(T) \int_0^{\infty} \frac{x^u (x^{u-1/2} + it)}{t^2 + x^{2u-1}} \left(-\frac{dF}{dx} \right) dx \quad (14)$$

(14) dan ko'rinadiki, chiziqli holda integral ostidagi ifodada kichik parametr t e'tiborga olinmasa va $u \geq 2$ deb hisoblansa hamda $F \sim e^{-x}$ bo'lganda $ImK_q(\omega)$ uchun x bo'yicha olingan integral uzoqlashuvchi integral bo'ladi. Demak, $ImK_q(\omega)$ t parametriga (demak, tovush chastotasidan ham, chunki $t \sim \omega^{-1}$) $u \geq 2$ bo'lganda noanalitik bog'lanishda bo'ladi. Xuddi ana shu holni

kelgusida qaraymiz, chunki aynan shu holda ko'proq qiziqarli chastotaga bog'lanishlarni ko'rishimiz mumkin bo'ladi. Bunday hol elektronlarning magnet maydon mavjud bo'lmaganida ionlashgan aralashmalardan sochilganida ($u = 2$), shuningdek kuchli magnet maydonida elektronlarning akustik fononlardan sochilganida ($u = 3$) yuzaga kelishi mumkin.

Taqsimot funksiyasi F ning «sekin» qismi uchun tenglama kinetik tenglamani tovush to'liqining davri bo'yicha o'rtachalab olish mumkin. (5) ni e'tiborga olib, bu tenglamani quyidagi ko'rinishda yoza olamiz:

$$-\frac{(e\phi_q)^2}{2\sqrt{\varepsilon}} \frac{d}{d\varepsilon} \left(\sqrt{\varepsilon} \frac{q^2 D(\varepsilon) \omega^2}{\omega^2 + [q^2 D(\varepsilon)]^2} \frac{dF}{d\varepsilon} \right) + \hat{I}F = 0 \quad (15)$$

Faraz qilaylikki, elektronlar energiyasi akustik fononlarda relaksatsiya qilayotgan bo'lsin. U holda doimiy energiyali sirt bo'yicha o'rtachalangan to'qnashuv operatori \hat{I} quyidagi ko'rinishda yoziladi [7]

$$\hat{I}F = -\frac{\sqrt{\pi}}{2\tau_\varepsilon} \frac{1}{x} \frac{d}{dx} x^2 \left(1 + \frac{d}{dx} \right) F \quad (16)$$

Bu yerda

$\tau_\varepsilon = \pi^{3/2} \hbar^4 \rho / 4\sqrt{2} \Lambda m^{3/2} \sqrt{T}$ – elektronlar energiyasining relaksatsiya vaqti, m – effektiv massa, Λ – deformatsiya potensialining doimiysi. Sochilishning bunday mexanizmida (15) tenglama yechimi

$$F = C \exp \left(-\int_0^\infty \frac{t^2 + \xi^{2u-1}}{t^2 + \xi^{2u-1} + h \xi^{u-2}} d\xi \right) \quad (17)$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu yerda C doimiylik standart usulda topiladi, qizish parametri h esa*)

$$h = \left(\frac{e\phi_q}{T} \right)^2 \frac{\Gamma(u+1)}{\pi} \omega \tau_\varepsilon t \quad (18)$$

Bu yerda biz kuchsiz qizish holini ($h \ll 1$ qaraymiz. U holda (17) dan ko'rinadiki, qizish elektronlarning o'rtacha energiyasini kam o'zgartiradi, shuning uchun C doimiylikni hisoblaganda $h = 0$ deb olsak bo'ladi. Demak, biz bu koeffitsiyentni chiziqli nazariyadagi koeffitsiyent tariqasida olishimiz mumkin bo'ladi. Bundan tashqari, t va h parametrlar kichik bo'lganidan $ReK_q(\omega)$ ni hisoblagan vaqtimizda bu parametrlarni hisobga olmasligimiz ham mumkin bo'ladi. Demak, javob funksiyasining haqiqiy qismi qizish mavjud bo'lmagan holdagidek qiymatga ega bo'ladi. Shuning uchun yutilishning nochiziqli koeffitsiyenti α ning chiziqli koeffitsiyent α_0 ga nisbati javob funksiyasi mavhum qismlarining qizish mavjud bo'lgandagi va bo'lmagandagi o'zaro nisbatiga teng bo'ladi

$$\frac{\alpha}{\alpha_0} = \frac{\hat{I}(h)}{I(0)}, \quad (19)$$

$$\hat{I}(h) = \int_0^\infty \frac{x^u dx}{t^2 + x^{2u-1} + hx^{u-2}} \exp \left(-\int_0^x \frac{t^2 + \xi^{2u-1}}{t^2 + \xi^{2u-1} + h \xi^{u-2}} d\xi \right). \quad (20)$$

Bu integralda $u \geq 2$ bo'lganida kichik x lar muhim sanaladi, agar quyidagi shart bajarilsa:

$h \ll t^{\frac{2(u+1)}{2u-1}}$ (21), bu holda eksponenta oldida turgan integral ostidagi kasr mahrajidagi t^2 ni hisobga olmaslik mumkin.

Natijada

$$\frac{\alpha(h)}{\alpha_0} = \left[\frac{h}{t^{\frac{2(2+1)}{2u-1}}} \right]^{\frac{2-u}{u+1}} \quad (22)$$

(20) shartni hisobga olsak, (22) nisbat birdan ancha kichik bo'ladi.

Biz $u = 2$ bo'lgan holni alohida tahlil qilamiz. Bizdagi integralni 0 dan x_1 gacha va x_1 dan x gacha integrallash sohalariga mos keladigan ikki qismga ajrataylik. Bunda x_1 quyidagi $h^{1/3} \ll x_1 \ll 1$ shartni qanoatlantirsin. Birinchi integralda eksponentani bir soniga almashtirish mumkin

va natijada logarifmik aniqlikda $\ln(x_1/h^{1/3})$ ni olamiz. Ikkinchi integralda $x > x_1 \propto t^{2/3}$, $h^{1/3}$ muhim hisoblanadi. Shuning uchun uni hisoblashda t^2, h larga proporsional bo'lgan hadlarni e'tiborga olmasligimiz mumkin bo'ladi. Logarifmik aniqlikda ikkinchi integralimiz $\ln(\gamma/x_1)$ ga teng bo'ladi, bu yerda γ – Eyler doimiysining logarifmi. Shunday qilib, $I(h) = \ln(\gamma/h^{1/3})$. Xuddi shunday tahlilni o'tkazish asosida $I(0) = \ln(\gamma/t^{2/3})$ bo'lishini topamiz. Shuning uchun $u = 2$ bo'lganda

$$\frac{\alpha(h)}{\alpha_0} = \frac{\ln(\gamma/h^{1/3})}{\ln(\gamma/t^{2/3})} \quad (23)$$

(21) shartni hisobga olsak, $\alpha \propto \alpha_0$ bo'lishini ko'ramiz.

Shunday qilib biz, hatto kuchsiz qizish ($h \ll 1$) sharoitida ham yutilish koeffitsiyenti elektronlarning tovush to'liqini maydonida qizishiga favqulotda sezgir bo'lishini ko'ramiz.

Adabiyotlar

1. Ю. М. Гальперин, И.Л. Дричко, Б. Д. Лайхтман. ФТТ, т.12, 1437, 1972
2. С. Н. Иванов, Г. Д. Мансфельд, Е. Н. Хазанов. ФТП, т.6, 2403, 1972
3. А. С. Бугаев, Ю. В. Гуляев, Г. Н. Шкердин. ФТТ, т.12, 2654, 1970
4. В. Д. Каган. ФТТ, т.16, 2022, 1974
5. А. Пардаев. Кандидатлик диссертацияси. – Тошкент. 1974

UDK 621.3

KREMNIYDA TERMODONORLARNING MODELLARI

E. U. Arziqulov, S. N. Srajev, O. S. Ne'matov

Samarqand davlat universiteti

Annotatsiya. Kremniyda termodonor-I (TD-I) ning paydo bo'lishining mavjud mexanizmlari qiyosiy bayon qilingan. Kremniyning elektr o'tkazuvchanligiga kislorodning ta'sir mexanizmi haqida ilmiy adabiyotlarda keltirilgan ma'lumotlar muhokama qilingan. Kremniyda paydo bo'luvchi termodonorlarning tabiati, strukturasi to'g'risidagi dunyo olimlari tomonidan taklif etilgan modellar keltirilgan.

Kalit so'zlari: termodonor, vakansiya, kislorod-vakansiya, qattiq aralashma, silitka, termik ishlov, generatsiya, diffuziya, legirlash, kremniy, kislorod, kompleks.

Модели термодоноров в кремнии

Аннотация. Приведены существующие механизмы образование термодоноров-I (ТД-I) в кремнии. Обсуждены сведения о механизме влияние кислорода на электропроводности кремния приведенные в научных литературах. Приведены основные положения существующих моделей о природе и структурах термодоноров в кремнии.

Ключевые слова: термодонор, вакансия, кислород-вакансия, твердый раствор, слиток, термическая обработка, генерация, диффузия, легирование, кремний, кислород, комплекс.

Models of thermodonors in silicon

Abstract. Mechanisms formation of thermodonors-I (TD-I) in silicon are presented. The mechanism oxygen influence on electrical conduction silicon presenting in literatures is discussed. The basic position of existing models about the nature and structures of thermodonors in silicon is presented.

Keywords: thermodonor, vacancy, oxygen-vacancy, solid solution, bulk silicon, thermal processing, generation, diffusion, doping, silicon, oxygen, complex.

Yarimo'tkazgichli elektronikaning asosiy baza elementi sifatida kremniy kristalli qo'llaniladi. Yarimo'tkazgichli elektron asboblarni tayyorlash jarayonida ularga turli xil termik ishlovlar berish bilan texnologik jarayonlar amalga oshiriladi. Xususan, kremniyga turli xil termik ishlovlar berilganda uning hajmida termik nuqsonlar paydo bo'lib, ular kremniy asosida tayyorlanadigan asboblarning elektrofizik va rekombinatsion xossalariiga salbiy ta'sir ko'rsatadi. Kremniyga termik ishlovlar

berilganda paydo bo'luvchi termodonlarni butun dunyodagi soha mutaxassisleri tomonidan o'rganilib ularni 3 xil termodonlarga ajratishadilar: TD-1, TD-2, TD-3. Ushbu maqolada TD-1 ning paydo bo'lish mexanizmlari va modellari keltirilgan.

Kremniyning elektr o'tkazuvchanligiga kislorodning ta'sir mexanizmi haqida.

Kremniyda erigan kislorod uining elektr o'tkazuvchanligiga ta'sir ko'rsatmaydi, ammo tarkibida kislorod bo'lgan monokristallarga termik ishlov berilganda ma'lum bir temperaturalarda kislorodning kremniy bilan bog'lanish hosil qilishiga olib kelishi mumkin. Termik ishlov berishning ta'sir xarakteriga qarab elektr jihatdan faol markazlarning generatsiyasini ikki xil temperatura oralig'iga ajratish mumkin: 350-500 °S va 600-800 °S.

Biz 350-500 °S temperatura oralig'ida paydo bo'luvchi termik markazlarni qarab chiqamiz. Kremniyda 350-500 °S temperatura oralig'ida termodonlarning paydo bo'lishini birinchi bo'lib Fyullyer aniqlagan [1]. Keyinchalik termodonlarning paydo bo'lishi to'g'risidagi ilmiy tadqiqot ishlari natijalari asosida Kayzer o'z modelini yaratdi. Shu model asosida 350-500 °S temperatura oralig'ida paydo bo'luvchi termodonlarning harakterli tomonlarini aniqlash imkoniyati paydo bo'ldi:

1. Kremniyda erigan kislorod undagi termodonlarning paydo bo'lishida asosiy rolni o'ynaydi.
2. Choxralskiy usuli bilan o'stirilgan kremniyda kislorodning konsentrasiyasi taxminan $1,5 \cdot 10^8 \text{ sm}^{-3}$ ga teng bo'lib, quymani sovutish jarayonida o'ta to'yingan kislorodli qattiq aralashma hosil bo'ladi.
3. Termodonlar paydo bo'lishining boshlang'ich tezligi kislorod konsentrasiyasining 4-chi darajasiga to'g'ri proporsional bo'ladi.
4. Termodonlarning maksimal konsentrasiyasi kislorod konsentrasiyasining 3-chi darajasiga to'g'ri proporsional bo'ladi.
5. Termik ishlov berish jarayonida SiO_4 komplekslaridan tashqari 4 tadan kam ishtirok etuvchi uyg'ongan donorli markazlar oilasi paydo bo'ladi.
6. 500°C dan yuqori temperaturalarda termodonlar konsentrasiyasining kamayishi kuzatiladi.

Tajribalar natijasi asosida Kayzer o'z hammualliflari bilan termodonlar generatsiyasi haqida o'z modelini yaratdi. Bu model hozir fanda Kayzer modeli deb nom olgan [2]. Kayzer modeliga ko'ra 350-500 °S temperatura oralig'ida paydo bo'luvchi termodonlar turg'un SiO_4 -tetraedr shaklidagi komplekslar bo'lib hisoblanadi. Tarkibida kislorod mavjud bo'lgan kremniyga 350-500 °S temperatura oralig'ida termik ishlov berish kremniyning taqiqlangan zonasida mayda donorli energetik sathlarning paydo bo'lishiga olib keladi. Bu energetik sathlar turli mualliflar tomonidan ($E_c - 0.13 \text{ eV}$ va $E_c - 0.16 \text{ eV}$) aniqlangan. Ko'pchilik mualliflarning fikricha $E_c - 0.16 \text{ eV}$ energetik sath SiO_4 komplekslarning hosil bo'lishi bilan $E_c - 0.08 \text{ eV}$ donorli mayda energetik sathlarni esa kislorod-kremniyli polimerlarning paydo bo'lishi bilan bog'liq, deb hisoblaydilar. Bulardan tashqari [3] da bu sathlar issiqlik nuqsonlarining bir karra va ikki karra zaryadlangan holatlari bilan bog'liq, degan fikrlarni bayon qilishgan.

Kayzer modeli TD hosil bo'lish mexanizmi to'g'risida mulohaza qiladi, ammo SiO_4 kompleksning donorli xossalari haqida hech qanday tushintirish bermaydi. SiO_4 kompleksning donorli xossasini tushintirish uchun birinchi marta fransuz olimi J. P. Syushe [4] harakat qilgan va 450 °S da kompleks hosil bo'lishining bir nechta variantlarini ko'rib chiqqan. Shulardan eng ehtimoli kattasi 1 zaryadli O_4 dir. Bu donor-ion-molekula bo'lib, vakansiya va qo'shni tugun orasida joylashgandir. O_4 kompleksining 1 ta kislorod atomi tugunda joylashgan bo'lib $+2e$ zaryadlangan. Kislorod atomining bu holatda stabil bo'lishi uni o'rab turgan 3 ta manfiy zaryadlanagan tugunlar orasida joylashgan kislorod atomlari hisobiga bo'ladi. Syushe fikriga ko'ra, kislorodli komplekslarning yuqori tartiblilari neytral markazlardek tutishi kerak. Bu fikr Kayzer modeliga mos tushadi.

Kayzer o'z modelini ishlab chiqishda kislordning boshqa kirishmalar bilan o'zaro ta'sirini hisobga olmagan. Shu bilan birga bir qator ishlarda kremniyda kirishmalar bo'lganda [2] dagi modeldan chetlanishlar kuzatiladi. [2, 5] ishlarda 350-500 °S temperatura oralig'ida termodonlar generatsiyasiga uglerodning ta'siri bo'ladi va u sekinlashtiradi, deyilgan.

Termodonlar paydo bo'lishiga akseptorli kirishmalarning (*Al*, *B*, *Ga*) ta'siri Fuller va uning hammualliflari tomonidan o'rganilgan va birinchi marta akseptor markazlarining termodonlar generatsiyasini sezilarli darajada tezlashtirishi kuzatilgan. Mualliflar turli xil temperaturalarga stabil

bo'lgan kamida 2 xil donorli markazlar mavjudligini aytishgan: $t > 500^{\circ}\text{S}$ da noturg'un bo'lgan SiO_4 va ancha turg'un bo'lgan SiO_4 akseptorli kirishmalar bilan hosil qilgan komplekslar. Ammo ular ham bu fikrlarni tasdiqlovchi biror bir tajriba natijalarini yoki nazariy fikrlarni keltirmagan, termodonorlar generatsiyasiga akseptor yoki donorli kirishmalarining ta'siri ham o'rganilmagan. Bu masalani [6] ish mualliflari ancha yaxshi muhokama qilishgan va quyidagi fikrlarni bayon etgan:

- termodonorlarning hosil bo'lish kinetikasi $n\text{-Si}$ da Kayzer modeliga bo'ysinadi. Bunda asosiy kiritilayotgan kirishma fosfor konsentratsiyasining TD generatsiyasiga ta'siri sezilmagan.
- akseptorli kirishma konsentratsiyasi juda yuqori bo'lmagan (V) $p\text{-Si}$ da TD generatsiyasi $n\text{-Si}$ niki kabi bo'ladi. Borning konsentratsiyasi oshishi bilan TD hosil bo'lishining boshlang'ich tezligi va konsentratsiyasi birdaniga oshib ketadi. Bor bilan legirlangan $p\text{-Si}$ ga $350\text{-}500^{\circ}\text{S}$ temperatura oralig'ida termik ishlov berilganda SiO_4 TD bilan birga bir zaryadli $\text{O}_{\text{Si}}^{2+}\text{B}_{\text{Si}}^{-}$ TD ham paydo bo'lishi mumkin. SiO_4 dagidek, TD ning yangi shakli bu tugunda o'tirgan kislorod atomi va qo'shni akseptor kirishma atomi bilan stabil holatda bo'lishi mumkin.

Chuqur energetik sathlar hosil qiluvchi markazlarning TD lar paydo bo'lishiga ishtirok etish imkoniyati to'g'risida Graffning ishlarida [7] aytilgan. Bunday fikrlar $350\text{-}500^{\circ}\text{S}$ temperatura oralig'ida Si ga termik ishlov berilganda asosiy bo'lmagan zaryad tashuvchilarning yashash vaqtiga ta'sirini tadqiq qilish natijalari asosida paydo bo'ldi. 450°S da uzoq vaqt termik ishlov berish zaryad tashuvchilarning yashash vaqtining oshishiga, $550\text{-}600^{\circ}\text{S}$ da termik ishlov berilganda esa kamayishiga olib keladi. 450°S da termik ishlov berilganda zaryad tashuvchilarning yashash vaqtining oshishi bilan bir qancha yutilish polosalarining ($9\text{-}30\text{ mkm}$, $T = 80\text{ K}$ da) paydo bo'lishi kuzatilgan. Bu polosalarning intensivligi $350\text{-}500^{\circ}\text{S}$ da termik ishlov berish davomiyligiga va kislorodning konsentratsiyasiga bog'liq.

Kremniy tarkibida ba'zi bir kirishmalar mavjud bo'lganda hamda kremniyga $350\text{-}500^{\circ}\text{S}$ da termik ishlov berilganda qo'shimcha elektr jihatdan faol markazlarning paydo bo'lishi [8] ish mualliflarining fikrini Kayzer modeliga nisbatan o'zgarishiga asos bo'ldi va ular past temperaturali TD, ularning paydo bo'lish mexanizmlari va tabiati to'g'risidagi yangi gipotezani oldinga surdilar. Ularning fikricha, $350\text{-}500^{\circ}\text{S}$ da hosil bo'luvchi TD lar [2] ishdagidek SiO_4 komplekslari emas, deb ko'rsatdilar. Ular taklif qilayotgan model bo'yicha: kislorod kristall panjara tugunida joylashib, 2 ta ortiqcha elektronini erkin holatga chiqaradi. Kislorod donor xossaga ega bo'lishi uchun kamida 2 ta vakansiya bo'lishi kerak. Bittasi kislorod atomini o'rin olish holatiga o'tkazish uchun, 2-chisi esa o'rin olish holatida saqlab turish uchun (valent elektronlaridan birini). Donorli markaz hosil qilish uchun qo'shni vakansiya o'rniga yaqinroqda joylashgan akseptor markazlar (B , Al , Ga va shu bilan birga chuqur energetik sath hosil qiluvchi Cu , Au , Ag , Fe va hokozolar) ishtirok etishi mumkin. Umumiy holda hosil bo'luvchi 1 zaryadli donorlar $\text{O}_{\text{Si}}^{2+}\text{A}^{-}$ ko'rinishida bo'lishi mumkin. Ammo ular bu gipotezalarni tasdiqlovchi birona tajriba natijalarini keltirmagan.

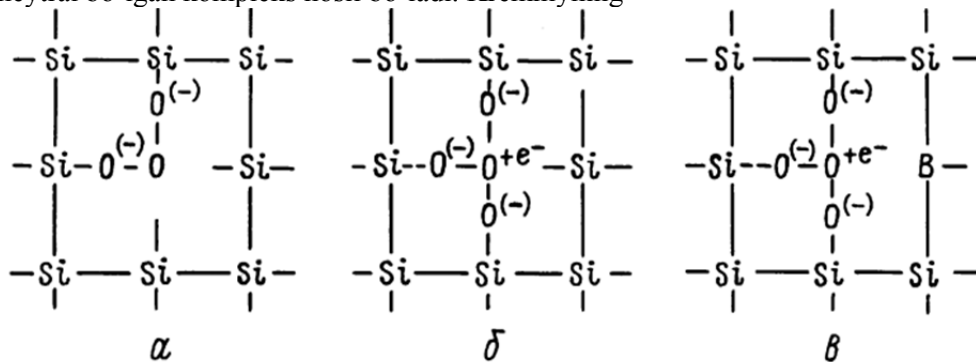
Kremniyda termodonorlarning paydo bo'lishi to'g'risidagi modellar.

TD-I ning paydo bo'lishi kinetikasini o'rganish borasida elektr, optik va paramagnit xossalarni o'rganishga bag'ishlangan tajriba natijalariga asoslanib TD-I strukturasi aniqlashga imkon beruvchi bir qator modellar taklif qilingan.

Kayzer, Frish va Riis modeli. Tarixan bu model TD-I hosil bo'lish kinetikasining xossalarni muvoffaqiyatli ravishda tushintirib beruvchi model hisoblanadi. Kremniyda kislorodning to'yingan qattiq aralashmasida kislorod bilan kompleks hosil qilish reaksiyasiga asoslanib, mualliflar shunday xulosaga kelishdilar, TD-I - bu kislorodli kompleks SiO_4 dir. Kayzer va boshqalar SiO_4 kompleksining faol donorli tabiatini tushintirib bera olmadilar. Shunga qaramasdan tajribada aniqlangan tugunlar aro joylashgan kislorodning diffuziya koeffitsienti shunchalik kichikki, Kayzer tasavvuri asosida TD-I ning hosil bo'lish kinetikasini miqdor jihatdan izohlab bo'lmaydi. Kayzer modeli TD-I ning ko'p shakilligini tushintirishda ham qiyinchilikka olib keladi [2].

Syushe modeli. Syushe SiO_4 kompleksining donorli faolligini asoslovchi va o'ziga 4 ta kislorod atomini biriktiruvchi TD-I ning strukturasi taklif qildi. Bir qator ilmiy tadqiqot ishlarida kremniy kristallida TD-I ning maksimal konsentratsiyasi akseptor kirishmalar (B , Al , Ga) legirlanganda, donorli kirishmalar legirlangandagidan ko'proq paydo bo'lishi aniqlangan. Bu tajriba natijalariga asoslanib, muallif tarkibida kislorodi bo'lgan kremniy kristalliga 450°S da termik ishlov berilganda ikki xildagi termodonorlar paydo bo'ladi, degan fikrni bayon qiladi. Birinchi turdagi

termodonorlar tarkibiga faqat kislorod kiradi (Kayzer taklif qilganidek 4 ta kislorod atomi), ikkinchi turdagi termodonorlarga esa, 4 ta kislorod atomidan tashqari akseptorli kirishmalar ham kiradi. Termik ishlov natijasida dastlab 3 ta kislorod atomidan iborat $Si_2^+O_2^-O$ (1-rasm, a), ko‘rinishdagi elektr jihatdan neytral bo‘lgan kompleks hosil bo‘ladi. Kremniyning



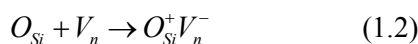
1-rasm. (a)- SiO_3 neytral kompleksning, (b)- SiO_4 asosiy, (v)-tarkibida akseptorli kirishmasi bo‘lgan termodonorlarning sxematik tasviri.

kristall panjarasi tugunida joylashgan kislorod atomining tashqi qobig‘i tugunlar aro joylashgan kislorod atomining 8 ta elektronlari hisobiga to‘yingan holatda bo‘ladi. Shu sababli atom kremniyning qo‘shni atomlari bilan ionli-kovalent bog‘lanish hosil qilmaydi. Bu kompleksning $Si_2^+O_2^-O^+e^-$ ko‘rinishni egallash ehtimolligi juda kichik, chunki ikkita manfiy zaryadlangan qo‘shni kislorod atomining kovalent bog‘lanish hosil qilish juda qiyin. Mualliflar fikriga ko‘ra, TD-I ni kremniy kristalli tugunida joylashgan O_4 molekula-ion ko‘rinishda tasavvur qilish mumkin. 4 ta kislorod atomidan iborat bo‘lgan bunday kompleks $Si_3^+O_3^-O^+e^-$ (1-rasm, b) ko‘rinishda bo‘lishi mumkin. Ikkinchi turdagi termodonorlar birinchi turdagi termodonorlardan tug‘ilish markazi akseptorli kirishmalar bo‘lganligi bilan farq qiladi. Qolganlarida esa ularning strukturasi birinchi turdagi termodonorlarning strukturasi kabi bo‘ladi. (1-rasm, v) [4].

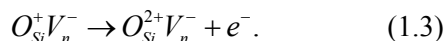
Gelmrayx va Sirtl modeli. Avvalom bor, Gelmrayx va Sirtl Kayzer modelining quyidagi kamchiliklarini ko‘rsatib berdi: kremniyda $450^\circ S$ temperaturada tugunlar aro kislorodning yuqori temperaturalardagi diffuziya koeffitsienti bo‘yicha ekstrapolyasiyasining ko‘rsatishicha bu temperaturalarda kislorod atomining o‘rtacha diffuziya uzunligi (100 soat qizdirilgandan keyin $L_D \cong 1,1$ nm) bir-biriga eng yaqin bo‘lgan ikkita kislorod atomlari orasidagi masofadan sezilarli darajada kichik ekanligini ko‘rsatdi [O_i]= $5 \cdot 10^{17} \text{ sm}^{-3}$, $r = 12,5 \text{ nm}$). O‘z navbatida SiO_4 kompleksining hosil bo‘lish ehtimolligi juda kichik; SiO_4 modeliga mavjud massalar qonunini qo‘llab bo‘lmaydi, chunki kompleksning hosil bo‘lishi kislorodning o‘ta to‘yingan qattiq aralashmasida yuz berayapti (konsentrasiya [O_i]= $5 \cdot 10^{17} \text{ sm}^{-3}$ T= $1200^\circ S$ da kremniydagi chegaraviy eruvchanligi bo‘lib hisoblanadi); tugunlar aro kislorod [O_i] va TD-I ning konsentrasiyalari o‘rtasida qat‘iy darajali bog‘liqlik bajarilmaydi; SiO_4 kompleksi shunchaki donorli faollikka tushintirish bermaydi.

Tajribalarning ko‘rsatishicha TD-I ning paydo bo‘lishi tugunlararo kislorod konsentrasiyasining kamayishigi korrelyatsiya beradi. Bu esa TD-I ning paydo bo‘lishida kislorodning asosiy rol o‘ynashining ishonchli isboti bo‘ladi. Ammo, kislorod (yoki shunga o‘xshash boshqa oltinchi guruh elementining) donorli tabiatini namoyon qilishi uchun uni kristall panjara tuguniga joylashtirish lozim. Shundagina, bu holatda turganda o‘zining kovalent bog‘lanishga qatnashmayotgan ikkita elektronini berishi mumkin. Bunday mulohazalardan so‘ng Gelmrayx va Sirtl TD-I ning paydo bo‘lishini bitta tugunlar aro kislorod atomining kamida ikkita vakansiya bilan reaksiyasi ko‘rinishida tasvirlash mumkin, degan fikrga kelishdilar. Bu vakansiyalardan biri (V_g) tugunlar aro joylashgan kislorod atomini tugunga joylashtirish uchun siljitishga zarur bo‘ladi. Ikkinchi (V_n) vakansiya esa, uning valent elektronlaridan biri bilan bog‘lanib turish hisobiga tugundagi holatini stabillashtirish uchun zarur bo‘ladi:

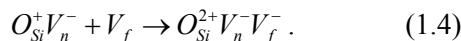




Bunday kompleksda kislorod o'zining bog'lanmagan elektronini berishi mumkin, ya'ni donorlik funksiyasini bajaradi.

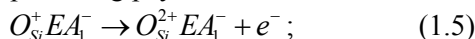


Elektr jihatdan faol kompleks bilan yana bitta vakansiyani (V_f) qamrab olishi bilan u donor faolligini yo'qotadi.

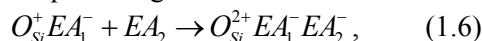


Vakansiya o'rnida ixtiyoriy akseptor kirishma bo'lishi mumkin. U holda TD-I ning donor faolligining kelib chiqish sababini ifodalovchi umumiy modelni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

elektr jihatdan faol kompleksning paydo bo'lishi



elektr jihatdan neytral kompleksning hosil bo'lishi



bu yerda EA - akseptor, V_{Si} , Cu_{Si} , Al_{Si} va boshqalar singari [8].

Gyozel va Tan modeli. Mualliflar bundan oldingi modellarning kamchiliklarini aynan qayd qiladilar: tugunlar aro kislorodning diffuziya koeffisienti juda kichik bo'lganligi sababli SiO_4 kompleksning donorlik tabiatini namoyon qilish ehtimolligi juda kichik. Bundan tashqari SiO_4 komplekslarining donor faolligini tushintirish qiyin.

Gelmrayx va Sirtllar o'z modellarida bu kamchilikni inobatga olishgan va TD-I sifatida vakansiya-tugundagi kislorod atomi ($O_{Si}^+ V_n^-$) komplekslar hosil qiladi, deb qaragan. Bu model haqiqatdan ham donorlik faolligini tushintiraolgan, ammo TD-I ning hosil bo'lish kinetikasi xossalarini tushintirib beraolmagan. Bundan tashqari chuqur energetik sathlar spektroskopiyasi metodi yordamida elektron nurlantirish yordamida hosil qilingan qo'shimcha vakansiyalar TD-I larning maksimal konsentratsiyasini oshirmaydi. Shuning uchun TD-I tarkibiga vakansiya kirmaydi, deb hisoblash mumkin.

Bu keltirilgan Kayzer modelidagi kamchiliklardan qutilish uchun TD-I hosil bo'lish kinetik xossalari to'g'risidagi fikrlarni saqlagan holda Gyozel va Tan Si da $450^\circ C$ da termik ishlov berilganda gaz ko'rinishidagi kislorod molekulasini (O_2) hosil bo'ladi, degan taxmini aytishgan:



Bunday molekula kremniy kristall panjarasi bilan kuchsiz bog'langan va o'z navbatida u tugunlar aro kislorod atomining diffuziya koeffisientiga nisbatan ($D_{O_i} = 6 \cdot 10^{-19} \text{ sm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$) ancha yuqori diffuziya koeffisientiga ega bo'ladi (mualliflarning baholashicha $450^\circ C$ da $D_{O_2} = 2 \cdot 10^{-9} \text{ sm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ ga teng).

So'ngra ikkita bunday molekulaning bir-biriga yaqinlashishi donorli tabiatga ega bo'lgan O_4 kompleksi hosil bo'lishiga olib keladi, deb qaradilar:



Bunda O_4 kompleksining hosil bo'lishi kristall panjara bilan bog'lanmasdan hosil bo'ladi. O_4 kompleksiga yana bitta O_2 kompleksining birikishi ionlashish energiyasining sezilsiz ravishda o'zgarishiga olib keladi. Bu kompleksning tugunlar aro kislorodni qamrab olishi $Si - O$ ko'rinishdagi bog'lanishni hosil qiladi va natijada donor faolligini yo'qotadi. Mualliflarning fikriga ko'ra bunday termodonorlarning strukturali modeli kislorod atomi zanjiri $^+O - O - O - O^+$ ko'rinishda bo'ladi. Ammo O_4 komplekslarining donorli faolligini bunday tushintirish kuchli olib sotarlik (spekulyativ) harakterga egaligini va to'liq qanoat hosil qilishdan ancha yiroqda ekanligini alohida qayd qiladilar [9].

Payot, Kompeyn, Lerouvip Kliriyad modeli. Payot va boshqalar IQ-spektroskopiya usuli yordamida TD-I energetik sathlarning bir necha xilini aniqladilar va ularning kelib chiqishi to'g'risida tushintirish berdilar.

$T = 450^\circ C$ temperaturada termik ishlov berilganda kremniyda harakatchan tugunlar aro ($Si = O$)_i molekulasini hosil bo'ladi, qaysikim uning diffuziya koeffisienti atom holatdagi kislorodning

diffuziya koeffitsientidan sezilarli darajada yuqori bo'ladi. Li atomiga o'xshab ($Si = O$)_i molekulasi tugunlar aro kislorodni qamrab olib, ($Si = O$)_i O ikki zaryadli turg'un donor kompleks hosil qilib, stabil holatga o'tishi mumkin. Ma'lum bir sharoitlarda donorli kompleks SiO_2 neytral kvazimolekula hosil qiladi va o'z navbatida boshqa harakatchan molekulani qamrab oladi, natijada yangi donor sath hosil qiladi. Mualliflarning taklifiga ko'ra, TD-I bu ($Si = O$)_i O_n kislorodli kompleks bo'lib, uning tarkibida faol ($Si = O$)_i molekula bo'ladi. Bunday donorli komplekslarning ionlashish energiyasi n ning qiymati bilan aniqlanadi [10].

Nyumen, Oeyts va Livingston modeli. Nyumen, Oeyts va Livingstonlar taklif qilayotgan model umumiy holda Payota modeliga o'xshash. Elektron mikroskop yordamidagi tadqiqot natijalariga ko'ra 600°C dan yuqori temperaturalarda kislorod pritsipitlatlari sezilarli bo'ladi va kislorodli klasterlarda kuchli ichki kuchlanishni yuzaga keltiradi. Bu kuchlanishni relaksatsiya qilish uchun kvazivakansiyani adsorbsiyalash kerak, yoki Si ning xususiy atomlarini tugunlar orasiga generatsiyalash kerak. Tadqiqotlarning ko'rsatishicha, aynan Si atomlari tugunlar orasida generatsiyalanadi va temperaturaga bog'liq holda dislokatsion dipole yoki sirtmoq hosil qiladi.

Modelni taklif qilayotgan mualliflar tajribada ko'rsatishdilarki, Si ning tugunlar aro atomlari past temperaturalarda (450°C) da generatsiyalanadi. Har bitta pritsipitlatga birlashayotgan kislorod atomi O_i ning emissiya koeffitsienti $0,5 \cdot Si_i$ ga teng. Tugunlar orasidagi kremniy termik ishlov vaqtida kislorod atomi bilan birikib, juda tez harakatlanuvchi (O_i - Si_i) molekula hosil qiladi. Bunday molekula tugunlar aro kislorod atomini biriktirib olib, (O₂ - Si_i) ko'rinishidagi 2 karra zaryadlangan donorli kompleks hosil qiladi. Bunday termodonorlarning ionlashish energiyasi kompleksdagi kislorod atomlari miqdori bilan aniqlanadi.

Donorli komplekslarning hosil bo'lishi to'g'risidagi taklif etilayotgan model TD-I hosil bo'lishi kinetikasining asosiy xossalarini tushuntiradi (TD-I hosil bo'lishining boshlang'ich tezligining tugunlar aro joylashgan kislorodning boshlang'ich konsentratsiyasining 4-darajasiga bog'liqligini). O₂ ning hosil bo'lish tezligi, tajriba natijalari asosida [O_i]² va Si_i ning hosil bo'lishi tezligiga ham [O_i]² ga to'g'ri proporsional ekanligini ko'rsatdilar. (O₂ - Si_i) donorli kompleksning hosil bo'lish tezligi $t \rightarrow 0$ da quyidagicha aniqlangan [11].

$$\frac{d(O_2 - Si_i)}{dt} \propto [O_i]^4. \quad (1.9)$$

Kremniyda TD-I ning paydo bo'lishi to'g'risidagi yuqoridagi modellar bir-birini to'ldiradi, ammo yagona model hozircha ishlab chiqilmagan. Bu masalani echish ko'plab tajriba natijalariga tayangan holda amalga oshirilishi tayin. Biz kelgusi ishlarimizni TD-I ning hosil bo'lish kinetikasiga tez diffuziyalanuvchi kirishmalarning ta'siri to'g'risidagi tajriba natijalari bilan davom ettiramiz.

Adabiyotlar

1. Fuller. C.S., Dilzenberger J.A., Hanny N.B., Buehler E. Resistivity Changes in Silicon Induced by Heat Treatment // Phys. Rev.1954.V.96. №3. P 833.
2. Kaiser I.I., Frisch H., Reiss H. Mechanism of the Formation of Donor States in Heat-Treated Silicon // Phys. Rev.-1958.-V.112, N 5.-P. 1546-1554.
3. Литовченко А.Г., Макаренко Л.Ф., Мурын Л.И., О термодонорах в кремнии // Тез. докл. IV Всесоюз. конф. по физико-химическим основам легирования полупроводниковых материалов. М., 1979. с.195
4. Suchet J. P. Sur le role de l'oxygène dans les cristaux de silicium // J. Chine. Phys.-1961.-V.58, N 3.-P. 455-463.
5. Hrostowski H.J., Kaiser R.H. Infrared Spectrum of Heat Treatment Centers in Silicon // Phys. Rev. Lett. 1958. V. 1. №6. P. 199-200.
6. Батвин В.В., Сальник Е.А. Влияние акцепторов на генерацию термодоноров в кремнии, содержащем кислород // Электрон. техника. Сер. IV. Материалы. 1980. №5. с. 42-45.
7. Graff K., Pieper H. The Carrier Lifetime of Heat-Treated Silicon Crystals // J. Electron. Mater. 1975.V. 4. №2. P. 281-298.

8. Helmreich D., E. Sirtl. Oxygen in Silicon: A Modern View // In: Semiconductor Silicon 1977, edited by H.R.Huff and E.Sirtl (Electrochemical Society, Pennington, New Jersey, 1977).-P. 626-636.
9. Gosele U., Tan T. Y. Oxygen Diffusion and Thermal Donor Formation in Silicon // Appl. Phys. A.-1982.-V.28, N 1.-p. 79-92.
10. Pajot V., Compain H., Lerouille J., Clerjaud B. Spectroscopic Studies of 450°C Thermal Donors in Silicon // Physica B+C.-1983.-V. 117-118.-p. 110-112.
11. Newman R. C, Oates A. S., Livingston F. M. Self-interstitials and Thermal Donor Formation in Silicon: New measurements and a Model for the Defects // J. Phys. C: Solid State Phys.-1983.-V.16, N 19.-P. L667-L674.

UDK 530.12.01

**GERMANIY KRISTALI TUZILISHINI RENTGEN NURLARINING DIFRAKSIYASI
ORQALI O'RGANISHDA DEBAY-SHERRER USULI**

**Sh.X.Xushmurodov, U.U.Tuxtaev, T.Soliyev, M.Shakirov, B.Niyozov, S.Qarshiev,
D.Toshmamatov**

Samarqand davlat universiteti

Annotatsiya. Qattiq jismlar kristall tuzilishini o'rganishda rentgen nurlarining difraksiyasidan keng foydalaniladi. Rentgen nurlarining qattiq jismlardagi difraksiya sharti Breg-Vulf va Debay-Sherrer usuliga asoslangan. Kuchli shaklidagi qattiq jismlarning asosan Debay-Sherrer difraksiya usuli yordamida o'rganiladi.

Kalit so'zlar: Breg-Vulf difraksiyasi, Laue, Debay-Sherrer difraksiyasi, *LiF*, kyuveta, interferensiya, Gyuygens-Frenel, germaniy, mikrokristallari, fotoplastinka, monoxromatik roentgen nurlari

Определение кристаллические структур германия методом дифракции рентгеновского излучения с использованием правила Дебая-Шеррера.

Аннотация. Для изучения структур твердых тел используется дифракция рентгеновского излучения. Существуют дифракционные условия Брэгга-Вульфа и Дебая-Шеррера. Для изучения порошкообразных твердых тел используется условие Дебая-Шеррера.

Ключевые слова: дифракция Брэгга-Вульфа, дифракция Лауэ и Дебая-Шеррера, кювета, интерференция, Гюйгенс-Френель, германий, фотопластинка, монохроматическое рентгеновское излучение.

Definition of crystal structures of germanium by the method of diffraction of x-ray radiation with the use of the Debay-Scherrer regulation.

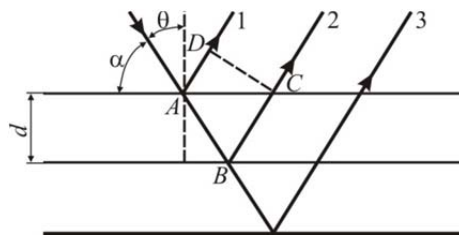
Abstract. To study the structure of a solid telescope, X-ray diffraction is widely used. There is a diffraction condition for Bragg-Wulf and Debye-Scherrer. To study powdered solid, the Debye-Scherrer condition is used.

Keywords: Bragg-Wolf diffraction, Laue and Debye-Scherrer diffraction, cuvette, interference, Huygens-Fresnel, germanium, microcrystallary, photographic plate, monochromatic X-ray radiation.

Yorug'lik yuzaga keltiradigan difraksiya hodisalarni rentgen nurlari ham hosil qilishi mumkin. Ammo rentgen nurlari difraksiyasini hosil qilishning ancha sodd va amalda ancha muhim bo'lgan usuli difraksiya panjara o'rnida kristall ishlatishga asoslangan. Rentgen nurlarini kristallar yordamida difraksiyalash osonligining sababi, kristallda atomlar orasidagi masofalar tartibi rentgen nurlari to'liq uzunliklarining (10^{-10} m) tartibi bilan bir xil ekanligidir. Ma'lumki, dastlab rentgen nurlarining difraksiyasi ularning kristallar orqali o'tishida foydalanilgan edi (Laue, 1912 yil). Bu hodisa rentgen nurlarining tabiati yorug'lik nurlari tabiati bilan bir xil ekanligini uzil-kesil isbot qildi.

Breg-Vulf difraksiya usuli. Kristall fazoviy panjara tuginlarida ma'lum qonuniyat va tartib bilan joylashgan atom va molekular to'plamidan iborat bo'ladi. To'liqlar tabiati Gyuygens-Frenel tamoyili orqali tahlil qilinadi. Bu tamoyilga asosan to'liq frontining har bir nuqtasi ikkilamchi to'liqlar manbai hisoblanadi. Ikkilamchi manbalardan chiqqan to'liqlar fazoviy munosabatlar hisobga olinganda interferensiya hodisasini hosil qiladilar. To'liqlarning tekis sirdan qaytishi shunga

olib keladiki, sirtning har bir nuqtasi ikkilamchi to'liqlar manbai bo'lib qoladi. Bu manbalardan chiqqan to'liqlar o'zaro interferensiyalashib, ma'lum qaytish burchagi ostida qaytgan to'liqlarni hosil qiladi, qaytish burchagi tushish burchagiga teng bo'ladi. Bu to'liqlar yo'llari orasidagi farq quyidagicha aniqlanadi:



1-rasm. Bregg-Vulf difraksiyasi

$$\Delta = |AB| + |BC| - |AD|, \quad (1)$$

$$|AB| + |BC| - |AD| = 2d \tan \theta \sin \theta,$$

$$|AD| = 2d \tan \theta \sin \theta,$$

ekanligi hisobga olinsa quyidagi ifoda hosil bo'ladi:

$$\Delta = \frac{2d}{\cos \theta} + \frac{2d \sin^2 \theta}{\cos \theta} = 2d \cos \theta, \quad (2)$$

Qo'shni tekisliklardan qaytgan to'liqlar fazalari farqi quyidagi kattalikka teng bo'ladi:

$$\delta = k\Delta = \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right) \Delta,$$

Bu qaytgan to'liqlarning interferensiyasi:

$$\delta = 2\pi m, \quad m = 1, 2, 3, \dots,$$

shart bajarilganda sodir bo'ladi. Demak, to'liqlarning parallel tekisliklardan qaytish shartini (2) formulaga asosan quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$2d \cos \Theta = m\lambda \quad (3)$$

(3) formulada d – parallel tekisliklar orasidagi masofa, λ – to'liq uzunlik. Bu formulani tushish burchagi Θ bilan emas, balki siljish burchagi $\alpha = \pi/2 - \Theta$ orqali ifodalash ham mumkin, ya'ni

$$2d \sin \Theta = m\lambda \quad (4)$$

(3) va (4) formulalar Bregg-Vulf shartini ifodalaydi.

Kristall fazoda biror qonuniyat bilan joylashgan atomlar, atom gruppalari yoki ion gruppalari to'plamidan iboratdir. Bunday uch o'lchovli muntazam strukturalarda difraksiya sharoitlarini topish uchun biz bir o'lchovli (chiziqli), ikki va uch o'lchovli panjarani ketma-ket tekshiramiz.

Bir to'g'ri chiziqda (2-rasm) joylashgan 0,1,2,3,4,5 sochuvchi markazlar (atomlar) qatori bor va bu chiziqli panjaraga yassi to'liq α_0 - burchak ostida tushsin. 0,1,2,3,...sochuvchi markazlarning har biri yangi sferik to'liq manbai bo'ladi va bu kogerent sferik to'liq manbai bo'ladi hamda bu kogerent sferik to'liqlar barcha yo'nalishlarda tarqaladi. α_0 burchak bilan xarakterlanuvchi biror ixtiyoriy yo'nalishni qarab chiqaylik. Qo'shni atomlarning har juftidan o'tuvchi ikkita nur yo'lining ayirmasi, 2-rasmdan ko'rinishicha, $a(\cos \alpha - \cos \alpha_0)$ ga teng. a yo'nalishda difraksiyon maksimum hosil bo'lishi uchun

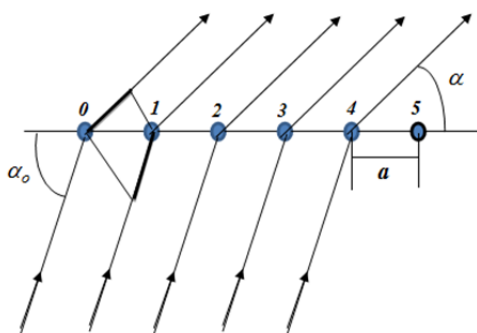
$$a(\cos \alpha - \cos \alpha_0) = h\lambda \quad (5)$$

shart bajarilishi zarur, bu erda h -butun son (5) dan quyidagini topamiz:

$$\cos \alpha = \cos \alpha_0 + h\lambda / a \quad (6)$$

Bundan ko'rinadiki, chiziqli panjara spektral asbob kabi ishlaydi, chunki har bir to'liq uzunlik λ uchun α burchakning o'ziga xos qiymati chiqadi. SHunday qilib, $h = 1$ bo'lganda birinchi tartibli spektr, $h = 2$ bo'lganda ikkinchi tartibli spektr hosil bo'ladi va hokazo. Simmetrik yo'nalishlarda $h = -$

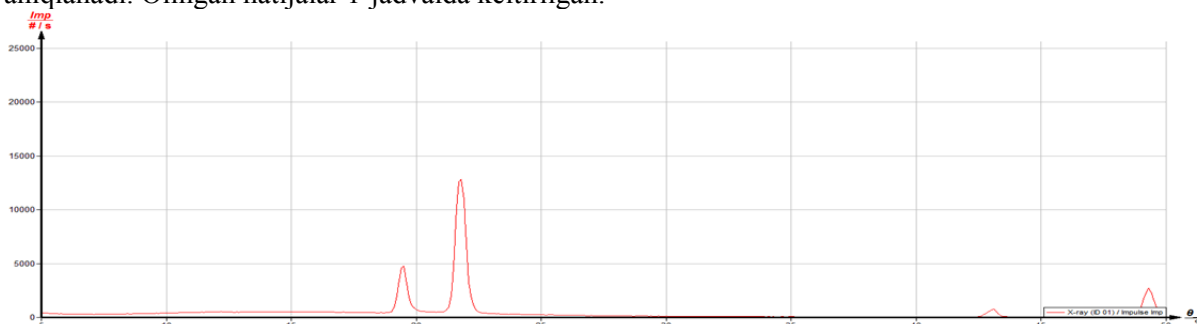
1, -2, -3 va hokazo bo'lganda ham -1, -2, -3, ... tartibli spektrlar hosil bo'ladi. Demak, bu spektrlarning to'plami bir o'lchovli analitik fazo hosil qiladi.



2-rasm. Chiziqli panjaradagi difraksiya

Qattiq jismlarning tuzilishini rentgen nurlar yordamida analiz qilishda juda ko'p qo'llaniladigan kristall kukunlar metodidir. Debay va Sherrerlar taklif etgan bu metodda Laue va Bregg-Vulf metodlarini ishlatganda zarur bo'ladigan katta kristallar o'rniga imkon boricha maydalangan kristall kukun ishlatiladi; bu kukun maxsus kyuvetaga joylashtiriladi. Agar bunday namuna kyuvetasiga monoxromatik rentgen nurlari tushurilsa, u holda kukunning mikrokristallari butunlay tartibsiz joylashganligi tufayli kyuvetadagi namuna nurga nisbatan mazkur to'ldin uzunlikda Bregg-Vulf shartini qanoatlantiruvchi burchak ostida joylashgan kristallchalar hamma vaqt topiladi. Kristall kukunlar metodining eng afzal tomoni shundaki, bu metod bilan ishlaganda yaxshi sifatli katta kristallar talab qilinmaydi. Tabiatda bunday kristallar ko'rinishida moddalar juda kam uchraydi, kristallar o'stirish esa hamma vaqt ham mumkin bo'lavermaydi.

Asbobni *LiF* monokristali yordamida energiya bo'yicha darajalaymiz. O'lchanadigan namuna (germaniy) moddasini kukun shakliga keltiriladi. Maxsus kyuvetaga namuna kukuni bir jinsli qilib joylashtiriladi va asbobjning maxsus joyiga o'rnatilib rentgen nuri bilan nurlantiriladi. Olingan spektr yordamida difraksiya burchagini bilgan holda, namunaning kristall panjara doimiylari (*d* va *a*) aniqlanadi. Olingan natijalar 1-jadvalda keltirilgan.



3-rasm. *LiF* monokristalining spektr ko'rinishi

1-jadval

Mis atomining xarakteristik K_{α} - spektral chizig'idan foydalanib olingan natijalar

<i>h, k, l</i>	$\frac{h^2+k^2+l^2}{2}$	$\frac{h^2+k^2+l^2}{(h^2+k^2+l^2)_0}$	$\frac{h^2+k^2+l^2}{(h^2+k^2+l^2)_{111}}$	ϑ, \circ	$\sin\vartheta$	$\sin^2\vartheta$	$\frac{\sin^2\vartheta}{\frac{(n)}{\sin^2\vartheta}}$	<i>d, pm</i>	<i>a, pm</i>
111	3	1.5	1	13.72	0.23718	0.05625	1.00	325.02	562.95
220	8	4	2.67	22.74	0.38655	0.14942	2.66	199.43	564.08
311	11	5.5	3.67	26.86	0.45228	0.20456	3.64	170.45	565.31
400	16	8	5.33	33.08	0.54581	0.29791	5.30	141.24	564.96
331	19	9.5	6.33	36.47	0.59440	0.35331	6.28	129.69	565.32
422	24	12	8	41.89	0.66770	0.44583	7.93	115.46	565.62
511/333	27	13.5	9	45.10	0.70834	0.50174	8.92	108.83	565.51
440	32	16	10.67	50.39	0.77040	0.59352	$\frac{10.5}{5}$	100.06	566.05
531	35	17.5	11.67	53.56	0.80448	0.64719	11.5	95.83	566.91

							1		
620	40	20	13.33	59.56	0.86216	0.74332	13.2 1	89.41	565.51

Adabiyotlar

1. E.V.Shpolskiy Atom fizikasi. – T.: “O‘qituvchi”, 1970.
2. I.V.Savelev Umumiy fizika kursi. – T.3., T.: “O‘qituvchi”, 1976.
3. R.Bekjonov, B.Axmadxo‘jaev Atom fizikasi. – T.: “O‘qituvchi”, 1979.
4. Optika i atomnaya fizika, pod. red. prof. R.I.Solouxin izd. – M.: «Nauka», 1983 gg.
5. G.Axmedova, O.B.Mamatqulov, I.Xolboev Atom fizikasi. – T.: “Istiqlol”, 2013.

UDK 530.12.01

TURLI MATERIALLARNING ZICHLIGINI GAMMA NURLARNING YUTILISHI YORDAMIDA ANIQLASH

Sh .X. Xushmurodov, U. U. Tuxtayev, E. A. Umirzaqov, T. Soliyev,

B Aslonov, Sh Jo`raqulov, E. Umarov, Sh. Mamatqulov

Samarqand davlat universiteti

Annotatsiya. Yutilish koeffitsiyenti gamma kvantlarning muhit bilan ta'sirini to'la xarakterlaydi, chunki u ko'rilayotgan jarayonning to'la kesimi bilan bog'langan bo'ladi. Gamma-nurlarning yutilishi asosan fotoeffekt, Kompton effekt va elektron-pozitron juftini hosil qilishlik bilan bo'ladi. Fotoeffekt bilan kompton effekti gamma-nurlarning atom elektronlari bilan to'qnashishida yuz bersa, elektron-pozitron jufti gamma kvantning atom yadrosi bilan ta'sirida ro'y beradi.

Kalit so'zlar: Gamma nurlar, Zaryadli zarralar, massaviy yutilish koeffitsiyenti, elektromagnit ta'sirlashuv, intensivlik, Geyger-Myuller sanagichi.

Определение плотности различных материалов методом поглощение гамма излучения

Аннотация. Коэффициент поглощения гамма излучения в различных материалов полностью характеризует принципы взаимодействия. Поглощение гамма излучения расходуется на фотоэффект, Комптон эффект и образование электронно-позитронных пар. Фотоэффект и Комптон эффект характеризует взаимодействие гамма излучения с атомным электронам а образование электронно-позитронный пар взаимодействия с ядром атома.

Ключевые слова: гамма излучение, заряженные частицы, коэффициент поглощения, электромагнитное взаимодействие, интенсивность, счетчик Гейгера-Мюллера.

Determined density of various materials by the method of gamma radiation absorption

Abstract. The absorption coefficient of gamma radiation in various materials completely characterizes the principles of interaction. The absorption of gamma radiation diverges into a photoelectric effect, Compton effect, and the formation of electron-positron pairs. The photoeffect and Compton effect characterize the interaction of gamma radiation with atomic electrons and the formation of an electron-positron pair of interactions with the nucleus of an atom.

Keywords: gamma radiation, charged particle, mass absorption coefficient, electromagnetic interaction, intensity, Geiger-Muller counter.

Gamma-nurlar energiyalari bir necha o'n keV dan yuqori bo'lgan qisqa elektromagnit to'lqinidir. Hozirgi zamon tezlatgichlari yordamida gamma-kvantlar energiyalarini bir necha GeV ga yetkazish mumkin. Gamma-kvantlar to'lqin uzunliklari, energiyalari ortishi bilan kamayib boradi.

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar c}{E} \quad (1)$$

Gamma-nurlar to'lqin uzunliklari 10^{-11} sm dan oshmaydi, bu esa atomlararo masofa 10^{-8} sm dan ming marotabalar kichikdir. Muhit bilan ta'sirlashuvni gamma-kvantlar elektromagnit ta'sirlashuviga ko'ra amalga oshiradi. Ta'sirlashuv jarayonida gamma kvant yo'nalishini o'zgartirishi, sochilishi, yutilishi, zarra antizarra juftini hosil qilishi mumkin. Gamma-kvantlar zaryadsiz bo'lgani uchun uzoq masofadan ta'sir etuvchi kulon kuchi ta'siriga berilmaydi, massaga ega bo'lmagani uchun

doimo yorug'lik tezligi bilan harakatlanadi, sekinlashmaydi, to'liq uzunliklari atomlararo masofadan 10^{-3} marotabalar kichik bo'lgani sababli juda kam to'qnashadi. Zaryadli zarralardan farqli o'laroq gamma kvantlar muhitda o'z energiyalarini kamaytirsa ham tezligini o'zgartirmaydi. Gamma kvantlar uchun muhitda chopish masofasi tushunchasini ishlatib bo'lmaydi, gamma kvantlar oqimi intensivligi atom elektronlari va yadrolari bilan ta'sirlashuvida kamayib boradi. Monoxromatik gamma kvantlar oqimining 1 sekundda 1 sm^2 yuzadan o'tayotgan intensivligi I , dx - qalinlikdan o'tganda kamayishi dI bo'lsin. O'z navbatida dI kamayishi oqim va qatlam qalinligiga bog'liq

$$dI = -\mu I dx \quad (2)$$

Agar muhit bir jinsli bo'lsa μ doimiy bo'ladi. (2) ifodani integrallab yoza olamiz:

$$I = I_0 e^{-\mu x} \quad (3)$$

Bu yerda I_0 - boshlang'ich intensivlik, I x - qalinlikdagi muhitdan o'tgandan keyingi intensivlik, μ - yutilish yoki kuchsizlanish koeffitsiyenti. (3) ifodadagi daraja μx - o'lchamsiz bo'lib, gamma kvantlar oqimi muhit qatlamlaridan o'tganda intensivliklari eksponensial kamayib boradi. Muhit qalinligini turlicha ifodalash mumkin, shunga ko'ra μ ham turlicha ataladi. μ (sm^{-1}) - uzunlik birligiga to'g'ri kelsa - chiziqli, ρ - zichlik birligiga to'g'ri kelsa μ/ρ (sm^2/g) - massaviy yutilish koeffitsiyenti deyiladi. Har bir atomga $\frac{\mu}{\rho} \frac{A}{N}$ ($\text{sm}^2 \text{ atom}^{-1}$) va $\frac{\mu}{\rho} \frac{A}{N z}$ ($\text{sm}^2 \text{ elektron}^{-1}$) mos keluvchi

atom va elektron yutilish (kuchsizlanish) koeffitsiyentlar ham ishlatiladi.

Yutilish koeffitsiyenti gamma-kvantlarning muhit bilan ta'sirini to'la xarakterlaydi, chunki u ko'rilayotgan jarayonning to'la kesimi bilan bog'langan bo'ladi. Gamma-nurlarning yutilishi asosan fotoeffekt, kompton effekt va elektron-pozitron juftini hosil qilishlik bilan bo'ladi. Fotoeffekt bilan kompton effekti gamma-nurlarning atom elektronlari bilan to'qnashishida yuz bersa, elektron-pozitron jufti gamma-kvantning atom yadrosi bilan ta'sirida ro'y beradi.

Gamma-nurlarning yutilish koeffitsiyenti material qanday moddadan tuzilganligiga (yasalganligiga) bog'liq. Moddaga tushuvchi J_0 va moddadan o'tgan J larning bir-biriga bog'lanishi quyidagi formula bilan ifodalanadi:

$$\rho = \frac{1}{\mu_0 x} \ln \frac{J_{f+m} - J_f}{J_{f+n} - J_f} \quad (4)$$

Bu formuladagi μ_0 - turli moddalarning massaviy yutilish koeffitsiyenti hisoblanadi. Gamma nurlarning turli moddalarda yutilish jarayoni tajribada turli xil sanagichlar yordamida moddaga tushayotgan gamma nurlar va moddadan o'tgan gamma nurlar intensivligini bilgan holda moddalarning massaviy yutilish koeffitsiyentini hisoblash mumkin. Yuqorida keltirilgan (5) formulaga asosan nurlantirilayotgan modda zichligini aniqlash mumkin.

Olingan tajribadan natijalari quyidagi jadvalda keltirilgan.

Jadval

T/r	$t, (s)$	J_f (imp./sek)	J_{f+n} (imp./sek)	J_{f+m} (imp./sek)	J (imp./sek)	J_0 (imp./sek)	$x, (sm)$	$\rho_{o'r}$ (g / sm^3)
1	60	74	1966	2147	2040	2073	0.25	2.527
2		75	2065	2245	2140	2170		
3		73	2147	2341	2220	2268		
4		72	2088	2278	2160	2206		
5		72	2128	2214	2200	2242		
6		75	2144	2314	2219	2259		
7		74	1997	2145	2031	2071		
8		71	2060	2215	2134	2144		
9		70	2071	2241	2141	2171		
10		72	2028	2214	2100	2142		

Izlanayotgan namuna uchun 661 keVli gamma kvantlarning massaviy yutilish koeffitsiyenti $\mu_0 = 0.0264 \text{ sm}^2 / \text{g}$ ga teng. Biz yuqorida olib borgan tajriba natijasida izlanayotgan namunaning

zichligi $2,257 \text{ g/sm}^3$ ga teng ekanligi ma'lum bo'ldi. Bizga ma'lum bo'lgan alyuminiy moddasining zichligi $2,7 \text{ g/sm}^3$ ga tengligidan foydalanib ushbu namuna alyuminiy qotishmasidan iborat degan xulosaga kelamiz.

Adabiyotlar

1. E.V.Shpolskiy Atom fizikasi. – T.: O'qituvch, 1970.
2. R.Bekjonov Yadro fizikasi. –T.: O'qituvchi, 1975.
3. I.V.Savelyev Umumiy fizika kursi. T.3. – T.: O'qituvchi, 1976.
4. R.Bekjonov, B.Axmadxo'jayev. Atom fizikasi. – T.: O'qituvchi, 1979.
5. G.Axmedova, O.B.Mamatqulov, I.Xolboyev Atom fizikasi. – T.: *Istiqlol*, 2013.

UDK: 621.383

YUPQA PARDALI QUYOSH ELEMENTLARI

S.Q.Axrorov, E.U.Arziqulov, T.U.Toshboev, I.Egamberdiev

Samarqand davlat universiteti

Annotatsiya: Yupqa pardali quyosh elementlarining umumiy masalalari ko'rib chiqilgan, ularning turli tiplari keltirilgan. Quyosh energiyasini elektr energiyaga aylantiradigan hozirgi kunda mavjud yupqa pardali texnologiyalar bir biri bilan taqqoslangan. Mavjud muammolar tahlil qilingan va ularni yechish istiqboli yo'llari ko'rib chiqilgan. Amorf va mikrokrustallik kremniy asosidagi quyosh elementlarini raqabotbardoshligini ta'minlaydigan ishlab chiqarish texnologiyasining o'ziga-xos asosiy xususiyatlari keltirilgan.

Kalit so'zlar: muqobil energiya manbalari, quyosh energetikasi, elektr energiya, fotovoltaika, quyosh elementi, monokristall va polikristalli kremniy, yupqa parda, amorf kremniy, texnologiya, quyosh moduli.

Тонкопленочные солнечные элементы

Аннотация: Рассматриваются основные вопросы технологии тонкопленочных солнечных элементов, приводятся их различные типы. Проведен сравнительный анализ существующих на сегодняшний день тонкопленочных технологий для преобразования солнечной энергии в электроэнергию. Проанализированы имеющиеся проблемы и рассмотрены перспективные пути их решения. Приведены основные особенности технологии производства на основе аморфного и микрокристаллического кремния солнечных элементов, обеспечивающие их конкурентные преимущества.

Ключевые слова: возобновляемые источники энергии, энергетика солнца, электрическая энергия, солнечный элемент, монокристаллический и поликристаллический кремний, тонкая пленка, аморфный кремний, технология, солнечный модуль.

The thin film solar cells

Abstract. The basic questions of technology of the thinly pellicle sunny elements, their different types are considered. The comparative analysis of existing to date thinly pellicle technologies for transformation of sunny energy to electric power is conducted. Present problems are analyzed and the perspective ways of their decision are considered. Basic features over of technology of production are brought on the basis of amorphous and microcrystalline silicon of sunny elements, providing them competitive edges.

Keywords: proceeded in energy, power engineering specialist of a sun sources, electric energy, sunny element, mono crystalline and poly crystalline silicon, thin tape, amorphous silicon, technology, sunny module.

Yupqa pardali quyosh elementlarining umumiy masalalari ko'rib chiqilgan, ularning turli tiplari keltirilgan. Quyosh energiyasini elektr energiyaga aylantiradigan hozirgi kunda mavjud yupqa pardali texnologiyalar bir biri bilan taqqoslangan. Mavjud muammolar tahlil qilingan va ularni yechish istiqboli yo'llari ko'rib chiqilgan. Amorf va mikrokrustallik kremniy asosidagi quyosh elementlarini raqabotbardoshligini ta'minlaydigan ishlab chiqarish texnologiyasining o'ziga xos asosiy xususiyatlari keltirilgan.

Kalit soʻzlar: muqobil energiya manbalari, quyosh energetikasi, elektr energiya, fotovoltaika, quyosh elementi, monokristall va polikristall kremniy, yupqa parda, amorf kremniy, texnologiya, quyosh moduli.

XXI asr boshlarida insoniyat oldida anʼanaviy energiya manbalarining yaqin kelajakda tugashi va Yerning ekologik holatining yomonlashuvi bilan bogʻliq boʻlgan muammolar paydo boʻla boshladi. Shu sababli iqtisodiy rivojlangan davlatlarda qayta tiklanadigan energiya manbalari, shu jumladan Quyosh energiyasini boshqa turdagi energiyalarga aylantiruvchi qurilmalarni ishlab chiqishga katta eʼtibor qaratila boshlandi. Quyosh, Yerni insoniyat talablariga qaraganda juda koʻp marta katta boʻlgan energiya bilan taʼminlaydi. Yer atmosferasida quyosh nuri kuchli sochiladi, shuning uchun bu energiyadan toʻliq foydalanish ancha murakkab. Quyosh nuridan keng koʻlamda va juda samarali foydalanishni taʼminlash uchun va quyosh elementlarining texnik hamda iqtisodiy koʻrsatgichlarini sezilarli darajada yaxshilash talab qilinadi. Tannarxi arzon boʻlgan Quyosh energiyasini elektr energiyaga aylantirgichlarni ishlab chiqish yoʻnalishidagi istiqbolli yondoshuvlaridan biri yupqa pardali quyosh elementlarining texnologiyasini yaratish hisoblanadi. Bu sohada dunyodagi koʻplab rivojlangan mamlakatlarda keng koʻlamli ilmiy tadqiqot va loyiha konstruktorlik ishlari olib borilmoqda va sezilarli natijalarga erishilgan.

Keyingi yillarda Oʻzbekistonda quyosh energetikasini rivojlantirishga katta ahamiyat berilmoqda. Buning isboti sifatida Respublika birinchi prezidentining 2013 yil 1 martidagi «Muqobil energiya manbalaridan foydalanishni rivojlantirish chora tadbirlari» toʻgʻrisidagi PQ 4612 farmonini, bundan tashqari respublikamiz hududida (Samarqand va Toshkent viloyatlarida) yirik quyosh elektrostansiyalarini yaqin kelajakda (2018-2020 yillarda) qurish buyicha loyihalarni koʻrsatish mumkin. Bunday quyosh elektrostansiyalarning barpo etilishi, oʻzbek quyosh energetikasining sifat jihatdan yangi bosqichga koʻtarilishiga olib keladi.

Quyosh energetikasining rivojlanishi

Kishilik jamiyatining rivojlanish tarixi, bir kunda odam boshiga toʻgʻri keluvchi istemol qilingan energiya 2,4 kkal dan (ibtidoiy jamiyat) 150 kkalgacha (zamonaviy gʻarb jamiyati) oshganligidan dalolat beradi. Olimlarning tahliliga koʻra insoniyatning hozirgi kundagi energiyaga boʻlgan talabi (~ 13 TVt) XXI asrning oʻrtalariga kelib taxminan ikki karra (~ 30 TVt), XXI asrning oxiriga kelib esa uch karradan koʻpga (~ 46 TVt) ortadi. Bunga sabab, birinchidan dunyo iqtisodiyatining umumiy oʻsishi va aholisining soni planetamizdagi aholining 2/3 qismini tashkil qilgan rivojlanayotgan davlatlarning, shular qatorida Oʻzbekistonning ham iqtisodiyoti keskin koʻtarilishi boʻlsa, ikkinchidan planetamiz aholisining sezilarli ortishidir. 2050 yilga kelib Yer aholisining soni 10–11 milliardga etadi, iqtisodiy oʻsish esa 4 karra boʻladi.

Hozirgi paytda butun dunyoda energiya asosan maʼdan energiya manbalaridan: neft, tabiiy gaz, koʻmir, yadro yonilgʻisidan foydalanib ishlab chiqarilmoqda. Biroq energiyaga boʻlgan talabni faqat qazib olinadigan manbalardan foydalanish hisobiga qondirish mumkin emasligi, energiyaning anʼanaviy manbalari zaxiralari asta-sekin tugab borayotganligi hech kimga sir emas. Aksariyat ekspertlarning fikricha energiyaga boʻlgan talabning global ortishi sababli anʼanaviy manba resurslari asosan asrimizning oʻrtalariga borib tugaydi. Texnik tarraqiyot natijasida yangi konlarning ochilishi resurslarning tugash jarayonini faqat bir oz ortga surishi mumkin holos. Shunisi ayonki, anʼanaviy energiya resurslarning zahiralari toʻliq tugamagan taqdirda ham, ularga boʻlgan talabning keskin ortishi sababli narxlarining keskin ortishi kuzatiladi.

Muammoni atom energetikasi hisobiga ham yechib boʻlmaydi, chunki bu energetikaning manbai boʻlgan radioaktiv moddalarning, jumladan, uranning zahiralari ham cheklangan. Radioaktiv chiqindilarni utilizatsiya qilish ham jiddiy muammolardan boʻlib hisoblanadi.

Ikkinchi tomondan Yerning issiqlikdan oʻzgarishi bilan bogʻliq boʻlgan ekologik muammo ham mavjud boʻlib, u iqlimning qaytmas oʻzgarishlariga olib kelishi mumkin. Turli yonilgʻilardan foydalanish va avariylar natijasida atmosfera, okeanlar va qurliqlarning neft hamda radiaktiv elementlar bilan ifloslanishi yuz beradi.

Maʼlumki, istalgan yonilgʻi yondirilganda Yerning ifloslanishi yuz beradi: atmosferadagi CO₂ konsentratsiyasi ortadi, bu esa «issiqxona effektining» yuzaga kelishiga sabab boʻladi. Yonilgʻilar, shu jumladan yadro yoqilgʻisi hisobiga energiya ishlab chiqarish miqdorini oshirish Yer uchun xavfsiz temperatura chegarasidan XXI asrdayoq oʻtib ketishimizni koʻrsatmoqda. Va nihoyat energiya xavfsizligi muammosi ham mavjud boʻlib, u foydalanilayotgan energiya manbalarini diversifikatsiya qilishni talab

qiladi. BMT ma'lumotlariga ko'ra, qayta tiklanuvchi energiya manbalariga kiritilayotgan sarmoyalar etarli darajada emas. 2016 yilda bu raqam 285 milliard dollarni tashkil etgan. Uglevodorodlarning iqlim o'zgarishiga salbiy ta'sirini sezilarli kamaytirish maqsadida esa muqobil energiyani rivojlantirish uchun kiritilayotgan sarmoya kamida 1 trln dollarni tashkil etishi kerak.

SHunday qilib, XXI asr boshlarida dunyo energetikasi energiya ist'emol manbalarining tuzilmasini jiddiy o'zgartirish zaruriyatiga duch keldi. Aksariyat analitik tadqiqotchi olimlar noan'anaviy ya'ni qayta tiklanuvchi manbalarining ulushi yaqin 20-30 yillar ichida sezilarli (30 % gacha) ortishini bashorat qilishmoqda. Rivojlangan davlatlar ko'p yillar mobaynida muqobil energiya manbalarini rivojlantirishga yiliga milliardlab dollar sarflayotganiga qaramay, hozirgi kunda qayta tiklanuvchi energiya manbalari an'anaviy energiya manbalari bilan raqabotbardosh emas.

Buning asosiy sababi - iqtisodiy, ya'ni ishlab chiqarilayotgan energiya tannarxining qimmatligi hisoblanadi. Bundan tashqari deyarli barcha qayta tiklanuvchi energiya manbalari uchun o'ziga xos cheklashlar mavjud: masalan ob'ektning joylashuvi, muayyan iqlimiy sharoitlar talab qilishi bilan xarakterlanib, bu cheklovlar ularning keng qo'llanilishni murakkablashtiradi yoki imkoniyatini chegaralaydi.

Qayta tiklanuvchi energiya manbalaridan doimo eng jozibadori va istiqbollisi fotovoltaika, ya'ni quyosh energiyasini bevosita elektr energiyasiga aylantirish hisoblanadi. Quyosh bir necha yuz yillar mobaynida insonlarning energiyaga bo'lgan o'sib boruvchi talablarni qondiradi. Bir soatda yerga kelayotgan quyosh energiyasining miqdori insoniyat bir yilda ist'emol qilayotgan energiya miqdoridan ortiq.

Keyingi o'n yilliklarda quyosh energetikasining o'sish sur'ati yiliga o'rtacha 25 % dan kam bo'lmayapti. Basharatlarga ko'ra XXI asrda quyosh energetikasining rivojlanishi barcha muqobil manbalar ichida etakchi bo'ladi. Baholashlarga ko'ra 2050 yilda quyosh energiyasi dunyoda ishlab chiqarilayotgan energiyaning 20–25 % ni tashkil qilishi va XXI asrning oxiriga kelib esa quyosh energetikasi asosiy energiya manbaiga aylanib, uning ulushi 60 % ga etishi mumkin.

Nima uchun hozirgi kunda fotovoltaika asosida elektr energiya ishlab chiqarish boshqa qayta tiklanuvchi energiya manbalariga nisbatan juda kam? - degan savol tug'ilishi tabiiy. Quyosh elementlarining keng joriy etilishiga asosiy to'siq, ular tomondan ishlab chiqilayotgan energiya tannarxining an'anaviy manbalarinikiga qaraganda yuqori ekanligidir.

Fotovoltaika qazib olinayotgan energiya manbalari bilan raqabotbardosh bo'lishi uchun u tomondan ishlab chiqarilayotgan elektr energiyasining narxi hozirgi kundagi narxidan taxminan 5–10 marta past bo'lishi kerak. Buning uchun fotoelektrik aylantirgichlarning samarali, arzon texnologiyalari va konstruksiyalarini ishlab chiqish zarur. Fotovoltaika ishlab chiqarayotgan elektr energiyasining tannarxini pasaytirish yo'nalishlaridan biri yupqa pardali quyosh elementlari texnologiyasini ishlab chiqish hisoblanadi.

Ishlab chiqarilayotgan elektr energiyasi tannarxi eng avval quyosh elementi yasalgan materialning tannarxi va quyosh elementini ishlab chiqarishdagi texnologik jarayon xarajatlari bilan belgilanadi.

Hozirgi kunda quyosh elementlarini tayyorlash uchun kristallik kremniy asosiy material sanaladi, chunki u arzon, zahirasi ko'p bo'lgan material bo'lib hisoblanadi va uni ishlab chiqarish juda yaxshi yo'lga qo'yilgan.

Kristallik kremniy asosidagi quyosh elementlarining (QE) asosiy kamchiligi bo'lib ular narxining yuqoriligi hisoblanadi, chunki ushbu QElari umumiy narxining 50% ni kremniy tagligining narxi tashkil qiladi. Mazkur tipdagi quyosh elementlarini tayyorlashda yuqori sifatli xom-ashyo qo'llanilib, hozirgi kunda uni ishlab chiqarish uchun nihoyatda katta energiya sarf qilinadi. Bundan tashqari katta o'lchamdagi kremniy quymasini qirqish va unga mexanik ishlov berish natijasida uning katta qismi isrof bo'ladi.

Monokristall va polikristall kremniy to'g'ri bo'lmagan zonali yarim o'tkazgich bo'lganligi uchun, ularning yutish koeffitsientlari kichik, quyosh nurini samarali yutishi uchun esa ulardan tayyorlanayotgan fotoelektrik aylantirgichlarning qalinligi yuzlab mikronlarni tashkil qilishi kerak. Bu ham kremniyning sarfini sezilarli oshishiga olib kelib, quyosh elementlari narxini ortiradi.

Shunday qilib, qimmatbaho kristallik kremniy o'rniga, yupqa pardali quyosh elementlarini yaratish istiqbolli hisoblanadi. Yupqa pardali texnologiya quyosh modullarining narxini pasaytirishda katta potensialga ega.

Bundan tashqari, yupqa pardali texnologiya bir qator o'ziga xos ustunliklarga ega bo'lib, kristall yarim o'tkazgichlardan foydalanilganda umuman imkoniyati mavjud bo'lmagan yoki murakab bo'lgan

(egiluvchan, yarim shaffof modullar va sh.k.) qo'llanishlarni amalga oshirish mumkin.

YUppqa pardali texnologiyalar afzalliklaridan biri qatlamlarni past haroratlarda olish mumkinligi hisoblanadi. Bu esa egiluvchan tagliklarda yarim o'tkazgich strukturalarni yaratishga imkon beradi. Egiluvchan asosdagi quyosh elementi kichik og'irlikka ega, uni istalgan yuzaga montaj qilish mumkin. Turli rangdagi yarim shaffof modullarni esa turli maqsadlarda, masalan binolarni bezashda qo'llash mumkin. Pirovardida yupqa pardali texnologiyaning asosiy afzalligi - juda katta yuzalarda asbob strukturalarini yaratish imkoniyati mavjudligi hisoblanadi.

Quyosh energiyasini elektr energiyaga aylantirish uchun hozirgi kunda mavjud bo'lgan yupqa pardali texnologiyalarini qiyosiy tahlili

Qo'llanilayotgan material sarfini ancha kamaytirish va uning narxini pasaytirishga yuqori yutish koeffitsientiga ega bo'lgan, polikristall plenklar tarzida qo'llaniladigan $CdTe$, $Cu(In,Ga)Se$ kabi materiallar asosdagi yupqa pardali texnologiyadan foydalanish imkon beradi. Bunday materiallar qatoriga amorf gidrogenlangan kremniyni ham kiritish mumkin. Demak, hozirgi kunda quyosh elementlari tayyorlashning mavjud yupqa pardali texnologiyalarini uchta guruhga ajratish mumkin. mavjud.

1. $CdTe$ yupqa pardali nanotexnologiya.
2. Mis va indiy diselinidi $CuInSe_2$ (CIS) va $Cu(In_{1-x}Ga_x)Se_2$ (CIGS) yupqa pardali texnologiya.
3. Amorf kremniy asosidagi yupqa pardali texnologiya.

SHu texnologiyalarda qo'llaniladigan materiallarning afzalliklari va kamchiliklarini ko'rib chiqaylik.

CdTe yupqa pardali nanotexnologiya:

Afzalliklari:

- Yuqori darajada turg'un FIK ega (quyosh modulining FIK 10 % tartibida).
- Ishlab chiqarish xarajatlari katta emas, shu sababli bunday quyosh modullarining narxi juda past.

Kamchiliklari:

- Jarayonlarni yana qayta takrorlash va nazorat qilish juda murakkab (yaroqli mahsulot chiqish miqdori past). Bir vaqtning o'zida ikkita Cd va Te komponentlar, hamda ularning tegishli nisbatini nazorat qilish talab qilinadi.
- Tellur Te kamyob er metalli, zahirasi In nisbatan taxminan o'n baravar kam.
- Kadmiy Cd og'ir metall. Zaharli element bo'lgani uchun atrof muhit muhofazasi masalalarini ham hisobga olish kerak. Quyosh elementining xizmat muddati tugagandan keyin uni maxsus og'ir metall sifatida utilizatsiya qilish zarur.

Bundan tashqari ishlatish jarayonida ishdan chiqish holatlarni ham hisobga olish kerak. Masalan, shisha singanda Cd tuproqqa absorbsiyalanishi va uni ifloslantirishi mumkin. Shu sababli modullarni montaj qilish uchun qimmatga tushadigan qo'shimcha xarajatlar ham talab qilinadi.

Modulning yakka taglikdagi yo'l-yo'l konstruksiyasi esa alohida yo'laklar orasidagi tirqishlarni ta'minlashni murakkablashtiradi.

Mis va indiy diselinidi $CuInSe_2$ (CIS) va $Cu(In_{1-x}Ga_x)Se_2$ (CIGS) yupqa pardali texnologiya:

Afzalliklari:

- Yuqori darajada turg'un FIK ega (modulning FIK 11–13 % tartibida).
- $CuInSe_2$ qatlamlarini o'stirish juda oddiy, u Ga , Se va Cu yupqa qatlamlarini taglik sirtiga termik bug'lantirish yordamida ketma-ket o'tqazish va keyin tezlik bilan termik kuydirishdan iborat.

Kamchiliklari:

- Jarayonlarni nazorat qilish va qaytarish nihoyatda mushkul (yaroqli elementlarning chiqishi past).
- Moduldagi takrorlash murakkab bo'lgan yo'laklar va tirqishlarni diqqat bilan loyihalashtirish talab qilinadi.
- O'tqazish jarayoni yuqori temperaturalarda amalga oshiriladi. CIS va CIGSlarni shakllantirish uchun bir qator usullardan (bug'latish, changitish, gazli transport, purkash va keyinchalik piroliz, elektrokimyoviy o'tqazish, trafaret bosish) foydalaniladi va ularni selenlash usuliga asosan quyidagilarga ajratish mumkin:
- Birikmaning boshqa elementlari bilan Se birgalikda bir vaqtda o'stiriladigan

metodlar;

- Birikmaning boshqa qatlamlarini o'tqazish natijasida *Se* bilan ta'sirlashuv amalga oshadigan metodlar.

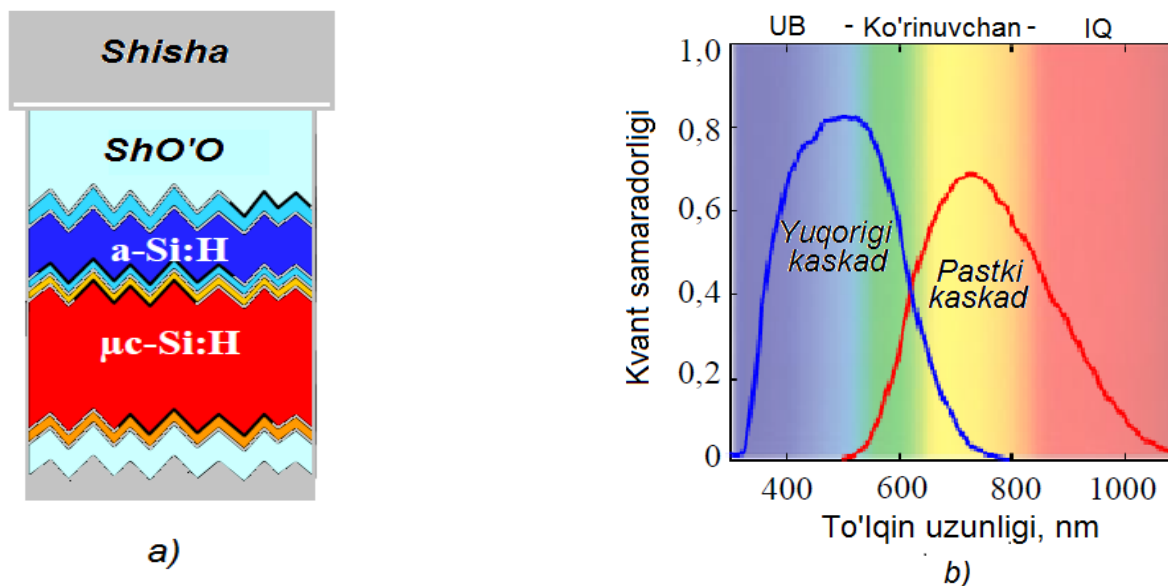
Har ikkala holda ham taglikka o'tqazish uni 400–500 °S temperaturagacha qizdirish, yoki shakllangan qatlamni shu temperaturalarda kuydirish orqali amalga oshiriladi. Reaksiya jarayonida qalinligi 1,5–2 mm bo'lgan *CIS* qatlam yuzaga keladi.

- Indiy va gallyi kamyob yer metallari. 1 GVt elektroenergiyani generatsiya qila oladigan yupqa pardali *CIS* quyosh elementlarini ishlab chiqarish uchun taxminan 50 tonna indiy talab qilinadi.
- Narxlarning o'zgarishi, bir kilogramm indiyning narxi 2003 yilda 100 dollar bo'lsa, 2005 yilda u 1000 dollargacha o'sgan. Demak, xom ashyo materialining narxi turg'un emasligi muammosi ham mavjud.
- Selenidlar zaharli bo'lgani uchun atrof muhitni muhofaza qilish muammolari va ikkilamchi ishlov berish xarajatlari e'tiborga olinishi lozim.

Amorf kremniy asosidagi yupqa pardali texnologiya:

Miltillama razryad plazmasda olingan amorf kremniy $a\text{-Si:H}$ ni 1976 yilda legirlash imkoniyati kashf qilinishi, uning spektrning ko'rinuvchan qismiga mos keluvchi to'lqin uzunligi sohasini kuchli yutishi bilan bog'langan nodir foto'otkazuvchanlik xossalari undan quyosh energetikasida foydalanishga yo'l ochib berdi. Bunday materialning va boshqa amorf gidrogenlashgan yarim o'tkazgichlarning yupqa pardalarini olish texnologiyalarining kashf qilinishi yangi, quyosh energetikasi uchun o'ta zarur bo'lgan arzon quyosh elementlarini yaratish texnologiyalarining rivojlanishiga zo'r turtki berdi.

Ommaviy ishlab chiqarilayotgan quyosh modullarida qo'llanilayotgan amorf va mikrokristallik kremniy asosidagi geterostrukturali quyosh elementining tipik tuzilishi quyidagi rasmda keltirilgan.



Rasm. $a\text{-Si:H}/\mu\text{c-Si:H}$ tandem strukturaning (a) va uni spektral xarakteristikasining (b) sxematik tasviri (ShO'O- shaffof o'tkazuvchan oksid qatlam)

Ikkinchi kaskad ikki funksiyani bajaradi. U tor zonali materialdan (taqiqlangan zona kengligi 1,1 eV tartibida) tayyorlangan, bu esa quyosh spektrining uzun to'lqinli sohasidan samaraliroq foydalanishga imkon beradi. Boshqa tarafdin mikrokristallik kremniy ancha yuqoriroq elektr o'tkazuvchanlikka ega, bu esa quyosh elementlari panelida elektr kontaktlarini yaratishda va tokni yig'ishda ijobiy rol o'ynaydi.

Odatda, quyosh modullari katta yuzadagi fotodiodlardan tashkil topadi, bu esa quyosh nurini samarali yig'ish va uni fotovoltaik effekt hisobiga elektr tokiga aylantirishga imkon beradi. Bunday diodlarni ketma-ket ulash quyosh modulining chiqishida elektr tarmog'idagi kuchlanishga yaqin kuchlanishni olishga imkon berib, quyosh modulini elektr energiya ist'emol qiladigan qurilmalarga ulashni va mavjud energiya tizimiga kirishni osonlashtiradi. Quyosh modullarining asosi fotodiodlar bo'lganligi uchun, quyosh modullarini ishlab chiqarishni elektron sanoatining bir

sohasi deb tasniflash mumkin. Yupqa pardali quyosh modullari asosini qalinligi mikron tartibida bo'lgan yarim o'tkazgich materiallarning pardasi tashkil qiladi. Bunday quyosh modullarining kremniy plastinalari asosidagi quyosh modullariga nisbatan yaqqol ustunligi modullarni ishlab chiqarishdagi yarim o'tkazgich materiallarning sarfining kamligidir. Hozirgi kunda eng keng tarqalgan yupqa pardali quyosh modullari bo'lib mikromorf quyosh modullari hisoblanadi. Bunday quyosh modullari ikkita bir-biri bilan monolit biriktirilgan amorf va nanokristall kremniy o'tishlardan iborat. Yaqin infraqizil sohada sezilarli yutish qobiliyatiga ega bo'lgan nanokristall o'tishning kiritilishi yorug'likni yutish polosasini kengaytiradi va buning natijasida quyosh modulining samaradorligi ortadi. Mikromorf quyosh elementining yana bir afzalligi shundaki, intensiv yorug'likka nisbatan noturg'un bo'lgan amorf o'tishning qalinligini kamaytirish imkoniyati bo'lganligi sababli quyosh modullarining fotoinduksion degradatsiyasini pasaytirish mumkin.

Mikromorf quyosh modullarini ishlab chiqarish texnologiyasining boshqa shu kabi texnologiyalarga nisbatan raqabotbardoshligini ta'minlaydigan o'ziga xos asosiy xususiyatlari quyidagilardan iborat:

- Bunday quyosh modullari tomonidan generatsiyalanadigan elektr energiyasining qiymati nisbatan ancha past;
- Quyosh modullarini turli, shu jumladan egiluvchan metall yoki plastik tagliklarda yasash mumkin;
- Texnologiya kamyob elementlardan foydalanishni talab qilmaydi;
- Quyosh modulida zaharli elementlar mavjud emas, bu esa o'z muddatini o'tab bo'lgan modullarni utilizatsiya muammosi munosabati bilan juda muhim hisoblanadi.

Shuni qayd qilish lozimki, kremniyning yupqa pardalari asosidagi quyosh modullarini ishlab chiqarish uchun sanoat qurilmalarini tayyorlash bo'yicha hozirgi kunda "Oerlikon Solar" kompaniyasi etakchi hisoblanadi. U mikromorf quyosh modullarini ishlab chiqarish uchun zarur bo'lgan qurilmalarning to'liq to'plamini etkazib berishga va uni ishlab chiqarishga to'liq tayyor holatda topshirishga ixtisoslashgan. Shu bilan birga kompaniyaning ishtiroki faqat ishlab chiqarish korxonasini to'liq ishga tushirish bilan chegaralanmaydi. U texnik xodimlarni o'qitish, ishlab chiqarishning birinchi yilida ob'ektda doimo ishtiroki bilan ishlab chiqarishni o'z xodimlari bilan kuzatishni amalga oshiradi, korxonada ishlab chiqarilayotgan quyosh modullarini xalqaro sifat sertifikatlarini rasmiylashtirishga yordam beradi va shu bilan mahsulotning bozorga chiqishini osonlashtiradi.

Xulosa qilib aytganda, quyosh modullarini va avtonom energo qurilmalarni qo'llanilishining istiqboliga hozirgi kunda hech kim shubha bilan qaramaydi. Bu yo'nalishning rivojlanish tendensiyalari quyosh energetikasining hayotga keng joriy qilinishi mazkur muammoning ishlab chiqilish darajasi bilan emas, balki birinchi navbatda bunday usul bilan olinayotgan energiyaning narxi va iqtisodiy maqsadga muvofiqligini ko'rsatadi.

Kuzatilayotgan tendensiyalar an'anaviy usul bilan olinayotgan energiyaning narxi bilan tenglashish yaqin o'n yillar ichida sodir bo'lishini va u yirik masshtabli quyosh energetikasining tug'ilishini belgilashini ko'rsatadi. Quyosh Erga hayot bergan reaktor va u insoniyatning har tomonlama qulay turmushi uchun zarur bo'lgan energiyaning bera oladi. SHuning uchun quyosh energiyasidan yanada faolroq foydalanish ertangi kunning emas, hozirgi kunning dolzarb masalasidir.

Adabiyotlar

1. Afanasev V. P., Terukov E. I., Sherchenkov A. A., A94 Tonkoplenochnye solnechnye elementy na osnove kremniya. 2-e izd. SPb.: Izd-vo SPBGETU «LETI», 2011. 168 s.
2. Alfeyorov J. I., Andreev V. M., Rummyanov V. D. Tendensii i perspektivy razvitiya solnechnoy fotoenergetiki // FTP. 2004. T. 38, vip. 8. S. 937–948.

UDK: 621.9.08

QUYOSH BATAREYALARINI KOMPONOVKA QILISHDA KOMPYUTERDA SONLI NAZORAT TEXNOLOGIYALARDAN FOYDALANISH**E. U. Arziqulov, J.T. Ruzimurodov, Y. D. Eshonqulov***Samarqand davlat universiteti*E-mail: eshkuvat@samdu.uz

Annotatsiya. Maqolada quyosh batareyalarini ishlab chiqarishda qo‘llash mumkin bo‘lgan va shu sohada kichik korxonalar uchun mo‘ljallangan quyosh batareyalarini kompanovka qilish uchun mo‘ljallangan minitexnologiyalar haqida fikr yuritiladi. Bunday minitexnologiyalar asosida loyihalangan dastgohning tannarxi arzon, ko‘p funksionalligi, modernizatsiya qilinishi mumkinligi bilan farqlanadi. Taklif qilinayotgan avtomatlashgan dastgoh modeli kichik partiyada ishlab chiqarishni yo‘lga qo‘yishni mo‘ljallagan tadbirkorlar uchun arzon va ekspluatatsiya jihatidan qulaydir.

Kalit so‘zlar: quyosh batareyalari, kompyuterda sonli nazorat (KSN) (computer numerical control (CNC)), KSN texnologiyalar, fotoelementlarni kompanovka qilish, ketma-ket interfeys.

Использование технологии числовое программное управление при компоновке и в мелкосерийном производстве солнечных батарей

Аннотация. В статье обсуждается минитехнологии основанное на числовом программном управлении (ЧПУ) технологии для проектирования и компоновки солнечных батарей при мелкосерийном производстве. Проектированные такие оборудования основанные на технологии ЧПУ отличаются своим многофункциональностью, возможностями модернизации и недорогим себестоимостью. Предлагаемая модель оборудования может быть полезна для малых предприятий при мелкосерийном производстве солнечных батарей.

Ключевые слова: солнечные батареи, технология ЧПУ, компоновка фотоэлементов, последовательный интерфейс.

Application of the computerized numerical control technology for desing and in small-scale production of solar batteries

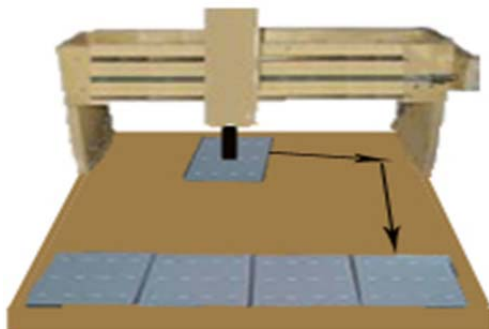
Abstract. In this article computerized numerical control (CNC) based technology for construction and design of solar batteries on small scale production is discussed. Designed on CNC based technology equipment differs from others for the multifunctionality, opportunities of modernization and inexpensive cost. Offered model of the equipment can be useful for small enterprises on small-scale production of solar batteries.

Keywords: solar batteries, computer numerical control (CNC), CNC technologies, design of solar cells, serial interface.

Respublikamizda quyosh energetikasi rivojlanishi hamda xalq xo‘jaligida keng foydalanish uchun yetarli imkoniyatlarga va istiqbollarga ega. Ammo bugungi kunda quyosh batareyalarning (QB) tannarxi ancha yuqori. Bunga asosiy sabab mamlakatimizda QBlarini ishlab chiqaruvchilarning ko‘p emasligi, fotoelementlarning to‘la import qilinishi bo‘lib hisoblanadi. Hozirgi paytda respublikamizga

asosan chet eldan tayyor quyosh panellari import qilinmoqda va bu o‘z navbatida QBlarining narxining baland bo‘lishiga olib kelmoqda. QBlarining narxini sezilarli pasaytirish uchun faqat quyosh fotoelementlarinigina import qilib, quyosh panellarini respublikamizda yig‘ish maqsadga muvofiqdir.

Bu borada uchrayotgan asosiy to‘siq quyosh panellarini yig‘ishga mo‘ljallangan minitexnologiyalarning respublikamizda ishlab chiqarilmasligi hamda xorijiy texnologik qurilmalarning o‘ta qimmatligidir. Shu sababi quyosh panellarini yig‘ish bilan shug‘illanuvchi



1-rasm. Quyosh batareyalarini panellarga kompanovka qilishga mo‘ljallangan CNC dastgohining tuzilmasi.

kichik korxonalar respublikamizda deyarli faoliyat yuritishmaydi.

Mavjud bu muammodan qutilishning muqobil yo'llaridan biri quyosh batareyalari tashkil topgan panellarini yig'ishga imkon beruvchi, avtomatlashgan va kompyuter bilan boshqariladigan dastgohni loyihalashdan iborat.

Quyosh batareyalari panellarini tayyor fotoelementlardan yig'ish jarayoni quyidagi uch bosqichni o'z ichiga oladi: fotoelementlarni kompanovka qilish, tok kontaktlarini kavsharlash, shaffof qoplama yoki quyma bilan germetizasiya qilish [3].

Yuqorida keltirilgan jarayonlarni sanoat miqyosida amalga oshirish uchun yuqori texnologik vositalar va dastgohlar mavjud, ammo ularning narxi juda yuqoriligi bilan bir qatorda ular universal emas. Odatda yuqorida aytib o'tilgan uch bosqichning har birini amalga oshirish uchun alohida texnologik dastgohlardan foydalaniladi. Bu dastgohlar katta partiyadagi quyosh panellarini ishlab chiqarish uchun mo'ljallangan va shundagina ular iqtisodiy samara beradi.

Kichik yoki o'rta partiyadagi quyosh panellarini ishlab chiqarish uchun barcha jarayonlarni bir dastgohda bajarishga imkon beruvchi kompyuterlashgan dastgohni loyihalashda komputerda sonli nazorat (KSN) (computer numerical control (CNC)) texnologiyalaridan foydalanish maqsadga muvofiq [1]. Bu texnologiyadan foydalanishga quyidagi omillar sabab bo'ldi: birinchidan yuqori darajada avtomatlashtirish imkoniyati mavjudligi, ya'ni texnologik jarayonga operatorning aralashishi minimumga olib kelinadi va bu chiqish koeffitsiyentining o'ta yuqori bo'lishini ta'minlaydi; ikkinchidan, zaruriy texnologik jarayonlar yuqori aniqlikda, tez va qat'iy ketma-ketlikda bajarilishi ta'minlanadi, bir marta to'g'ri rostlangan dastgoh va uni boshqaruvchi kompyuter dasturi uzoq muddat sifat darajasi yuqori bo'lgan bir xil maxsulot berishi mumkin; uchinchidan, KSN texnologiyalariga asoslangan har qanday dastgohni zarur hollarda modenizasiya qilish, funktsionalligini oshirish imkoniyatlari mavjud. Quyosh batareyalarini panellarga kompanovka qilishga mo'ljallangan KSN dastgohining tuzilmasi 1-rasmda keltirilgan. Dastgoh so'ri shaklidagi ish stolida YOX koordinatalar tekisligida harakatlanuvchi platforma va OX, OY, OZ o'qlar bo'yicha harakatlanuvchi, bir nechta funksiyalarni bajarishga imkon beruvchi kallakdan iboratdir. Bundan tashqari, ish stoli chetida fotoelementlar kassetasi joylashtiriladigan yuklash qismi ham mavjud. Dastgoh ish stoli o'lchamlari ishlab chiqarilishi mo'ljallanayotgan quyosh panelidan bir oz kattaroq bo'lishi yetarlidir (1200x1500 mm o'lcham tavsiya qilinadi). OX va OY o'qlar bo'yicha harakatlanish qadami aniqligi 0.1 mm, OZ o'q bo'yicha harakatlanish yo'li 200 mm va harakatlanish qadami aniqligi 0.1 mm bo'lishi yetarlidir. Ishchi kallak quyidagi funksiyalarni bajara olishi zarur:

- fotoelementlarni panel tagligiga kerakli ketma-ketlikda avtomatik joylashtirish;
- fotoelementlar tok kontaktlarini kerakli tartibda kavsharlash;
- fotoelementlarni germetizasiya qilish uchun maxsus shaffof germetik suyuqligini quyish;
- Germetizasiya suyuqligini qotirish (kristallanishi uchun) infraqizil nurlar bilan qizdirish.

Bu funksiyalarni bajarish uchun kallak pnevmatik so'rg'ich (fotoelementlarni tashish uchun), kavsharlash qurilmasi, germetizasiya suyuqligini quyish uchun qizdirgichli shpris hamda infraqizil (IQ) qizdirish paneli kabi elementlarga ega bo'lishi lozim.

KSN dastgohiga o'rnatilgan odimlovchi yuritgichlar maxsus drayverlar orqali, drayverlar esa kopyuterning chiziqli chop qilish terminali (CCT) (Line Print Terminal (LPT)) portiga ulashga mo'ljallangan kontroller orqali boshqariladi. Odimlovchi dvigatellarning odimlash tezligi va tezlanishi, odimlash masofasi, boshlang'ich koordinatalari faqat CCT portidan kelayotgan impulslarga bog'liq bo'ladi va dasturiy ta'minot bilan boshqariladi.

Qurilmaning iqtisodiy samaradorligi. Hozirgi paytda quyosh batareyalarini yig'ishga mo'ljallangan bunday turdagi dastgoh mavjudligi va ishlab chiqarilayotgani haqida ma'lumotlar mualliflarda mavjud emas. Shuning uchun boshqa maqsadlar uchun mo'ljallangan KSN dastgohlari bilan solishtirilganda tannarxi bir necha barobar arzon ekanligini ta'kidlash zarur [2]. Masalan 1200x1500 mm o'lchamdagi Xitoy va Yevropada ishlab chiqarilgan KSN dastgohlar tannarxi yetkazib berish xarajatlarini hisobga olmaganda 6000-16000 AQSh dollarni tashkil qiladi. Loyihalananayotgan mazkur dastgoh tannarxi 3-4 ming AQSh dollaridan oshmaydi hamda o'z narxini qoplash muddati vaqt bilan emas ishlab chiqargan mahsuloti bilan aniqlanganida, 200-300 ta quyosh panelini tashkil qiladi.

Xulosa qilib aytish mumkinki, quyosh batareyalarini kichik partiyalarni kichik korxonalarda ishlab chiqarish uchun KSN texnologiyalarga asoslangan dastgohlarni ishlab chiqish va yana ham takomillashtirish mumkin.

Adabiyotlar

1. Mike Lynch. The Key Concepts Of Computer Numerical Control. (перевод статьи www.ecnc.ru) 2012.
2. A. Geetha. Modelling a Computer Numerical Control Machine-2 Axis. Middle-East Journal of Scientific Research 20 (1): 62-64, 2014 ISSN 1990-9233. © IDOSI Publications, 2014
3. А. Фаренбрух, Р. Бьюб. Солнечные элементы. Теория и эксперимент. Москва, Энергоатомиздат, 1987.

УДК: 539.1.0743.621.039.58.

ZARAFSHON TOG‘ YON BAG‘IRLARIDA MOX, O‘T O‘SIMLIKLAR VA TUPROG‘IDA RADIONUKLIDLAR

**Sh.X.Xushmurodov, E.Bozorov, G.Ahmedova, Sh.Shodiyev,
S.Salimov, G.Hosilova, X.Ismoilov**

Samarqand davlat universiteti

Annotatsiya. Ushbu ishda Zarafshon tog‘ yon bag‘irlaridagi ekologik maydonlardan 2015-2016 yillarda olingan Mox, o‘t o‘simliklar, tuproq va granit namunalari Th²³², Ra²²⁶, K⁴⁰, Be⁷, Cs¹³⁷ radionuklidlar solishtirma aktivliklarini gamma-spektrometrik usulda aniqlash natijalari keltirilgan. Radionuklidlar miqdori na‘munaning xususiyatlariga, yil fasliga, maydon xarakteristikalariga bog‘liqligi ko‘rsatilgan.

Kalit so‘zlar: Radionuklidlar, solishtirma aktivlik, Mox, gamma-spektrometr, Qoratepa, tuproq, eroziya.

Радионуклиды в лишайниках, растениях и почве отрогов Зерафшанского хребта

Аннотация. В работе приведены результаты исследований содержания естественных, Th²³², Ra²²⁶, K⁴⁰, техногенного Cs¹³⁷ и космогенного Be⁷ радионуклидов в природных объектах (почва, гранит, травяные растения, лишайник), отобранных с экологических площадок отрогов Зерафшанского хребта методом гамма-спектрометрии. Показана зависимость содержаний радионуклидов семейств Th²³², Ra²²⁶, K⁴⁰, Be⁷, Cs¹³⁷ от особенностей объекта, сезона года и характеристики площадок отбора.

Ключевые слова: Радионуклиды, удельная активность, Мох, гамма-спектрометр, Каратепа, почва, эрозия.

Radionuclides in lichens, plants and soils of the Zarafshan ridge

Abstract. In work results of researches of maintenance of natural Th²³², Ra²²⁶, K⁴⁰, Cs¹³⁷, Be⁷ technogenic Cs¹³⁷ and kosmogenny Be⁷ radionuclid are given in the natural objects (the soil, facets, grass plants, a lichen) which are selected from ecological platforms of spurs of the Zarafshan ridge by methods of gamma spectroscopy. Dependence of contents of Th²³², Ra²²⁶, K⁴⁰, Cs¹³⁷, Be⁷ radionuclides families from features of an object, a season of year, and characteristics of platforms of selection is shown.

Keywords: radionuclids, gamma-spectrometer, specific activity, the soil, Moss, erosion, Karatepa.

Atrof-muhit radioktivligining asosiy manbai uran-toriy oilalarining radionuklidlari, K⁴⁰, kosmogen va yadroviy bo‘linishda hosil bo‘ladigan texnogen radionuklidlar hisoblanadi [1].

Tabiiy radionuklidlar Yer paydo bo‘lganidan beri Yer qobig‘ida mavjud bo‘lgan dastlabki elementlarga kiradi. Koinotdan atmosferaga kelayotgan yuqori energiyali (10¹⁰ev-10⁹ev) kosmik zarralar (neytronlar, protonlar) atmosfera havosi tarkibidagi azot, kislorod va boshqa gazlar atomlari yadrolari bilan reaksiyaga kirishib havoda nisbatan yengil C¹⁴, Be⁷, H³, P³², P³³ va boshqa radionuklidlarni hosil qiladi. Bunday radionuklidlar kosmogen radionuklidlar deyiladi. Texnogen radionuklidlar ayrim mamlakatlarda o‘tkazilgan yadroviy sinovlar, yadroviy qurilmalarda bo‘ladigan avariya natijasida paydo bo‘ladi. Hozirgi vaqtda texnogen radionuklidlarning atrof-muhit na‘munalaridagi aktivligi asosan uzoq yashovchi radionuklidlar Cs¹³⁷ va Sr⁹⁰ tufaylidir. Bu radionuklidlar atmosferaning yuqori qatlamlarida hosil bo‘lib yer yuziga aerazollar shaklida

quruq(changlar) va ho'l tomchilar, shudringlar bilan birga tushadi. Umuman atrof-muhit namunalarning radioaktivligi namunani o'zining biologik xususiyatlariga, hududning geografik xarakteristikalariga, antropogen ta'sirlar darajasiga bog'liqdir. [2]

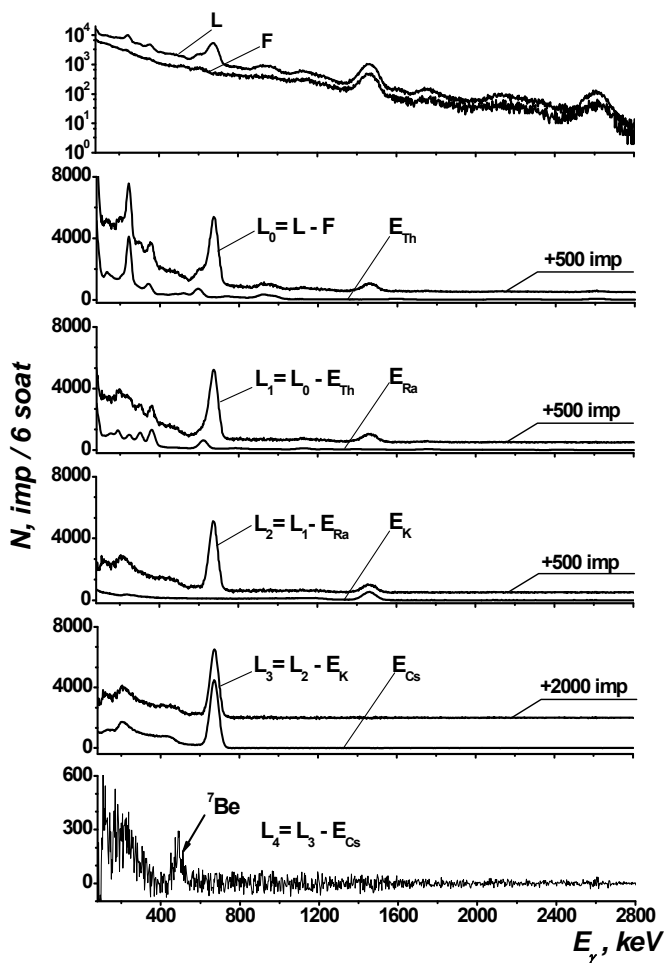
Ushbu ishda Zarafshon tog'lari yon bag'irlaridagi ekologik maydonlardan 2015-2016 yillarda olingan Mox, o't o'simliklar, tuproq va granit namunalari Th^{232} , Ra^{226} , K^{40} , Be^7 , Cs^{137} radionuklidlar solishtirma aktivliklarini gamma-spektrometrik usulda aniqlash natijalari keltirilgan.

Namunalarni tayyorlash va o'lchash usuli: O'lchanadigan namunalar Zarafshon tog'larining janubiy-g'arbiy qismi bo'lgan Qoratepa va Chakil kalian (Dengiz sathidan 1690 m balandlikda) tog'lari yon bag'irlaridan olindi.

Olingan namunalar xona haroratida quritildi, chet jinslardan tozalandi va bir litrlik Marinelli idishlarga to'ldirildi. Mox namunalari taqriban yuqori va pastki qatlamlarga ajratildi. Moxning yuqori qatlamining massasi 155-185 g, pastki qatlamining massasi 390-700 g, o't o'simliklar massasi 800-1200 g, tuproq massasi 1200-1400 g, oraliqda o'zgaradi.

Namunalarning gamma-spektirlarini o'lchashlar o'lchami 63x63 mm bo'lgan NaJ(Tl) ssintillatsion detektorli gamma-spektrometrdan amalga oshirildi.

Gamma-spektrometr effektivlik bo'yicha OMASN to'plamidagi Th^{232} , Ra^{226} , K^{40} , Be^7 , Cs^{137} etalon radionuklidlar yordamida darajalangan, darajalash aniqligi 7%. Har bir namunaning gamma-spektrini o'lchash vaqti 6 soat. Namunalar aktivligi o'lchangan spektrlarni ketma-ket alohida tashkil etuvchilarga ajratish orqali aniqlandi. Spektrni bunday ajratilishi 1-rasmدا keltirilgan.



1-rasm. Moxning gamma-spektrini ketma-ket tashkil etuvchilarga ajratish: L-Mox namunasining spektri; F-fon spektri; namuna spektrida tegishlacha E_{Th} , E_{Ra} , E_{K} , E_{Cs} , Th^{232} , Ra^{226} , K^{40} va Cs^{137} ; L_1 -spektr ketma-ket ajratilgandan so'ng mox namunasining spektri; Be^7 - mox namunasidagi Be^7 ning qoldiq spektri.

Namunalar aktivlikni aniqlashning xatosi $\delta(A) \sim 2-10\%$ ni tashkil qildi. Tuproqning pastki qatlamlarida Cs^{137} ning aktivligini aniqlashda xatolik $\sim 30\%$ gacha yetdi.

O'lchash natijalari. Yer qobig'i paydo bo'lishi tarixidan kutilganidek, magmatik tog' jinslariga tegishli bo'lgan granit namunalarida tabiiy radioaktiv radionuklidlar miqdori boshqa namunalar turlaridagi miqdoridan yuqori. (1-jadval)

Mox o'simligi namunalarining pastki qatlamida tabiiy radionuklidlar miqdori yuqori qatlamdagiga nisbatan katta. Bunday hol moxning o'sish tezligi bilan (0,1mm/yil dan kichik) va paski qatlamda granit zarralari qoldiqlari qolgani bilan bog'liq bo'lishi mumkin. O't o'simliklarda Th^{232} ga nisbatan Ra^{226} va K^{40} ning katta miqdorda aniqlanishini ularning birikmalarining Th^{232} birikmalariga qaraganda suvda yaxshi eruvchanligi bilan tushuntirish mumkin. [1] Tuproqning o'simliklar tomirigacha bo'lgan $x \leq 6$ sm yuqori qatlamida radiy va kaliy miqdorining kichikligini ham shunday tushuntirish mumkin (2-rasm)

O't o'simligi namunalarida K^{40} miqdori Moxdagiga nisbatan sezilarli darajada yuqori. Bunday farq o't o'simliklari va

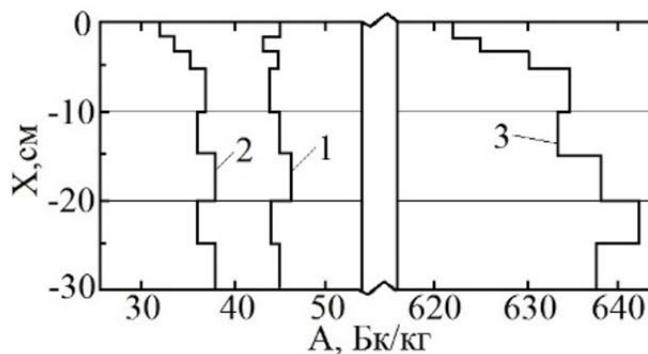
Moxning vegetatsiya sharoitlarining har-xilligi bilan bog'liq bo'lishi mumkin.

Tabiat namunalarida kosmogen va texnogen radionuklidlarning miqdori ularning atmosferadagi miqdori bilan, yemirilish jarayonlari, yomg'ir, qor, shudring yoki quruq changlar orqali ko'chishi jarayonlari bilan aniqlanadi. Cs^{137} ning tuproqdagi migratsiya chuqurligi va miqdori maydonning lanshaft xarakteristikalariga, shamol va suvlar ta'siridagi eroziyasiga, sedimentatsiyasi va antropogen ta'sirlarga bog'liq ravishda 5-25 sm chuqurlikda $3,6 \text{ kB/m}^2$ atrofida o'zgaradi.

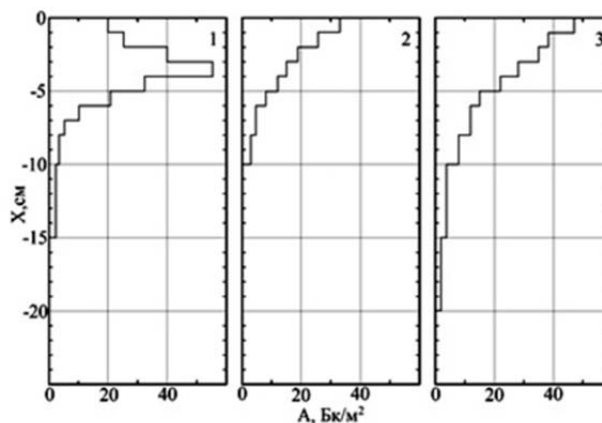
Eroziya jarayonlari kuchli bo'lgan maydonlar tuproqlari namunalarida Cs^{137} ning chuqurlik bo'yicha tarqalishining maksimumi ustki qatlamga to'g'ri keladi, eroziya kuchli bo'lmagan maydonlarda esa pastki qatlamlarga siljiydi. (3- Rasm)

1-Jadval. Tekshirilgan namunalarda aniqlangan tabiiy radionuklidlarning o'rtacha solishtirma aktivliklari. Bk/kg

Radionuklid	Granit	Mox, qatlamlar		Tuproq	O'simlik
		Pastki qatlam	Yuqori qatlam		
^{232}Th	67	52	31	43	27
^{226}Ra	47	38	32	33	37
^{40}K	1100	630	300	620	780



2-Rasm. Tuproq namunasi qatlamlarida Th^{232} (1), Ra^{226} (2), va K^{40} (3) radionuklidlarining vertikal taqsimlanishi.



3-Rasm. Kuchsiz eroziyalangan (1), Eroziyaga uchragan(2) va Sedimentatsiya (3) tuproqda Cs^{137} ning vertikal taqsimlanishi.

2-Jadval. Quruq faslning boshida va oxirida tuproq qatlamida Be^7 ning o'rtacha miqdori, Bk/kg.

Yil	Quyosh aktivligi indeksi, 100/w	Ho'1 yog'inlar, mm/yil	Q, Bk/m ²			
			Aprel-may		Sentyabr-oktyabr	
			Mox	Tuproq qatlami	Mox	Tuproq qatlami
2015	1,6	364	0,2	0,18	0,1	0,05
2016	1,31	216	0,22	0,24	0,12	0,06

Adabiyotlar

1. Н. А. Титаева. Ядерная геохимия, Издательство Московского Университета, 586 с, 2000 г.
2. A.N.Azimov, Sh.Kh.Hushmuradov, I.T.Muminov, T.M.Muminov, B.S. Osmanov, A.N.Safarov, A.A.Safarov. Gamma-spectrometric determination of natural radionuclides and ¹³⁷Cs concentrations in environmental samples. The improved scintillation technique, J. Radiation Measurements V. 43, No 1, San Francisco, USA, 2008.

UDK: 539.16.04

РАДИОНУКЛИДЫ В ПОЧВАХ ЮГО-ЗАПАДНЫХ ОТРОГОВ ЗАРАФШАНСКОГО ХРЕБТА

А. Азимов¹, О.Б.Маматкулов¹, И. Т. Муминов², С. Салимов¹,
К. Умаров¹, Ш.Х.Хушмуродов¹, А. Т. Худайбердиев²

¹ - Самаркандский государственный университет

² - Национальный университет Республики Узбекистан

Аннотация. Методами γ - спектрометрии исследована радиоактивность почв горной гряды юго-западных отрогов Зарафшанского хребта.

Ключевые слова: космогенный, Зарафшанский хребет, перевал Тахта-Карача, уран-торевый, сосуд Маринелли.

Janubiy g'arbiy Zarafshon tizma tog' tarmog'ining tuproq tarkibidagi radionuklidlar miqdori

Annatsiya. Gamma-spektrometrik usul yordamida janubiy-g'arbiy Zarafshon tog' tizmasining adirlilik va tog' yon bag'lari tuproq tarkibidagi radionuklidlar miqdori tahlil qilindi.

Kalit so'zlar: kosmogen, Zarafshon tizmasi, Taxta-Karacha dovoni, uran-toriy, γ -spektrometr, Marinelli idishi.

Radionuclides in the soils of the south-western spurs of the Zarafshan range

Annotation. The γ -spectrometry metod has been used to investigate the soil radioactivity of the mountain range of the southwestern spurs of the Zarafshan Range.

Keywords: cosmogenic, Zarafshan Range, The Takhta-Karacha Pass, Uranium-thorium, γ -spectrometers, Marinelli vessel.

Введение

Радиоактивность почв обусловлена естественными долгоживущими радионуклидами, образовавшимися одновременно с формированием Земли, и их дочерними нуклидами (превалирующий вклад вносят радионуклиды урано-ториевых семейств и ⁴⁰K). Радиоактивность верхних слоёв почв обусловлена и выпадающими из атмосферы космогенными (свыше 60) и техногенными (свыше 200) радионуклидами.

Космогенные радионуклиды образуются в верхних слоях атмосферы в реакции расщепления ядер воздуха (Н, О, Аг ...) высокоэнергетической составляющей космического излучения и вместе с мокрыми и сухими осадками выпадают на поверхность Земли.

Наиболее удобным для γ -спектрометрических исследований является ⁷Be T_{0,5}= 54дня, E γ = 478кэВ.

Глобальное загрязнение поверхности Земли техногенными радионуклидами началось с первыми надземными испытаниями ядерного оружия в 1945г. Наибольшей интенсивности эти испытания достигли в 1963г. В конце 70-х годов ядерными державами был подписан договор о запрещении испытаний ядерного оружия, глобальные выпадения техногенных радионуклидов стали уменьшаться, и в настоящее время глобальное выпадение техногенных радионуклидов незначительны и техногенное загрязнение поверхности Земли обусловлено самыми долгоживущими ($T=30$ лет) продуктами ядерного деления ^{137}Cs и ^{90}Sr . Содержание в окружающей среде ^{137}Cs определяется методами γ -спектрометрии ($E_{\gamma} = 661\text{кэВ}$), а ^{90}Sr (чистый β -распадчик) - β -спектрометрии. Выпавшие радионуклиды сорбируются частицами почвы и вместе с ними участвуют в почвенных процессах. В последние десятилетия выпавшие радионуклиды все шире используются как индикаторы почвенных процессов.

В настоящей работе γ -спектрометрическим методом исследованы активности естественных радионуклидов урано-ториевых семейств, ^{40}K , космогенного ^7Be и техногенного ^{137}Cs в почвах и воде одного участка горной гряды в юго-западных отрогах Зарафшанского хребта. В отличие от подобных предыдущих наших исследований [1, 2] в данной работе рассматриваются особенности распределения выпадающих радионуклидов в почвах горной местности в зависимости от состояния их поверхности.

1. Исследованные площадки

Исследованный участок местности выбран на восточном склоне вытянутой в меридианном направлении горной гряды Юго-западных отрогов Зарафшанского хребта, подножие которого примыкает к автодороге Самарканд-Китаб, вблизи от перевала Тахта-Карача (Рис. 1).

Участок ограничен координатами $39^{\circ}17'45.9''$ - $39^{\circ}17'45.1''$ - с.ш., $0.66^{\circ}54'24.1''$ - $0.66^{\circ}54'33.7''$ - в.д., перепад высот 1696 - 1644 метр над уровнем моря. Северная и южная части склона задернованы, центральная часть лишена растительности в результате схода оползня толщиной свыше 6 м., произошедшего в середине 90-х годов и обнажившего часть подземного ручья на высоте-1680 м, русло которого параллельно гребню гряды.

Пробные площадки выбраны в широтном направлении на гребне, склонах и подошве в южной, северной и центральной частях участка. Вода отобрана из открытой части ручья.



Рис. 1 Исследованный участок местности центральная часть

2 Методика отбора и изготовления проб

Процедура отбора образцов почвы и изготовления из них проб сводилась к следующему:
- с площадок:
- с площади $1 \times 1 \text{ м}^2$ срезался растительный покров с - 1мм слоем почвы (^7Be содержатся только в тонком поверхностном слое);

- с площади 0.2x0.4 м² последовательно срезались слои почвы на глубинах Δх = 0 – 2; 2 – 5; 5 – 10; 10 – 15; 15 – 25; 25 – 35 см;
- отобранные пробы доводились до воздушно сухого состояния;
- измельчались;
- тщательно перемешивались;
- методам квартования (конверта) отбирались количества почвы, необходимые для заполнения однолитровых сосудов Маринелли;
- заполненные сосуды герметически закрывались крышками;
- взвешивались;
- маркировались.

Отбор воды осуществлялся непосредственно в сосуд Маринелли по методике [3].

3. Методы измерений и обработка γ –спектров проб.

Измерения спектров проб проведены на γ –спектрометре со сцинтилляционным детектором NaI(Tl), 67x67мм, энергетическое разрешение 9% на линии 1332 кэВ ⁶⁰Со, минимально детектируемая активность ¹³⁷Cs - А_{мин} ~ 3Бк при длительности измерения t=2час. Обработка спектров проведена по методике [4].

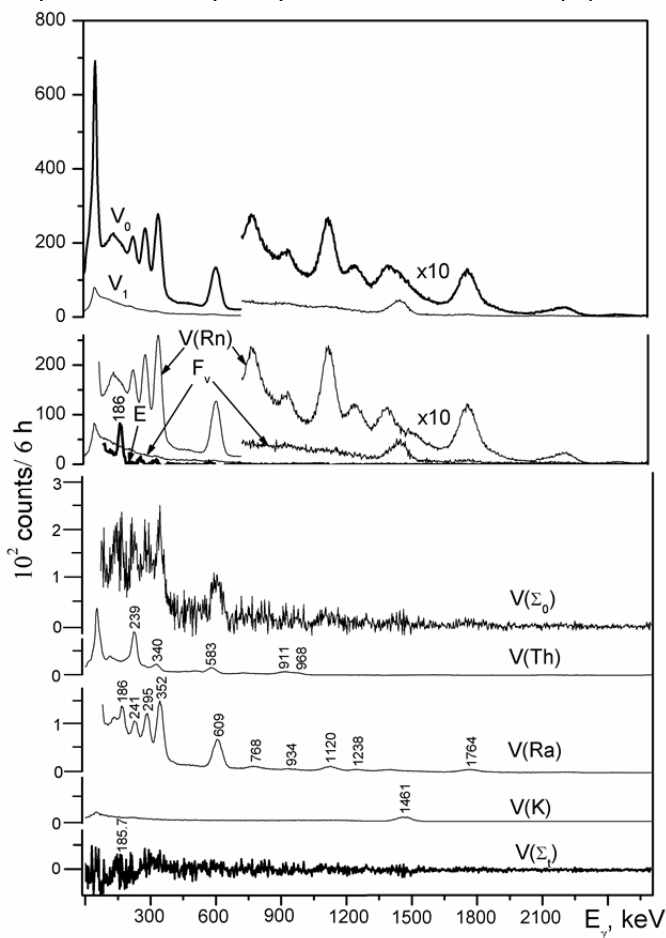


Рис. 2 - экспериментальные V₀ и V₁, разностные V(Rn) = V₀-V₁, F_V = 2V₁-V₂, V(Σ₀) = V₁-F_V, нормированные V(Th) = b_{VTh}E(Th), V(Ra) = b_{VRa}E(Ra) и V(K) = b_{VK}E(K), и остаточный V(Σ_t) = V(Σ₀)-V(Th)-V(Ra)-V(K) спектры для проб воды.

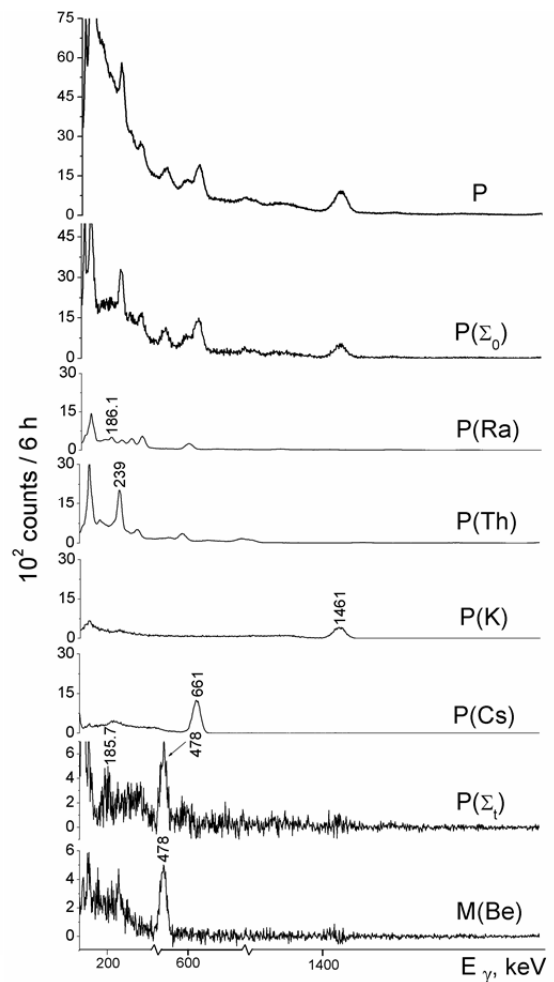


Рис. 3 Экспериментальный P, разностный P(Σ₀) = P-F_V, нормированные P(Ra) = b_{PRa}E(Ra), P(Th) = b_{PTh}E(Th), P(K) = b_{PK}E(K), P(Cs) = b_{PCs}E(Cs) и остаточный P(Σ_t) = P(Σ₀)-P(Ra)-P(Th)-P(K)-P(Cs) спектры для пробы p(0-0,3 см) почвы; M(Be) спектр месячных выпадений ⁷Be.

Использовались эталонные источники ²²⁶Ra, ²³²Th, ⁴⁰K, ¹³⁷Cs из комплекта ОМАСН (образцовые меры активности специального назначения) объемом 1л и плотностями ρ≈1кг/л. В качестве инертной пробы, для установления фонового вклада в спектрах проб использовалась

дистиллированная вода. На рисунках 2 и 3 приведены примеры спектров проб воды и почвы и их разложение на составляющие фона ^{226}Ra , ^{232}Th , ^{40}K , ^{137}Cs , ^7Be .

По активностям ^7Be и ^{137}Cs в слоях почв установлены их запасы на исследованных площадках.

$$Q = \sum A_x \rho, \text{ где } \rho \text{ плотность почвы в слое } (\rho_x = 1.35 \text{ кг/л}).$$

Запасы космогенного радионуклида ^7Be ($T_{0.5} = 54$ дня) на площадках определялась по интенсивности I_γ пика полного поглощения γ – лучей 478 кэВ ^7Be .

$$Q = I_\gamma / a_\gamma \varepsilon_\gamma S t,$$

Где a_γ и ε_γ – квантовый выход и эффективность регистрации γ – лучей 478 кэВ ^7Be , $S = 1 \text{ м}^2$ – площадь поверхности пробы, t – длительность измерения.

Активность ^{222}Rn в пробах воды устанавливалась сопоставлением разности спектров исследуемой и инертной проб и эталонных источников ^{226}Ra (отличаются отсутствием в спектре ^{222}Rn линии 186 кэВ ^{226}Ra).

4. Результаты исследований и их обсуждение.

Рассмотрение профилей вертикальных распределений ^{137}Cs и глубин его миграции (Рис. 4) позволяет заключить, что в почвах:

- Гребня преобладают естественные процессы диффузии, максимумы распределений ^{137}Cs смещены в глубинные слои, что связано с медленным таянием их снежного покрова (удерживается до начала апреля) и таяния летом.
- Северного и южного участков склона преобладают процессы эрозии – снежный покров тает много раньше, чем на гребне. Интенсивное стекание талых и дождевых вод смывает верхние слои почвы, поэтому максимумы распределений находятся в поверхностном слое и глубина миграции и запасы ^{137}Cs в них меньше, чем на гребне.
- Подножья северной и южной частей склона отчетливо проявляются процессы седиментации, обусловленных скоплением на них стекающих со склонов вод, содержащих ^{137}Cs . В связи с этим глубина миграции (из-за высокой влажности) и его запасы сильно возрастают.

Что касается центральной части участка, то содержания в почвах ^{137}Cs ниже уровня минимально детектируемой активности, т.к. верхние слои почвы (содержащие ^{137}Cs) сошли с их поверхности в результате оползня.

Отметим, что основное количество техногенного ^{137}Cs выпало в 60-х годах XX века и в 90-х годах его активность в атмосферных выпадениях упала на порядки.

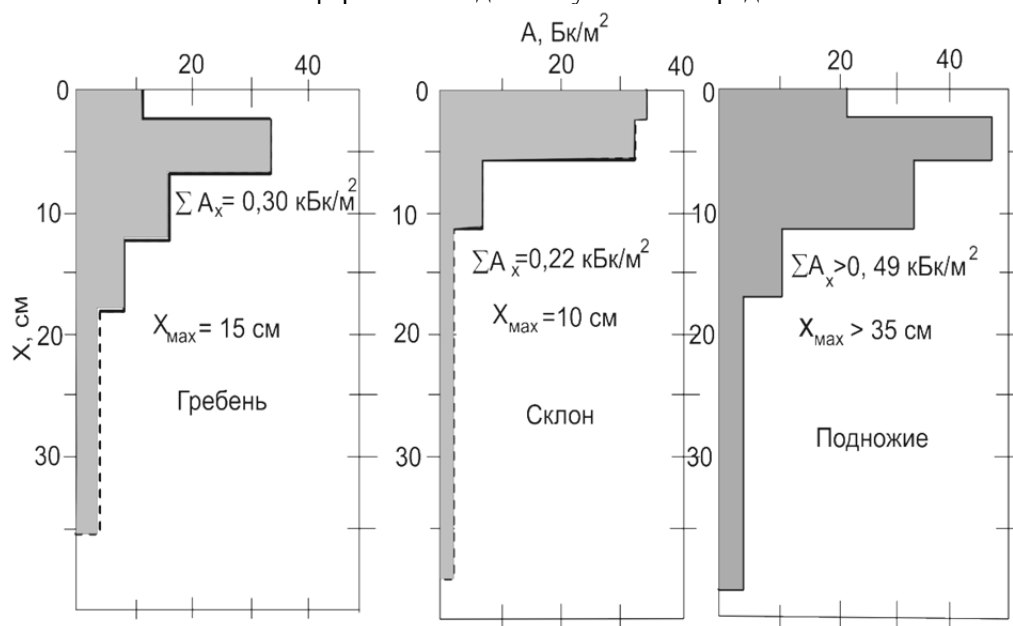


Рис. 4 Профили вертикального распределения техногенного радионуклида в почвах гребня, склона и подножья горной гряды (----- следовые содержания ^{137}Cs)

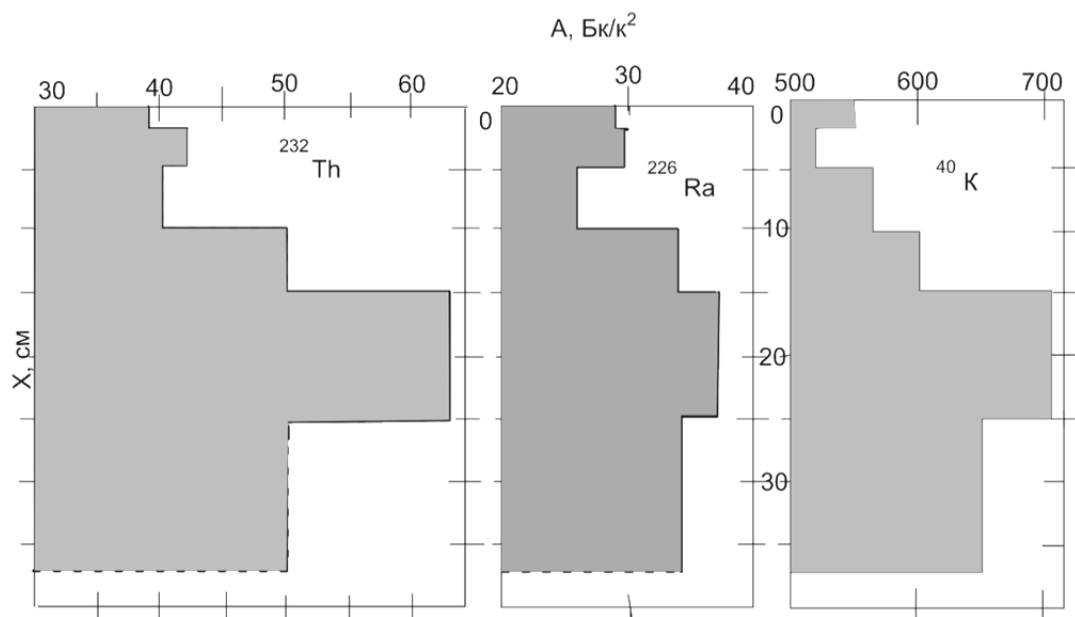


Рис. 5. Профили вертикального распределения естественных радионуклидов ^{232}Th , ^{226}Ra , ^{40}K в почвах.

Запасы постоянно выпадающего космогенного радионуклида ^7Be на рассматриваемых площадках коррелируют с запасами ^{137}Cs . При этом низкие значения запасов ^7Be в центральной оползневой части участка обусловлены практическим отсутствием на них травяного покрова, удерживающего выпадающие радионуклиды. Содержания естественных радионуклидов ураноториевых семейств и ^{40}K в слоях почв исследуемых площадок флуктуируют в пределах: 33-54 Бк/кг - ^{232}Th ; 27-53 Бк/кг - ^{226}Ra ; 413-750 Бк/кг - ^{40}K . (Рис. 5)

При этом на многих задернованных площадках прослеживается обеднение радионуклидами верхних слоёв почвы (рис. 4), которое можно объяснить их поглощением корневыми системами растений. Содержание ^{222}Rn - $A_{\text{Rn}}=73\text{Бк/л}$ несколько выше предельно допустимых его концентраций ($A_{\text{пр}}=60\text{ Бк/кг}$) в питьевых водах и характерно для многих родников [5].

Таблица 1. Запасы ^{137}Cs и ^7Be в почвах исследуемых площадок

площадка	Н, м. над у.м.	$^{137}\text{Cs}/^7\text{Be}$ А, кБк/м ²		
		Южный	Северный	Центральный
гребень	1696	0,41/0.11	0,37/0.12	<0.09/0.10
склон	1672-1680	0,30/0.10	0,28/0.10	<0.09/0.06
склон	1661-1665	0,27/0.11	0,31/0.11	<0.09/0.06
подошва	1642-1642	<0,64/0.15	<0,59/0.17	<0.11/0.07

Таким образом, результаты исследований показали возможности использования выпадающих радионуклидов в качестве индикаторов не только процессов эрозии и седиментации почв, но и процессов схода оползней.

Экспериментальные погрешности определения запасов ^{137}Cs и ^7Be почвах - $\partial Q \approx 15-20\%$.

Литература

1. Kh. Inoyatov, I. T. Muminov, A. K. Mukhamedov, D. Sh. Rashidova, B. S. Osmanov, A. Safarov, A. N. Safarov, Sh. Kh. Khushmurodov //Radionuclides in the environment of Nuratau// Journal of Radioanalytical and Nuclear Chemistry, 2007, Vol. 273, No.2, pp. 497-506.
2. Tolib Muminov, Muhtor Nasyrov, R.Scott Van Pelt, Akmal A. Safarov, Amrididin V. Halikulov, and Shaymon X. Hushmuradov. Radionuclides in soils along a mountain—Basin

transect in the Koratepa Mountains of Uzbekistan. //Journal of Soil and Water Conservation. 2010. 65(5): 117A-121A.

3. Инструкция для персонала по отбору проб из водных объектов и изготовлению счетных образцов. ООО НТЦ "РАДЭК", Санкт-Петербург, Россия, 2005 г.
4. A.N.Azimov, Sh.Kh.Hushmuradov, I.T.Muminov, T.M.Muminov, B.S.Osmanov, A.N.Safarov, A.A.Safarov. // Gamma-spectrometric determination of natural radionuclides and ¹³⁷Cs concentrations in environmental samples. The improved scintillation technique // Radiation measurements, v. 43 (2008), pp. 66 – 71.
5. Азимов А.Н., Сафаров А.А., Сафаров А.Н., Иноятов А. Х., Муминов И.Т., Рашидова Д.Ш. // Радиоактивность природных вод Нурабадского района Самаркандской области // "Атомная энергия", т. 118, вып. 3, 2015, с. 175-177.

UDK 533.17

G'OVAK METALLAR OLISH: ERISHILGAN YUTUQLAR VA ISTIQBOLLAR

E. U. Arziqulov, S. X. Zoirov

Samarqand davlat universiteti

Annotasiya. Ushbu maqolada g'ovak metallar olish texnologiyalari qiyosiy jihatdan batafsil qarab chiqilgan. Bundan tashqari g'ovak metallarning ishlatilish sohalari ko'rsatib o'tilgan. Havo-gaz aralashmasining tovushdan tez oqimidan foydalanib temirni eritish texnologiyasi sxemasi keltirilgan. Olingan g'ovak temirning turli sohalarda ishlatilishi istiqbollari qarab chiqilgan.

Kalit so'zlar. G'ovak metall, qattiq faza, g'ovak faza, govak polietilin, antifriksion, bronzali filtrlar, eletrolitik, karbonil, g'ovak titan, g'ovakli sovutish, "Hasanov soplosi".

Получение пористых металлов: достигнутые успехи и перспективы

Аннотация. В данной статье рассмотрено сравнительный анализ существующих технологий получения пористых металлов. Кроме этого обсуждены области практического применения пористых металлов. Приведено схема плавки железа с использованием сверхзвуковой струи смеси воздух-газ. Рассмотрено возможные области использование пористого железа.

Ключевые слова: пористый металл, твердая фаза, пористый полиэтилен, антифрикционная, бронзовый фильтры, электролиз, пористый титан, пористый охлаждающий сопло Хасанова.

Obtaining porous metals: the progress achieved and perspectives

Abstract. In this article comparative analysis of the existing technologies of obtaining porous metals is considered. Besides areas of practical application of porous metals are discussed. It is given the scheme of melting of iron with use of a supersonic jet of mix air-gas. Considered possible areas use of porous iron.

Keywords: porous metal, hard phase, porous polyethylene, antifriction, armor filters, electrolysis, porous titanium, porous coolant, Hasanova nozzle.

Fizik xossalari to'plami oldindan berilgan yangi materiallarni sintez qilish va ulardan foydalanish ularning turli tashqi ta'sirlar natijasida o'zlarini tutish mexanizmlarini tadqiq qilishni talab qiladi. O'zgaruvchan mexanik maydonlarda yangi materiallardan foydalanganda esa tizimga berilgan energiyaning material tarkibi va tuzilishga bog'liq ravishda dissipatsiyasini o'rganish muhim ahamiyat kasb etadi. Keskin birjinslimas tuzilishi bilan xarakterlanadigan kompozitsion materallar holida tuzulma parametrlarining energiya isrofiga ta'siri o'ta murakkab va bugungi kungacha yetarlicha o'rganilmagan hisoblanadi [1-3].

Birjinslimas materiallarning maxsus sinfiga g'ovak metallar, bir yoki bir necha metallik faza va g'ovak fazadan iborat psevdoporishmalar kiradi. Bu materiallar konstruksiyalar uchun keng qo'llaniladi va shu tufayli ularning dempirlash xossalari maxsus talblar qo'yiladi [4-5]. G'ovak metall materiallar, fiziko-mexanik xossalari qiymati maksimal farq qiluvchi fazalardan tarkib topgan (qattiq faza va g'ovak faza), geterofaz tizimlarning chegaraviy holi sifatida qaraladigan birjinslimas materiallarning o'zini tutish qonuniyatlarini fizik tahlil qilish uchun alohida qiziqish tug'diradi [6-7]. Qattiq fazaning xossasi odatda kompakt materiallarning xarakteristikalarini bilan mos keladi deb

qaraladi [7], g'ovak muhitlarning xossalari esa g'ovaklar kattaligi hamda ular tuzilishining topologik o'ziga xosligi bilan aniqlanadi [8-10]. Bu esa g'ovak metall materallarni geterofaz tizimlarning fiziko-mexanik xossalarni o'rganishda qulay model obyekt sifatida qarash imkoniyatini beradi va bu o'z navbatida ularni ushbu loyiha tadqiqot obyekt sifatida tanlashni taqozo qildi.

G'ovak metallik materiallar butun dunyoda qadim davrlardan boshlab ma'lum. Ular texnika va tibbiyotning turli sohalarida keng qo'llanilish topgan. Keyingi 20 yil ichida kiritiluvchi konstruksiyalar inson organizmiga implantasiya qilish uchun travmatologiyada, ortopediyada, jarroxlilikda, stomatologiyada, urologiyada va tibbiyotning boshqa sohalarida keng qo'llanilmoqda. Bunda konstruksiyalarni tayyorlash uchun g'ovak tantal, titan, ular asosidagi qorshimalar, niyob, Co-Cr-Mo, sopol va boshqa turli tuman materiallardan foydalaniladi. G'ovak materiallarni g'ovak metallik, g'ovak nometallik, kombinatsiyalashgan va tabiiy g'ovak materiallarga bo'lish mumkin. G'ovak metall materiallarga o'z-o'zidan tarqaluvchi yuqori temperaturali sintez usuli (Самораспространяющийся высокотемпературный синтез (CBC) (ingizchasi: Self-propagating high temperature synthesis (SHS)) hamda pishirish yo'li bilan olingan turli xil tolali, to'rtli va kukunli materiallar kiradi. G'ovak nometall materiallarga esa g'ovak sopollarning katta sinfi, biochiqishuvchan shisha, g'ovak polimerlarning ko'plab turlari: g'ovak silikon rezina, gidrofil gellar, poliamid to'rtlar, polisulfon, yuqori zichlikli g'ovak polietilen va h.k. lar kiradi. G'ovak tabiiy materiallar sinfiga tabiatda mavjud bo'lgan gidroksiapatitni keltirish mumkin. Kombinatsiyalashgan g'ovak materiallar implantaning metall yoki boshqa asosiga turli tabiatli g'ovak materiallarni o'tqazish yo'li bilan olinadi.

Boshqa tomondan g'ovak materiallar guruhiga antifriksion friksion va antifriksion friksion materiallar, filtrlar va "terlovchi" deb ataladigan materiallar kiradi.

Ko'lab texnik qo'llanishlarda bronzali filtrlarda foydalanadi. Bronzali filtrlar zarrachalarning shakli sferasimon bo'lgan, suyuq metallni changitish yo'li bilan olingan kunlardan tayyorlanadi. Pishirish jarayoni 800 - 900 °S haroratda 30 minutdan 1 soatgacha davom etadi. Kukun zarralarining o'lchami 50 - 130 mkm bo'lgan bronzali filtrlar dag'al tozalash uchun, o'lchamlari 2 - 30 mkm bo'lganlarisanoz nozik tozalash uchun ishlatiladi.

Bronzali filtrlar sanoatda dizel va rektiv yuritgichlarning suyuq yonilg'isini, yog'lovchi materiallar va siqilgan gazlarni o'lchamlari 5-200 mkm bo'lgan qattiq aralashmalardan tozalash, hamda qo'shimchali kislot va ishqorlarni, erigan paraffinni va h.k.larni tozalash uchun keng qo'llaniladi.

Elektrolitik va karbonil nikel kukunlaridan presslash va keyinchalik 1000-1100 °C temperaturada pishirish orqali tayyorlanadigan g'ovak materiallar filtrlar va g'ovak elektrodlar sifatida ishlatilishgan mo'ljallagan. G'ovak elektrodlar elektrokimyo va katalizda keng qo'llaniladi. Elektrodleri yuqori g'ovaklikka ega bo'lgan nikeldan tarkib topgan ishqorli akkumulyatorlar oddiy akkumulyatorlarga qaraganda yengil va o'lchamlari kichik bo'ladi.

Zanglamaydigan po'latdan tayyorlagan filtrlar ham keng qo'llanilmoqda. Ular sezilarli zanglashga chidamlilikka ega va nikel asosidagi filtrlarga nisbatan ancha arzon. Bunday filtrlar tayyorlashda X17N2, X18N9, X30 va boshqa zanglamaydigan po'latning kukunlaridan foydalaniladi. Ular quyidagi texnologiya asosida tayyorlanadi. Dastlab presslash yoki dumalatish va keyinchalik 1200 - 1250 °C temperaturada 2 - 3 soat davomida pishirib tayyorlanadi. Zanglamaydigan po'latdan tayyorlangan filtrlar suyuq metallni hamda issiq domen va marten gazlarini tozalashda yaxshi natijalarni ko'rsatdi. Olov tarqalashiga to'siq sifatida ular avtogen texnikasida, asetilen ishlab chiqarishda, metallarga gaz alangali ishlov berishda, past harortda qaynovchi va portlash havfi katta bo'lgan suyuqliklar rezervuarlarida qo'llanilmoqda. Samolyotlarning muzlab qolishiga qarshi kurashda g'ovak materiallarni qo'llash antifriz sarfini 50% ga qisqartiradi.

G'ovak titanning texnikaning turli sohalarida ishlatilishi uning qator qimmatli xossalari bilan bog'liq bo'lib ular ichida eng qimmatlisi ko'plab agressiv muhitlarda yuqori darajadagi korroziyaga chidamlilik va yuqori solishtirma mustahkamlik hisoblanadi. Titanli g'ovak materiallar zarrachalarining o'lchami 60 mkm dan kichik, to'ldiruvchiga ega bo'lgan kukunlardan hamda zarrachalarining o'lchami 1 mm dan kichik bo'lgan to'ldiruvchisiz kukunlardan olinadi. Bunday maxsulotlar maxsus atmosferada 950 - 1150° C temperaturada 1,5 - 2 soat davomida pishiriladi. G'ovak titan azot kislotasi va ishqor eritmalari ga chidamli va 5 mkm va undan kam tozalash darajasiga imkon beradi.

G'ovakli sovutish mashina va mexanizmlar yuqori temperaturali qismlarini sovutishning samarali usuli bo'lib hisoblanadi. Bug'latish orqali sovutish suyuqlikni majburiy ravishda g'ovakli muhit orqali o'tkazishni ko'zda tutadi. Bu holda g'ovak jismning sirtida ajraladigan issiqlik bug'latuvchi sovutgichli qurilma yordamida sochib yuboriladi va yutiladi. Bug'latish orqali sovutish xuddi shunday konvektiv yoki pardali tizimlarga qaraganda samaraliroq ekanligi aniqlangan. Soploli va turbinali parraklarni ishlatish ishchi gazining temperaturasi 840 °C dan 1200 °C gacha ko'tarishga va olinayotgan quvvatning 10% ga oshishiga olib keladi. Sirt temperaturasi nazorat qilishda g'ovak materiallarni qo'llash imkoniyati amaliy jihatdan chegaralanmagan. G'ovak metallardan yasalgan detallar mahalliy qizdirish shartini yaratishda va bir vaqtning o'zida ular mexanizmlarining mahalliy qizib ketishlarini sovutishda ishlatilishi mumkin.

Sanoatda turli apparat va qurilmalarda temperatura maydonini tenglashtirish imkonini beruvchi va u yoki bu materiallarga izotermik ishlov berish sharoitlarini yaratish uchun issiqlik quvurlarini ishlatish o'ta istiqbolli bo'lib hisoblanadi. Past temperaturali issiqlik quvurlarini elektr mashinalarida yuritgichlarning rotor, stator, generator va transformatorlarni sovutishda ishlatish ularning quvvatini 30 - 50% ga oshirish imkonini beradi. Yuqori voltli va katta quvvatli uzib ulagichlari sovutishda issiqlik quvurlari muvoffaqiyatli ishlatilmoqda.

Issiqlik quvurlari va bug' kameralari ananaviy issiqlik uzatish elementlariga nisbatan qator ustunliklarga ega. Masalan, sirkulyasion issiqlik almashgichlarga qaraganda ularda haratlanidigan qismlari yo'q, shovqinsiz, issiqlik tashigichni kondensasiya zonasidan bug'lanish zonasiga o'tkazish uchun energiya talab qilinmaydi, xuddi shunday geometrik parametrli metall sterjnlarga nisbatan kichik termik qarshilikka ega va ancha yengil.

Yuqorida sanab o'tilgan misollar g'ovak materiallarning texnikaning turli sohalarida juda keng darajada qo'llanilishini ko'rsatish uchun yetarli. G'ovak materiallar va maxsulotlarning qo'llanilishi mumkin bo'lgan barcha sohalarini olidindan ko'ra bilishning esa sira iloji yo'q. Biroq bir narsa aniq: g'ovak materiallarga bo'lgan talab kundan kunga ortib bormoqda.

Shu munosabat bilan ushbu maqolada g'ovak metallarni olishning mavjudlaridan prinsipial farq qiluvchi, dunyoda o'xshashi yo'q, yangi, arzon, gaz aralashmasining tovushdan tez oqimidan foydalanib olish texnologiyasi haqida gap boradi. Professor X. Xasanov tomonidan yaratilgan soplo yordamida g'ovak temir olish imkoniyati mavjud va bu g'ovak temir elektr xossalari bo'yicha yarimo'tkazgich. G'ovak temir olish uchun soplone kirishiga havo va metanning aralashmasi bosimlarining nisbati taxminan 10:1 qilib beriladi. Havo va metanning bosimlarining bunday nisbatini soplo kirishida hosil qilish soplone chiqishida tovushdan tez metan-havo aralashmasi oqimini vjudga keltiradi. Bu oqimni yoqish orqali metallik temirni eritish mumkin. (Oddiy metan-havo aralashmasi yordamida temirni eritib bo'lmaydi!). Bunga sabab prof. X. Xasanov tomonidan yaratilgan soploda mavjud mumtoz soplolardan farqli ravishda oqimning energetik ko'rastagichlarining yuqoriligidir. Xususan bu soplo hosil qilgan tovushdan tez oqimining energetik ko'satgichlari odatiy Lavalsoplosida hosil qilingan oqim energetik ko'rsatgichlaridan bir necha marta yuqori.

Quyida Xasanov soplosida hosil qilingan oqimning energetik balansining hisoblari mumtoz Laval soplosi bilan solishtirib keltirilgan [11].

$$(T=293 \text{ K}, S_1, S_2 = 2,01 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2, R = 0,4 \text{ MPa}, S_3 = 9,61 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2)$$

Q.s.	Asosiy parametr	Laval soplosi	Xasanov soplosi
1	Siljishda kinetik energiyaning yo'qolishi, %	14,8	3,84
2	Ejeksiya koeffitsiyenti	0,644	2,019
3	3-3 kesimdagi kinetik energiya, J	11,46	187,3
4	3-3 kesimdagi oqim tezligi	27,02	68,56
5	2-2 kesimdagi kinetik energiya, J	1,01	92,46
6	2-2 kesimdagi oqim tezligi	12,83	59,90

Xulosa qilib quyidagilarni aytish mumkin:

prof. Xasanov tomonidan yaratilgan soplone yangi nusxasini tayyorlandi, uning tovushdan tez oqimlar hosil qilish imkoniyatlarini o'rganildi va texnik-iqtisodiy ko'satgichlarni tekshirilib, oqimni yoqildi.

Temirni eritish jarayonida soplone kiruvchi metan-havo aralashmasining bosimlari nisbatini, soplone ish maromlari bilan olingan materialning g'ovaklik darajasi, g'ovaklarining o'lchamlari va

toplogiyasi o'rtasida korrelyasiya o'rnatildi, g'ovaklik darajasi, g'ovaklarining o'lchamlari va toplogiyasi turlicha bo'lgan g'ovak temir olish imkoniyatlarini aniqlandi. Olingan g'ovak temirning elektrik, issiqlik va galvanomagnit xossalari eksperimental tadqiq qilindi.

Adabiyotlar

1. Louis-Philippe Lefebvre, John Banhart, David C. Dunand // Porous Metals and Metallic Foams: Current Status and Recent Developments. *Advanced Engineering Materials*. 10(9), 775-787 (2008).
2. Белов С.В. Пористые металлы в машиностроении. М.: Машиностроение. - 1981. - 247с.
3. Панин В.Е. и др. Новые материалы и технологии. Конструирование новых материалов и упрочняющих технологий. Новосибирск: ВО «Наука». - 1993. - 152 с.
4. Витязь П.А., Капцевич В.М., Шелег В.К. Пористые порошковые материалы и изделия из них. Минск: Выш. шк. - 1987. - 164 с.
5. Тучинский Л. И. Композиционные материалы, получаемые методом пропитки. М.: Металлургия. - 1986. - 208 с.
6. Балынин М. Ю. Научные основы порошковой металлургии и металлургии волокна. М.: Металлургия. - 1972. - 336с.
7. Скороход В. В., Солонин С.М. Физико-металлургические основы спекания порошков. М.: Металлургия. - 1984. - 159 с.
8. П. Дульнев Г. Н., Новиков В.В. Процессы переноса в неоднородных средах. Л.: Энергоатомиздат. - 1991. - 248 с.
9. Шкловский Б. И., Эфрос А. Л. Теория протекания и проводимость сильно неоднородных сред. // Успехи физических наук. 1975. -т.117.- в.3. -с.401-435.
10. Эфрос А. Л. Физика и геометрия беспорядка. М.: Наука. - 1982. - 176с.
11. Х. Х. Хасанов. Энергетические параметры регулярно-взаимодействующих ударных волн. *Узбекский журнал проблемы механики*. №1. 2000 г.

UDK. 311.3:537.6:54.16

YUQORI TEMPERATURALARDA AMORF QOTISHMALARNING MAGNITLANISHI VA UNI O'LCHASH USULI

I. Subhonqulov, B. Amonov, G'. Bakaev, Sh. Xomitov
Samarqand davlat universiteti

Annotatsiya. Temperatura ta'sirida amorf qotishmalardagi tarkibiy o'zgarishlar hamda magnit o'tishlar to'g'risida to'liq ma'lumot olish uchun magnitlanishni temperaturaga bog'liqligi natijalaridan foydalanish mumkin. Magnitlanishni tashqi magnit maydoniga va temperaturaga bog'liqligini o'rganishni eng qulay usuli vibratsion magnitometr usuli hisoblanadi.

Ushbu ishda magnitlanishning tashqi magnit maydoni va temperaturaga bog'liqligini o'lchovchi qurilmaning tavsifi va temir guruhi elementlari asosidagi amorf qotishmaning magnitlanishini temperaturaga bog'liqligi natijasi va uning aomal Xoll koeffitsienti bilan aloqadorligi bayon etilgan.

Kalit so'zlar: amorf qotishma, elektr yurituvchi kuch, Xoll datchiki, induksion datchik, magnitlanish egri chizig'i, gisterezis halqasi, magnit momenti.

Намагниченность аморфных сплавов при высоких температурах и методика измерения намагниченности

Аннотация. Для получения информации о характере структурных и магнитных превращений в аморфных сплавах, исследуется температурная зависимость намагниченности. Для исследования намагниченности от температуры и внешнего магнитного поля удобным считается вибрационный метод измерения намагниченности.

В данной работе приводится описание установки для измерения намагниченности сплавов в зависимости от температуры и внешнего магнитного поля и температурной зависимости намагниченности аморфного сплава на основе металлов группы железа и их взаимосвязь с аномальным коэффициентом Холла.

Ключевые слово: аморфных сплавах, электродвижущего сила, датчик Холла, индукционный датчик, кривой намагниченность, петли гистерезиса, магнитный момент.

Magnetization of amorphous alloys at high temperatures and methods of measurement of magnetization

Abstract. To obtain information on the nature of structural and magnetic transformations in amorphous alloys, the temperature dependence of the magnetization is investigated. To investigate the magnetization in dependence on temperature and external magnetic field it is convenient to use a vibrational method for measuring the magnetization.

In this paper we describe an experimental set-up for measuring the magnetization of alloys as a function of temperature and external magnetic field and the temperature dependence of the magnetization of an amorphous alloy on the base of metals of the iron group and their relationship to the anomalous Hall coefficient.

Keywords: amorphous alloys, electrical move force, Hall detector, induction detector, magnetization curve, magnetic moment, loop of hysteresis.

Hozirgi vaqtda suyuq metallarni toblash orqali [1] olinadigan amorf ferromagnit qotishmalar xalq xo'jaligini turli sohalarida magnit material sifatida foydalanilmoqda. Ushbu amorf qotishmalarning talab etilgan fizik xususiyatlarga ega bo'lgan namunalarini xosil qilish hamda ulardan amaliy maqsadlarda foydalanish uchun ularning fizik hususiyatlari (ayniqsa magnit xossalari)ni hamda bu xususiyatlar o'rtasidagi aloqadorlikni o'rganish talab etiladi.

Magnitlanishni o'lchashning tebranuvchi magnitometr usuli, o'lchovchi induktiv datchikda namunaning tebranishi natijasida hosil bo'luvchi EYuK ni o'lchashga asoslangan.

Amorf qotishmalarda termomagnit tahlil o'tkazish uchun magnit o'lchashlarning tebranuvchi magnitometr usuli juda qulaydir. Bunda o'lchash natijalari o'ziyozar ikki koordinatali potentsiometrda tayyor grafik shaklida hosil qilinadi.

Tebranuvchi magnitometr qurilmasining sxemasi 1-rasmda ko'rsatilgan. Elektromagnit qutblari oralig'ida ikkita induktiv datchik va Xoll datchigi o'rnatilgan bo'lib induktiv datchiklar oralig'ida elektr qizdiruvchi pech o'rnatilib unda titandan yasalgan ampulaga solingan namuna joylashadi. Ampula o'z navbatida sterjenga maxkamlangan bo'lib, bu sterjen tebratgichga maxkamlanadi. Elektromagnitning magnit maydon kuchlanganligi qutblar orasida joylashtirilgan Xoll datchigi yordamida o'lchanadi. Bu qurilma yordamida ferromagnit materiallarning quyidagi magnit xarakteriskalari olinadi - magnitlanish egri chizig'i, gisterezis halqasi, to'yinish magnitlanish I_s , qoldiq magnitlanish I_r , koersitiv kuch H_c . Namuna "f"- chastota va "h"- amplituda bo'yicha doimiy magnit maydonida tebranadi. Magnit maydoni manbai sifatida FL-1 tipidagi elektromagnit ishlatiladi. Tebratgich chastotasi va amplitudasi tebratgichga ulangan tovush generatori (GZ-56) orqali hosil qilinadi.

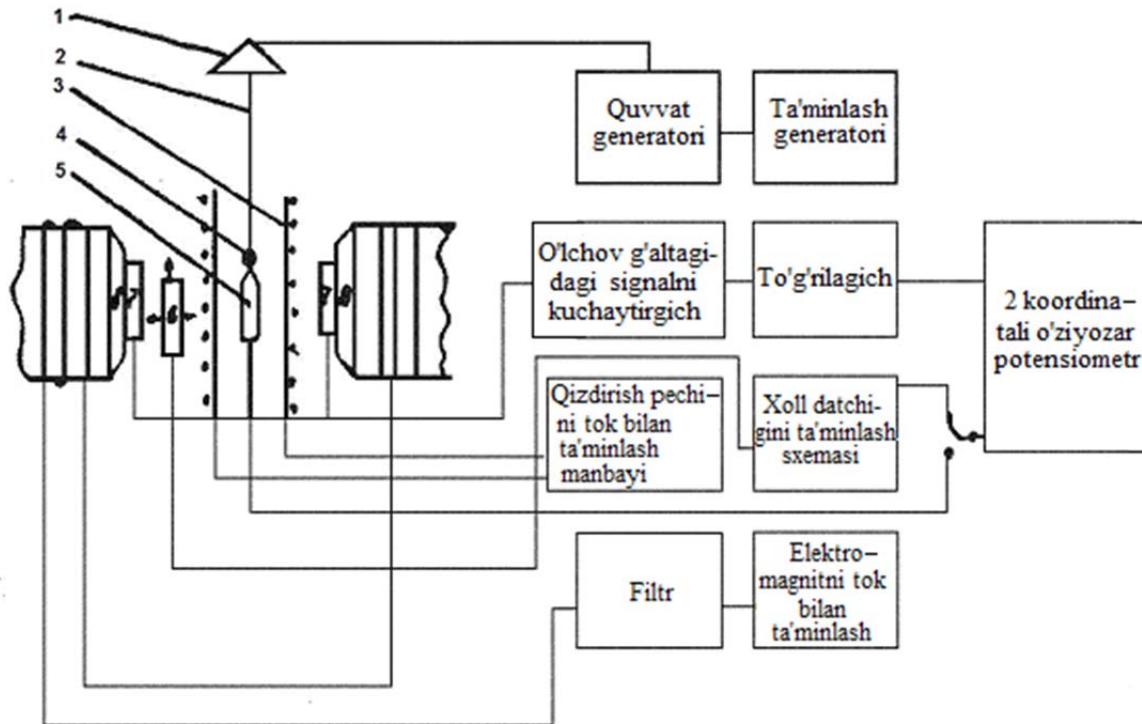
Tashqi maydon o'zgarishi bilan tebranuvchi namunaning magnit momenti o'zgaradi. Bu o'z navbatida o'lchovchi g'altaklarda namunaning magnit momentiga proporsional bo'lgan induksion EYuK ni hosil qiladi. Bu signal U-2-6 yoki U-2-8 tipidagi kuchaytirgich bilan kuchaytiriladi va o'ziyozar ikki koordinatali potentsiometrning "Y" o'qiga beriladi. Shu potentsiometrning "X" o'qiga Xoll datchigidan kelayotgan magnit maydon kuchlanganligiga proporsional bo'lgan Xoll EYuK signali beriladi. Shunday qilinganda ikki koordinatali o'ziyozar potentsiometrda keltirilgan masshtabda magnitlanishning tashqi magnit maydoniga bog'lanish grafigi hosil qilinadi.

To'yinish magnitlanishning qiymati $T=300$ K da $\sigma_s = 54,6$ Gs sm^3 bo'lgan etalon nikelga nisbatan solishtirilib bilib olinadi. Buning uchun bir xil sharoitda etalon va o'lchanishi kerak bo'lgan namunadagi signallar solishtiriladi.

Tebranuvchi magnitometrda namunaning magnit momenti o'lchanib, undan magnitlanish I_s xisoblab topiladi.

$$M_{et} [Gs \cdot sm^3] = \frac{P_{et}}{\rho_{et}} I_{et} = V_{et} I_{et} \quad (1)$$

bunda; $M_{et} [Gs \cdot sm^3]$ - etaloning magnit momenti, P , [g] - og'irlik, ρ , [g/sm] - zichlik, V , [sm^3] - hajm, I , [Gs] - magnitlanish.



1-rasm. Magnitlanishni o'lchovchi tebranuvchi magnetometr qurilmasining sxemasi. 1-tebratgich, 2-sterjen, 3-elektr isitish pechi, 4-namuna solingan ampula, 5-termopara, 6-Xoll datchigi, 7-induktiv datchigi, 8- elektromagnit.

O'lchanayotgan namunaning magnet momenti M_x etalonga nisbatan quyidagi formula bilan xisoblanadi:

$$M_x = M_{et} \frac{\alpha_x}{\alpha_{et}} \quad (2)$$

bunda α_x va α_{et} - mos ravishda magnetometrda namuna va etalon quyilganda hosil bo'luvchi EYuK ning eng katta amplitudaviy qiymati, ya'ni potentsiometrning "Y" o'qi bo'yicha eng katta siljishi $k = \frac{M_{et}}{\alpha_{et}}$ qurilmaning sezgirligi bo'lib, $M_x = k\alpha_x$ ga teng bo'ladi. O'lchanayotgan namunaning magnetlanishi quyidagi tarzda hisoblanadi.

$$I_x = \frac{M_x}{V_x} = \frac{\alpha_x}{V_x} k \quad (3)$$

yoki

$$I_x = I_{et} \frac{\alpha_x}{\alpha_{et}} \frac{V_{et}}{V_x}, \quad (4)$$

bu erda I_{et} - etalonning magnetlanishi.

Odatda graduirovka uchun $I_{set} = \sigma_s \rho_{et}$ nikelning qiymati olinadi. Etalonning o'lchamlari namunaning o'lchamlariga teng qilib olinadi. Magnet maydonini bir tekis oshirib borib Xoll datchigidagi EYuKni oshirishga qarab magnet maydonni qiymati hisoblanadi. Shunday qilib, potentsiometrdan olingan grafikdan $I_x(N)$ bog'lanishning grafigi hosil qilinadi.

Agar magnet maydonini teskari yo'nalishda oshirish imkoni bo'lsa o'lchanayotgan namuna uchun gisterezis xalqasini ham hosil qilish mumkin. Bundan qoldiq magnetlanish I_r va koersitiv kuch H_s hisoblanadi.

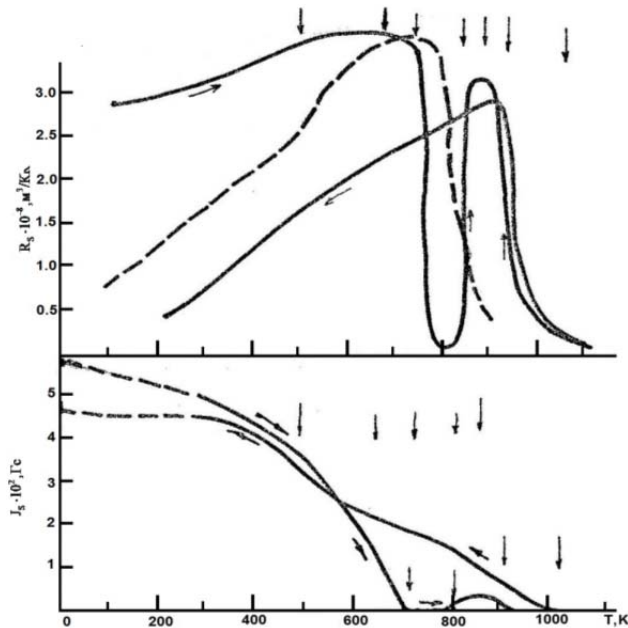
Magnetlanishning temperaturaga bog'liqligi $I_x(T)$ ni olish uchun namuna elektropech ichiga joylashtiriladi va magnet maydonini oshirib I_s to'yinishgacha yetkazdiriladi va temperatura oshirilib boriladi. Temperaturaning o'zgarishi pech ichiga joylashtirilgan "xromel-alyumel" termoparasining termo-EYuK ga qarab xisoblanadi.

Agar o'ziyozar ikki koordinatali potentsiometrning "Y" o'qiga o'lchovchi g'altakdan keluvchi EYuK berilsa, "X" o'qiga esa pech ichiga joylashtirilgan termopara ulansa uzluksiz $I_x(T)$ ni grafigini hosil qilish mumkin.

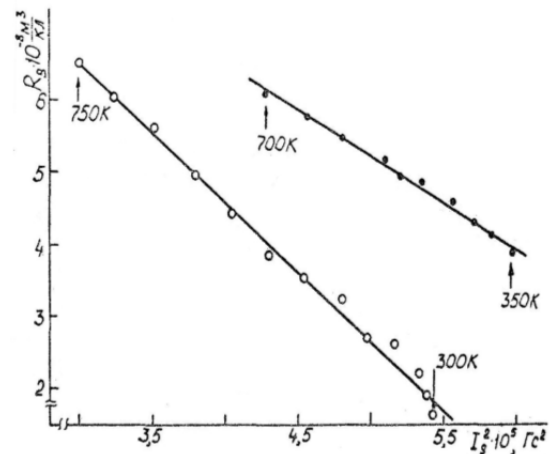
Kristallanish bosqichi va oraliq fazalarni hosil bo'lishi namunani qizdirib va sovutib termomagnet taxlil qilish orqali kuzatiladi. Termomagnet taxlil vaqtida amorf va kiristall xolatni Kyuri nuqtalarini aniqlash mumkin.

2-rasmda $Co_{84.35}Fe_{5.8}Si_{7.4}B_{2.45}$ qotishmaning amorf va kristall holatda $R_S(T)$ Xoll koeffitsienti va $I_S(T)$ magnitlanishining temperaturaga bog'liqligi natijalari keltirilgan.

Rasmdan ko'rinadiki, amorf holatda R_S ning absolyut qiymati kristall holatdagidan katta bo'ladi, R_N ning temperatura bo'yicha o'zgarish tezligi $\partial R_H/\partial T$ kristall holatda amorf holatdagidan katta bo'ladi.



2 – rasm. $Co_{84.35}Fe_{5.8}Si_{7.4}B_{2.45}$ qotishmaning Xoll koeffitsienti (yuqoridagi rasm) va magnitlanishi (pastki rasm) ni temperaturaga bog'liqligi.



3 – rasm. $Co_{84.35}Fe_{5.8}Si_{7.4}B_{2.45}$ amorf qotishma uchun anomal Xoll koeffitsienti R_S ning magnitlanishning kvadrati - I_S^2 o'rtasidagi aloqadorlik (●●●) amorf holatda (○○○) kristall holatda.

Amorf holatdan kristall holatga o'tish jarayoni murakkab kechadi, ya'ni 700 K gacha R_N chiziqli parabolik qonun asosida oshib borib, keyin nolgacha kamayadi. Shu qiymat amorf holatning Kyuri nuqtasini xarakterlaydi. Temperaturaning keyingi oshishida R_N yana oshib (kristallanish tufayli), yana nol qiymatgacha kamayadi. Bu temperatura kristall holatning Kyuri nuqtasini ko'rsatadi. Magnitlanishning temperaturaga bog'liqligi Xoll effektini natijalari bilan korrelyasiyalashadi.

Adabiyotlarda [2, 3] ko'rsatilganki, anomal Xoll koeffitsienti elektronlarni spin to'liqlarida va fononlarda sochilishi tufayli namoyon bo'ladi. Shuning uchn R_N ni temperaturaga bog'liq egri chizig'i bilan $I_S(T)$ ning kvadrati solishtirilganda ular o'rtasida chiziqli bog'lanish borligi kuzatiladiki, bu bog'lanish quyidagi 3 – rasmda keltirilgan.

R_S va I_S o'rtasidagi aloqadorlikni quyidagi tenglama orqali ifodalash mumkin:

$$\Delta R_S = R_S(T) - R_S(T_N) = \alpha [I_S^2(T_N) - I_S^2(T)] \quad (5)$$

$I_S(T)$ va $R_S(T) - T < T_C$ temperatura intervalidagi magnitlanish va Xoll koeffitsienti bo'lsa $I_S(T_N)$ va $R_S(T_N)$ – xona temperaturasidagi ularning qiymati.

Xulosa. Amorf va kristall holatda R_S va I_S o'rtasida chiziqli bog'lanish bo'lib, 5 – tenglamani qanoatlantiruvchi α - koeffitsient kristall holatda amorf holatdagidan katta bo'ladi. Ushbu fakt amorf holatda kinetik xususiyatlarning namoyon bo'lishida fononlarning ulushi kam degan xulosaga olib keladi.

Amorf qotishmalarda koersitiv kuchning kichik va magnit sindiruvchilikning katta bo'lishi ularning kristall analogiyasiga nisbatdan ustunligini ko'rsatib ulardan magnitoyumshoq material sifatida foydalanish imkoniyatini beradiki, bunda ulardan transformatorlarni o'zagi va elektron asboblarning elementi sifatida foydalanish mumkin.

Adabiyotlar

1. Золотухин И.В. Аморфные металлические материалы. Соревский образовательный журнал. Физика, №4, 1997, с.73-78.
2. Судзуки К., Фудзимори Х., Хасимото К. Аморфные металлы. Москва. «Металлургия». 1987.
3. Кудрин А. В. Гальваномагнитные свойства ферромагнитных наноструктур. ННГУ, 2010.

UDK. 544.77

FeCl₃ MAGNIT SUYUQLIGI YOPISHQOQLIK KOEFFITSIYENTINING TEMPERATURAGA BOG'LIQLIGI

O. Q. Quvondiqov, U. E. Nurimov, X. A. Qayumov, SH. B. Mamatqulov
Samarqand davlat universiteti

Annototsiya. Tarkibida 3d-metall bo'lgan, FeCl₃ magnit suyuqlikning yopishqoqlik koeffitsiyentining temperaturaga bog'liqligi o'rganildi. Magnit suyuqligi molekulasining faollashish energiyasi aniqlandi

Kalit so'zlar: 3d-metall, magnit suyuqlik, kapillyar, vikoziometr, aktivlanish energiyasi, Puazeyl, kinematik yopishqoqlik, Frenkel-Andrade formulasi.

Температурная зависимость коэффициента вязкости жидкого магнетика FeCl₃

Аннотация. Изучена температурная зависимость коэффициента вязкости жидкого магнетика FeCl₃ содержащий 3d-металл. Определены энергия активации молекулы жидкого магнетика.

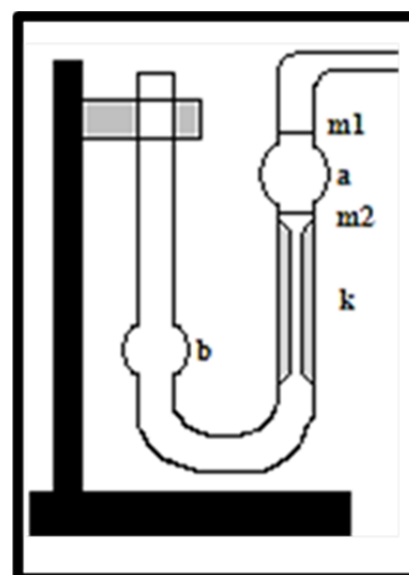
Ключевые слова: 3d-металл, магнитная жидкость, капиллярность, вискозиметр, энергия активации, Пуазейль, кинематическая вязкость, формула Френкель-Андрэде.

Temperature dependence of coefficient viscosity of FeCl₃ liquid magnetic

Annotation. Temperature dependence of coefficient viscosity of liquid magnetic FeCl₃ containing 3d-metall are studied. Are defined activation energy of molecule of liquid magnetic.

Keywords: Magnetic flui., Capillarity, 3d-metal, viscometer, activation energy, Poiseuille, kinematical viscosity, Frenkel-Andrade formule.

Magnit suyuqliklarning fizik xossalarini, shu jumladan magnit xossalarini o'rganishga bo'lgan qiziqish ularning elektron tuzilishining o'ziga xosligi va amalyotda keng qo'llanilishi bilan ham bevosita bog'liqdir. Bu magnit suyuqliklar tarkibida 3d-qobiq elektronlari kechikib to'ladigan temir guruhi metallarining mavjud bo'lishi, ularning kinetik, magnit va boshqa fizikaviy va ximiyaviy xossalarining o'ziga xosligiga sabab bo'ladi. Bu xossalarni o'rganish bevosita magnit suyuqliklarning amaliy ahamiyati bilan bog'liq [1]. Chunki bugungi kunda magnit suyuqliklardan sanoatda, mashinasozlikda, tibbiyotda va boshqa ko'plab sohalarda qo'llanilib kelinmoqda. Shu maqsadda mazkur maqolada tarkibida 3d-metallari bo'lgan, FeCl₃ magnit suyuqlikning yopishqoqlik



1-rasm. Viskoziometrning prinsipial sxemasi

koefitsientini temperaturaga bog'liqligini eksperimental o'rganish natijalari keltirilgan.

Magnit suyuqlikning yopishqoqlik koefitsienti kapillyar vikoziometrda foydalanib o'lchandi [2]. Asbob thermostat ichiga joylashtirilgan U simon shisha naydan iborat bo'lib, bu nayning tirsaklaridan biriga yuqori qismida a rezervuari bo'lgan, k kapillyar kavsharlangan. Ikkinchi tirsakning pastki qismi ichki diametri keng bo'lgan nay orqali b rezervuarga kavsharlangan. Tajribadan oldin suyuqlik b rezervuarga quyiladi, so'ngra u a rezervuarga suriladi. SHundan so'ng suyuqlikning o'z og'irligi ta'sirida oqishiga imkon beriladi va suyuqlik sathining m_1 belgidan, m_2 belgigacha pasaygan vaqt oralig'i o'lchanadi (1-rasm). Viskoziometrning o'lchamlarini bilgan holda suyuqlikning yopishqoqlik koefitsienti aniqlanadi.

Dastlab tajribada suvning, so'ngra magnit suyuqlikning oqib chiqish vaqtlari aniqlandi. Suyuqliklarning oqib chiqish vaqtlari t_0 va t ni hamda ularning ρ_0 va ρ zichliklarini bilgan holda ichki ishqalanishning nisbiy koefitsienti η/η_0 ni topish mumkin. Suvning η_0 qiymatini jadvaldan olib, namuna yopishqoqlikning absolyut η koefitsienti Puazeyl qonunidan foydalanib, quyidagi formuladan hisoblab topish mumkin:

$$\eta = \eta_0 \cdot t/t_0 \quad (1)$$

(1) ifodani $v = \eta/\rho$ (kinematik yopishqoqlik) orqali quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$v = v_0 \cdot t/t_0 \quad (2)$$

Suyuqlik yopishqoqlik koefitsientini temperaturaga bog'liqlanishi *Frenkel-Andrade* tenlamasi bilan ifodalanadi:

$$v = C \cdot e^{\frac{E_A}{kT}} \quad (3)$$

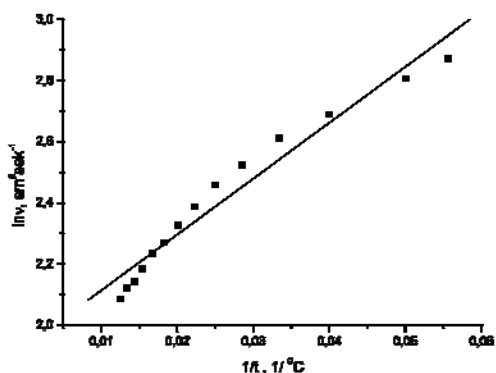
Bu yerda E_A - suyuqlik molekulasining aktivlanish energiyasi, C - bir holatdan ikkinchi holatga o'tish vaqtiga, tebranish chastotasiga bog'liq bo'lgan koefitsient, k - Bolsman doimiysi, T - absolyut temperatura.

Suyuqlik yopishqoqlik koefitsientini o'rganish uchun vikoziometrni thermostat ichiga joylashtiramiz [3]. Termostat ichidagi muhit temperaturasini o'zgartirib, kichik temperaturalar intervalida (12-80 °C) magnit suyuqlik yopishqoqlik koefitsienti o'lchandi. Tajriba natijalari 2-rasmda keltirilgan. Bu rasmdan ko'rinadiki, magnit suyuqlikning yopishqoqlik koefitsienti temperatura oshishi bilan eksponensial kamayib borar ekan.

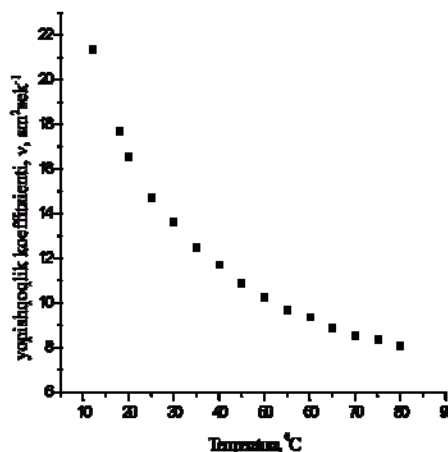
(3) tenglikning ikki tomonini logarifmlasak, quyidagi tenglikka ega bo'lamiz:

$$\ln(v) = E_A/kT + \ln(C) \quad (4)$$

(4) ifodadan ko'rinib turibdiki $\ln(v)$ ning $1/T$ ga bog'liqligi chiziqli ko'rinishda bo'ladi. Yuqorida



3-rasm. $\ln(v)$ ning $1/T$ ga bog'liqligi



2-rasm. $FeCl_3$ magnit suyuqligi yopishqoqlik koefitsientining temperaturaga bog'liqligi.

keltirib

o'tilgan natijalar asosida $\ln(v)$ ning $1/T$ ga bog'liqlik grafignini 3-rasmda aks etgan. 3-rasmdagi grafik chiziqli funksiyaning burchak koefitsienti quyidagiga teng:

$$E_A/k = 1365,5 \quad (5)$$

(5) ifodadan magnit suyuqlik molekulasiining aktivlanish energiyasi $E_A \approx 1,18$ eV ekanligi kelib chiqdi. C kattalikning qiymati esa $C \approx 1,56 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ ga teng.

Xulosa qilib quyidagilarni aytish mumkin:

1. FeCl_3 magnit suyuqlikning yopishqoqlik koeffitsienti temperatura oshishi bilan eksponensial kamayib borar ekan.
2. Magnit suyuqlik molekulasiining faollashish energiyasi $E_A \approx 1,18$ eV teng.

Adabiyotlar

1. E.YA.Blum, A.O.Seber «Magnitniye jidkosti». «Novoe v jizni, nauke, texnike». Ser. «Fizika»-1989
2. A.G.Belyakin, E.S.Chetverikova, I.A.Yakovlev «Fizikadan praktikum». Toshkent:O'qituvchi, 1960, 178-1817-b
3. A.K.Kikoin. I.K.Kikoin. «Molekulyar fizika». Toshkent:O'qituvchi, 1978,332-337-b

UDK 621.3

KREMNIYDA KISLORODLI KOMPLEKSLARNING HOSIL BO'LISHI

E. U. Arziqulov, S. N. Srajev, O. S. Ne'matov, J. Yo'ldashev

Samarqand davlat universiteti

Annotatsiya. $Si < B, O, Cu >$ va $Si < B, O, Mn >$ namunalari uchun elektroneytrallik tenglamasi tuzilgan va yechilgan. Bu yechim asosida kremniyda kislorod va marganets hamda kislorod va mis kirishmalari o'rtasidagi o'zaro ta'sirlashuv natijasida hosil bo'luvchi elektr jihatdan neytral bo'lgan komplekslar konsentratsiyasining temperaturaga bog'liqligi o'rganilgan. Bu komplekslarning hosil bo'lish mexanizmi taklif etilgan.

Kalit so'zlari: diffuziya, legirlash, yupqa qatlam, kremniy, kislorod, mis, marganets, elektroneytrallik tenglamasi, kompleks.

Образование кислородных комплексов в кремнии

Аннотация. Составлено и решено уравнение электронейтральности для образцов $Si < B, O, Cu >$ и $Si < B, O, Mn >$. Пользуясь решением уравнение электронейтральности, изучены температурное зависимости концентрации электронейтральных комплексов при межпримесной взаимодействии кислорода марганцем и кислорода медью в кремнии. Предложены механизмы образования этих комплексов.

Ключевые слова: диффузия, легирование, тонкий слой, кремний, кислород, медь, марганец, уравнение электронейтральности, комплекс.

Formation of oxygen complexes in silicon

Abstract. The equation of an electroneutrality for samples $Si < B, O, Cu >$ and $Si < B, O, Mn >$ is equate and solved. Using the solution of the electroneutrality equation, dependences of concentration of electroneutral complexes are studied temperature dependence interimpurity interaction of oxygen by manganese and oxygen by copper in silicon. Mechanisms formation of these complexes are offered.

Keywords: diffusion, doping, a thin layer, silicon, oxygen, copper, manganese, the electroneutrality equation, a complex.

Kremniy (Si) da oltingugut (S) va mis (Cu) kirishmalari o'rtasida o'zaro kimyoviy bog'langan, elektr jihatdan neytral komplekslarning hosil bo'lishi [1] ishida o'rganilgan. (Si) taqiqlangan zonasida (S) ham, (Cu) ham donorli energetik sath hosil qilishiga qaramasdan, ma'lum bir termodinamik sharoitlarda kimyoviy bog'langan komplekslarning hosil bo'lishiga ishtirok etadi va namuna boshlang'ich (Si) (KDB-10, p-tur) ning elektrofizik va rekombinatsion parametrlarini egallaydi. Si da hosil bo'luvchi bunday komplekslarning tabiatini, strukturasi va o'zaro bog'lanish mexanizmlarini yanada to'laroq o'rganish maqsadida elektr jihatdan o'ta faol bo'lgan O kirishmasi bilan (Cu) kirishmalari o'rtasidagi o'zaro ta'sirlashuv o'rganildi.

Boshlang'ich material sifatida Choxral usuli bilan o'stirilgan KDB-10 markali (*Si*) monokristali tanlab olindi. (*Si*) dagi *O* ning konsentratsiyasi optik usul bilan ($\lambda = 9,1 \text{ mkm}$, $N_{O_2} = (5,7) \cdot 10^{17} \text{ sm}^{-3}$) aniqlanadi. (*Cu*) kirishmasi (*Si*) sirtiga vakuum ($10^{-4} \text{ mm.sim.ust}$) sharoitida purkalib, yupqa qatlamdan $1000 - 1250 \text{ }^\circ\text{C}$ temperatura oralig'ida $50 \text{ }^\circ\text{C}$ qadam bilan diffuziya yo'li bilan legirlanadi. Hosil bo'lgan $Si < B, O, Cu >$ namunalari parametrlarini solishtirish uchun har safar $Si < B, O >$ sinov namunalari ham birgalikda bir xil sharoitda qizdirildi. $Si < B, O, Cu >$ va $Si < B, O >$ namunalari parametrlari 1-jadvalda keltirilgan.

1-jadval.

$Si < B, O, Cu >$ va $Si < B, O >$ namunalarining $1000-1250 \text{ }^\circ\text{C}$ temperatura oralig'idagi o'tkazuvchanlik turi va solishtirma qarshilig ($\rho, \text{Om} \cdot \text{sm}$).

Diffuziya temperaturasi, $^\circ\text{C}$	Namunalar			
	$Si < B, O, Cu >$		$Si < B, O >$	
	O'tkazuvchanlik turi	$\rho, \text{Om} \cdot \text{sm}$	O'tkazuvchanlik turi	$\rho, \text{Om} \cdot \text{sm}$
1000	<i>p</i>	14,5	<i>p</i>	10,1
1050	<i>p</i>	14,0	<i>p</i>	10,2
1100	<i>p</i>	13,3	<i>p</i>	11,2
1150	<i>p</i>	10,5	<i>n</i>	$4,7 \cdot 10^2$
1200	<i>p</i>	12,0	<i>p</i>	$5 \cdot 10^4$
1250	<i>p</i>	14,4	<i>p</i>	11,2

Jadvaldan ko'rinib turibdiki, sinov namunasi $Si < B, O >$ ning solishtirma qarshiligi diffuziya temperaturasining oshib borishi bilan oshadi. $1150 \text{ }^\circ\text{C}$ da esa solishtirma qarshiligi $4,7 \cdot 10^2 \text{ Om} \cdot \text{sm}$ ga teng bo'lib, o'tkazuvchanlik turini *p*-turdan *n*-turga o'zgartiradi. Diffuziya temperaturasining $T > 1150 \text{ }^\circ\text{C}$ qiymatlarida esa yana o'tkazuvchanlik turini *p*-turga o'zgartiradi va $1250 \text{ }^\circ\text{C}$ temperaturada esa boshlang'ich *Si* namunasi parametrlariga yaqin qiymatga ega bo'ladi. $Si < B, O >$ namunalari parametrlarining bunday o'zgarishini ilmiy adabiyotlarda *Si* da yuqori temperaturali termodononlarning (TD-3 ning), ya'ni temik toblanish nuqsonlarining paydo bo'lishi bilan tushintiriladi. *Cu* kirishmasining esa *Si* parametrlariga sezilarli ta'sir ko'rsatmasligini misning elektr jihatdan faol konsentratsiyasining kamligi ($5 \cdot 10^{14} \text{ sm}^{-3}$) bilan izohlashadilar [2].

Bizning fikrimizga ko'ra $Si < B, O, Cu >$ namunasi parametrlarining bir muncha o'zgarishini hamda *Cu* ning *Si* dagi eruvchanligining qaralayotgan temperatura oralig'ida ($\sim 10^{18} \text{ sm}^{-3}$) [3] ekanligini hisobga olsak, *Si* da *O* va *Cu* kirishmalari o'rtasida kimyoviy bog'langan elektroneytral komplekslar hosil bo'lishi mumkin [4]. Bunday komplekslar (*Cu + O*) hosil bo'lishining effektiv temperaturasi $1160 \text{ }^\circ\text{C}$ ga to'g'ri keladi.

Agar haqiqatdan ham *Si* da *Cu* va *O* o'rtasida kimyoviy bog'langan kompleks hosil bo'lsa, u holda bu komplekslar konsentratsiyasining temperaturaga qanday bog'liqligini baholash mumkin bo'ladi.

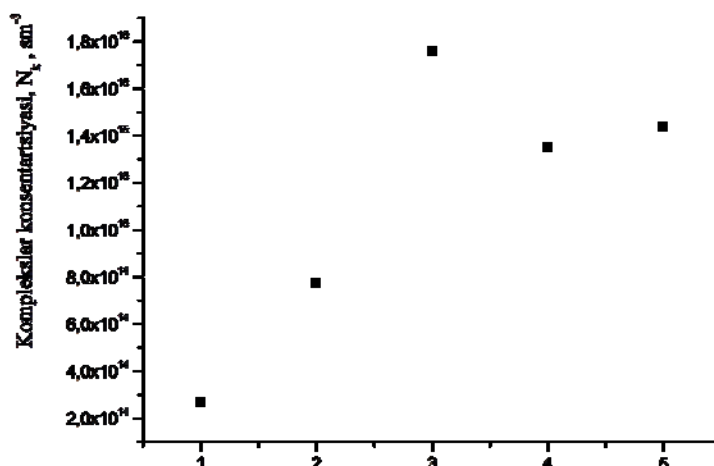
$Si < B, O, Cu >$ namunasidagi (*O + Cu*) komplekslarining konsentratsiyasini hisoblaymiz. Buning uchun $Si < B, O, Cu >$ sistemasining elektrontrallik tenglamasini tuzamiz:

$$N_B^- + n_0 = P(E_{d_1}) + P(E_{d_2}) + P_0$$

bu erda

$$P(E_{d_1}) = \frac{N_{d_1}}{2e^{\frac{F-E_{d_1}}{kT}} + 1}; \quad P(E_{d_2}) = \frac{N_{d_2}}{2e^{\frac{F-E_{d_2}}{kT}} + 1}$$

E_{d_1} va E_{d_2} -sathlardagi elektronlar soni.



Adabiyotlardan ma'lumki, O , Si ning taqiqlangan zonasida quyidagi energetik sathlarni hosil qiladi: $E_{d_1} = E_c - 0,05 eV$ va $E_{d_2} = E_c - 0,15 eV$ O'tkazuvchanlik zonasidagi elektronlar sonini va valent zonasidagi kovaklar sonini Xoll effekti yordamida tajribadan olingan natijalardan foydalanib Fermi sathini aniqlash mumkin:

p -turdagi yarimo'tkazgichlar uchun $-F = E_v + kT \ln \frac{N_v}{p}$, n -turdagi yarimo'tkazgichlar uchun

esa $-F = E_c - kT \ln \frac{N_c}{n}$ formulalar orqali topiladi. $N_c = 2,8 \cdot 10^{19} sm^{-3}$ - o'tkazuvchanlik zonasidagi effektiv holatlar zijligi; $N_v = 1,1 \cdot 10^{19} sm^{-3}$ - valent zonasidagi effektiv holatlar zijligi; k - Boltzman doimiysi. Yuqorida keltirilgan formulalardan foydalanib, $Si < B, O >$ namuna uchun quyidagi 2-jadvalda keltirilgan natijalarga ega bo'lamiz:

2-

jadval

$T^0 S$	p_0, n_0, sm^{-3}	F, eV	f_{d_1}	f_{d_2}	N_0, sm^{-3}
1000	$1,73 \cdot 10^{15}$	$E_c - 0,835$	0,9997	0,000176	$2,7 \cdot 10^{14}$
1100	$1,78 \cdot 10^{14}$	$E_c - 1,135$	0,2235	0,000055	$1,82 \cdot 10^{15}$
1150	$9,6 \cdot 10^{13}$	$E_c - 1,247$	0,9999	0,0000078	$1,9 \cdot 10^{15}$
1200	$3,6 \cdot 10^{13}$	$E_c - 1,403$	0,9999	0,00000724	$1,96 \cdot 10^{15}$
1250	$2,68 \cdot 10^{13}$	$E_c - 1,403$	0,9999	0,0000019	$1,973 \cdot 10^{15}$

Endi $Si < B, O, Cu >$ namuna uchun elektroneytrallik tenglamasini tuzib, Cu ning konsentratsiyasini (N_{Cu}) yuqoridagi formulalardan foydalangan holda topamiz. Ma'lumki, Cu Si da quyidagi energetik sathlarni hosil qiladi: $E_c - 0,49 eV$, $E_c + 0,24 eV$ [3].

$$p_0 + (2 - (f_{d_1} + f_{d_2})) \cdot (N_0 - N_k) + (1 - f_{d_3}) \cdot (N_{Cu} - N_k) = N_B^- + n_0$$

Bu tenglamadan kompleksning konsentratsiyasini ($O + Cu$) N_k ni topsak, quyi-dagi tenglamaga ega bo'lamiz:

$$N_k = \frac{(2 - (f_{d_1} + f_{d_2})) \cdot N_0 + (1 - f_{d_3}) N_{Cu} + p_0 - N_B^- - n_0}{3 - (f_{d_1} + f_{d_2} + f_{d_3})}$$

$Si < B, O, Cu >$ namunasi uchun quyidagi 3-jadvalda keltirilgan natijalarga ega bo'lamiz:

3-jadval

$T, ^\circ C$	p_0, n_0, sm^{-3}	F, eV	f_{d3}	N_{Cu}, sm^{-3}	N_k, sm^{-3}
1000	$1,749 \cdot 10^{15}$	$E_c - 0,834$	0,9645	$2,6 \cdot 10^{14}$	$2,7 \cdot 10^{14}$
1100	$9,5 \cdot 10^{14}$	$E_c + 0,976$	0,0022	$1,06 \cdot 10^{15}$	$7,75 \cdot 10^{14}$
1150	$1,18 \cdot 10^{15}$	$E_c - 0,998$	0,99882	$8,29 \cdot 10^{14}$	$1,76 \cdot 10^{15}$
1200	$1,36 \cdot 10^{15}$	$E_c - 1,027$	0,9890	$6,469 \cdot 10^{14}$	$1,352 \cdot 10^{15}$
1250	$1,45 \cdot 10^{15}$	$E_c - 1,063$	0,9903	$5,55 \cdot 10^{14}$	$1,44 \cdot 10^{15}$

3-jadvalda hisoblab topilgan qiymatlar yordamida $Si < B, O, Cu >$ namunasidagi $(O + Cu)$ komplekslarining temperaturaga bog'liqlik grafigi quyidagi 1-rasmda keltirilgan. Rasmdan ko'rinib turibdiki, temperaturaning $T = 1060 ^\circ C$ qiymatida $(O + Cu)$ komplekslar maksimal qiymatga erishar ekan.

Si da O va Mn kirishmalari o'rtasidagi o'zaro ta'sirlashuvining effektiv temperaturasi $T_{ef} = 1150 ^\circ C$ ekanligi aniqlangan [4]. $Si < B, O, Mn >$ namunasi uchun ham yuqoridagi usul yordamida $(O + Mn)$ komplekslarining konsentrat-siyasini aniqlandi. $Si < B, O, Mn >$ namunasi uchun elektrontrallik tenglamasini tuzildi. Ma'lumki, Mn Si ning taqiqlangan zonasida quyidagi energetik sathga ega $E_c - 0,53 eV$ [3] bo'ladi.

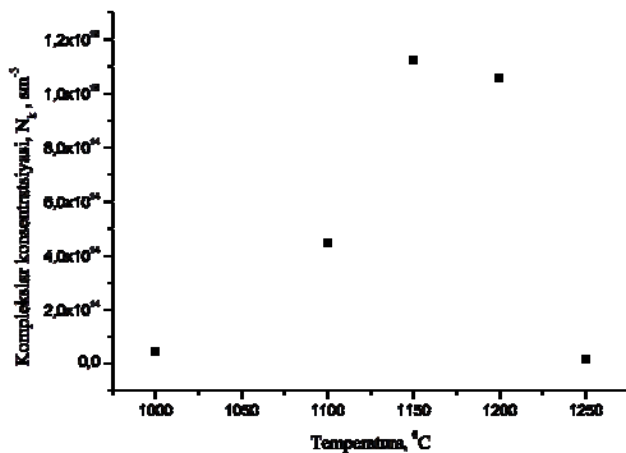
$$p_0 + (2 - (f_{d1} + f_{d2})) \cdot (N_0 - N_k) + (1 - f_{d3}) \cdot (N_{Cu} - N_k) = N_B^- + n_0$$

Elektroneytrallik tenglamasidan foydalanib N_k $(O + Mn)$ komplekslarning konsentratsiyasini hisoblandi:

$$N_k = \frac{(2 - (f_{d1} + f_{d2})) \cdot N_0 + (1 - f_{d3}) N_{Cu} + p_0 - N_B^- - n_0}{3 - (f_{d1} + f_{d2} + f_{d3})}$$

4-jadval

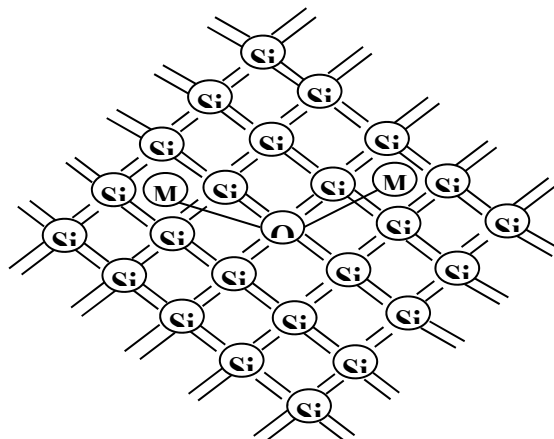
$T, ^\circ C$	p_0, n_0, sm^{-3}	F, eV	f_{d3}	N_{Mn}, sm^{-3}	N_k, sm^{-3}
1000	$4,17 \cdot 10^{13}$	$E_c - 1,16$	0,99936	$2 \cdot 10^{15}$	$0,45 \cdot 10^{14}$
1100	$0,52 \cdot 10^{13}$	$E_c - 1,47$	0,9999	$1,81 \cdot 10^{15}$	$4,46 \cdot 10^{14}$
1150	$1,04 \cdot 10^{14}$	$E_c - 1,24$	0,9980	$3,07 \cdot 10^{15}$	$1,124 \cdot 10^{15}$
1200	$1,04 \cdot 10^{12}$	$E_c - 1,77$	0,9999	$2 \cdot 10^{15}$	$1,06 \cdot 10^{15}$
1250	$0,74 \cdot 10^{12}$	$E_c - 1,88$	0,9999	$1,99 \cdot 10^{15}$	$0,158 \cdot 10^{14}$



2-rasm. $Si < B, O, Mn >$ namunasida $(O + Mn)$ komplekslar konsentratsiyasining temperaturaga bog'liqligi.

4-jadvalda hisoblab topilgan qiymatlar yordamida $Si < B, O, Mn >$ namunasidagi $(O + Mn)$ komplekslar konsentratsiyasining temperaturaga bog'liqlik grafigi 2-rasmda keltirilgan. Rasmdan ko'rinib turibdiki, temperaturaning $T = 1150 ^\circ C$ qiymatida $(O + Mn)$ komplekslar maksimal qiymatga erishar ekan. Yuqorida Si da $O + Cu$ va $(O + Mn)$ komplekslari hosil bo'lishining temperaturaga bog'liqligini o'rganish asosida bu komplekslarning paydo bo'lish mexanizmlari haqida fikr yuritmoqchimiz. O atomlari

$2s^2 2p^4$ elektron konfiguratsiyasiga ega bo'lib, o'ziga yaqin bo'lgan 4 ta Si atomi bilan kovalent bog'lanish hosil qiladi.



3-rasm. Si da O + Mn (O + Cu) komplekslarining strukturasi.

Bunda bog'ga qatnashmayotgan 2 ta elektron Si ning taqiqlangan zona kengligida 2 ta chuqur energetik sathlar paydo qiladi. Mn (Cu) ni Si ga legirlash jarayonida kristall panjara tugunida joylashgan O Mn ning 2 ta atomi bilan o'zaro ta'sirlashadi va Si_4OMn_2 (Si_4OCu_2) kvazi molekulasi hosil bo'ladi. Bunday komplekslarning har bittasida 2 ta Mn (Cu) atomining qatnashishi, $Si < B, O, Mn >$ $Si < B, O, Cu >$ namunasida Mn (Cu) ning to'liq konsentratsiyasi muvozanat holatida turgan O konsentratsiyasidan 2 barobar ko'p bo'lishini ko'rsatadi. $Si < B, O, Mn >$ $Si < B, O, Cu >$ namunasidagi komplekslarning biz taklif etayotgan strukturasi 3- rasmda keltirilgan.

Adabiyotlar

1. Бахадирханов М.К. Аскарлов Ш.И., Норкулов Н., Сражев С.Н. Некоторые особенности взаимодействия серы с медью в кремнии. РАН «Неорганические материалы», 1992, т.28, №8, стр. 1606-1608.
2. Dash W.C. Copper precipitation on dislocation in silicon. //J.Appl. Phys. 1956, v.27, №10, p. 1193-1195.
3. Болтакс Б.И., Бахадирханов М.К., Гродецкий С.М., Куликов Г. С. Компенсированный кремний. Наука, Л. 1972, с. 120.
4. S.N.Srajev Toshboyev T.U., Kamarov M. Kremniyda mis va kislorod kirishmalari o'rtasidagi o'zaro ta'sirlashuvni o'rganish. SamDU yosh olimlar konferensiyasi, 2014.
5. Саъдуллаев А.Б. Особенности комплексообразования между примесными атомами марганца и кислорода в кремнии //Молодой учёный.-2014.-№12.- с.50-52.

УДК: 530.12; 530.145

YUQORI ENERGIYALI REAKSIYALARDA FUNDAMENTAL MASSANING ROLI

Sh.Eshquvvatov¹, U.Xodjaeva²

¹ Samarqand davlat universiteti,

² Samarqand qishloq xo'jalik instituti

Annotatsiya: Ushbu ishda fundamental massali kvant maydonlar nazariyasini ikkinchi yaqinlashishdagi hisoblashdagi ayrim eksperimental basharotlari keltirilgan. Yuqori energiyalarda $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$ va $e^-e^+ \rightarrow e^-e^+$ jarayonlarini boshlang'ich va so'nggi holatlar polarizatsiyalarini e'tiborga olingan holda kesimlari hisoblangan.

Kalit so'zlar: fazo-vaqt, fundamental massa, fundamental uzunlik, kvant maydonlar nazariyasi.

Role of the fundamental mass in high-energy reactions

Abstract: In this paper some experimental effects of Quantum Field Theory with a Fundamental Mass in the calculation of the second order processes are presented. The cross sections of $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$ and $e^-e^+ \rightarrow e^-e^+$ processes at high energies calculated taking into account polarized initial and final particles.

Keywords: space-time, fundamental mass, fundamental length, quantum field theory.

Роль фундаментальной массы в высокоэнергетических реакциях

Аннотация: В данной работе рассмотрены некоторые экспериментальные последствия применения квантовой теории поля с фундаментальной массой в вычислениях процессов второго порядка. Вычислены сечения процессов рассеяния $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$ и $e^-e^+ \rightarrow e^-e^+$ при высоких энергиях с учетом поляризаций начальных и конечных частиц.

Ключевые слова: пространство-время, фундаментальная масса, фундаментальная длина, теория квантового-поля.

V.G.Kadyshevsky va R.M.Ibadovlar[1-3] tomonidan yaratilgan yangi nazariya fundamental massali kvant maydonlar nazariyasi esa yuqori energiyalarda kuchli, kuchsiz va elektromagnit o'zaro ta'sirlanuvchi zarralar uchun lokal nazariya bo'lib, tabiatda yorug'lik tezligi c va Plank doymiyisi \hbar lar bilan bir qatorda yangi «fundamental massa» M , yoki bunga mos holda teskari bo'lgan

«fundamental uzunlik» $\ell = \frac{\hbar}{Mc}$ mavjud degan gipotezaga asoslangan. Bu yangi kattaliklarni olimlar

tomonidan bir necha bor maydon nazariyasiga kiritilishiga harakat etilgan. Ammo, geometriya asosida kiritilishi V.G.Kadyshevsky va R.M.Ibadovlar[1] tomonidan amalga oshirilgan. Bunda M esa, c va \hbar parametrlar bilan bir qatorda besh o'lchamli De Sitter fazasi impuls geometriyasida bajarilgan. Yangi nazariyani yaratishda konfiguratsion tasavvur ishlatilgan. Bu esa prinsipial axamiyatga ega va izohlashga xojat tugiladi. KMN sini yaratilishida maydonlarning standart nazariyasini impuls tasavvurida yozib, keyin unda minkovskiy p -fazosidan katta M radiusli De Sitter p fazasiga utilgan. De Sitter fazosi doimiy egrilikka ega bo'lgani uchun, unda ikkita hol mavjud:

$$p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 + p_5^2 \equiv g^{KL} P_K P_L = M^2 \quad (1)$$

$$K, L = 0, 1, 2, 3, 5$$

(egrilik musbat: $g^{00} = -g^{11} = -g^{22} = -g^{33} = +g^{55} = 1$)

$$p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 - p_5^2 \equiv g^{KL} P_K P_L = -M^2 \quad (2)$$

(egrilik manfiy: $g^{00} = -g^{11} = -g^{22} = -g^{33} = -g^{55} = 1$)

Noevklid 4-o'lchamli fazoda (2)-ni Lobachevskiyning mavhum 4-fazosi ham deyiladi. Agarda $E \geq M$ energiyalarda impuls fazoga tayanuvchi KMN yangi fizik xodisalar mavjud bo'lishi mumkin.

Umuman aytganda M parametr Plank massasi $M_p = \sqrt{\hbar c / k} \approx 10^{19}$ GeV.ga teng bo'lishi mumkin.

Standart KMNda "kichik" 4-impulslar $|p_0|, |\vec{p}| \ll M$ $p^5 = g^{55} p_5 \cong M$ yaqinlashishi to'g'ri keladi.

Fundamental massali KMN ning formulirovkasi De-Sitter tenglamasi (2) ning kvant versiyasi ya'ni besh o'lchamli maydon tenglamasiga[1]

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x_\mu} - \frac{\partial^2}{\partial x_5^2} - \frac{M^2 c^2}{\hbar^2} \right] \Phi(x, x^5) = 0 \quad (3)$$

$$\mu = 0, 1, 2, 3$$

asoslangan. Bu tenglamani hosil etilishida (2) tenglamaga qo'yidagi kvant operatorlarini $p_\mu = i\hbar \frac{\partial}{\partial x_\mu}$ va $p_5 = i\hbar \frac{\partial}{\partial x_5}$ kiritish orqali foydalanilgan.

(3) tenglamada barcha fundamental parametrlar \hbar, c va M mujasimlanganligi uchun bu tenglamani «fundamental tenglama» deyiladi. M parametr esa Plank massasiga $M_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{k}} \approx 10^{19} \text{ GeV}$ ga juda yaqin bulishi ham mumkin. Shu uchun ushbu maydon nazariyasi umimiy holda kvant gravitatsiyasini ham qamrab olishi mumkin. Tensor o'lchamlariga qaramasdan hamma maydonlar (3) fundamental tenglamani qanoatlantiradi. Shuning uchun barcha $\varphi(x)$ skalyar (spinlari 0), $\psi(x)$ spinor (spinlari $1/2$), $A_\mu(x)$ vektor (spinlari 1) va $B_{\mu\nu}(x, x^5)$ tenzor (spinlari 2) maydonlar uchun 5-o'lchamli $\Phi(x, x^5)$ to'liq funksiyasini $\varphi(x, x^5)$, $\psi(x, x^5)$, $A_\mu(x, x^5)$ va $B_{\mu\nu}(x, x^5)$ ko'rinishda yozashimiz mumkin. (3) fundamental tenglama yechimida $\Phi(p, 0)$ va $\frac{\partial\Phi(p, 0)}{\partial x^5}$ funksiyalar klassini tashkil etib, fundamental tenglama uchun Koshi masalasi x^5 o'zgaruvchi bo'yicha korrekt bo'ladi:

$$\begin{cases} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x_\mu} - \frac{\partial^2}{\partial x_5^2} - \frac{M^2 c^2}{\hbar^2} \right] \Phi(x^\mu, x^5) = 0, \\ \Phi(x^\mu, x^5)|_{x^5=0} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{-ipx} \Phi(p, 0) d^4 p, \\ \frac{\partial\Phi(x^\mu, x^5)}{\partial x^5} |_{x^5=0} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{-ipx} \frac{\partial\Phi(p, 0)}{\partial x^5} d^4 p \end{cases} \quad (4)$$

(3) tenglama uchun Koshi masalasi korrekt bo'lishi uchun boshlang'ich shartlardan p – tasavvurida $p_n^2 = M^2$ sferadan tashqarida $\Phi(p, 0)$ va $\frac{\partial\Phi(p, 0)}{\partial x^5}$ lar eksponensial so'nuvchi bo'lishlarini talab qilinadi. $\Phi(x, 0)$ va $\frac{\partial\Phi(x, 0)}{\partial x^5}$ lar Koshi shartlari to'rt o'lchamli fazo-vaqt fazosida maydon funksiyalaridir. (3) fundamental tenglama uchun Koshi masalasining korrektlik shartiga asoslanib M fundamental massaga ultrobinafsha viloyatidagi uzoqlashuvlikni kesuvchi majburiati rolini yuklatadi. Balki bu yangi nazariya ultrobinafsha viloyatidagi uzoqlashuvlikga ega emasdir? Xozirgi vaqtda ushbu savolga aniq javob bo'lmasa ham (3) fundamental tenglama uchun Koshi masalasi x^5 koordinata bo'yicha korrekt qo'yilishini tushintiraylik. Koshi masalasi korrekt qo'ylsa $\Phi(x, 0)$ va $\partial\Phi(x, 0)/\partial x^5$ kattaliklar to'rt o'lchamli fazo-vaqtda aniqlangan maydonlar bo'ladi va (3) tenglamaning echimi yagona bo'lib Fure integrali bilan aniqlanadi. KMNga Koshi masalasini asos etib olinishi maydon uchun yangi konsepsiya tushinchasini kiritilishiga olib keladi. Boshqa so'z bilan aytganda, (3) fundamental tenglamani qanoatlantiradigan 5-o'lchamli fazoda barcha maydonlar uchun $\Phi(x, x^5)$ to'liq funksiya to'g'ri kelishi, 4-o'lchamli fazoda ikkilangan qo'yidagi funksiyalarga mos keladi:

$$\Phi(x, x^5) \leftrightarrow \begin{pmatrix} \Phi(x, 0) \\ \frac{\partial\Phi(x, 0)}{\partial x^5} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \Phi(x) \\ \chi(x) \end{pmatrix} \quad (5)$$

bunda $\Phi(x)$ – 4-o'lchamli fazodagi oddiy to'liq funksiya bo'lib erkin zarralarni tavsiflaydi va propagatorga ega bo'ladi. Ammo, $\chi(x) = \frac{\partial\Phi(x, 0)}{\partial x^5}$ 4-o'lchamli fazoda faqatgina o'zora ta'sirda ishtirok etib erkin zarralarni tavsiflamaydi va propagatorga ega bo'lmaydi. Bu maydonlar funktsiyasi faqatgina oddiy maydonlar bilan o'zora ta'sirlashishlarida namoyon bo'ladi. Maydon funksiyasini ikkilanishi $M \rightarrow \infty$ da yuqoladi. Yani, bizning tavsifimiz bo'icha fundamental massa M tabiatda mavjud bo'lmasa bu maydon $\chi(x) = \frac{\partial\Phi(x, 0)}{\partial x^5}$ ham o'z navbatida mavjud bo'lmaydi.

Biz endi ta'sirning statsionarlik shartlaridan kelib chiqqan holda boshlang'ich qiymatlar Lagranj harakat tenglamasini qanoatlantirishidan ta'sir integralini yozamiz:

$$S = \int d^4 x L(\Phi(x, 0), \frac{\partial(\Phi(x, 0))}{\partial x^5}) \quad (6)$$

Bizning tavsifimiz bo'yicha Dirak (spinor) erkin maydoni uchun 5-o'lchamli konfiguratsion fazoda to'liq ta'sir integrali qo'yidagicha bo'ladi[4-6]:

$$S = \frac{1}{2} \int d^4 x \{ \overline{\Psi}(x, x^5) (i\hat{\partial} + M) \left(\frac{-i}{M} \frac{\partial}{\partial x^5} \Psi(x, x^5) \right) + \left(\frac{i}{M} \frac{\partial}{\partial x^5} \Psi(x, x^5) \right) (i\hat{\partial} + M) \Psi(x, x^5) + \dots \}$$

$$+ \left(\frac{i}{M} \frac{\partial}{\partial x^5} \Psi(x, x^5) \right) \left(\frac{i}{M} \frac{\partial}{\partial x^5} \Psi(x, x^5) - \bar{\Psi}(x, x^5) \left(M + \frac{(i\partial)^2}{M^2} \right) \Psi(x, x^5) \right), \quad (7)$$

bunda $\Psi(x, x^5)$ (3) fundamental tenglamani qonatlantiruvchi spinor maydon funksiyasi. (5) ga asosan $\Psi(x, 0) \equiv \Psi(x)$ va $\frac{-i}{M} \frac{\partial}{\partial x^5} \Psi(x, 0) \equiv \chi(x)$.

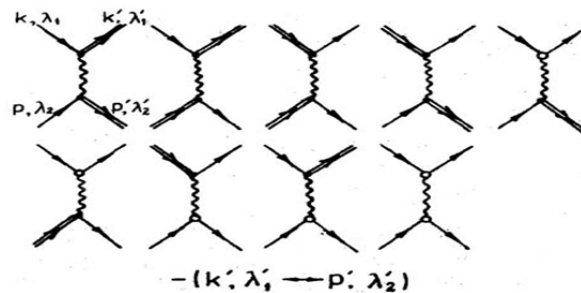
Endi ushbu nazaryani ayrim elektrodinamik jarayonlarga tatbiqini o'rganaylik. Bu nazariyada (5) ga asosan Feynman diagrammalarida qo'yidagi yangi elektrodinamik cho'qqilar paydo bo'ladi:

Cho'qqilar	Matritsa elementidagi faktor	Diagramma elementi
Oddiy elektrodinamik cho'qqi	$e\gamma^\mu$	
FM KMNda yangi cho'qqilar	$e(q+p)_\mu \gamma^5$	
FM KMNda yangi cho'qqilar	$-\frac{\alpha}{\pi} \gamma^5 \delta_{\mu\nu}$	

Tablitsa 1. FM KMNda yangi cho'qqilar

Bu tablitsada \xrightarrow{p} strelka orqali $\Phi(p)$ maydon, va ikkilangan strelka \rightrightarrows^p - orqali $\chi(p)$ maydon belgilangan.

1). FM KMNda $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$ jarayoni uchun qo'yidagi Feynman diagrammalari bo'ladi:



Rasm. 1. FM KMNda $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$ jarayoni uchun Feynman diagrammalari.

Ultrarelyativistik yaqinlashishda $E^2 \gg m^2$ boshlang'ich polarizatsiyalari λ_1 va λ_2 va so'ngi polarizatsiyalari λ'_1 va λ'_2 hisobga olingan holda elektronlar to'qnashish reaksiyasi differensial kesimini FM KMNda hisoblanigan [6].

2). FM KMNda $e^-e^+ \rightarrow e^-e^+$ jarayonining differensial kesimini [6] ilmiy maqolamizdagi (8) formulaga asosan quyidagi ko'rinishda topamiz:

$$\left[\frac{d\sigma}{d\Omega} \right]_{\lambda_1\lambda_2 \rightarrow \lambda'_1\lambda'_2}^{e^-e^+ \rightarrow e^-e^+} = \left[\frac{d\sigma_0}{d\Omega} \right]_{\lambda_1\lambda_2 \rightarrow \lambda'_1\lambda'_2}^{e^-e^+ \rightarrow e^-e^+} + \frac{1}{M^2} \frac{\alpha^2}{32 E^2} \left\{ \left[1 - \lambda_1 \lambda_2 \lambda'_1 \lambda'_2 \right] u \left[\frac{s}{t} + \frac{t}{s} - 2 \right] + \right.$$

$$+ \left[(1 + \lambda_1 \lambda'_1) (1 + \lambda_2 \lambda'_2) + (\lambda_1 + \lambda'_1) (\lambda_2 + \lambda'_2) \right] \frac{(t-u)s}{4t} +$$

$$+ \left. \left[(1 + \lambda_1 \lambda'_2) (1 + \lambda_2 \lambda'_1) - (\lambda_1 + \lambda'_2) (\lambda_2 + \lambda'_1) \right] \frac{(s-u)t}{4s} \right\} +$$

$$+ \frac{1}{M^4} \frac{\alpha^2}{(32)^2 E^2} \left\{ (1 - \lambda_1 \lambda'_1) (1 - \lambda_2 \lambda'_2) (u-s)^2 + (1 + \lambda_1 \lambda_2) (1 + \lambda'_2 \lambda'_1) (u-t)^2 + \right.$$

$$+ \left. [(1 + \lambda_1 \lambda_2) (1 + \lambda'_1 \lambda'_2) - (\lambda_1 + \lambda_2) (\lambda'_1 + \lambda'_2)] (u-s)(u-t) \right\}$$

bunda

$$\left[\frac{d\sigma_0}{d\Omega} \right]_{\lambda_1\lambda_2 \rightarrow \lambda'_1\lambda'_2}^{e^-e^+ \rightarrow e^-e^+} = \frac{\alpha^2}{32 E^2} \left\{ (1 + \lambda_1 \lambda'_1) (1 + \lambda_2 \lambda'_2) \frac{s^3 - u^3}{st^2} + \right.$$

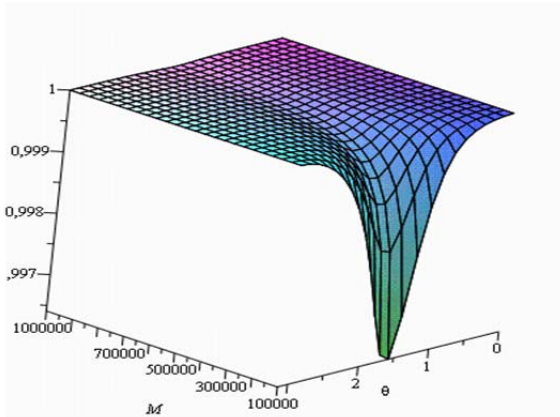
$$+ (\lambda_1 + \lambda'_1) (\lambda_2 + \lambda'_2) \frac{s^3 + u^3}{st^2} + (1 - \lambda_1 \lambda'_2) (1 - \lambda_1 \lambda'_1) \frac{t^3 - u^3}{ts^2} -$$

$$\left. - (\lambda_1 - \lambda'_2) (\lambda_2 - \lambda'_1) \frac{t^3 + u^3}{ts^2} \right\}$$

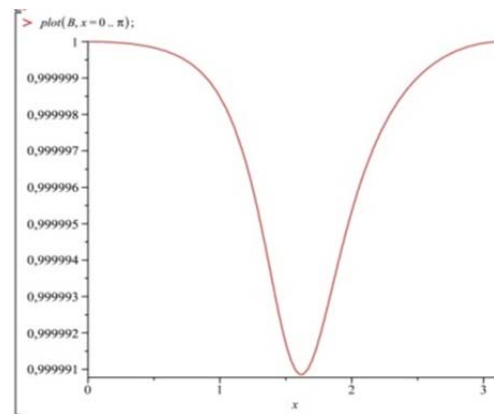
Ushbu (10) annigilyasiya uchun qo‘yidagi asimmetrik kombinatsiyani

$$A = \frac{\left(\sin^8 \frac{\theta}{2} + \cos^8 \frac{\theta}{2} \right) \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\lambda_1=\lambda_2} - \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\lambda_1=-\lambda_2}}{\left(\sin^8 \frac{\theta}{2} + \cos^8 \frac{\theta}{2} \right) \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\lambda_1=\lambda_2} + \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\lambda_1=-\lambda_2}}$$

«Maple 13» kompyuter dasturida topilgan -burchak va M – fundamental massalarga bog‘liq 3-o‘lchamli grafiqi qo‘yidagi ko‘rinishga bo‘ladi:



Rasm.2. FM KMNda $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$ jarayonida (12) assimetrining FM va burchakka bog‘liqliq 3-o‘lchamli grafiqi.



Rasm.3. FM KMNda $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$ jarayonida (12) assimetrining FM va burchakka bog‘liqliq grafiqi.

Rasm.2. va Rasm.3.lardan ko‘rinadiki FM KMNda $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$ jarayonida fundamental massa ya‘ni $M \rightarrow \infty$ tabiatda bo‘lmasa (12) assimetriya -burchakka bog‘liq bo‘lmaydi. Agarda, fundamental massa M tabiatda mavjud bo‘lsa (3-Rasm), (12) assimetriya – θ burchakka bog‘liq bo‘lib grafikda ma‘lum egrilgan holda ko‘ringan.

Minnaddorchilik. Ushbu maqolani tayyorlashda o‘z maslahatlari bilan hissa qo‘shgan professor Rustam Ibadov va dotsent Eshquvvat Arziqulovlarga o‘z minnatdorchiligimizni izhor etamiz.

Adabiyotlar

1. R.M.Ibadov, V.G.Kayshevsky "New formulation of QFT with Fundamental mass", 5th Intern.Sympos.on Select.Topics in Statistical Mechan., 1989, Dubna, world Scientific Singapore, New Jarsey, London, Hong Kong, p.131-156.
2. Ibadov R.M., Kadyshevsky V.G., Preprint JINR 1986, R2-86-835, Dubna.
3. Ibadov R.M., Kadyshevsky V.G., Preprint JINR 1988, D2-87-798, P.141.
4. Donkov A.D., Ibadov R.M., Kadyshevsky V.G., Mateev M.D. and Chizhov M.V., Nuovo Cimento,1985, V.87A, No.3, P.350.
5. Donkov A.D., Ibadov R.M., Kadyshevsky V.G., Mateev M.D. and Chizhov M.V., Nuovo Cimento,1985, V.87A, No.4, P.375.
6. Ibadov R., Tuhtamishev S., Khodjaeva U., Some experimental consequences hypotheses about Fundamental Mass, European Science № 2(24), 2017, 6-13.

UDK: 372.851

**GEOMETRIK ALMASHTIRISHLAR USULLARIDAN FOYDALANIB YASASHGA
DOIR MASALALARNI YECHISH**

E.M. Mardonov, Q. Ostonov, U. Mo'minov¹

Samarqand davlat universiteti

E-mail: ostonovk@mail.ru

Аннотация. Mazkur maqolada geometrik almashtirishlar usullaridan foydalanib yasashga doir masalalarni yechish usullarini topa olishga o'rgatish va bu usullarning o'quvchilar konstruktiv qobiliyatlarini rivojlantirishdagi ba'zi xususiyatlari bayon etiladi.

Калит so'zlar: geometriya, almashtirish, tahlil, tadqiqot, yasash, isbot, simmetriya, parallel ko'chirish, gomotertiya, o'xshashlik, inversiya, masala.

Решение задач на построение с использованием методов геометрических преобразований

Аннотация. В этой статье излагаются некоторые особенности обучения учащихся решению задач на построение с использованием методов геометрических преобразований и влияния этих способов на развитии конструктивных способностей учащихся в процессе обучения геометрии.

Ключевые слова: геометрия, преобразование, анализ, исследование, построение, доказательство, симметрия, параллельный перенос, гомотетия, подобие, инверсия, задача.

Solution to building problems using methods geometric transformations

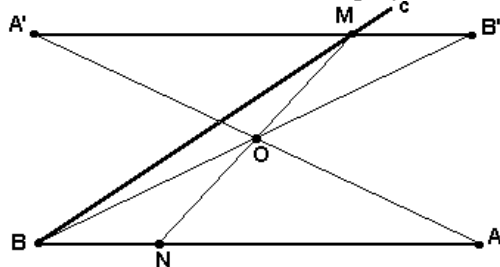
Abstract. This article describes some of the features of training of pupils of the challenges of building using the methods of geometric transformations and the impact of these methods on the development of constructive abilities of students in the learning process of geometry.

Keywords: geometry, transformation, analysis, research, construction, proof, symmetry, parallel translation, homothety, similarity, inversion problem.

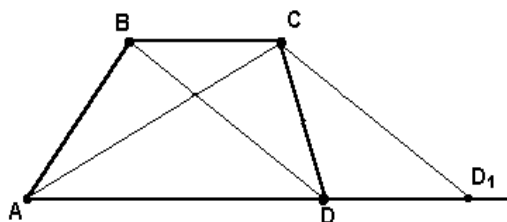
1. Simmetriya usuli. Yasash talab etilgan figura biror to'g'ri chiziqqa yoki nuqtaga nisbatan simmetrik nuqtalarga ega bo'lishi mumkin. Bunday holda to'g'ri chiziqqa yoki nuqtaga nisbatan simmetrik almashtirishni bajarish lozim.

1-masala. ABC burchak va uning ichida O nuqta berilgan. O nuqtadan burchak tomonlari orasidagi kesmasi O nuqtada teng ikkiga bo'linadigan to'g'ri chiziqni o'tkazing.

Yechish. *Tahlil.* Faraz qilaylik, masala yechilgan va MN -izlangan to'g'ri chiziq (1- rasm).



1-rasm



2-rasm

O nuqtani simmetriya markazi deb qabul qilamiz. U holda M va N nuqtalar O nuqtaga nisbatan simmetrik. AB' to'g'ri chiziq AB ga O nuqtaga nisbatan simmetrik bo'lsin. M nuqta AB to'g'ri chiziqda yotuvchi N nuqtaga nisbatan simmetrik bo'lgani uchun AB' M nuqtadan o'tishi lozim. Shunday qilib M nuqta BC va AB' to'g'ri chiziqlar kesishish nuqtasi bo'lishi lozim.

Yasash. 1. O markazga nisbatan AB to'g'ri chiziqqa simmetrik AB' , to'g'ri chiziqni yasaymiz (buning uchun O nuqtaga nisbatan A nuqtaga simmetrik A' nuqtani, va B nuqtaga simmetrik B' nuqtani topamiz).

2. BC va AB' to'g'ri chiziqlar kesishish nuqtasi M ni topamiz va uni O nuqta bilan tutashtiramiz. Izlangan MN to'g'ri chiziqni olamiz.

Isbot tahlildan va yasashdan kelib chiqadi va shuning uchun uni kelirib o'tirmaymiz.

Tadqiqot. Tahlil va yasashdan masala hamma vaqt bitta yechimga ega degan xulosaga kelish mumkin.

2. Parallel ko'chirish usuli. Parallel ko'chirish usulida izlangan figura ayrim qismlari ma'lum yasashga yo'l qo'yadigan yangi figurani olish maqsadida parallel ko'chiriladi..

3-masala. Trapetsiyani asoslari va diagonallari bo'yicha yasang

Yechish. Tahlil. Masala yechilgan deb faraz qilamiz va $ABCD$ trapetsiya yasalgan (2-rasm).

BD diagonalni parallel shunday ko'chiramizki, uning B uchi C uchi bilan ustma-ust tushsin. Endi ACD uchburchakda barcha tomonlari ma'lum: ulardan ikkitasi trapetsiya diagonallari, uchinchi- asoslari yig'indisiga teng. Bundan quyidagi yasash kelib chiqadi .

Yasash.

1. Masala shartlari bo'yicha dastlab ACD_1 uchburchakni yasaymiz

2. D nuqtani yasaymiz (AD - trapetsiyaning ma'lum tomoni).

3. C nuqta orqali CD_1 ga parallel to'g'ri chiziqni o'tkazamiz. Ular B nuqtada kesishadi $ABCD$ trapetsiya berilgan asoslar va diagonallarga ega.

Isbot tahlildan va yasashdan kelib chiqadi.

Tadqiqot. Masala faqat ACD_1 uchburchakni yasash mumkin bo'lgan holda yechimga ega.

$\triangle ACD_1$ uchburchakni esa

$$|d_1 - d_2| < a + b < d_1 + d_2 \quad (1)$$

shartda yasash mumkin, bu erda a, b - trapetsiya asoslari, d_1 va d_2 - trapetsiya diagonallari. Bunda

$$AD_1 = a + b, AC = d_1, CD_1 = d_2$$

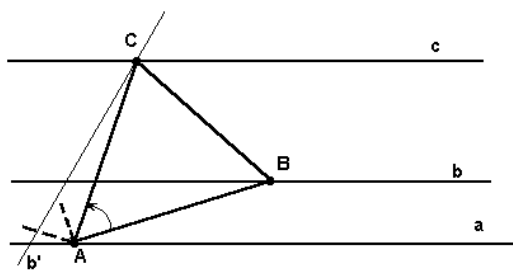
shart uchburchak tengsizligidan kelib chiqadi.

3. Burish usuli. Burish usulida figuraning ayrim elementlari yasashi ma'lum bo'lgan yangi figurani hosil qilish uchun buriladi.

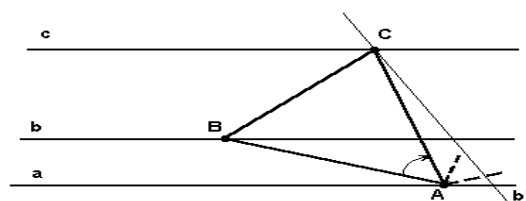
4-masala. a, b va c uchta parallel to'g'ri chiziqlar berilgan. A, B va C uchlari berilgan to'g'ri chiziqlarda yotuvchi teng tomonli ABC uchburchakni yasang.

Yechish. Tahlil. Masala yechilgan deb faraz qilamiz va $\triangle ABC$ - izlangan uchburchak bo'lsin (3-rasm).

$AB = AC$ va $\angle BAC = 60^\circ$ bo'lgani uchun B nuqta A nuqta atrofida 60° ga yoki -60° ga burishda C nuqtaga o'tadi (chunki $\angle BAC = +60^\circ$ yoki -60°). Masalan, B nuqta A nuqta atrofida 60° ga burishda C nuqtaga o'tsin. B nuqta b to'g'ri chiziqda yotadi. Shuning uchun undan A nuqta atrofida 60° ga burish bilan olinadigan C nuqta b to'g'ri chiziqni A nuqta atrofida 60° ga burishda olinadigan b' to'g'ri chiziqda yotishi lozim. Bundan tashqari, C nuqta shartga ko'ra a to'g'ri chiziqda yotadi. Shuning uchun C nuqta b' va a to'g'ri chiziqlar kesishish nuqtasi .



3-rasm



4-rasm

Shunga o'xshash, agar B nuqta A nuqta atrofida -60° burchakka burishda C nuqtaga o'tsa, u holda C nuqta c to'g'ri chiziq va b to'g'ri chiziqni A nuqta atrofida 60° ga burishda olinadigan b' to'g'ri chiziq kesishish nuqtasidan iborat.

Yasash.

1) to'g'ri chiziqda A nuqtani ixtiyoriy tanlaymiz.

2) b to'g'ri chiziqni A nuqta atrofida 60° ga burishda olinadigan b' to'g'ri chiziqni yasaymiz (4-rasm).

3) b' va c to'g'ri chiziqlar kesishishida C nuqtani olamiz.

4) ABC uchburchakning uchinchi uchi C nuqtadan A nuqta atrofida 60° ga burishdan olinadi

Boshqa yechimni A nuqta atrofida 60° ga burishni o'sha nuqta atrofida -60° burchakka burish bilan almashtirib olishimiz mumkin.

Isbot. A nuqta atrofida -60° ga burishda b' to'g'ri chiziq b to'g'ri chiziqqa o'tadi (ris.1). Demak, b' to'g'ri chiziqni C nuqtasi o'sha burishda b to'g'ri chiziqda yotuvchi nuqtaga o'tadi. Boshqacha aytganda, B nuqta b to'g'ri chiziqda yotadi. Burish ta'rifiga ko'ra: $\angle BAC=60^\circ$, $AC=AB$. Shuning uchun $\triangle ABC$ – uchidagi burchagi 60° li teng yonli uchburchak; demak, u teng tomonli. Shunga o'xshash 4-rasmda tasvirlangan uchburchak ham teng tomonli ekanini isbotldash mumkin.

Tadqiqot. b' to'g'ri chiziq b to'g'ri chiziqqa parallel emas, chunki b va b' to'g'ri chiziq orasidagi burchak 60° ga teng, bu burish xossasidan kelib chiqadi. Shuning uchun b' to'g'ri chiziq b ga parallel s to'g'ri chiziqnibiror S nuqtada kesib o'tadi. Demak, $\triangle ABC$ hamma vaqt mavjud. Rasmda tasvirlang uchburchak ham mavjud. Shuning uchun tanlangan A nuqtada masala ikkita yechimga ega (A nuqta a to'g'ri chiziqda ixtiyoriy tanlanishi mumkin).

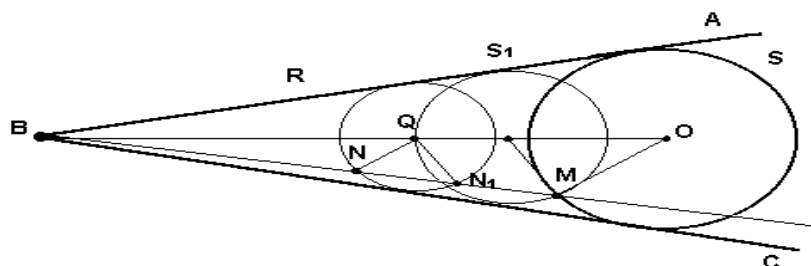
4. Gomotetiya yoki o'xshashlik usuli. Gomotetiya yoki o'xshashlik usuli bilan burchaklar kattaliklari, kesmalar nisbatlari va hech bo'lmagan bitta chiziq element berilgan figurani yasash zarur bo'lgan masalalar echiladi.

Yasashga doir masalalarni yechishda o'xshashlik usuli quyidagicha qo'llaniladi. Ba'zi masalar ulardagi shartlardan birini (chiziq elementni) tashlab yuborganda aniqmas bo'lib qoladi va cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi. Lekin bu yechimlar izlangan figuraga o'xshash figuralarni bermaydi. Bu holatda bunday figuralardan biri yasali, o'xshashlik almashtirish (gomotetiya) yordamida izlangan figura hosil qilinadi.

5-masala. ABC burchak va bu burchak ichida M nuqta berilgan. Burchak tomonlariga urinuvchi va M nuqta orqali o'tuvchi S aylanani yasang.

Yechish.

Tahlil. Masala yechilgan deb faraz qilamiz va S- izlangan aylana bo'lsin



5-rasm

Markazi B nuqtada bo'lgan va gomotetiya koeffitsienti k ga teng gomotetiyani bajaramiz. Bunda S aylana ABC uchburchakka ichki chizilgan, lekin umuman olganda M nuqtadan o'tmaydigan R aylanaga o'tadi; agar burchakning bissektrisasining biror joyida R aylananing Q markazini belgilasak, uni yasashimiz mumkin. S aylana hali ko'rsatilishi mumkin emas (chunki S aylanani R aylanaga o'tkazuvchi gomotetiya koeffitsientini bilmaymiz); biz faqat S aylana M nuqtadan o'tishini bilamiz. Qaralayotgan gomotetiya M nuqtani BM to'g'ri chiziqda yotuvchi R aylananing N nuqtasiga o'tkazadi (bu nuqtani BM to'g'ri chiziqning R aylana bilan kesishish nuqtasi sifatida topamiz). S aylananing OM radiusi R aylananing QN radiusiga gomotetik. Shuning uchun, $OM \parallel QN$ (gomotetiya xossasiga ko'ra). Shuning uchun S aylananing izlanayotgan O markazini ABC burchakning BQ bissektrisasi va NQ ga arallel MO to'g'ri chiziq kesishish nuqtasi sifatida topish mumkin.

Yasash.

- 1) ABC burchakka ichki chizilgan ixtiyoriy R aylanani yasaymiz, uning markazini Q.
- 2) N nuqta - R aylana va BM to'g'ri chiziq kesishi nuqtasi bo'lsin.
- 3) O nuqta - ABC burchak bissektrisasining NQ ga parallel MO to'g'ri chiziq bilam kesishish nuqtasi bo'lsin.
- 4) Markazi O nuqtada va radiusi OM bo'lgan S aylana izlangan aylana bo'ladi.

Isbot. B markazli va $\frac{BM}{BN}$ koeffitsientli gomotetiya R aylanani M nuqtadan o'tuvchi S

aylanaga o'tkazadi, u R aylana kabi ABC burchakka ichki chizilgan, R aylananing NQ radiusi S aylananing MO radiusiga gomotetik; shuning uchun $MO \parallel NQ$ va S markaz - $MO \parallel NQ$ to'g'ri chiziq

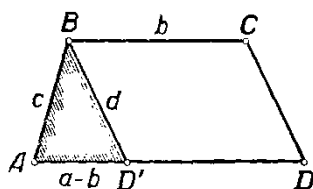
va ABC burchak bissektrisasi kesishish nuqtasi (S aylananing O markazi ABC burchak bissektrisasi ham tegishli, chunki S aylana burchak tomonlariga urinadi).

Tadqiqot. MB to'g'ri chiziq R aylananing ikki nuqtada N va N₁ larda kesib o'tadi. Yasashda bu nuqtalardan biridan foydalanib masala shartlarini qanoatlantiruvchi ikkita S va S₁ aylanalarni olamiz. Shunday qilib, masala ikkita yechimga ega.

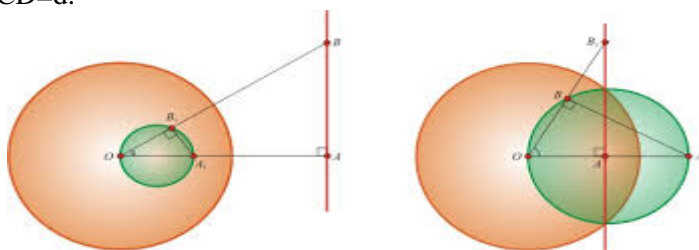
6-masala. Berilgan tomonlari bo'yicha trapetsiyani yasang.

Batafsil: asoslari berilgan a va b ($a > b$) kesmalarga, yon tomonlari berilgan ikkita c va d ($c \leq d$) kesmalarga teng trapetsiyani yasash talab etiladi.

Tahlil. Faraz qilaylik, ABCD – izlangan trapetsiya, AD – uning katta asosi, BC – kichik asosi, AB va CD – yon tomonlari, bunda $AB=c$, $CD=d$.



6-rasm



7-rasm

\overline{CB} vektor bilan aniqlanuvchi ko'chirishni tasavvur etamiz. U holda CD tomon BD' kema o'tadi. ABD' uchburchakni yasash mumkin, chunki uning barcha tomonlari ma'lum. Izlangan trapetsiyani yasash uchun BD' kesmani uzunligi ma'lum bo'lgan va \overline{AD} vektor bilan bir yo'nalishga ega \overline{BC} vektorga ko'chirish lozim.

Yasash.

- 1) ABD' uchburchakni $AB=c$, $BD'=d$, va $AD'=a-b$ tomonlar bo'yicha yasaymiz.
- 2) B nuqta orqali AD' nur bilan bir xil yo'nalgan nurni o'tkazamiz.
- 3) Bu nurda C nuqtani shunday yasaymizki, $BC=b$ tenglik o'rinli bo'lsin.
- 4) C orqali BD' ga parallel CD to'g'ri chiziqni AD' ning davomi bilan D nuqtada kesishguncha davom ettiramiz. ABCD – izlangan trapetsiya.

Isbot. $AB=c$, $BC=b$ yasashga ko'ra; $AD=AD'+D'D=AD'+BC=a-b+b=a$. $CD=BD'$ parallel to'g'ri chiziqlar orasidagi parallel to'g'ri chiziqlar kesmalari sifatida.

Tadqiqot. Birinchi qadamni: $d-c < a-b < d+c$ shartda bajaramiz. Bu shartda yasashning boshqa shartlari bir qiymatli bajariladi. ABD' uchburchak, demak, ABCD trapetsiya masala shartlari bilan tenglikka bilan bir qiymatli aniqlanadi. Shuning uchun $d-c < a-b < d+c$ shartda masala yagona yechimga ega. Agar bu shart bajarilmasa, masala yechimga ega emas.

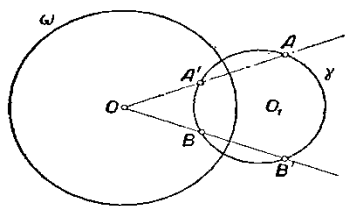
5. Inversiya usuli. Yana bitta geometrik almashtirish – inversiyani ko'rib o'tamiz, u yasashga doir murakkab masalalarni echishga imkon beradi. Konstruktiv masalalarni echishning yangi usuli yana inversiya usuli yoki teskarilash usuli yoki teskari radiuslar usuli deb ham yuritiladi. Bu usul oldin qaralgan usullarga qaraganda nisbatan «yosh». Inversiyani faqat birinchi marta o'tgan asrning 30-yillaridan boshlab o'rganila boshlangan.

Bu usul aylananing o'z ichiga olgan figuralarni oddiy figuralar bilan almashtirishga imkon beradi. Inversiya usulining mohiyati berilgan va izlanayotgan figuralar bilan bir qatorda ularga yoki ularning qismlariga invers bo'lgan figuralar qarashdan iborat. Ba'zida bu usul masalani echish uchun zarur bo'lgan berilgan va izlanayotganlar orasidagi bog'lanishlarni topish uchun etarli bo'ladi.

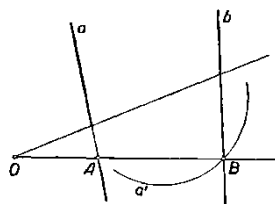
Ko'p hollarda masalani yechish berilganga invers figura yasalgan degan farazda izlanayotganga invers figurani yasashga olib kelinadi. Bu oxirgi masala bazis aylananing qulay tanlaganda berilgan masalaga nisbatan ancha osonroq bo'ladi. Berilganga invers figurani yasab keyin izlanayotgan figura yasaladi. Inversiya usuli elementar geometriyaning eng qiyin konstruktiv masalarini echish imkonini beradi.

Bu usulning kamchiligi ko'p sonidagi yasashlar bajarishni talab etadi.

7-masala. Ikkita A va B nuqtalar orqali berilgan $\omega(O, r)$ aylana ortogonal aylananing yasang (8-rasm).



8-rasm



9-rasm

Tahlil. Agar ω aylanani bazis aylana deb qabul qilsak, inversiyada izlangan γ aylana o'z-o'ziga akslanadi, A va B nuqtalar bu aylanadagi A' va B' nuqталarга o'tadi. Lekin γ aylana to'la aniqlanadi, agar undagi uchta nuqta, masalan A, B va A' nuqtalar ma'lum bo'lsa. Bundan yasash usuli kelib chiqadi.

Yasash. 1) A nuqtaga ω aylanaga nisbatan invers bo'lgan A' nuqtani yasaymiz; 2) B va A' nuqtalardan o'tuvchi γ aylanani yasaymiz, u - izlangan aylana.

Agar A nuqta ω aylanada yotsa, u holda A' nuqta A nuqta bilan ustma-ust tushadi va ko'rsatilgan yo'l maqbul emas. Bu holda B nuqtaga nisbatan shunga o'xshash yasashni bajarish zarur. Agar ikkala A va B nuqtalar ω aylanada yotsa ularning O_1 kesishish nuqtasini belgilaymiz. O_1 - izlangan aylana markazi.

Tadqiqot. Bu yasashlar agar A, B va O nuqtalar bir to'g'ri chiziqda joylashganda o'rinli. Agar bunda A va B nuqtalar ω aylanaga nisbatan invers bo'lsa, u holda masala cheksiz ko'p yechimga ega: A va B nuqtalardan o'tuvchi ixtiyoriy ω aylana.

8-masala. O nuqta va undan o'tuvchi ikkita a va b to'g'ri chiziqlar berilgan. O nuqta orqali shunday nurni o'tkazish kerakki uning O nuqtadan berilgan to'g'ri chiziqlar bilan kesishguncha kesmalari ko'paytmasi berilgan kesma kvadratiga teng bo'lsin.

Tahlil. O (9-rasm) - berilgan nuqta, a va b -berilgan to'g'ri chiziqlar, OAB - izlangan nur, $OAB=r^2$, bu yerda r -berilgan kesma.

$\omega(O, r)$ aylanaga nisbatan inversiya A nuqtani B nuqtaga, a to'g'ri chiziqni B nuqtadan o'tuvchi biror a' aylanaga o'tkazadi. Shunday qilib, $B \equiv a' \times b$.

Yasash. Ketma-ket yasashlarni bajaramiz: $\omega(O, r)$ aylanani; ω ga nisbatan inversiyada a to'g'ri chiziq obrazi a' ni; $B \equiv a' \times b$ nuqtani; masala shartini qanoatlantiruvchi OB nurni.

Isbot. $A \equiv OB \times a$ bo'lsin. U holda A - B nuqtaning $\omega(O, r)$ ga nisbatan inversiyadagi proobrazi, chunki a to'g'ri chiziq a' aylana proobrazi. Demak, inversiya ta'rifiga ko'ra $OA \cdot OB = r^2$.

Tadqiqot. Quyidagi hollar bo'lishi mumkin: a' aylana b to'g'ri chiziqni kesib o'tadi; ikkita yuechim; a' aylana b to'g'ri chiziqqa urinadi; bitta yuechim; a' aylana b to'g'ri chiziq bilan umumiy nuqtalarga ega emas; yechimlar yo'q.

Izlangan B nuqta albatta $\omega(O, r)$ ga nisbatan inversiyada A nuqtaga mos kelgani uchun, b to'g'ri chiziq va a' aylananing umumiy nuqtasi bo'lishi lozim. Bundan masala topilgan yechimlardan tashqari boshqa yechimlarga ega emasligi kelib chiqadi.

Adabiyotlar

1. Погорелов В.А. Геометрия.7-11. – Тошкент: Ўқитувчи, 2001.-312 с.
2. Зив Б. Г. И др. Задачи по геометрии для 7–11-х классов / Б. Г. Зив, В. М. Мейлер, А. Г. Баханский. – М.: Просвещение, 1991.- 171 с.
3. Киселев А. П. Элементарная геометрия. Книга для учителя / А. П. Киселев. – М.: Просвещение, 1980. - 287 с.
4. Крамор В. С. Повторяем и систематизируем школьный курс по геометрии / В. С. Крамор.– М.: Просвещение, 1992. -320 с.
5. Бевз Г. П. Геометрия: Учебник для 7-11 кл. / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н.Г. Владимирова – М.: Просвещение, 1990.-267 с.

MUALLIFLAR DIQQATIGA!

Hurmatli mualliflar, maqola muallif tomonidan qog'ozda chop etilgan va elektron shaklida taqdim qilinishi shart. **Maqolada quyidagi bandlar:** UDK, ishning nomi (o'zbek, rus va ingliz tillarida), maqola hammualliflarining ro'yxati (to'liq familiya, ismi, otasining ismi – o'zbek, rus va ingliz tillarida), muallif haqida ma'lumotlar: ish joyi, lavozimi, pochta va elektron pochta manzili; maqola annotatsiyasi (300 belgigacha, o'zbek, rus va ingliz tillarida), kalit so'zlar (5-7, o'zbek, rus va ingliz tillarida) bo'lishi lozim.

MAQOLALARGA QO'YILADIGAN TALABLAR!

Maqolalarning nashr etilishi uchun shartlar nashr etilishi mo'ljallangan maqolalar dolzarb mavzuga bag'ishlangan, ilmiy yangilikka ega, muammoning qo'yilishi, muallif tomonidan olingan asosiy ilmiy natijalar, xulosalar kabi bandlardan iborat bo'lishi lozim; ilmiy maqolaning mavzusi informativ bo'lib, mumkin qadar qisqa so'zlar bilan ifodalangan bo'lishi kerak va unda umumiy qabul qilingan qisqartirishlardan foydalanish mumkin; "Ilmiy axborotnoma" jurnali mustaqil (ichki) taqrizlashni amalga oshiradi.

**MAQOLALARNI YOZISH VA RASMIYLASHTIRISHDA
QUYIDAGI QOIDALARGA RIOYA QILISH LOZIM:**

Maqolalarning tarkibiy qismlariga: kirish (qisqacha), tadqiqot maqsadi, tadqiqotning usuli va obyekti, tadqiqot natijalari va ularning muhokamasi, xulosalar yoki xotima, bibliografik ro'yxat. Maqola kompyuterda Microsoft Office Word dasturida yagona fayl ko'rinishida terilgan bo'lishi zarur. Maqolaning hajmi jadvallar, sxemalar, rasmlar va adabiyotlar ro'yxati bilan birgalikda doktorantlar uchun 0,25 b.t. dan kam bo'lmasligi kerak. Sahifaning yuqori va pastki tomonidan, chap va o'ng tomonlaridan - 2,5 sm; orientatsiyasi - kitob shaklida. Shrift - Times New Roman, o'lchami - 12 kegl, qatorlar orasi intervali - 1,0; bo'g'in ko'chirish - avtomatik. Grafiklar va diagrammalar qurishda Microsoft Office Excel dasturidan foydalanish lozim. Matndagi bibliografik havolalar (ssilka) kvadrat qavsda ro'yxatda keltirilgan tartibda qayd qilish lozim. Maqolada foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati keltirilishi lozim. Bibliografik ro'yxat alfavit tartibida - GOST R 7.0.5 2008 talablariga mos tuziladi.

- Ikki oyda bir marta chiqadi.
- "Samarqand davlat universiteti ilmiy axborotnomasi"dan ko'chirib bosish faqat tahririyatning yozma roziligi bilan amalga oshiriladi.
- Mualliflar maqolalardagi fakt va raqamlarning haqqoniyligiga shaxsan mas'ul.

MAQOLAGA QUYIDAGILAR ILOVA QILINADI:

- Yo'llanma xati;
- Ekspert xulosasi.

E- mail: axborotnoma@samdu.uz

SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI ILMIY AXBOROTNOMASI

НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК

SCIENTIFIC REPORTS

Mas'ul kotib:

X. Sh. Tashpulatov

Musahhih:

M.M. Ro'ziboyev

Texnik muharrirlar:

S. D. Aronbayev

Dizayner sahifalovchilar:

A. I. Inatov

Muassis: Samarqand davlat universiteti

Manzil: 140104, Samarqand shahri, Universitet xiyoboni, 15.

Telefon: (8 366) 239-14-07, Faks: (8 366) 239-13-87

e-mail: axborotnoma@samdu.uz

SamDU «Ilmiy axborotnoma» jurnali tahririyati kompyuterida terildi.

Bosishga 20.06.2017 yilda ruxsat etildi. Qog'oz o'lchami A-4. Nashriyot hisob tabog'i 10,00.

Buyurtma raqami 100. Adadi 500 nusxa.

Manzil: 140104, Samarqand shahri, Universitet xiyoboni, 15.

SamDU bosmaxonasida chop etildi.